Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

На правах рукописи

МАКСИМЕНКО Александр Николаевич

Комбинаторные свойства многогранников труднорешаемых задач

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Ярославль – 2017

Оглавление

Введение

Объект исследования. Сформулируем *задачу комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией* следующим образом. Дано конечное множество E, каждому элементу e которого приписан некоторый вес $c_e \in \mathbb{R}$, и полиномиально вычислимая функция (предикат) $f\colon 2^E \to \{\text{ложь}, \text{истина}\}$. Подмножество $s \subseteq E$ называется *допустимым решением* этой задачи, если $f(s)$ истинно. Множество всех допустимых решений обозначим S, $S = \{s \subseteq E \mid f(s)\}$. Цель задачи состоит в отыскании *оптимального* решения $s \in S$ с максимальным (минимальным) суммарным весом элементов.

Как правило, наибольший интерес представляет *общая задача*, когда S фиксировано, а веса c_e выбираются произвольно. Таким образом, общая задача однозначно определяется множеством всех своих допустимых решений S, а веса c_e представляют собой набор входных данных *частной задачи*. Далее для обозначения общей задачи будем пользоваться обозначением множества её решений S.

Например, в задаче о кратчайшем пути множество E есть множество дорог, соединяющих города, веса c_e являются длинами дорог, а предикат f принимает значение «истина» для каждого множества дорог, представляющего собой маршрут из города A в город B. Другими классическими примерами являются задача поиска минимального остовного дерева, задача о назначениях, задача коммивояжера, задача о рюкзаке и многие другие.

Чаще всего такие задачи встречаются в экономике при оптимизации использования ресурсов, планировании транспортной инфраструктуры и производства, оптимизации доставки грузов, составлении расписаний и т. п. [37]. Более того, в настоящее время задачи комбинаторной оптимизации встречаются практически везде: секвенирование генома, классификация биологических видов, моделирование молекул, планирование коммуникационных и электрических сетей, позиционирование спутников, дизайн и производство сверхбольших интегральных схем (VLSI) и печатных плат, криптография, машинное обучение и т. д. [89].

Как известно [138], во многих случаях такие задачи полезно переводить на язык геометрии. А именно, для каждого допустимого решения $s \in S$ рассматривается его *характеристический вектор* $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^E$, координаты x_e, $e \in E$, которого полагаются равными единице для $e \in s$ и равны нулю для $e \notin s$. Далее множество всех характеристических векторов обозначаем X. Набор весов представляется в виде вектора $\boldsymbol{c} = (c_e) \in \mathbb{R}^E$. Цель задачи при такой интерпретации заключается в поиске характеристического вектора $\boldsymbol{x} \in X$, на котором целевая функция $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ достигает максимального (минимального) значения. Важно то, что экстремальные значения целевой функции не меняются при замене области определения X её выпуклой оболочкой $\mathrm{conv}(X)$. Таким образом, с каждой задачей комбинаторной оптимизации ассоциируется некоторый выпуклый многогранник $\mathrm{conv}(X)$, вершинами которого служит множество X. Многогранники, определяемые таким способом, принято называть комбинаторными.

С одной стороны, геометрическая интерпретация дает возможность при решении задачи пользоваться различными геометрическими инструментами, в частности, методами линейного программирования. Как показывает опыт многочисленных исследований в этой области, во многих случаях геометрический подход позволяет на порядки увеличивать скорость и качество решений [138].

С другой стороны, комбинаторная структура многогранника отражает структуру множества допустимых решений соответствующей задачи. Проиллюстрируем эту мысль с помощью понятия смежных решений. Допустимые решения s_1 и s_2 задачи S называются *смежными*, если для некоторого набора весов c_e оба эти решения являются оптимальными для соответствующей частной задачи и других оптимальных решений у неё нет. Смежность решений s_1 и s_2 означает, что при незначительном изменении входных данных частной задачи её оптимальное решение может меняться с s_1 на s_2 и обратно. То есть в алгоритме, решающем задачу, должна быть предусмотрена проверка, чувствительная к таким изменениям. Это, в свою очередь, накладывает ряд ограничений на структуру алгоритма, решающего общую задачу S, и, в итоге, может использоваться для теоретических оценок сложности задачи. При геометрическом подходе смежность решений интерпретируется как наличие ребра между соответствующими вершинами многогранника $\mathrm{conv}(X)$. Таким образом, граф многогранника задачи содержит в себе некоторую информацию о её структурной сложности. Продолжая эту мысль, вполне естественно обратиться к изучению свойств всей решетки граней (множества всех граней, упорядоченных по включению) многогранника задачи. Это и является основным объектом исследований настоящей работы.

Актуальность темы исследования. Широкий интерес к задачам комбинаторной оптимизации появился в 1950-х гг. Его возникновение было обусловлено тремя факторами: создание первых программируемых ЭВМ, создание концепции линейного программирования Канторовичем и Купмансом и разработка симплекс-метода Данцигом, а также накопленный опыт решения алгоритмических задач на графах. Именно в 1950-х гг. был разработан венгерский метод решения задачи о назначениях, алгоритм Форда-Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, несколько алгоритмов для нахождения кратчайших путей, заново открыты старые и предложены новые алгоритмы для нахождения минимального остовного дерева, а также их обобщение для нахождения в матроиде базы минимального веса [139]. В это же время, после разработки Данцигом симплекс-метода, были реализованы первые успешные попытки его применения к различным задачам комбинаторной оптимизации. В частности, с помощью техники линейного программирования был достигнут впечатляющий по тем временам прогресс в решении задачи коммивояжера [66].

Успешное применение симплекс-метода стало источником многочисленных размышлениий о его теоретической эффективности. Так, например, было замечено, что нижней оценкой числа шагов симплекс-метода может служить диаметр графа многогранника. В связи с этим в 1957 году была сформулирована знаменитая гипотеза Хирша о том, что диаметр графа многогранника не может быть больше разности между числом его гиперграней и размерностью. С тех пор этой гипотезе уделялось значительное внимание, но лишь в 2010 году Сантосу удалось построить пример 43-мерного многогранника с 86 гипергранями, диаметр которого больше, чем 43 [135]. Тем не менее, в общем виде[1] эта гипотеза до сих пор остается открытой и привлекает внимание видных ученых [148].

Одним из результатов автора настоящей работы является точное значение диаметра графа многогранника, двойственного к циклическому. В 1964 г. Кли [105] предположил, что этот диаметр равен $\lfloor n/2 \rfloor$, где n — число гиперграней. Но тремя годами позднее им же был найден контрпример [106]. С тех пор задача оставалась открытой.

Вместе с успехами и неудачами в решении отдельных задач в 1950–60-х гг. формировалось понятие эффективного алгоритма, окончательно сформулированное в работах Эдмондса [73] и Кобхэма [61]. В это же время Эдмондс [72] ввел понятие задачи, имеющей «хорошую характеризацию», что, по-сути, является определением того, что позднее было названо классом NP. Всё это послужило предпосылками к открытию в начале 1970-х гг. Куком [65], Карпом [102] и Левиным [20] NP-полных задач [14]. Примечательно то, что каждый из них предложил свой способ седе́ния задач. В частности, понятие аффинной сводимости, являющееся одним из основных результатов настоящей работы, по своей сути ближе всего к сводимости Левина.

Открытие NP-полных задач послужило мощным толчком для дальнейших исследований, в том числе свойств многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами. В 1978 году Пападимитриу [121] показал, что задача проверки смежности[2] двух произвольно взятых вершин многогранника задачи коммивояжера NP-полна, т. е. она также сложна, как и сама задача коммивояжера. Позднее аналогичные результаты для многогранников некоторых других NP-трудных задач были получены Чунгом, Гейст и Родин, Мацуи, Бондаренко и

[1] Верно ли, что диаметр графа ограничен сверху полиномом от числа гиперграней и размерности многогранника?

[2] Точнее, несмежности

Юровым, Альфаки и Мурти, Фиорини [28]. С другой стороны, в 1975 г. Хватал показал [60], что для многогранника независимых множеств эта задача полиномиально разрешима. Более того, в 1984 г. Грешнев показал [13], что граф многогранника задачи об m-вершинной клике полон, т. е. задача проверки смежности вершин для него тривиальна. В 1986 г. аналогичный результат для многогранника задачи о максимальном разрезе был независимо получен Белошевским [6] и Барахона и Маджуб [44].

В 1979 году Хачиян [33] построил полиномиальный алгоритм для решения задачи линейного программирования. Этот факт стал теоретическим подтверждением эффективности геометрического подхода к решению задач комбинаторной оптимизации, что увеличило популярность исследований свойств комбинаторных многогранников. В частности, большое внимание исследованию свойств графов многогранников уделено в монографии Емеличева, Ковалева и Кравцова [16].

В 1980-х гг. Бондаренко [9] при исследовании свойств графов многогранников задач обнаружил, что кликовое число[3] графа многогранника хорошо предсказывает алгоритмическую сложность соответствующей оптимизационной задачи. А именно, им было доказана сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников следующих NP-трудных задач: коммивояжер, максимальная клика и вершинное покрытие, 3-сочетание. С другой стороны, кликовые числа графов многогранников оказались полиномиальны для следующих полиномиально разрешимых задач: сортировка, минимальное остовное дерево, задача о кратчайшем пути. На основании этих фактов была разработана теория алгоритмов прямого типа, утверждающая, что кликовое число является нижней оценкой сложности в некотором «широком классе алгоритмов» [9]. Недавно Бондаренко и его ученики пополнили список оценок кликовых чисел несколькими новыми результатами [1, 11, 12]. На основе понятия аффинной сводимости, введенного автором настоящей работы, обнаруженные Бондаренко факты объясняются тем,

[3] В оригинале эта характеристика называется плотностью графа

что все исследованные многогранники содержат в качестве грани булев квадратичный многогранник, кликовое число графа которого экспоненциально.

С другой стороны, открытие Хачияном полиномиального алгоритма для задачи линейного программирования породило волну попыток поиска компактного линейного описания для многогранника задачи коммивояжера. Все эти попытки были направлены на использование идеи расширенного представления многогранника (сам термин появился позднее). *Расширенным представлением* многогранника P называется набор линейных ограничений, описывающих многогранник Q такой, что P является ортогональной проекцией Q. Сам многогранник Q называется *расширением* многогранника P. К тому времени уже были известны примеры, когда число линейных неравенств необходимых для описания многогранника экспоненциально, а для его расширения — полиномиально относительно длины входных данных задачи. Ни одна из таких попыток не привела к успеху и в 1988 году Яннакакис [145] показал, что такие попытки в принципе не имеют перспективы, если предлагаемые расширенные представления удовлетворяют некоторым естественным условиям симметрии. Там же была высказана гипотеза, что утверждение остается справедливым и без условий симметрии. Кроме того, Яннакакис показал, что число линейных неравенств в расширенном представлении многогранника не может быть меньше, чем число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника. Впоследствии минимальное число линейных неравенств, необходимых для описания расширения многогранника было названо *сложностью расширения многогранника.*

В конце 2000-х гг. гипотеза Яннакакиса вновь привлекла внимание исследователей и в 2012 г. Фиорини, Массар, Покутта, Тивари и де Вульф показали, что число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней для булева квадратичного многогранника экспоненциально [79]. Этот прорыв привлек внимание большого числа исследователей и в настоящее время в этой области ведется активная работа [78, 81, 98, 100, 130, 131].

Цель работы. Целью работы является анализ сложностных характеристик для решеток граней многогранников, ассоциированных с задачами комбинаторной оптимизации. Это подразумевает: 1) поиск численных оценок различных комбинаторных характеристик для наиболее востребованных семейств многогранников, 2) разработка методологии, упрощающей такого рода поиски, 3) анализ перспективности использования тех или иных характеристик в качестве оценок сложности соответствующих оптимизационных задач.

Методы исследования. При исследовании семейств комбинаторных многогранников интенсивно используется новое в данной области понятие аффинной сводимости. Также используются методы теории выпуклых многогранников, теории графов, линейного программирования, комбинаторного анализа.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Следующие результаты являются основными:

1. Найдено точное значение диаметра графа многогранника двойственного к циклическому.

2. Введено понятие аффинной сводимости семейств комбинаторных многогранников. Показано, что многогранники двойных покрытий аффинно сводятся к многогранникам следующих задач: рюкзак, коммивояжер, покрытие множества, кубический подграф, 3-выполнимость, назначения с линейным ограничением. Отсюда, в частности, следует NP-полнота проверки несмежности вершин для многогранников этих семейств.

3. Показано, что булевы квадратичные многогранники, многогранники квадратичного линейного упорядочивания и многогранники квадратичных назначений эквивалентны в смысле аффинной сводимости. В чуть более сложном классе эквивалентности лежат многогранники независимых множеств, многогранники упаковок и разбиений множества, многогранники задачи об n-назначениях для $n \geqslant 3$. В еще более сложный класс попадают многогранники двойных покрытий. В частности, булевы квадратичные

многогранники аффинно сводятся ко всем перечисленным в этом и предыдущем пунктах семействам многогранников. Таким образом показано, что различные комбинаторные характеристики сложности булевых квадратичных многогранников автоматически наследуются другими широко известными семействами многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами.

4. Показано, что для любого натурального k булевы квадратичные многогранники содержат k-смежные грани со сверхполиномиальным относительно размерности многогранника числом вершин.

5. Показано, что семейство многогранников любой задачи комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией аффинно сводится (в слабом смысле) к семейству булевых квадратичных многогранников. Таким образом, относительно слабой аффинной сводимости все перечисленные выше семейства многогранников образуют один класс эквивалентности.

6. Найдено компактное расширенное представление для циклических многогранников специального вида[4].

7. Для нескольких упоминаемых в литературе комбинаторных характеристик сложности многогранников построены примеры задач, сложность которых принципиально отличается от значений соответствующих характеристик.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследований сложности задач комбинаторной оптимизации и поиска новых эффективных алгоритмов их решения. Значительная часть результатов может быть также использована в исследованиях комбинаторных свойств выпуклых многогранников.

[4] Циклические многогранники обладают максимальным числом граней среди всех многогранников, имеющих ту же размерность и такое же число вершин.

Значение полученных результатов подтверждается их цитированием как отечественными, так и зарубежными специалистами (список не включает соавторов соискателя): А.В. Николаев, А.В. Селиверстов, Р.Ю. Симанчев, L.B. Beasley, H. Fawzi, Q. Feng, H. Klauck, T. Lee, S. Massar, P.A. Parrilo, M.K. Patra, V. Pilaud, K. Qi, J. Saunderson, D.O. Theis, H.R. Tiwary, K. Zhao.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Российской конференции «Дискретная оптимизация и исследование операци» (Алтай, 2010), на XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 2011), на Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2007, 2011), на Международной конференции «Дискретная геометрия» посвященной 100-летию А.Д. Александрова (Ярославль, 2012), на Международной топологической конференции «Александровские чтения» (Москва, 2012), на XXI Международном симпозиуме по математическому программированию (Берлин, 2012), на Международном симпозиуме по комбинаторной оптимизации (Оксфорд, 2012), на Международной конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013), на 26-й конференции Европейского отделения по комбинаторной оптимизации (2013, Париж), на семинаре Института математической оптимизации университета Отто фон Герике (Магдебург, 2013), на семинаре по дискретной математике в Свободном университете Берлина (2013), на 5-ом семинаре по комбинаторной оптимизации (Каржез, Франция, 2014), на 9-й международной конференции по теории графов и комбинаторике (Гренобль, Франция, 2014), на XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной 85-летию С.С. Рышкова (Тула, 2015), на 5-й Международной конференции по сетевому анализу (Нижний Новгород, 2015), на семинаре лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П.Г. Демидова, на Нижегородском семинаре по дискретной математике, на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. М.В. Ломоносова.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, n глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации P страниц, из них p_1 страницы текста, включая f рисунков. Библиография включает B наименований на p_2 страницах.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в N печатных работах, из них одна глава в монографии [10], одна глава в учебном пособии [5], 13 статей — в изданиях, рекомендованных ВАК [22–32, 47, 108], 2 статей в сборниках трудов конференций и 1 тезисов докладов. Подготовка одной публикации проводилась совместно с соавторами Ю.В. Богомоловым, К. Пашковичем и С. Фиорини, причем вклад диссертанта был определяющим. Диссертация продолжает исследования, начатые автором в его кандидатской диссертации [21].

Финансовая поддержка. Исследования, включенные в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 00-01-00662-а, 03-01-00822-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № 02.740.11.0207), лабораторией «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П. Г. Демидова (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0057), а также проектами № 477 и № 984 в рамках базовой части гос. задания на НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова (2014–2016 гг.).

Глава 1

Многогранники задач

В этой главе приводятся определения и перечисляются известные факты, служащие основой для изложения результатов диссертации в последующих главах. В разделах 1.1 и 1.2 вводятся необходимые понятия теории графов и теории выпуклых многогранников, соответственно. В разделе 1.3 уточняются понятия теории сложности задач и алгоритмов и, в частности, теории NP-полных задач. Общепринятая формулировка задачи комбинаторной оптимизации уточняется в разделе 1.4. Понятие многогранника (полиэдра) задачи вводится в разделе 1.5, там же приводятся многочисленные примеры. Раздел 1.6 посвящен обзору известных результатов по данной теме. В частности, в нем широко представлены результаты о свойствах графов многогранников задач, а также о расширенных формулировках многогранников. В разделе 1.7 формулируются общие вопросы, ответы на которые будут представлены в последующих главах.

1.1. Множества и графы

1.1.1. Множества

Для множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, будем пользоваться обозначением $[n]$. Целую часть действительного числа $x \in \mathbb{R}$ обозначаем $\lfloor x \rfloor$. Наименьшее целое, большее или равное $x \in \mathbb{R}$, обозначаем $\lceil x \rceil$.

Симметрической разностью двух множеств X и Y называется множество

$$X \vartriangle Y = (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y).$$

Свойство 1.1. *Симметрическая разность обладает следующими свойствами:*

1. $X \vartriangle Y = \varnothing \iff X = Y$.

2. *Результат выражения $X \triangle Y \triangle Z$ не зависит от перестановки множеств и порядка выполнения операций (коммутативность и ассоциативность).*

3. $X \triangle Y = Z \iff X \triangle Z = Y$.

Пусть E — некоторое конечное множество. Множество всех подмножеств множества E обозначается 2^E. *Характеристическим вектором* подмножества $T \in 2^E$ называется 0/1-вектор $v = \chi(T) \in \{0,1\}^E$ с координатами

$$v_e = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in T, \\ 0, & \text{если } e \in E \setminus T. \end{cases}$$

Если же элементы множества E пронумерованы, то характеристический вектор может быть определен как $v = \chi(T) \in \{0,1\}^{|E|}$ с координатами

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in T, \\ 0, & \text{если } e_i \in E \setminus T. \end{cases}$$

Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ — конечное множество и $S = \{S_1, \ldots, S_n\} \subseteq 2^E$. Рассмотрим произвольное подмножество $T \subseteq S$. Если каждый элемент $e_i \in E$ принадлежит не более (не менее) чем одному из элементов T, то T называется *упаковкой (покрытием) множества E*. Покрытие, являющееся одновременно упаковкой, называется *разбиением множества E*. *Матрицей инциденций* элементов множества E и элементов множества S называется матрица $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ с элементами

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in S_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1.1.2. Графы

Графом или *неориентированным графом* называется упорядоченная пара $G = (V, E)$, где V — конечное множество, а E — некоторое множество двухэлементных подмножеств множества V. Элементы множества V называются *вер-*

шинами графа G, а элементы множества E — его *ребрами*. Вершины v и u называются *концами* ребра $\{v, u\}$. Все рассматриваемые в диссертации графы не содержат кратных ребер (множество E не содержит одинаковых элементов) и петель (концы любого ребра $e \in E$ являются разными вершинами). Граф называется *полным,* если каждая пара его вершин образует ребро этого графа. Полный граф на n вершинах обозначается K_n.

Вершины v и u графа G называются *смежными* в G, если $\{v, u\} \in E$. Если же $\{v, u\} \notin E$, то вершины v и u называются *несмежными. Степенью* вершины $v \in G$ называется число смежных с ней вершин. Вершина с нулевой степенью называется *изолированной.* Граф, степень каждой вершины которого равна трем, называется *кубическим.* Подмножество вершин $V' \subseteq V$ называется *кликой* в графе G, если любые две вершины из V' смежны. Максимальный размер (мощность) клики в G называется *кликовым числом* графа G и обозначается $\omega(G)$. Подмножество вершин $V' \subseteq V$ называется *независимым* в графе G, если любые две вершины из V' несмежны.

Пусть $G' = (V', E')$ — еще один граф. Графы G и G' называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное отображение $f : V \to V'$ такое, что $\{v, u\} \in E$ тогда и только тогда, когда $\{f(v), f(u)\} \in E'$. Граф G' называется *подграфом* графа G, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Далее, для краткости, любой граф G' изоморфный подграфу графа G будем называть подграфом графа G. Подграф G' графа G называется *порожденным*, если $\forall v, u \in V'$ из $\{v, u\} \in E$ следует $\{v, u\} \in E'$.

Путем в графе G называется множество ребер вида

$$P = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\},$$

где v_1, v_2, $\ldots$, v_k — попарно различные вершины, $k \geqslant 2$. В таком случае будем говорить, что путь P *соединяет* вершины v_1 и v_k и называть его *v_1-v_k путем*. Граф называется *свя́зным*, если любые две его вершины соединяет некоторый путь в этом графе. Путь в графе G называется *гамильтоновым*, если каждая вершина графа принадлежит хотя бы одному его ребру. *Расстоянием* между вершинами v и u в графе G называется наименьшее число ребер в соединяющем их пути, если же такой путь не существует, то расстояние полагается равным $+\infty$. *Диаметром* $\mathrm{diam}(G)$ графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами (выбор осуществляется среди всех пар вершин).

Циклом в графе G называется множество ребер вида

$$C = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\}\},$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — попарно различные вершины, $k \geqslant 3$. Цикл в графе называется *гамильтоновым*, если каждая вершина графа принадлежит ровно двум ребрам этого цикла. Если в графе есть гамильтонов цикл, то и сам граф называется *гамильтоновым.* Граф без циклов называется *лесом*, а связный лес — *деревом*.

Вершина v и ребро e называются *инцидентными*, если $v \in e$. *Матрицей инциденций* вершин-ребер графа $G = (V, E)$ называется матрица $M \in \{0,1\}^{n\times k}$, $n = |V|$, $k = |E|$, элементы которой определяются следующим образом:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in e_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем говорить, что подмножество ребер $E' \subseteq E$ *покрывает* вершины V, если каждая вершина $v \in V$ инцидентна хотя бы одному ребру из E'. Аналогично, подмножество вершин $V' \subseteq V$ *покрывает* ребра E, если каждое ребро $e \in E$ инцидентно хотя бы одной вершине из V'.

Два ребра в графе называются *смежными*, если они содержат общую вершину, в противном случае они называются *несмежными.* Множество попарно несмежных ребер графа называется *паросочетанием*. Паросочетание, покрывающее все вершины графа, называется *совершенным.* Таким образом, совершенное паросочетание может быть только у графов с четным числом вершин.

Разрезом в графе $G = (V, E)$ называется множество ребер вида $\delta(U) = \{\{u, v\} \in E \mid u \in U,\ v \in V \setminus U\}$, где $U \subseteq V$. Из определения следует, что $\delta(U) =$

$\delta(V \setminus U)$. Разрез $\delta(U)$ называется *s-t разрезом*, если $s \in U$ и $t \in V \setminus U$. *Разбиением множества* X называется набор его попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с X. Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество его вершин V можно разбить на две *доли* U и $V \setminus U$ так, что $\delta(U) = E$. Двудольный граф называется *полным двудольным*, если $\{u, v\} \in E$ для любых $u \in U$ и $v \in V \setminus U$.

Граф $G = (V, E)$ называется *реберно-взвешенным*, если на множестве его ребер E задана функция весов $f : E \to \mathbb{R}$. Число $f(e)$ называется *весом* ребра $e \in E$. *Весом подмножества* $E' \subseteq E$ или *подграфа* $G' = (V', E')$ реберно-взвешенного графа G называется сумма весов входящих в него ребер. Граф G называется *вершинно-взвешенным*, если задана функция $g : V \to \mathbb{R}$. В таком случае число $g(v)$ называется *весом* вершины $v \in V$, а *весом подмножества* $V' \subseteq V$ называется сумма весов входящих в него вершин.

1.1.3. Орграфы

Ориентированным графом или *орграфом* называется упорядоченная пара $D = (V, A)$, где V — конечное множество, называемое *множеством вершин*, A — некоторое множество упорядоченных пар вершин, называемых *дугами*. Также, как и для графов, далее предполагаем, что в A нет кратных дуг и петель. Большинство перечисленных выше понятий для графов переносится (иногда с небольшими уточнениями) на орграфы.

Пусть $(v, u) \in A$. Вершина v называется *началом* дуги (v, u), а вершина u — ее *концом*. Каждая из этих вершин и дуга (v, u) называются *инцидентными* друг другу. Орграф будем называть *полным,* если каждая упорядоченная пара его вершин образует дугу этого графа (то есть $|A| = |V|(|V| - 1)$). Орграф называется *турниром,* если для любой (неупорядоченной) пары вершин $u, v \in V$ ровно одна из дуг (u, v) и (v, u) принадлежит A.

Орпутем или просто *путем* в орграфе D будем называть множество дуг вида

$$P = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\},$$

где v_1, v_2, …, v_k — попарно различные вершины, $k \geqslant 2$. Вершины v_1 и v_k называются, соответственно, *началом* и *концом* пути P, а вершины v_2, …, v_k — его *внутренними вершинами*.

Контуром в орграфе D называется множество дуг вида

$$C = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\},$$

где v_1, v_2, …, v_k — попарно различные вершины, $k \geqslant 2$. Орграф, не содержащий контуров, называется *ациклическим*.

Разрезом в орграфе $D = (V, A)$ называется множество дуг вида $\delta^+(U) = \{(u, v) \in A \mid u \in U,\ v \in V \setminus U\}$, где $U \subseteq V$. Разрез $\delta^+(U)$ называется *s-t разрезом*, если $s \in U$ и $t \in V \setminus U$.

Орграф $D = (V, A)$ называется *транзитивным*, если из условий $(v, u) \in A$ и $(u, w) \in A$ следует $(v, w) \in A$. Так как мы не рассматриваем графы с петлями, то из транзитивности следует ацикличность. Таким образом, множество дуг транзитивного графа задает частичный порядок на множестве вершин графа и, наоборот, каждый частичный порядок может быть представлен множеством дуг некоторого транзитивного графа. По аналогии, транзитивный турнир задает линейный порядок на множестве вершин и, кроме того, каждый линейный порядок однозначно определяется некоторым транзитивным турниром. Поэтому далее, говоря о частичном (линейном) порядке мы часто будем подразумевать соответствующий транзитивный орграф (турнир).

1.2. Многогранники

В этом разделе перечисляются некоторые основополагающие понятия и факты теории выпуклых многогранников. При их изложении будем придерживаться терминологии монографий [16] и [34].

Под $\mathbb{R}^d$ будем понимать пространство всех вектор-столбцов длины d с вещественными координатами. Сами вектор-столбцы из $\mathbb{R}^d$ будем выделять полужирным шрифтом: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$. Вектор-столбцы, составленные из одних нулей или же одних единиц, будем обозначать $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ соответственно (их размерность ясна из контекста везде, где они будут использоваться). Единичные векторы, образующие канонический базис в $\mathbb{R}^d$, обозначаем $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_d}$ (таким образом, $\sum_{i\in[d]} \boldsymbol{e_i} = \mathbf{1}$). Следуя общепринятой практике [34], вектор-столбцы часто будут называться точками.

Гиперплоскостью в $\mathbb{R}^d$ называется множество

$$H(\boldsymbol{a}, b) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\right\},$$

где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ — вектор нормали гиперплоскости, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, а число $b \in \mathbb{R}$ определяет величину смещения гиперплоскости относительно начала координат, $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ — матричное произведение вектор-строки $\boldsymbol{a}^T$ на вектор-столбец $\boldsymbol{x}$.

Линейная комбинация $\sum_{i\in[n]} \lambda_i\boldsymbol{x_i}$ точек $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ из $\mathbb{R}^d$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in [n]$, называется *аффинной комбинацией*, если $\sum_{i\in[n]} \lambda_i = 1$. *Аффинной оболочкой* $\operatorname{aff}(X)$ непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}^d$ называется множество всех аффинных комбинаций каждого набора точек из X. Множество точек называется *аффинно независимым*, если ни одна точка этого множества не принадлежит аффинной оболочке остальных его точек. *Аффинной размерностью* множества X называется мощность аффинно независимого подмножества $S \subseteq X$ минус один, при условии $\operatorname{aff}(S) = \operatorname{aff}(X)$. В частности, аффинная размерность пустого множества равна -1. *Размерность* $\dim(X)$ множества X полагаем равной его аффинной размерности. (Так как далее рассматриваются только выпуклые множества и, в частности, выпуклые оболочки конечных множеств, то противоречия с другими общепринятыми определениями размерности не возникает.) Множество $X \in \mathbb{R}^d$ называется *аффинным подпространством*, если вместе с любыми своими двумя различными точками оно содержит все их аффинные комбинации. Гиперплоскость является примером аффинного подпространства. Более того, всякое аффинное подпространство размерности $d - k$ в $\mathbb{R}^d$ может быть представлено как пересечение k гиперплоскостей [16].

Комбинация $\sum_{i\in[n]} \lambda_i \boldsymbol{x_i}$ точек $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ из $\mathbb{R}^d$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in [n]$, называется *конической комбинацией*. *Конической оболочкой* конечного множества $X = \{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\} \subset \mathbb{R}^d$ называется множество всех конических комбинаций его точек:

$$\operatorname{cone}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x_i} \;\middle|\; \lambda_i \geqslant 0 \right\}.$$

Примером может служить положительный ортант

$$\mathbb{R}^d_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\} = \operatorname{cone}\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_d}\}.$$

Аффинная комбинация $\sum_{i\in[n]} \lambda_i \boldsymbol{x_i}$ точек $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ из $\mathbb{R}^d$ называется *выпуклой*, если $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in [n]$. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ оно содержит все их выпуклые комбинации. Простым примером выпуклого множества может служить *замкнутое полупространство*

$$H^+(\boldsymbol{a}, b) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geqslant b\},$$

определяемое гиперплоскостью $H(\boldsymbol{a}, b)$. Точка выпуклого множества называется *крайней*, если она не является выпуклой комбинацией никаких двух других точек этого множества. Множество всех крайних точек множества X обозначается $\operatorname{ext}(X)$. *Выпуклой оболочкой* конечного множества $X = \{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\} \subset \mathbb{R}^d$ называется множество всех выпуклых комбинаций его точек:

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x_i} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Выпуклая оболочка (произвольного) множества $X \subseteq \mathbb{R}^d$ представляет собой объединение всех выпуклых оболочек конечных наборов точек из X.

С понятием выпуклой оболочки тесно связано понятие *суммы Минковского* двух непустых множеств $X \subseteq \mathbb{R}^d$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

В частности, для любых X и Y

$$\mathrm{conv}(X + Y) = \mathrm{conv}(X) + \mathrm{conv}(Y).$$

Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного множества точек. Так как далее речь пойдет только о выпуклых многогранниках, слово выпуклый будет опускаться. *Полиэдром* называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств, или, другими словами, множество решений системы линейных неравенств $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 1.2 (Вейль–Минковский). *Множество P является многогранником тогда и только тогда, когда P — ограниченный полиэдр.*

Таким образом, каждый многогранник может быть описан двумя альтернативными способами:

1. Как выпуклая оболочка множества своих вершин. В этом случае множество вершин называется *V-описанием* многогранника.

2. Как пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Тогда соответствующая система линейных неравенств (и, возможно, уравнений) называется его *H-описанием.*

То же самое верно и в отношении полиэдра при следующем уточнении [34]. *V-описанием полиэдра P* называется совокупность конечного множества точек X и конечного множества векторов Y таких, что

$$P = \mathrm{conv}(X) + \mathrm{cone}(Y).$$

H-описание часто называется *линейным*, *фасетным* или *внешним* описанием [17, 137]. В свою очередь, V-описание называют *вершинным* или *внутренним* описанием. Задача нахождения H-описания многогранника (полиэдра) по его V-описанию называется *задачей нахождения выпуклой оболочки*. Она эквивалентна (двойственна) задаче построения V-описания по H-описанию (то есть нахождения вершин) и поэтому обе эти задачи называются *задачей построения двойственного описания многогранника*. Эта задача является алгоритмически сложной [104]. Обстоятельный обзор известных в настоящее время способов её решения можно найти в диссертации [2].

Следуя традициям [16, 34, 90], выпуклый многогранник размерности d будем называть *d-многогранником.* Простейшим примером d-многогранника является *d-симплекс*, представляющий собой выпуклую оболочку $d + 1$ аффинно независимых точек в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant d$.

Будем говорить, что неравенство $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geqslant b$ *выполнено* для множества $X \subseteq \mathbb{R}^d$, если оно выполнено для всех $\boldsymbol{x} \in X$. *Гранью* многогранника P называется любое множество вида

$$F = \{\boldsymbol{x} \in P \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\},$$

где неравенство $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geqslant b$ выполнено для P. Из того, что $\boldsymbol{a}$ может быть равным $\mathbf{0}$, следует, что пустое множество и сам многогранник P являются гранями P, они называются *несобственными* гранями P. Остальные грани называются *собственными* [16].

Если гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b)$ имеет хотя бы одну общую точку с многогранником $P \subseteq \mathbb{R}^d$ и при этом P целиком лежит в полупространстве $H^+(\boldsymbol{a}, b)$, то гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b)$ и полупространство $H^+(\boldsymbol{a}, b)$ называются *опорными* к P. Таким образом, каждая собственная грань многогранника есть пересечение многогранника с некоторой его опорной гиперплоскостью.

Размерностью $\dim(F)$ грани F называется размерность минимального содержащего её аффинного подпространства. Грани размерности k называются *k-гранями*, 0-грани — *вершинами* многогранника, 1-грани — его *ребрами*. Несложно доказывается, что множество крайних точек многогранника совпадает с множеством его вершин. $(d - 1)$-грани d-многогранника называются *гипергранями*. Для $(d - 2)$-граней в русскоязычных публикациях нет устойчивого термина, их называют гиперребрами [34], гребнями [3], риджами [15] (от англ. ridge). Мы будем придерживаться названия *ридж*.

В частости, число вершин и гиперграней d-симплекса равно $d+1$, а число его k-граней, $k \in [d-2]$, равно $\binom{d+1}{k+1}$. Таким образом, число всех граней d-симплекса равно 2^{d+1}.

Графом или *1-скелетом* многогранника называется множество его вершин и ребер (точнее, пар вершин, образующих ребра многогранника). *Ридж-графом* многогранника будем называть множество его гиперграней и риджей (точнее, пар гиперграней, образующих риджи).

Для граней многогранника справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1.3 ([34]). *Пусть P — многогранник, а $V = \operatorname{ext}(P)$ — множество его вершин. Тогда:*

1. $P = \operatorname{conv}(V)$.
2. *Если F — некоторая грань многогранника P, то F — тоже многогранник и $\operatorname{ext}(F) = F \cap V$.*
3. *Любое пересечение граней многогранника P — снова грань P.*
4. *Грань грани многогранника также является его гранью.*

Многогранник называется *симплициальным*, если все его гиперграни являются симплексами. Многогранник называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно d гиперграням, где d — размерность многогранника. Симплексы и выпуклые многоугольники являются примерами простых и, одновременно, симплициальных многогранников. Примером простого многогранника является d-мерный *0/1-гиперкуб* (или, короче, *d-куб*) [34]:

$$\mathrm{Cube}_d = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i \in [d] \right\} = \operatorname{conv} \left\{ \{0,1\}^d \right\}.$$

Примером симплициального многогранника может служить d-мерный *кросспо-*

литоп, в русскоязычной литературе называемый *ортаэдром* [34]:

$$\mathrm{Cross}_d = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \sum_{i \in [d]} |x_i| \leqslant 1 \right\} = \operatorname{conv}\left\{ \boldsymbol{e_1}, -\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_d}, -\boldsymbol{e_d} \right\}.$$

Вектор, все координаты которого принадлежат множеству $\{0, 1\}$, называется *0/1-вектором*. Многогранник, все вершины которого являются 0/1-векторами, называется *0/1-многогранником*. Другими словами, 0/1-многогранник представляет собой выпуклую оболочку некоторого подмножества вершин куба Cube_d. Заметим также, что $\operatorname{ext} \operatorname{conv}(X) = X$ для любого $X \subseteq \{0, 1\}^d$.

Будем говорить, что множество из $n \geqslant d + 1$ точек в $\mathbb{R}^d$ находится *в общем положении*, если никакие $d + 1$ из них не лежат в одной гиперплоскости [34]. Система линейных неравенств $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant d + 1$, называется *общей*, если для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ одновременно обращаются в равенство не более чем d из этих неравенств.

Классы симплициальных и простых многогранников важны в следующем смысле [34]. Выпуклая оболочка множества точек, находящихся в общем положении, является симплициальным многогранником. Аналогично, система линейных неравенств общего вида, множество решений которой ограничено, определяет простой многогранник. Соответственно, любой многогранник может быть преобразован в симплициальный за счет небольшого шевеления (пертурбации) его вершин. Аналогично, любой ограниченный полиэдр может быть преобразован в простой многогранник за счет небольшого изменения (пертурбации) коэффициентов системы описывающих его линейных неравенств.

Многогранник называется *k-смежностным* ($k \in \mathbb{N}$), если любые k его вершин являются множеством вершин некоторой собственной грани этого многогранника. В частности, любой многогранник является 1-смежностным, а d-симплекс является k-смежностным при $k \in [d]$.

Наиболее известными примерами k-смежностных многогранников, отличающихся от симплекса, являются циклические многогранники [16, 34, 90]. Множество вершин циклического многогранника определяется следующим образом:

$$C_d(T) = \{(t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d \mid t \in T\},$$

где множество $T \subset \mathbb{R}$ — конечно. (Заметим, что $C_d(T)$ является симплексом при $|T| \leqslant d+1$.) Известно, что эти многогранники симплициальны, $\lfloor d/2 \rfloor$-смежностны (то есть имеют максимальную степень смежности среди d-многогранников, не являющихся симплексами) и обладают наибольшим числом граней (каждой размерности) среди всех d-многогранников с тем же числом вершин $n = |T|$.

Ниже мы будем использовать для $C_d(T)$ немного иное обозначение в тех случаях, когда множество T имеет специальный вид. Например, если T — множество целых чисел отрезка $[a, b]$, то $C_d(T)$ будет заменяться более информативным $C_d(a, b)$.

Одной из самых простых и вместе с тем весьма полезных операций над многогранниками является операция образования пирамиды. Пусть P — некоторый d-многогранник, вложенный в пространство $\mathbb{R}^n$, $n > d$, и пусть точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ не принадлежит аффинной оболочке этого многогранника. *Пирамидой* над P называется выпуклая оболочка $\operatorname{pyr}(P) = \operatorname{conv}\{P \cup \boldsymbol{x}\}$. Многогранник P называется *основанием* пирамиды $\operatorname{pyr}(P)$, а точка $\boldsymbol{x}$ — ее *апексом* (или *вершиной пирамиды*). Гранями пирамиды $\operatorname{pyr}(P)$ являются все грани ее основания P, а также все пирамиды над его гранями. В частности, число гиперграней пирамиды ровно на единицу больше числа гиперграней основания, то же верно и для числа вершин. Пирамида над симплициальным многогранником также является симплициальным многогранником. Пирамида над k-смежностным многогранником тоже k-смежностна.

1.2.1. Решетка граней и матрица инциденций

Решеткой граней многогранника P называется множество $L(P)$ всех его граней, частично упорядоченное по включению.

В качестве примера рассмотрим 4-мерный выпуклый многогранник P, являющийся пирамидой, основание которой — 3-мерный куб без одной вершины (см. рис. 1.1). P имеет 8 вершин, 8 гиперграней (одна из них изображена на рис. 1.1), 19 ребер и 19 риджей.

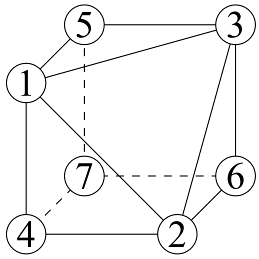

Рис. 1.1. 3-мерный куб без одной вершины

Решетку граней удобно визуализировать посредством диаграммы Хассе, представляющей собой нарисованный на плоскости граф, вершины которого символизируют грани многогранника. Ребрами на диаграмме Хассе соединены те, и только те пары граней f и g, для которых одновременно выполняются следующие условия:

1) f является гранью g (в этом случае g расположена на диаграмме выше f);
2) не существует грани h, отличающейся от f и g, и такой, что f — грань h и h — грань g.

Решетка граней пирамиды над 3-мерным кубом без вершины изображена на рис. 1.2.

Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если их решетки граней изоморфны. Если два многогранника комбинаторно эквивалентны, то говорят, что они являются многогранниками одного *комбинаторного типа*. Свойства и числовые характеристики многогранника, однозначно определяемые его решеткой граней, будем называть *комбинаторными*. В частности, размерность многогранника, число его вершин и число гиперграней являются комбинаторными характеристиками, а симплициальность, простота и k-смежностность — комбинаторными свойствами.

Два многогранника называются *двойственными* друг к другу, если их ре-

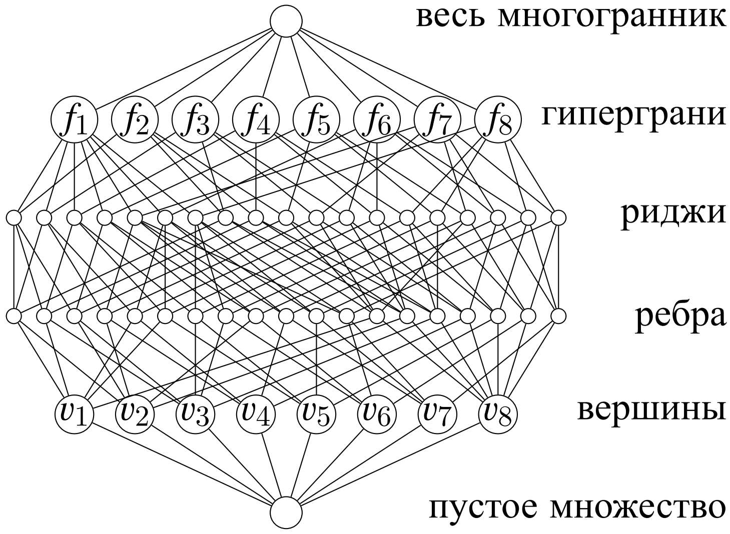

Рис. 1.2. Диаграмма Хассе решетки граней пирамиды над 3-мерным кубом без вершины

шетки граней антиизоморфны. В частности, если P и Q двойственны, то вершины P соответствуют гиперграням Q, ребра P — риджам Q и т. д. Примером двойственных многогранников могут служить d-куб и d-мерный ортаэдр. Многогранник, изображенный на рис. 1.1, двойственен самому себе. Еще одним примером двойственного самому себе многогранника является d-симплекс. Вообще, многогранник, двойственный симплициальному, является простым, а многогранник, двойственный простому, — симплициальным [16].

Пусть d-многогранник P задан в виде $P = \operatorname{conv}(V)$ и $\mathbf{0}$ является внутренней точкой этого многогранника. (Выполнения последнего условия всегда можно добиться за счет операции смещения.) *Полярой* к P называется многогранник

$$P^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x}^T V \leqslant \mathbf{1}^T\}.$$

Поляра P^* является примером двойственного к P многогранника [16, 34].

Пусть P — некоторый многогранник, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество его вершин, а $F = \{F_1, \dots, F_k\}$ — множество его гиперграней. Тогда *матрица инциденций вершин-гиперграней* $M = (m_{ij}) \in \{0,1\}^{n \times k}$ многогранника P определяется следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in F_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица M^T называется *матрицей инциденций гиперграней-вершин.*

Решетка граней многогранника однозначно восстанавливается по его матрице инциденций вершин-гиперграней. (Один из наиболее эффективных алгоритмов решения этой задачи описан в [99].) Так, например, диаграмма Хассе на рис. 1.2 восстанавливается по матрице инциденций

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Таким образом, все комбинаторные свойства многогранника однозначно определяются по его матрице инциденций, а любые перестановки строк и/или столбцов этой матрицы не меняют этих свойств. Легко заметить, что матрицы инциденций вершин-гиперграней двойственных многогранников преобразуются друг в друга операцией транспонирования и, возможно, перестановкой строк и/или столбцов. Например, симметрия относительно побочной (дополнительной) диагонали в матрице (1.1) говорит о двойственности соответствующего многогранника самому себе.

1.2.2. Аффинное и проективное преобразования многогранников

Отображение вида $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x_0}$, где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$, называется *аффинным*. Частным случаем аффинного преобразования является *ортогональная проекция* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0)$, $n > d$. Два многогранника $P \subseteq \mathbb{R}^d$ и $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ называются *аффинно эквивалентными*, если существует взаимно-однозначное аффинное отображение $\alpha\colon P \to Q$. Из аффинной эквивалентности многогранников следует их комбинаторная эквивалентность. Любые два d-симплекса аффинно эквивалентны. Поэтому далее вместо произвольного d-симплекса будет рассматриваться его канонический вариант

$$\Delta_d = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \right\} = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_{d+1}}\}.$$

Нетрудно доказать, что любой многогранник, имеющий n вершин, является аффинным образом симплекса Δ_{n-1}.

Проективным преобразованием называется дробно-линейное отображение вида

$$\tau(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} + b},$$

где α — аффинное отображение, размерности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$ одинаковы, $b \in \mathbb{R}$.

Проективные преобразования обладают следующими полезными свойствами [34]:

1. Пусть P и Q — многогранники. Если проективное преобразование $\tau\colon P \to Q$ взаимно-однозначно, то многогранники P и Q комбинаторно эквивалентны.

2. Пусть многогранник Q является аффинным образом некоторой грани многогранника P. Тогда существует проективное преобразование $\tau\colon P \to Q$.

1.3. Сложность задач и алгоритмов

Предполагается, что читатель знаком с основами теории сложности вообще [38, 87] и теории NP-полных задач в частности [14]. Тем не менее, чтобы избежать двусмысленности в дальнейшем, перечислим некоторые ключевые понятия и соглашения.

Для асимптотических сравнений пары функций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ и $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ используются стандартные обозначения:

$f = O(g)$, если найдутся $c > 0$ и $n^* \in \mathbb{N}$ такие, что $f(n) \leqslant c \cdot g(n)\ \forall n \geqslant n^*$.

$f = \Omega(g)$, если найдутся $c > 0$ и $n^* \in \mathbb{N}$, что $f(n) \geqslant c \cdot g(n)\ \forall n \geqslant n^*$.

$f = \Theta(g)$, если $f = O(g)$ и $f = \Omega(g)$.

$f = o(g)$, если $\forall c > 0$ найдется $N_c \in \mathbb{N}$, что $f(n) < c \cdot g(n)\ \forall n \geqslant N_c$.

Функцию f будем называть *полиномиальной* и обозначать $f(n) = \mathrm{poly}(n)$, если найдется полином $p = p(n)$ такой, что $f(n) \leqslant p(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Функцию f будем называть *сверхполиномиальной*, если $f = \Omega(p)$ для любого полинома p. Так, например, функция $f(n) = a^{\ln n}$, где $a > 0$, является полиномиальной, а функция $g(n) = a^{\ln^{1+\varepsilon} n}$ при $a > 1$ и $\varepsilon > 0$ — сверхполиномиальной. Значительная часть современной теории сложности опирается на фундаментальное различие между полиномиальными и сверхполиномиальными функциями. Точнее, речь, как правило, идет об отличии между полиномиальными функциями и функциями вида $f(n) = \Omega\left(a^{n^\varepsilon}\right)$, где $a > 1$, $\varepsilon > 0$. Последние иногда называются *экспоненциальными* [10].

Входные данные вычислительной задачи обычно представляют собой специальным образом упорядоченный набор чисел и меток (последние всегда можно заменить натуральными числами). Мы традиционно предполагаем, что входные данные кодируются в двоичную последовательность некоторым естественным образом. В частности, запись натурального числа n занимает $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ бит. Обозначаем: $\mathrm{size}(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$. Соответственно, $\mathrm{size}(k) = \mathrm{size}(|k|) + 1$ для целого числа k. Рациональное число p представляется парой взаимно простых чисел k (числитель) и n (знаменатель), где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. В теоретических исследованиях длина входных данных задачи обычно полагается равной сумме длин соответствующих чисел. На практике же, чаще всего, длина входных данных пропорциональна произведению количества чисел на длину записи наибольшего из них. Тем не менее, длина каждой из этих кодировок полиномиальна (в данном случае, не более, чем квадратична) относительно длины другой.

Временно́й сложностью алгоритма называется функция, которая каждому натуральному n ставит в соответствие максимальное время (число операций), затрачиваемое алгоритмом для обработки входных данных длины n [14, 87].

Всюду далее под *сложностью алгоритма* будем понимать его временну́ю сложность.

Под (временно́й) *сложностью задачи* будем понимать сложность (асимптотически) наиболее быстро решающего эту задачу алгоритма. (В настоящей работе рассматриваются только разрешимые задачи.) Строго говоря, сложность задачи существенно зависит от модели вычислений. С другой стороны, все реальные вычислительные устройства эквивалентны в смысле тезиса Кобхэма–Эдмондса [87, с. 33], который часто называют тезисом Чёрча–Тьюринга в сильной форме [38, с. 26].

Тезис Кобхэма–Эдмондса. *Любая физически реализуемая вычислительная модель может быть просимулирована (одноленточной) машиной Тьюринга с (не более чем) полиномиальным увеличением времени работы.*

В частности, этот тезис утверждает, что принадлежность задачи к классу P (полиномиально разрешимых задач) не зависит от выбора вычислительной модели.

Справедливости ради заметим, что, теоретически, с помощью квантовых вычислений можно решать задачи, принадлежность которых к классу P в настоящее время не доказана. Тем не менее, возможность физической реализации квантовых компьютеров (точнее, возможность их масштабирования) пока остается под вопросом (перспективы этого направления хорошо описаны в [35]).

Классическое понятие полиномиальной сводимости может определяться по разному в зависимости от типа решаемых задач [14, 87]. Чтобы избежать излишних (с точки зрения основных результатов диссертации) подробностей, везде далее, если не оговорено иное, под полиномиальной сводимостью мы будем понимать полиномиальную сводимость по Тьюрингу (иногда она называется сводимостью по Куку). Приведем наиболее короткое определение этого типа сводимости, предполагающее, что читатель знаком с понятием оракульной машины Тьюринга [14, 87]:

Определение 1.1 (полиномиальная сводимость). Задача Π *полиномиально сводится* к задаче Π', если существует оракульная машина M такая, что для любой функции f, решающей задачу Π', машина M с оракулом f решает задачу Π за полиномиальное время. (Обращение к оракулу f выполняется за единицу времени.)

Мы не приводим здесь определения классов NP и co-NP, а также понятия NP-полной (и co-NP-полной) задачи [14], так как эти термины являются устоявшимся и понимаются всеми специалистами одинаково (в отличие, например, от понятия NP-трудной задачи). В качестве примера приведем формулировку наиболее известной NP-полной задачи о выполнимости булевой формулы.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — множество булевых переменных. Каждая булева переменная может принимать лишь одно из двух значений: $1 \stackrel{\text{def}}{=}$ «истина» или $0 \stackrel{\text{def}}{=}$ «ложь». Если $u \in U$, то u и $\bar{u} = 1 - u$ называются *литералами*. Множество литералов, например $\{u_2, \bar{u}_4, u_5\}$, называется *дизъюнкцией* над U и обычно обозначается $u_2 \vee \bar{u}_4 \vee u_5$. Говорят, что дизъюнкция *выполнена* при некотором наборе значений переменных, если хотя бы один из входящих в нее литералов равен 1. Пусть $C = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ — некоторый набор дизъюнкций, далее называемый *конъюнкцией*. Конъюнкция C называется *выполнимой*, если существует набор значений переменных такой, что выполненными оказываются все дизъюнкции из C.

Задача о выполнимости. Дано множество переменных U и конъюнкция C. Верно ли, что C выполнима?

В рамках теории NP-задач задачей называется множество всех входных данных (в данном случае конъюнкций) для которых ответ на вопрос задачи положителен. Это множество обычно называется языком, а входные данные отдельно взятой индивидуальной задачи — словом [14]. Исторически задача о выполнимости оказалась первой NP-полной задачей [65]. *Задача о k-выполнимости* представляет собой частный случай задачи о выполнимости, когда каждая дизъюнкция содержит ровно k литералов. Так как задача о выполнимости полиномиально сводится [102] к задаче о k-выполнимости при $k \geqslant 3$, то последняя также является NP-полной.

NP-трудными задачами будем называть те, к которым полиномиально сводятся NP-полные задачи. Заметим, что некоторые исследователи при определении NP-трудной задачи предпочитают использовать сводимость по Карпу. В этом случае, в частности, классы NP-трудных и co-NP-трудных задач отличаются друг от друга при условии NP $\neq$ co-NP. Мы же далее будем предполагать использование полиномиальной сводимости по Тьюрингу. При таком определении co-NP-полные задачи являются NP-трудными.

Далее нам также потребуется определение класса D^p [124]:

$$D^p = \{L_1 \cap L_2 \mid L_1 \in \mathrm{NP},\ L_2 \in \text{co-NP}\}.$$

В частности, NP и co-NP являются подмножествами D^p, откуда следует, что все D^p-полные задачи являются NP-трудными. В качестве примера приведем две D^p-полные задачи [124]:

1. Выполнимость–невыполнимость. Даны две булевы формулы. Верно ли, что первая выполнима, а вторая — не выполнима.

2. Точная клика. Дан граф G и число $k \in \mathbb{N}$. Верно ли, что k является кликовым числом этого графа.

1.4. Задачи дискретной оптимизации

Задача дискретной оптимизации определяется дискретным множеством *допустимых решений* X и *целевой функцией* $f\colon X \to \mathbb{R}$. Цель задачи заключается в отыскании *оптимального* решения $x \in X$, на котором целевая функция f достигает своего максимума (минимума). Задача минимизации всегда может быть преобразована в задачу максимизации (и наоборот) за счет умножения значений целевой функции на -1. Поэтому далее, если не оговорено иное, под задачей оптимизации будет подразумеваться задача нахождения максимума.

Наибольший интерес представляют задачи, в которых множество допустимых решений X задается неявно — как множество объектов, удовлетворяющих некоторому набору условий. Условия могут быть простыми. Например, в X входят все натуральные числа, не превосходящие 1000. А могут быть и сложными. Например, X состоит из (успешно компилируемых) программ на языке C длиной не более 1 Кбайт.

С учетом сделанного замечания задача дискретной оптимизации представляет собой четверку:

- *пространство решений* U,
- *предикат допустимости* $g\colon U \to \{\text{ложь}, \text{истина}\}$, определяющий множество допустимых решений $X = \{x \in U \mid g(x)\}$,
- целевая функция $f\colon U \to \mathbb{R}$,
- *направление оптимизации:* $\min$ или $\max$.

При такой постановке обычно молчаливо предполагается, что предикат допустимости и целевая функция вычисляются за конечное время. В противном случае задача становится неразрешимой. На практике, как правило, речь идет о вычислимости за полиномиальное (относительно длины аргумента) время.

Для последующего уточнения терминологии нам понадобятся несколько типичных примеров таких задач. В конце каждого примера приводится описание соответствующей четверки.

Задача целочисленного линейного программирования. Даны: рациональная матрица $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ и рациональные векторы $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$ и $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Q}^n$. Нужно найти целочисленный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$, для которого линейная функция $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ принимает максимальное значение при ограничении $A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$. Как легко видеть, пространство решений U в этой задаче совпадает с $\mathbb{Z}^n$, предикатом допустимости является неравенство $A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$, а целевая функция $f(x) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$.

Задача отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка. Даны: набор (рациональных) коэффициетов многочлена $p(x) = \sum_{k=1}^{d} c_k x^k$ и два целых $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant b$. Найти целое $x \in [a, b]$ при котором $p(x)$ принимает наибольшее значение. Здесь $U = \mathbb{Z}$, предикат допустимости проверяет выполнение ограничений $a \leqslant x \leqslant b$, целевая функция $f(x) = p(x)$.

Задача булева квадратичного программирования. Дан набор (рациональных) коэффициентов многочлена

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} c_{ij} x_i x_j, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Требуется найти $\boldsymbol{x}$, при котором $p(\boldsymbol{x})$ достигает максимума. Здесь $U = \{0, 1\}^n$, предикат g тождественно равен истине, а целевой функцией является многочлен p.

Задача о рюкзаке. Дано множество предметов E. Для каждого предмета $e \in E$ известны его размер $a_e \in \mathbb{Q}$ и ценность $c_e \in \mathbb{Q}$. Кроме того, известен размер рюкзака $A \in \mathbb{Q}$. Требуется выбрать подмножество предметов $x \subseteq E$ так, чтобы их суммарный размер был меньше размера рюкзака, а их суммарная ценность была бы максимальной. В этой задаче пространство решений U есть множество 2^E всех подмножеств множества E, предикат допустимости $g = g(x)$ определяется неравенством $\sum_{e \in x} a_e \leqslant A$, а целевая функция $f(x) = \sum_{e \in x} c_e$.

Задача о кратчайшем пути. Дано множество городов V и множество соединяющих их участков дорог (точнее, пар городов) E. Для каждого участка дороги $e \in E$ известна его длина $c_e \in \mathbb{Q}$. (Далее мы предполагаем, что множество E содержит все пары городов. Если же какие-либо два города не соединены дорогой непосредственно, то полагаем длину этой дороги равной некоторому достаточно большому числу.) В множестве V выделены два города s и t. Требуется найти кратчайший (по суммарной длине участков дорог) путь, соединяющий s и t. Пространство решений в этой задаче состоит из всевозможных размещений из $V \setminus \{s, t\}$. Каждое размещение — последовательность городов некоторого пути, соединяющего s и t. Предикат допустимости тождественно равен истине. Целевая функция равна сумме длин участков дорог, составляющих данный путь.

Направление оптимизации — минимум.

Задача о раскраске вершин графа. Задан граф $G = (V, E)$. Требуется каждой его вершине $v \in V$ назначить некоторую метку $k_v \in \mathbb{N}$ (символизирующую номер цвета) так, чтобы любые две смежные вершины имели разные метки, а значение наибольшей метки было бы минимальным. Таким образом, $U = [n]^n$, где n — число вершин графа, предикат g контролирует «разноцветность» смежных вершин, целевая функция $f(\boldsymbol{u}) = \max\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U$. Направление оптимизации — минимум.

Среди множества задач дискретной оптимизации особо выделяют *задачи комбинаторной оптимизации*, пространство решений которых конечно [138] и имеет комбинаторный характер.

Так, например, задача целочисленного линейного программирования не является комбинаторной, так как ее пространство решений, вообще говоря, не ограничено. Но при дополнительном ограничении $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant B$, $B \in \mathbb{Z}$, задача становится комбинаторной. В задаче отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка пространство решений конечно, но имеет некомбинаторный характер. Тем не менее, эта задача становится комбинаторной, если в качестве пространства решений рассмотреть множество последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, и интерпретировать эти последовательности как двоичные записи целых чисел из отрезка $[0, 2^n - 1]$, $2^n > b$.

Вообще, комбинаторность подразумевает, что пространство U представляет собой либо множество подмножеств (задача о рюкзаке), либо множество размещений с повторениями (задача булева квадратичного программирования, задача о раскраске графа), либо множество размещений без повторений (задача о кратчайшем пути). С целью обобщения всех этих и подобных им случаев будем предполагать, что пространство решений комбинаторной задачи представляет собой декартову степень S^d некоторого конечного множества S (в англоязычной литературе часто называемого ground set), где степень $d \in \mathbb{N}$ называется *размерностью задачи*. При этом, разумеется, в предикат допустимости может быть добавлено дополнительное условие (например, является ли решение перестановкой или же размещением без повторений).

Центральной проблемой комбинаторной оптимизации является феномен *комбинаторного взрыва*. Так как пространство решений для задачи комбинаторной оптимизации конечно, то ее всегда (в теории) можно решить с помощью полного перебора всех решений. Поэтому такие задачи еще называют *переборными*. Тем не менее, при росте размерности задачи число потенциальных решений возрастает экспоненциально: $|U| = |S|^d$. При этом полный перебор становится практически невозможен, что вынуждает искать более рациональные способы поиска оптимального решения.

Изучение этой проблемы невозможно без введения понятия массовой задачи. В *индивидуальной задаче* дискретной (комбинаторной) оптимизации все входные данные (четверка, определяющая задачу) зафиксированы. *Массовая задача* комбинаторной оптимизации представляет собой последовательность или счетное множество однотипных индивидуальных задач, среди которых есть задачи с как угодно большой размерностью. Так, например, массовая задача о рюкзаке включает в себя все индивидуальные задачи, допускающие соответствующую формулировку. Другими словами, в массовой задаче о рюкзаке не зафиксировано множество предметов, их размеры и ценности.

В массовой задаче комбинаторной оптимизации целевая функция, как правило, зависит от некоторого набора параметров, фиксация которых отличает индивидуальную задачу от массовой. Например, в задаче о рюкзаке такими параметрами являются ценности предметов. То же самое верно и в отношении предиката допустимости. В задаче о рюкзаке он зависит от размеров предметов. Таким образом, индивидуальная задача по сути представляет собой вполне конкретный набор входных данных массовой задачи.

С учетом всех сделанных выше замечаний получаем следующее определение задачи комбинаторной оптимизации.

Определение 1.2. *Задача комбинаторной оптимизации* представляет собой шестёрку:

1. *Входные данные* I, представляющие собой набор параметров (чисел).

2. *Размерность задачи* $d = d(I) \in \mathbb{N}$.

3. Конечное множество $S = S(I)$,
   определяющее *пространство решений* $U = S^d$.

4. *Предикат допустимости* $g = g(u, I) \in \{0, 1\}$, где $u \in U$.

5. *Целевая функция* $f = f(u, I) \in \mathbb{R}$, где $u \in U$.

6. *Направление оптимизации:* $\min$ или $\max$.

Предикат g определяет *множество допустимых решений* $X = X(I) = \{u \in U \mid g(u, I) = 1\}$. Цель задачи — среди всех допустимых решений X найти такое, на котором целевая функция f принимает оптимальное значение. Найденное решение называется *оптимальным*.

Если входные данные I не зафиксированы, то задача называется *массовой*, иначе — *индивидуальной*.

Замечание 1.1. Если сложность вычисления предиката допустимости или же целевой функции сравнима с числом перебираемых решений, то проблема комбинаторного взрыва при решении такой задачи отходит на второй план. Поэтому, как правило, предполагается, что *все функции в определении 1.2 полиномиально вычислимы*.

Не уменьшая общности, множество S можно представлять подмножеством целых чисел. Далее будем предполагать, что $S = \{0, 1, \ldots, k - 1\}$, где $k = |S(I)|$.

Рассмотрим ситуацию, когда целевая функция линейна: $f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} \in U = S^d$, а *целевой вектор* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Q}^d$ содержится во входных данных задачи. Соответствующая задача называется *линейной задачей комбинаторной* *оптимизации* [93]. С одной стороны, задачи с таким ограничением довольно часто встречаются на практике (например, задача целочисленного линейного программирования, задача о рюкзаке). С другой стороны, методы решения задач такого типа в настоящее время развиты настолько сильно, что даже задачи с нелинейной целевой функцией во многих случаях решаются более эффективно, если привести их к линейному виду. В качестве примера покажем, как это обычно делается для некоторых, наиболее популярных задач.

В задаче булева квадратичного программирования вместо n-мерного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ рассматривается вектор $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n(n+1)/2}$, координаты которого $y_{ij} = x_i x_j$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. В этом случае пространство решений $U = \{0,1\}^{n(n+1)/2}$, предикат допустимости проверяет выполнение условий $y_{ij} = y_{ii} y_{jj}$, а целевая функция линейна: $f(\boldsymbol{y}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} c_{ij} y_{ij}$.

По аналогии с предыдущей задачей, в задаче отыскания максимума многочлена можно вместо переменной $x \in \mathbb{Z}$ рассмотреть вектор $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^d$, координаты которого должны удовлетворять условию $y_k = y_1^k$, $k \in [d]$. Тогда целевая функция становится линейной: $f(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{d} c_k y_k$.

В задаче о кратчайшем пути в качестве пространства решений обычно рассматривают множество $\{0,1\}^E$ характеристических векторов подграфов графа дорог. Тогда предикат допустимости для каждого $\boldsymbol{u} = (u_e) \in \{0,1\}^E$ должен проверять, является ли соответствующее подмножество участков дорог путем, соединяющим города s и t, а целевая функция $f(\boldsymbol{u}) = \sum_{e \in E} c_e u_e$.

В наиболее естественной интерпретации задачи о раскраске вершин графа каждой раскраске ставится в соответствие её характеристический вектор $\boldsymbol{u} \in \{0,1\}^{n^2}$, координаты которого определяются следующим образом: $u_{ji} = 1$, если j-я вершина окрашена в i-й цвет, в противном случае $u_{ji} = 0$. Предикат допустимости в таком случае проверяет корректность условий $\sum_{i \in [n]} u_{ji} = 1$, $j \in [n]$, (каждая вершина окрашена одним цветом) и $u_{ji} + u_{ki} \leqslant 1$, $i \in [n]$, если j-я и k-я вершины смежны. Тогда целевую функцию можно определить следующим образом: $f(\boldsymbol{u}) = \sum_{i,j \in [n]} n^i u_{ji}$. Ясно, что минимум будет достигаться при минимальном числе использованных цветов. (В следующей главе приводится более экономная интерпретация этой задачи, в которой коэффициенты линейной функции принадлежат множеству $\{0, 1\}$.)

Довольно часто множество линейных задач комбинаторной оптимизации дополнительно ограничивается условием $S = \{0, 1\}$. Это связано с тем, что многие прикладные задачи допускают следующую формулировку [93]. Дано конечное множество E, предикат допустимости $g\colon 2^E \to \{0, 1\}$ и функция весов $c\colon E \to \mathbb{R}$. Для каждого подмножества $T \subseteq E$ определено значение целевой функции $f(T) = \sum_{e \in T} c(e)$. Требуется найти

$$T^* = \operatorname*{argmax}_{T \subseteq E} \Big\{ f(T) \;\Big|\; g(T) = 1 \Big\}.$$

1.5. Многогранники и полиэдры задач

Обратим теперь внимание на то, что индивидуальная линейная задача комбинаторной оптимизации по сути сводится к оптимизации линейной целевой функции на некотором конечном множестве допустимых решений $X \in \mathbb{Z}^d$. (В частности, X является подмножеством вершин куба Cube_d в широко распространенном случае, когда $S = \{0, 1\}$.) Выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(X)$ называется *многогранником* соответствующей индивидуальной задачи. А массовая задача ассоциируется с семейством многогранников (индивидуальных задач). В частности, в работе [122] предлагается формализовать задачу комбинаторной оптимизации как последовательность 0/1-многогранников $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ таких, что для любого вектора $\boldsymbol{v}$ и индекса n мы можем за полиномиальное время проверить, является ли $\boldsymbol{v}$ вершиной многогранника P_n.

Обратимся к примерам.

С задачей булева квадратичного программирования ассоциируется *булев квадратичный многогранник*

$$P_{\mathrm{BQP}}(n) = \Big\{ \boldsymbol{x} = (x_{ij}) \in \{0, 1\}^{n(n+1)/2} \;\Big|\; x_{ij} = x_{ii} x_{jj},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n \Big\}, \qquad (1.2)$$

обладающий многими интересными свойствами [15].

Замечание 1.2. Здесь и далее при определении специальных многогранников мы иногда называем многогранником множество его вершин, подразумевая V-описание многогранника.

Булев квадратичный многогранник тесно связан с *многогранником разрезов* $P_{\text{cut}}(n) \subseteq \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, вершинами которого являются характеристические вектора разрезов полного неориентированного графа на n вершинах [15].

С задачей отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка связан циклический многогранник

$$C_d(a, b) = \left\{(x, x^2, \ldots, x^d) \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b,\; x \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{1.3}$$

Многогранник задачи о рюкзаке представляет собой выпуклую оболочку подмножества 0/1-векторов, принадлежащих полупространству $H^-(\boldsymbol{a}, b)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$:

$$P_{\text{knap}}(\boldsymbol{a}, b) = \left\{\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \;\middle|\; \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leqslant b\right\}. \tag{1.4}$$

Пусть $G(V, E)$ — полный неориентированный граф на n ($n = |V|$) вершинах, среди которых выделены две: s и t. Пусть $W \subseteq 2^E$ — множество всех s-t путей в этом графе. *Многогранником путей* называется выпуклая оболочка множества всех характеристических векторов $P_{\text{path}}(n) \subseteq \{0, 1\}^E$ для путей из W. Аналогично определяется *многогранник орпутей* $P_{\text{dipath}}(n) \subseteq \{0, 1\}^A$ для полного ориентированного графа $D(V, A)$ на n вершинах.

С многогранником путей тесно связан *многогранник задачи коммивояжера* или *многогранник гамильтоновых циклов* [16] $P_{\text{TSP}}(n)$, представляющий собой выпуклую оболочку множества характеристических векторов всех гамильтоновых циклов полного неориентированного графа на n вершинах. В свою очередь, выпуклая оболочка множества характеристических векторов гамильтоновых контуров в полном ориентированном графе на n вершинах называется *мно-*

гогранником асимметричной задачи коммивояжера или *многогранником гамильтоновых контуров* и обозначается $P_{\mathrm{ATSP}}(n)$.

Задаче о сортировке массива (по-видимому, одной из самых востребованных в настоящее время) соответствует семейство *перестановочных многогранников* [16] или *пермутоэдров* [34]. Вершинами пермутоэдра $P_{\mathrm{perm}}(n)$ являются вектора, полученные всевозможными перестановками координат вектора-столбца $(1, 2, \ldots, n)^T$. Если же для перестановки $\pi \colon [n] \to [n]$ вместо вектора $(\pi(1), \pi(2), \ldots,$ мы рассмотрим перестановочную матрицу $\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^{n\times n}$ с компонентами

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi(i) = j, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

то получим *многогранник Биркгофа* $P_{\mathrm{birk}}(n)$, который еще называется *многогранником бистохастических матриц* и *многогранником задачи о назначениях* [16]. Перестановочную матрицу $\boldsymbol{x}$ можно также интерпретировать как характеристический вектор совершенного паросочетания в полном двудольном графе, каждая доля которого содержит по n вершин. С этой точки зрения многогранник $P_{\mathrm{birk}}(n)$ может быть также назван многогранником совершенных паросочетаний в двудольном графе.

Многогранник совершенных паросочетаний $P_{\mathrm{match}}(n)$ определяется как выпуклая оболочка всех характеристических векторов совершенных паросочетаний в полном графе на n вершинах.

Задача о поиске в полном реберно-взвешенном графе $G(V, E)$ минимального (по суммарному весу входящих ребер) остовного (то есть связывающего все вершины графа) дерева может быть переформулирована как задача оптимизации на *многограннике остовных деревьев* $P_{\mathrm{tree}}(n) \subset \{0, 1\}^E$, $n = |V|$, вершинами которого являются характеристические векторы остовных деревьев в графе G.

Обобщением многогранников остовных деревьев являются многогранники матроидов (точнее, баз матроидов). В [75] приводится весьма оригинальное, но вместе с тем краткое и емкое определение этих многогранников. 0/1-многогранник в $\mathbb{R}^n$ называется *многогранником матроида*, если он лежит в гиперплоскости $H(\mathbf{1}, r)$ при некотором целом $r \in [n]$ и его вершины удовлетворяют следующему критерию смежности: вершины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ смежны тогда и только тогда, когда найдутся $i, j \in [n]$, $i \neq j$, такие, что $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$. При этом число r называется *рангом* матроида. В частности, ранг матроида остовных деревьев в полном графе на n вершинах равен $n - 1$.

Еще одно семейство многогранников, часто встречаемое в литературе, — *многогранники независимых множеств* в графе $G = (V, E)$ [60], также называемые *многогранниками упаковок вершин* [116]:

$$P_{\text{stab}}(G) = \left\{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^V \;\middle|\; x_v + x_u \leqslant 1 \text{ для каждого ребра } \{v, u\} \in E\right\}.$$

Целесообразность изучения свойств многогранников задач обусловлена многими причинами. Основная причина состоит в том, что оптимальное значение целевой функции на множестве X и на его выпуклой оболочке $\operatorname{conv}(X)$ совпадают. То есть линейная задача комбинаторной оптимизации может быть сформулирована как задача оптимизации линейной функции на выпуклом многограннике. Еще в 1954 году Данциг, Фалкерсон и Джонсон [66], воспользовавшись этим полиэдральным подходом и разработанным Данцигом симплекс-методом, достигли впечатляющего по тем временам прогресса в решении задачи коммивояжера. Впоследствии этот подход нашел широчайшее применение, породив большое число различных методов и их модификаций для решения задач такого типа. Естественно, трудоемкость того или иного метода (алгоритма) зависит от некоторых свойств или числовых характеристик соответствующих многогранников. В частности, от комбинаторных характеристик. Примерами таких характеристик являются размерность многогранника, число его вершин, число гиперграней, числовые характеристики графа многогранника, числовые характеристики матрицы инциденций вершин-гиперграней. Примерами некомбинаторных характерестик могут служить сложность идентификации грани многогранника (гиперграни, вершины, ребра и т.д.), сложность задачи отделимости для данного многогранника, минимальное число гиперграней расширения многогранника и многие другие. Роль каждой из этих характеристик в оценке сложности линейных задач комбинаторной оптимизации будет рассмотрена чуть ниже, в разделе 1.6. Но прежде нам следует особо рассмотреть те часто встречающиеся на практике случаи задач, когда на целевой вектор накладываются некоторые естественные ограничения. Например, неотрицательность координат целевого вектора.

1.5.1. Полиэдры задач

Хорошо известно, что задача о кратчайшем (ор)пути полиномиально разрешима при условии, что длины ребер неотрицательны [70]. Вместе с тем, если снять это ограничение, то задача становится NP-трудной [14]. То есть задача оптимизации линейной целевой функции на многограннике (ор)путей NP-трудна. Как же описать многогранник задачи с условием неотрицательности координат целевого вектора? Универсальным средством в этом случае является понятие доминанты многогранника [138].

Доминантой многогранника $P \subseteq \mathbb{R}^d$ называется полиэдр

$$P^{\uparrow} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{x} \text{ для некоторого } \boldsymbol{x} \in P\} = P + \mathbb{R}^d_+,$$

где $\mathbb{R}^d_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\} = \operatorname{cone}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d\}$.

Таким образом, задаче о кратчайшем (ор)пути с ограничением неотрицательности длин ребер (дуг) соответствует задача оптимизации на полиэдре $P^{\uparrow}_{\text{path}}(n)$ ($P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(n)$).

Аналогичным образом можно построить полиэдр для полиномиально разрешимой задачи о минимальном разрезе в полном неориентированном реберно взвешенном графе на n вершинах. С этой целью рассмотрим множество вершин $\operatorname{ext}(P_{\text{cut}}(n))$ многогранника разрезов и удалим из него вершину с нулевыми координатами, соответствующую пустому разрезу. Доминанту выпуклой оболочки этого множества обозначим $P_{\text{mincut}}(n)$ и будем называть *полиэдром разрезов* [64]. Для полноты картины отметим, что в [140] исследуются свойства доминант многогранников s-t разрезов в произвольных (неполных) графах. В случае полного графа эти полиэдры двойственны к полиэдрам $P^{\uparrow}_{\text{path}}(n)$ [138].

Немного сложнее определяется полиэдр задачи о кратчайшем пути в полном орграфе $G(V, A)$ при условии, что в G отсутствуют циклы отрицательной длины:

$$P_{\text{shortpath}}(n) = P_{\text{dipath}}(n) + \operatorname{cone}(\text{Cycle}(n)),$$

где $n = |V|$, а $\text{Cycle}(n)$ — множество характеристических векторов контуров в графе G. Именно его (а не полиэдр $P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(n)$) и будем в дальнейшем называть *полиэдром кратчайших орпутей*. Известно [133, 144], что его H-описание значительно компактнее, чем у полиэдра $P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(n)$. У него ровно $|A|$ гиперграней, определяемых неравенствами вида $x_a \geqslant 0$, $a \in A$. А сам полиэдр лежит в пересечении гиперплоскостей, определяемых следующими равенствами (для удобства сформулированными в терминах орграфа G). Разность между числом дуг выходящих из (начальной) вершины s и числом входящих в неё дуг равна единице. Разность между числом дуг входящих в (конечную) вершину t и числом выходящих из неё равна единице. Та же разность для любой другой вершины равна нулю (условие сохранения потока).

Таким образом, для любой задачи с линейными ограничениями на целевой вектор соответствующий полиэдр представляет собой сумму Минковского многогранника (основной) задачи и конуса «неприемлемых» целевых векторов.

1.6. Полиэдральные характеристики

Прежде, чем перейти к обсуждению характеристик полиэдров, обратим внимание на задачу идентификации грани (вершины, ребра, гиперграни и т. д.) полиэдра.

1.6.1. Задача идентификации грани полиэдра

Входные данные *задачи идентификации грани* состоят из описания самого полиэдра и описания тестируемой грани.

Если полиэдром является многогранник задачи, то под его описанием подразумевается предикат допустимости g из определения 1.2, подтверждающий или же отвергающий принадлежность произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ множеству допустимых решений $X \subseteq \mathbb{R}^d$ (в этом случае многогранником задачи является выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(X)$). Если же речь идет о полиэдре, представляющем собой сумму Минковского многогранника задачи и конуса «неприемлемых» целевых векторов, то в дополнение к предикату, идентифицирующему вершины многогранника, должен прилагаться предикат, идентифицирующий экстремальные лучи конуса. Как правило, для прикладных задач оба указанных предиката являются полиномиально вычислимыми (см. замечание 1.1).

Способ описания тестируемой грани зависит от её размерности. Потенциальная вершина определяется вектором координат, ребро — двумя вершинами, гипергрань — коэффициентами соответствующего линейного неравенства.

Выходом задачи идентификации грани является ответ Да или Нет.

Идентификация вершины

Практически для всех многогранников известных в настоящее время прикладных задач идентификация вершины является простой. В основном это связано с тем, что как в теоретических, так и в прикладных исследованиях наибольшее внимание уделяется тем случаям, когда множество допустимых решений X состоит только из 0/1-векторов. В этом случае X совпадает с множеством вершин многогранника $\mathrm{conv}(X)$, а предикат допустимости g идентифицирует вершины многогранника задачи. Если же среди вершин многогранника есть не только 0/1-вектора, то, строго говоря, идентификация вершины не сводится к вычислению одного предиката допустимости и может потребовать обработки всего множества допустимых решений X. В общем случае, эта задача является co-NP-полной [137, Theorem 18.5].

Теоретический интерес также представляют многогранники, для которых уже задача вычисления предиката допустимости является NP-трудной или же имеет экспоненциальную сложность. Например, в [146] рассматривается многогранник, вершинами которого являются характеристические вектора всех гамильтоновых подграфов полного графа (на n вершинах). Так как задача проверки гамильтоновости графа является NP-полной [102], то и задача идентификации вершины (а также задача вычисления предиката допустимости) такого многогранника NP-полна.

Идентификация гиперграни

Известно [138], что при условии NP $\neq$ co-NP решение задачи идентификации гиперграни для семейства многогранников любой NP-трудной линейной задачи комбинаторной оптимизации не может быть реализовано за полиномиальное время. Более того, задача идентификации гиперграни является D^p-полной (и, следовательно, NP-трудной) для многогранников задачи коммивояжера [123], задачи о клике [124] и задачи о линейном упорядочении [77].

С задачей идентификации гиперграни тесно связана задача *идентификации опорной гиперплоскости*: для данных $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^d$ и $b \in \mathbb{Z}$ проверить, является ли гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b)$ опорной для данного многогранника P. Известно, что эта задача D^p-полна для многогранников задачи коммивояжера и задачи о клике [124]. А для многогранника задачи о рюкзаке доказана co-NP-полнота идентификации допустимого неравенства [91].

Идентификация ребра

Задача идентификации ребра многогранника часто называется *задачей о смежности вершин*. Интерес к этой задаче обычно обосновывается тем, что критерий смежности вершин многогранника может послужить основой для построения эффективного алгоритма, использующего технику локального поиска [111]. Кроме того, далее мы обратимся к рассмотрению таких характеристик графов многогранников, как диаметр и кликовое число, что предполагает более подробное освещение известных в этой области результатов о смежности вершин.

Прежде всего, сформулируем критерии смежности вершин для известных (и уже ставших классическими) полиномиально разрешимых задач комбинаторной оптимизации: задача о сортировке массива, задача о минимальном остовном дереве, задачи о назначениях и о паросочетаниях (в полном реберно-взвешенном графе), задача о кратчайшем пути, задача о минимальном разрезе и задача отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка.

Выше (раздел 1.5, с. 43), при определении многогранника матроида был сформулирован критерий смежности его вершин. Вершины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пермутоэдра $P_{\mathrm{perm}}(n)$ смежны тогда и только тогда, когда найдется $i \in [n-1]$ такой, что вектор $\boldsymbol{y}$ получается из вектора $\boldsymbol{x}$ перестановкой i-й и $(i+1)$-й координат [16].

Лемма 1.4 ([42]). *Две вершины многогранника Биркгофа $P_{\mathrm{birk}}(n)$ смежны тогда и только тогда, когда симметрическая разность $p_1 \vartriangle p_2 = (p_1 \setminus p_2) \cup (p_2 \setminus p_1)$ соответствующих паросочетаний p_1 и p_2 образует (один) цикл.*

В точности так же формулируется критерий смежности и для многогранника совершенных паросочетаний $P_{\mathrm{match}}(n)$ [60, 119].

Лемма 1.5 ([138]). *Пусть p_1 и p_2 — два различных s-t пути в полном орграфе $D(V, A)$ на n вершинах. Тогда их характеристические вектора $\chi(p_1)$ и $\chi(p_2)$ являются смежными вершинами полиэдра орпутей $P^{\uparrow}_{\mathrm{dipath}}(n)$ (полиэдра кратчайших орпутей $P_{\mathrm{shortpath}}(n)$), если, и только если, симметрическая разность $p_1 \vartriangle p_2$ образует неориентированный цикл, состоящий из двух орпутей, имеющих общее начало и общий конец, и не имеющих других общих вершин.*

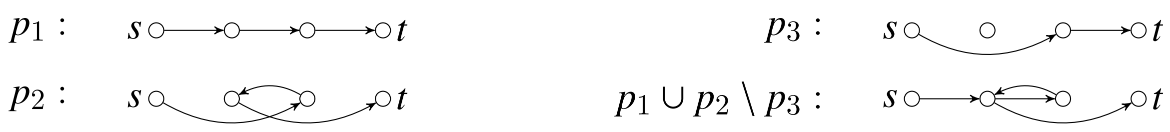

Рис. 1.3. Пример двух орпутей p_1 и p_2, соответствующих паре несмежных вершин многогранника $P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(4)$

Замечание 1.3. Критерий смежности, описанный в лемме 1.5, справедлив как для полиэдра $P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(n)$, так и для $P_{\text{shortpath}}(n)$. Доказательство этой леммы в [138, theorem 13.4, p. 202] содержит неточность. (В работе [128], исследующей свойства графа полиэдра $P_{\text{shortpath}}(n)$, также содержатся неточности как в определении самого полиэдра, так и в описании критерия смежности вершин.) Там сказано, что если объединение двух орпутей p_1 и p_2 содержит третий орпуть p_3, то вектор $\boldsymbol{x} = \chi(p_1)+\chi(p_2)-\chi(p_3)$ тоже является характеристическим вектором некоторого орпути. В частности, это утверждение неверно для орпутей, изображенных на рис. 1.3. Тем не менее, эта неточность легко устраняется, если заметить, что вектор $\boldsymbol{x}$ представляет собой сумму характеристического вектора некоторого орпути и, быть может, характеристических векторов нескольких контуров. Таким образом, $\boldsymbol{x}$ принадлежит полиэдру $P_{\text{shortpath}}(n)$ (и, как следствие, полиэдру $P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(n)$), и из равенства $\chi(p_1) + \chi(p_2) = \chi(p_3) + \boldsymbol{x}$ следует несмежность $\chi(p_1)$ и $\chi(p_2)$.

Лемма 1.6 ([48]). *Вершины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ полиэдра разрезов $P_{\text{mincut}}(n)$ смежны тогда и только тогда, когда для соответствующих разрезов $\delta(A)$ и $\delta(B)$ в полном графе $G(V, E)$ выполняется одно из условий:*

$$A \cap B = \varnothing \quad \textit{или} \quad A \subset B \quad \textit{или} \quad B \subset A \quad \textit{или} \quad A \cup B = V.$$

Замечание 1.4. В формулировке критерия смежности в [48] потеряно последнее условие. Тем не менее, все последующие рассуждения легко корректируются.

Формулировка критерия смежности вершин для полиэдров s-t разрезов в полном (ор)графе [140] является частным случаем утверждения леммы 1.6 в том смысле, что для s-t разрезов всегда выполнены условия $A \cap B \neq \varnothing$ (так как $s \in A \cap B$) и $A \cup B \neq V$ (так как $t \notin A \cup B$).

Критерий смежности вершин циклического многогранника $C_d(a, b)$ особенно прост [82]. Каждые две его вершины смежны при $d \geqslant 4$.

Обратимся теперь к результатам распознавания смежности вершин на многогранниках NP-трудных задач. Их можно разделить на две группы. Прежде всего, перечислим многогранники, для которых установлена полиномиальная разрешимость задачи о смежности вершин.

Попарная смежность вершин многогранника разрезов $P_{\text{cut}}(n)$ и булева квадратичного многогранника $P_{\text{BQP}}(n)$ была независимо установлена несколькими авторами [6, 13, 44].

Согласно [60], пара вершин многогранника независимых множеств $P_{\text{stab}}(G)$ смежна, тогда и только тогда, когда симметрическая разность соответствующих независимых множеств индуцирует связный подграф в G. По-сути, этот же критерий смежности верен и для многогранников упаковок множеств и многогранников разбиений множеств [92]. Кроме того, частным случаем многогранников разбиений множеств являются многогранники трехиндексной (а также многоиндексной) задачи о назначениях (см., наример, [41]), лучше ссылка на соответствующий раздел в следующей главе «Аффинная сводимость».

Полиномиальный алгоритм для проверки смежности вершин многогранника линейных порядков описан в [147].

Вместе с тем, задача о смежности вершин co-NP-полна для многогранников следующих задач: задача коммивояжера [121], задача о рюкзаке [59, 84, 110], задача о покрытии множества [110], задача о кубическом подграфе [49], задача о назначениях с ограничением [36], задача 3-выполнимости и задача о частичном упорядочивании [76].

1.6.2. Размерность и вершины многогранника

Размерность многогранника служит нижней оценкой сложности соответствующей задачи, так как равна числу степеней свободы при поиске оптимального решения.

Число вершин многогранника является верхней оценкой числа проверок, выполняемых при полном переборе всех допустимых решений. Разумеется, эта оценка справедлива только в тех случаях, когда имеется эффективная процедура перебора всех допустимых решений. В худшем случае вместо множества допустимых решений приходится перебирать все пространство решений $U = S^d$ и верхней оценкой становится экспонента $|S|^d$.

Заметим, что полиномиальная сложность идентификации вершины многогранника еще не гарантирует полиномиальность вычисления общего числа вершин. С целью иллюстрации этого утверждения рассмотрим задачу подсчета числа вершин многогранника задачи о рюкзаке $P_{\text{knap}}(\boldsymbol{a}, b)$. Задача идентификации вершины этого многогранника является простой. Достаточно проверить, что данный вектор $\boldsymbol{x}$ является 0/1-вектором и удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leqslant b$.

Утверждение 1.7. *Задача нахождения числа вершин многогранника* $P_{\text{knap}}(\boldsymbol{a}, b)$ *является NP-трудной.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай задачи, положив $2b = \boldsymbol{a}^T\mathbf{1}$. Заметим, что при таком условии число 0/1-векторов $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих ограничению $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leqslant b$, совпадает с числом 0/1-векторов $\boldsymbol{y}$, удовлетворяющих ограничению $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{y} \geqslant b$. (Соотношение $\boldsymbol{y} = \mathbf{1} - \boldsymbol{x}$ определяет взаимно-однозначное соответствие между этими множествами.)

Пусть N — число вершин многогранника $P_{\text{knap}}(\boldsymbol{a}, b)$, а K — число его вершин, удовлетворяющих равенству $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b$. В силу сделанного выше замечания, эти числа связаны соотношением $2N = 2^n + K$, где n — размерность вектора $\boldsymbol{a}$, а 2^n — число всех 0/1-векторов этой размерности размерности. Таким образом, задача вычисления N эквивалентна вычислению K. Но уже задача проверки неравенства $K > 0$ является NP-полной (задача о сумме размеров [14]). ■

1.6.3. Гиперграни и задача отделимости

Вообще говоря, задача построения H-описания полиэдра по его V-описанию является алгоритмически сложной [104]. Если же H-описание полиэдра задачи все таки удается найти, то линейная задача комбинаторной оптимизации преобразуется в задачу линейного программирования. Последняя, как известно [33, 101], полиномиально разрешима относительно размерности (числа переменных), числа гиперграней (неравенств), и размера коэффициентов (длины входа).

На практике, как правило, нахождение H-описания полиэдра является чрезвычайно трудной задачей. Во многих случаях трудной является уже задача идентификации гиперграни (см. раздел 1.6.1 выше).

Заметим также, что для решения линейной задачи комбинаторной оптимизации методами линейного программирования не обязательно наличие H-описания многогранника задачи. В 1982 году Карп и Пападимитриу показали [103], что для эффективного решения линейной задачи комбинаторной оптимизации достаточно иметь эффективный алгоритм решения задачи отделимости: для заданного многогранника P и вектора $\boldsymbol{v}$ с рациональными координатами определить, принадлежит ли вектор многограннику и, если не принадлежит, то сгенерировать гиперплоскость (линейное неравенство), отсекающую v от P.

1.6.4. Диаметр графа

Диаметр графа многогранника P далее обозначаем $\delta(P)$.

Основной мотивацией для оценок диаметров графов многогранников является тот факт, что симплекс-метод [67] решает задачу линейного программирования, двигаясь по ребрам графа многогранника от исходной вершины к оптимальной. Таким образом, если правило выбора ребра (англ. pivot rule) в симплекс-методе идеально (выбирает кратчайший путь до оптимальной вершины), то диаметр графа многогранника равен числу шагов симплекс-метода при наихудшем выборе исходной вершины.

В 1957 году Уоррен Хирш высказал гипотезу о том, что диаметр графа полиэдра не превосходит разности между числом его гиперграней и размерностью [68]. Вскоре после публикации этой гипотезы был найден контрпример — 4-мерный полиэдр с 8 гипергранями и 15 вершинами, диаметр графа которого равен 5 [106]. Поэтому гипотеза была скорректирована на случай ограниченных полиэдров (многогранников) и только в 2010 году был найден контрпример для многогранников [135]. Тем не менее, построение многогранников, диаметр графа которых был бы хотя бы в два раза больше числа гиперграней, является очень амбициозной задачей [136]. С другой стороны, до сих пор не известны полиномиальные верхние оценки диаметра графа проозвольного многогранника. Поэтому главной целью этого направления исследований является полиномиальная гипотеза Хирша:

Гипотеза 1.8 (полиномиальная гипотеза Хирша). *Существует такая полиномиальная функция $f(n, d)$, что для любого d-мерного многогранника (полиэдра) с n гипергранями его диаметр графа не превышает $f(n, d)$.*

Как следует из приведенных выше (в начале раздела) рассуждений, эта гипотеза связана с возможностью построения сильно полиномиального (то есть не зависящего от размера входных чисел) алгоритма линейного программирования на основе симплекс-метода. Задача построения такого алгоритма включена Смэйлом в список математических задач XXI века [141].

Замечание 1.5. При оценке сложности задачи с помощью диаметра графа ее многогранника следует обратить внимание на то, что эта оценка бесполезна, если H-описание многогранника отсутствует или же не имеет эффективного описания.

В силу изложенных выше причин оценке диаметров графов для различных семейств многогранников посвящено большое число работ. Часть из них, а также ссылки на более ранние обзоры по этой теме можно найти в [136]. Здесь же мы перечислим в первую очередь некоторые известные оценки диаметров графов многогранников ассоциированных с задачами комбинаторной оптимизации:

1. Диаметр пермутоэдра $P_{\text{perm}}(n)$ равен $n(n-1)/2$ [16].

2. Непосредственно из критерия смежности вершин многогранника матроида следует, что диаметр его графа меньше либо равен рангу r. В частности, диаметр графа многогранника остовных деревьев $P_{\text{tree}}(n)$ равен $n-1$ при $n \geqslant 4$.

3. Диаметр графа полиэдра кратчайших путей $P_{\text{shortpath}}(n)$ (и полиэдра $P^{\uparrow}_{\text{dipath}}(n)$) равен двум при $n \geqslant 4$. Достаточно заметить, что вершина, соответствующая пути, составленном из одной единственной дуги (s,t), смежна со всеми остальными вершинами полиэдра (см. критерий смежности в лемме 1.5).

4. Диаметр графа полиэдра $P_{\text{mincut}}(n)$ (и полиэдров s-t разрезов в полном (ор)графе) равен двум при $n \geqslant 4$. Достаточно заметить, что вершина, соответствующая разрезу $\delta(S)$, где S состоит из одной вершины, смежна со всеми остальными вершинами полиэдра (см. критерий смежности в лемме 1.6).

5. Диаметр графа многогранника Биркгофа $P_{\text{birk}}(n)$ равен двум при $n \geqslant 4$ [42]. То же верно и для многогранника паросочетаний $P_{\text{match}}(n)$ [119].

6. Диаметр графа циклического многогранника равен единице [82].

7. Диаметры графов многогранника разрезов $P_{\text{cut}}(n)$ и булева квадратичного многогранника $P_{\text{BQP}}(n)$ равны единице [6, 13, 44].

8. Диаметр графа многогранника коммивояжера $P_{\mathrm{ATSP}}(n)$ равен двум при $n \geqslant 6$ [119]. В той же работе доказан аналогичный факт для многогранника k-назначений и некоторых других.

Диаметры графов обобщенных ассоциэдров [56, 57]. Для многогранников разбиений множества [50]. Для транспортных многогранников [51]. Диаметр графа $P_{\mathrm{TSP}}(n)$ не превосходит четырех [129] Диаметр многогранника k-циклов не превосходит 5 [85]. Диаметр многогранника линейных порядков равен двум [147].

Вообще, диаметр графа 0/1-многогранника не превышает его размерности [114]. Более того, если $X \subseteq \{0, 1, \ldots, k\}^d$, то диаметр графа многогранника $\mathrm{conv}(X)$ не превышает $k \cdot \dim(\mathrm{conv}(X)) \leqslant kd$ [107]. В качестве примера заметим, что для пермутоэдра $k = n - 1$, $\dim(P_{\mathrm{perm}}(n)) = n - 1$, а диаметр равен $n(n-1)/2$.

1.6.5. Расширения многогранников

Почти все многогранники, ассоциированные с задачами комбинаторной оптимизации, имеют экспоненциальное число гиперграней, что делает практически невозможным непосредственное использование методов линейного программирования. Один из подходов к решению этой проблемы состоит в переходе к расширенной формулировке многогранника [63, 95].

Расширением полиэдра $P \subseteq \mathbb{R}^d$ называется полиэдр $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ вместе с аффинным отображением $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, удовлетворяющим условию $P = \alpha(Q)$. Так как для нас важны в первую очередь свойства полиэдра Q, то далее мы часто будем называть расширением непосредственно этот полиэдр, подразумевая, что аффинное отображение α удовлетворяет всем разумным требованиям. Любое H-описание расширения вместе с отображением α называется *расширенным описанием* или *расширенной формулировкой*.

Из определения расширения следует, что задача оптимизации линейной функции на полиэдре сводится к задаче оптимизации линейной функции на его расширении. А именно, если полиэдр $P \subseteq \mathbb{R}^d$ является образом полиэдра $Q \subseteq \mathbb{R}^n$

при отображении $\alpha(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$, где $A \in \mathbb{Q}^{d\times n}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^d$, то задача оптимизации линейной функции $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ при ограничении $\boldsymbol{x} \in P$ эквивалентна оптимизации линейной функции $\boldsymbol{c}^T A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$ при ограничении $\boldsymbol{y} \in Q$.

Классическим примером потенциала использования расширенных формулировок является пермутоэдр $P_{\text{perm}}(n)$. Его H-описание полностью известно [34, 126], а число гиперграней равно $2^n - 2$. С другой стороны, нетрудно заметить (см. определения на с. 42), что $P_{\text{perm}}(n)$ является линейной проекцией многогранника Биркгофа $P_{\text{birk}}(n)$ при преобразовании $p(x) = x \cdot (1, 2, \ldots, n)^T$, $x \in \{0, 1\}^{n\times n}$. (То есть многогранник Биркгофа является расширением пермутоэдра.) Следовательно, задача линейной оптимизации на пермутоэдре сводится к задаче линейной оптимизации на многограннике Биркгофа. При этом для H-описания последнего требуется всего $2n - 1$ уравнение и n^2 неравенств [46]. Более того, не так давно [86] для пермутоэдра $P_{\text{perm}}(n)$ была найдена расширенная формулировка с числом неравенств $\Theta(n \log n)$ (являющимся минимальным возможным с точностью до постоянного множителя).

Размером расширения (расширенной формулировки) называется число гиперграней (число неравенств в H-описании) расширения. Приведенный выше пример показывает, что размер расширения может быть значительно меньше размера исходного многогранника. В настоящее время известно много других примеров столь же значительного уменьшения размера за счет перехода к расширенной формулировке [63, 95].

Сложностью расширения (расширенной формулировки) $\operatorname{xc}(P)$ многогранника P называется минимальный размер среди всех его расширений. Известно [78], что величина $\operatorname{xc}(P)$ не изменится, если в качестве расширений рассматривать только ограниченные полиэдры (многогранники).

Сложность расширения многогранников задач хорошо согласуется с такими перечисленными выше характеристиками, как размерность многогранника, число его вершин и гиперграней.

Свойство 1.9. *Пусть P — выпуклый многогранник,* $\mathrm{vert}(P)$ *— число его вершин,* $\mathrm{facet}(P)$ *— число его гиперграней,* $\mathrm{face}(P)$ *— число всех граней (в том числе несобственных). Тогда*

1. $\mathrm{xc}(P) > \dim(P)$*, так как число гиперграней многогранника всегда больше его размерности.*

2. $\mathrm{xc}(P) \leqslant \mathrm{facet}(P)$.

3. $\mathrm{xc}(P) \leqslant \mathrm{vert}(P)$*, так как любой многогранник на n вершинах является аффинным образом симплекса* Δ_{n-1}.

4. $\mathrm{xc}(P) \geqslant \log_2 \mathrm{face}(P)$ *[86].*

Кроме того, эта характеристика обладает следующим естественным свойством, позволяющим делать оценки на основе сравнения.

Свойство 1.10. *Если многогранник Q или одна из его граней являются расширением многогранника P, то* $\mathrm{xc}(P) \leqslant \mathrm{xc}(Q)$.

За последние несколько лет в этом направлении было получено довольно много интересных результатов. Вообще, оказалось, что сложность расширения многогранников хорошо согласуется с текущими представлениями о сложности соответствующих линейных задач комбинаторной оптимизации. Перечислим наиболее интересные из известных результатов.

1. Как уже было сказано выше, сложность расширения для перестановочного многогранника $P_{\mathrm{perm}}(n)$ равна $\Theta(n \log n)$ [86].

2. Сложность расширения многогранника остовных деревьев полного графа равна $O(n^3)$, где n — число вершин графа [109].

3. Сложность расширения полиэдра разрезов $P_{\mathrm{mincut}}(n)$ равна $O(n^3)$ [55, 63].

4. Сложность расширения полиэдра s-t разрезов равна $\Theta(n^2)$, где n — число вершин графа [63, 83].

5. Число неравенств в описании полиэдра кратчайших орпутей $P_{\text{shortpath}}(n)$ совпадает с числом дуг в соответствующем орграфе (см. раздел 1.5.1), то есть $\text{xc}(P_{\text{shortpath}}(n)) \leqslant n(n-1)$.

6. Ранее уже упоминалось, что для описания многогранника Биркгофа $P_{\text{birk}}(n)$ достаточно n^2 неравенств. В [78] показано, что для описания его расширения меньшего числа неравенств будет недостаточно: $\text{xc}(P_{\text{birk}}(n)) = n^2$.

7. Сложность расширения для многогранника совершенных паросочетаний в планарных графах полиномиальна [43].

8. Разработан фреймфорк для построения расширенных формулировок на основе объединения многогранников и использования существующих алгоритмов динамического программирования [97].

9. Экспоненциальная сложность расширения для булева квадратичного многогранника: $\text{xc}(P_{\text{BQP}}(n)) = 2^{\Theta(n)}$ [80, 100].

10. Экспоненциальная сложность расширения для многогранника задачи коммивояжера: $\text{xc}(P_{\text{TSP}}(n)) = 2^{\Omega(n)}$ [131].

Ряд других, не вошедших в этот список результатов, можно найти в обзорах [63, 95, 143].

Тем не менее, недавно был найден пример значительного расхождения реальной вычислительной сложности задачи и сложности расширения её многогранника. Это классическая задача о паросочетаниях в полном графе на n вершинах. Для её решения в настоящее время известно несколько различных алгоритмов с трудоемкостью $O(n^3)$, где n — число вершин графа [138]. С другой стороны, в 2014 году Ротфосс доказал [131], что сложность расширения многогранника $P_{\text{match}}(n)$ этой задачи равна $2^{\Omega(n)}$.

Заметим также, что сложность расширенной формулировки не является комбинаторной характеристикой многогранника. Этот факт иллюстрируется следующим простым примером. Сложность расширения правильного n-угольника равна $O(\log n)$ [45]. При этом существуют примеры (неправильных) n-угольников, сложность расширения которых равна $\Omega(\sqrt{n})$ [81]. С другой стороны, комбинаторные свойства n-угольника однозначно определяются числом его вершин.

Методы получения оценок для сложности расширения прежде всего опираются на простые свойства 1.9 и 1.10. Непосредственные верхние оценки предполагают построение соответствующих примеров расширений. Нижние оценки, как правило, опираются на факторизационную теорему Яннакакиса [146], для формулировки которой нам потребуется пара определений.

Определение 1.3. Пусть $X = \{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\}$ — множество вершин (V-описание) многогранника $P \subseteq \mathbb{R}^d$, а неравенства $\boldsymbol{a_i^T x} \leqslant b_i$, $\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^d$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in [m]$, определяют его гиперграни (H-описание без учета уравнений). Ячейка M_{ij} *матрицы невязок* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ для заданных V-описания и H-описания многогранника P определяется следующим образом:

$$M_{ij} = b_i - \boldsymbol{a_i^T x_j}.$$

В частности, $M_{ij} \geqslant 0$, то есть матрица M *неотрицательна.*

Из определения также следует, что матрица невязок M связана с матрицей инциденций гиперграней-вершин $K \in \{0, 1\}^{m \times n}$ многогранника P:

$$K_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } M_{ij} = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение 1.4. *Неотрицательным рангом* $\operatorname{rank}_+(M)$ матрицы $M \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ называется наименьшее натуральное r такое, что M представима в виде произведения неотрицательных матриц T и U размера $m \times r$ и $r \times n$, соответственно. Неотрицательный ранг может быть также определен как наименьшее $r \in \mathbb{N}$ такое, что M представима в виде суммы r неотрицательных матриц ранга один.

Теорема 1.11 (Яннакакис [78, 145]). *Сложность расширения многогранника равна неотрицательному рангу его матрицы невязок.*

Известно [62], что аналогичное утверждение верно также и для расширений полиэдров при соответствующей корректировке понятия матрицы невязок.

В следующем разделе рассматривается комбинаторный аналог этой теоремы (теорема 1.12), значительно упрощающий получение нижних оценок сложности расширений.

1.6.6. Число прямоугольного покрытия

Ранее уже было отмечено, что матрица невязок тесно связана с матрицей инциденций гиперграней-вершин. А с неотрицательным рангом матрицы невязок связано число прямоугольного покрытия матрицы инциденций, являющееся в некотором смысле его комбинаторным аналогом.

Определение 1.5 ([78]). Пусть $M \in \{0,1\}^{n\times k}$ — матрица инциденций. Множество $I \times J$, где $I \subseteq [n]$, $J \subseteq [k]$, называется *0-прямоугольником* в матрице M, если $M_{ij} = 0$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. *Прямоугольным покрытием* матрицы M называется множество 0-прямоугольников, объединение которых совпадает с множеством нулевых ячеек в M. *Числом прямоугольного покрытия* матрицы называется наименьшее число 0-прямоугольников, необходимое для её прямоугольного покрытия. Число прямоугольного покрытия матрицы инциденций гиперграней-вершин (вершин-гиперграней) многогранника P обозначаем $\mathrm{rc}(P)$.

В качестве примера на рис. 1.4 изображена матрица инциденций восьмиугольника, а на рис. 1.5 — шесть покрывающих её 0-прямоугольников. Пример расширения правильного восьмиугольника, имеющего 6 гиперграней, представлен на рис. 1.6.

Непосредственно из определений 1.4 и 1.5 следует, что число прямоугольного покрытия матрицы инциденций не превосходит неотрицательного ранга матрицы невязок. Иными словами, справедлива следующая

Теорема 1.12 (Яннакакис [78, 145]). $\mathrm{xc}(P) \geqslant \mathrm{rc}(P)$ *для любого выпуклого многогранника* P.

Известно также, что нижние оценки в свойстве 1.9 верны и для числа прямоугольного покрытия.

Свойство 1.13 ([78]). *Пусть* P — *выпуклый многогранник,* $\mathrm{face}(P)$ — *число всех его граней. Тогда*

$$\dim(P) + 1 \leqslant \log_2 \mathrm{face}(P) \leqslant \mathrm{rc}(P).$$

Кроме того, свойство 1.10 при замене $\mathrm{xc}(\cdot)$ на $\mathrm{rc}(\cdot)$ тоже остается верным. С рядом других свойств числа прямоугольного покрытия матрицы инциденций гиперграней-вершин многогранника можно ознакомиться в [78].

Практически все известные в настоящее время нижние оценки сложности расширения многогранников получены с использованием теоремы 1.12 и (фактически комбинаторных) свойств 1.13, 1.10. Исключением являются следующие три примера:

1. Для многогранника паросочетаний $P_{\text{match}}(n)$ установлена экспоненциальная нижняя оценка сложности расширения [131]. При этом $\mathrm{rc}(P_{\text{match}}(n)) \in [n^2, n^4]$, согласно [78].

2. Установлен факт существования n-угольников, сложность расширения которых не меньше $\sqrt{2n}$ [81], тогда как число прямоугольного покрытия мат-

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Рис. 1.4. Матрица инциденций гиперграней-вершин восьмиугольника.

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 1 \\
1 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\
0 & 0 & 0 & & 1 & 1 & & \\
0 & 0 & 0 & & & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 1 \\
1 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 1 \\
1 & 1 & & & & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
0 & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\
 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\
1 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

Рис. 1.5. Шесть 0-прямоугольников, покрывающих матрицу инциденций восьмиугольника. (Единицы сохранены для удобства восприятия.)

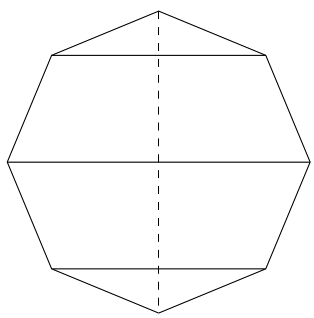

Рис. 1.6. Расширение восьмиугольника в $\mathbb{R}^3$ (вид сверху), имеющее 6 гиперграней.

рицы инциденций n-угольника находится в диапазоне $[\log_2(2n), 2\log_2(2n)]$ (как следует из [45, 81]).

3. Доказано существование семейств многогранников матроидов с экспоненциальной сложностью расширения [130] (в доказательстве используется тот факт, что число различных матроидов дважды экспоненциально относительно числа элементов множества-носителя [71]). В то же время число прямоугольного покрытия для них не превышает квадрата от числа элементов множества-носителя [96].

Заметим, что во всех трех примерах речь идет о полиномиально разрешимых задачах комбинаторной оптимизации. Таким образом, все известные факты говорят о том, что число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника дает весьма точную нижнюю оценку сложности соответствующей оптимизационной задачи. (Исчерпывающее теоретическое обоснование этого феномена пока неизвестно.)

1.6.7. Кликовое число графа многогранника

В 1980-х годах В. А. Бондаренко [9] ввел понятие класса алгоритмов прямого типа для задач комбинаторной оптимизации. Ключевой особенностью алгоритмов этого класса является то, что их трудоемкость оценивается снизу кликовым числом графа многогранника соответствующей линейной задачи комбинаторной оптимизации (в оригинале [9] кликовое число называется плотностью). Более подробное описание этой теории содержится ниже, в разделе **??**. Здесь же мы приводим лишь обзор известных результатов. Всюду далее кликовое число графа многогранника P обозначаем $\omega(P)$.

В [9] показано, что алгоритмы сортировки, жадный алгоритм для матроида (в частности, для задачи о минимальном остовном дереве), алгоритм Дейкстры для кратчайшего пути в графе, алгоритм Хелда–Карпа–Беллмана и алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера являются алгоритмами прямого типа.

При этом установлена сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников, ассоциированных с такими NP-трудными задачами, как задача о максимальном разрезе [6, 44], задача о клике [13], задачи об остовных деревьях с дополнительными ограничениями [12], задача о кубическом графе [49], задача коммивояжера [7], задача о 3-назначениях, задача разбиения на клики и некоторые другие [9]. В то же время, кликовое число полиномиально для следующих многогранников (ассоциированных с полиномиально разрешимыми задачами): для пермутоэдра оно равно двум, для многогранника остовных деревьев в полном графе на n вершинах равно $\lfloor n^2/4 \rfloor$ при $n > 3$ [4], линейно для обобщенных перестановочных многогранников [9].

Эта характеристика может быть также определена для тех случаев, когда на целевой вектор (коэффициенты линейной целевой функции) накладываются некоторые ограничения. Например, ограничения неотрицательности для классических задач о кратчайшем пути и минимальном разрезе в графе. Хорошо известно, что без такого ограничения эти задачи NP-трудны, а с ним — полиномиально разрешимы. В таких случаях вместо графа многогранника рассматривается граф конусного разбиения пространства исходных данных задачи [22]. В частности, для задач о кратчайшем пути и минимальном разрезе с ограничением неотрицательности графы конусных разбиений являются графами соответствующих полиэдров $P_{\text{shortpath}}(n)$ и $P_{\text{mincut}}(n)$. Известно, что для обеих упомянутых задач кликовые числа графов многогранников экспоненциальны, а при ограничении неотрицательности — полиномиальны [11, 22].

Вместе с тем, известны примеры полиномиально разрешимых задач с экспоненциальным $\omega(P)$.

В первую очередь, это релаксационный многогранник задачи булева квадратичного программирования, имеющий полиномиальное H-описание и экспоненциальное кликовое число графа [8, 117].

Второй пример связан с задачей отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка. Как известно, эта задача разрешима полиномиально относительно степени многочлена и размера (длины записи) его коэффициентов [120, 132]. (С точностью до полилогарифма трудоемкость составляет $O(d^2(d+\tau))$, где d — степень многочлена, а τ — длина записи коэффициентов.) С другой стороны, связанный с этой задачей циклический многогранник $C_d(a,b)$ 2-смежностен (другими словами, его граф полон) при $d \geqslant 4$, а число его вершин совпадает с числом целых точек отрезка $[a,b]$. То есть кликовое число $\omega(C_d(a,b)) = b-a+1$ принимает экспоненциальное значение, если длина отрезка $[a,b]$ экспоненциальна.

1.7. Вопросы

Раздел сырой. Требует почти полной переделки!

Пусть $S = \{P(n)\}$ — некоторое семейство многогранников, каждый из которых представлен как выпуклая оболочка некоторого множества $X_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, $d = d(n)$. С этим семейством связана оптимизационная задача OPT(S): дан номер $n \in \mathbb{N}$ и целевой вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$; требуется найти $\max\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in P(n)\right\}$.

Вопрос 1.14. *Есть ли связь между сложностью идентификации вершины многогранника и сложностью соответствующей оптимизационной задачи?*

Вопрос 1.15. *Есть ли связь между сложностью идентификации ребра многогранника и сложностью соответствующей задачи?*

Вопрос 1.16. *Есть ли связь между сложностью идентификации гиперграни многогранника и сложностью соответствующей задачи?*

Вопрос закрыт.

Вопрос 1.17. *Есть ли связь между диаметром графа многогранника и сложностью соответствующей задачи?*

Вопрос 1.18. *Есть ли связь между кликовым числом графа многогранника и сложностью соответствующей задачи? В частности, существуют ли трудные (NP-трудные) задачи с небольшим* $\omega(X)$*?*

Вопрос 1.19. *Есть ли связь между сложностью расширения многогранника и сложностью соответствующей задачи?*

Вопрос 1.20. *Есть ли связь между числом прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника и сложностью соответствующей задачи?*

Вопрос 1.21. *Какие известные в настоящее время комбинаторно-геометрические характеристики многогранника наиболее адекватно отражают сложность соответствующей задачи.*

Вопрос 1.22. *Есть ли связь между комбинаторным типом многогранника и сложностью соответствующей задачи?*

Глава 2

Аффинная сводимость

Всё познается в сравнении

2.1. Определения и примеры

2.1.1. Сравнение многогранников

Как известно, сравнение является одним из наиболее распространенных и универсальных методов исследования. Чтобы воспользоваться им, введем следующую операцию сравнения, задающую частичный порядок на множестве всех выпуклых многогранников.

Определение 2.1. В случае, когда многогранник P аффинно эквивалентен многограннику Q или же его грани, будем использовать обозначение $P \leqslant_A Q$. Факт аффинной эквивалентности многогранников P и Q обозначаем $P =_A Q$.

В следующей главе будет рассмотрен более мягкий вариант этого определения, в котором слова «аффинно эквивалентен» заменены на «является аффинным образом», а для соответствующего соотношения используется обозначение $\leqslant_E$. Там же будет проведен анализ различий в использовании этих двух соотношений при исследовании свойств многогранников.

Нетрудно заметить, что соотношение $\leqslant_A$ оказывается особенно полезным при сравнении комбинаторных свойств (т. е. свойств решеток граней) многогранников.

Свойство 2.1. *Если $P \leqslant_A Q$, то решетка граней многогранника P изоморфна либо всей решетке граней многогранника Q (если P и Q эквивалентны), либо некоторой подрешетке (индуцированной гранью многогранника Q), а матрица* *инциденций гиперграней-вершин многогранника P является подматрицей матрицы инциденций многогранника Q. В частности:*

1. *Число вершин многогранника P не превосходит числа вершин Q.*

2. *Число i-граней многогранника P не превосходит числа i-граней Q при $i \leqslant \dim(P)$.*

3. *Граф многогранника P оказывается изоморфен некоторому подграфу графа многогранника Q.*

4. *Число гиперграней P не превосходит числа гиперграней Q.*

5. $\mathrm{rc}(P) \leqslant \mathrm{rc}(Q)$.

В качестве примеров перечислим некоторые очевидные соотношения для симплексов и циклических многогранников. Прежде всего, симплекс Δ_n является гранью симплекса Δ_{n+1}, а в силу транзитивности соотношения $\leqslant_A$ получаем

$$\Delta_n \leqslant_A \Delta_{n+k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Кроме того,

$$\Delta_m \leqslant_A C_n(S) \quad \text{при } m < n \leqslant |S|, \tag{2.2}$$

так как циклический многогранник $C_n(S)$ симплициален. По той же причине

$$C_n(S) \nleqslant_A C_{n+k}(S') \tag{2.3}$$

для всех $n, k \in \mathbb{N}$ и любых множеств S и S', при условии $|S| > n + 1 > 2$.

Заметим, что множество симплексов $\Delta = \{\Delta_n\}$ и множество циклических многогранников $C = \{C_n(S) \mid n \in \mathbb{N},\ S \subset \mathbb{Q},\ |S| < \infty\}$ представляют собой примеры семейств многогранников задач комбинаторной оптимизации. В связи с этим интерес представляет следующий вопрос. Какая из двух ситуаций (2.1) или (2.3) является наиболее типичной для известных семейств многогранников задач? Опыт показывает, что в большинстве случаев легко проверяется справедливость соотношений вида (2.1). При доказательстве такого рода соотношений удобно пользоваться следующим очевидным утверждением.

Лемма 2.2. *Пусть* $P \in \mathbb{R}^d$ *— 0/1-многогранник. Тогда* $F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \mid x_i = 0\}$ *и* $G_i = \{\boldsymbol{x} \in P \mid x_i = 1\}$*,* $i \in [d]$*, являются гранями (быть может несобственными) многогранника* P*.*

Рассмотрим три наиболее часто встречающихся в литературе семейства многогранников: булевы квадратичные многогранники $P_{\text{BQP}}(n)$, многогранники асимметричной задачи коммивояжера $P_{\text{ATSP}}(n)$ и многогранники задачи о рюкзаке $P_{\text{knap}}(n, \boldsymbol{a}, b)$.

Утверждение 2.3.

$$
\begin{aligned}
P_{\text{BQP}}(n) &\leqslant_A P_{\text{BQP}}(n+1),\\
P_{\text{ATSP}}(n) &\leqslant_A P_{\text{ATSP}}(n+1),\\
P_{\text{knap}}(n, \boldsymbol{a}, b) &\leqslant_A P_{\text{knap}}(n+1, (\boldsymbol{a}, 0), b), \quad (\boldsymbol{a}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1},\ b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.2. Рассмотрим грань F многогранника $P_{\text{BQP}}(n+1)$, образованную гиперплоскостью $x_{n+1,n+1} = 0$. Тогда для всех $\boldsymbol{x} \in F$ выполняется $x_{i,n+1} = 0$ при $i \in [n+1]$. Нетрудно увидеть, что множество вершин грани F преобразуется в множество вершин многогранника $P_{\text{BQP}}(n)$ (и, наоборот, $P_{\text{BQP}}(n)$ в F) аффинным отображением (ортогональной проекцией) $x_{ij} \mapsto y_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Для доказательства соотношения $P_{\text{ATSP}}(n) \leqslant_A P_{\text{ATSP}}(n+1)$ достаточно установить взаимно однозначное соответствие между множеством гамильтоновых контуров полного орграфа $D = (V, A)$ на n вершинах и подмножеством гамильтоновых контуров орграфа $D' = (V', A')$ на $n+1$ вершинах, в котором удалены все дуги, входящие в вершину v'_1, и дуги, выходящие из v'_{n+1}, за исключением дуги (v'_{n+1}, v'_1). Заметим, что характеристические вектора указанного подмножества контуров оргафа $D' = (V', A')$ являются вершинами грани

$$F = \left\{ \boldsymbol{x} \in P_{\text{ATSP}}(n+1) \;\middle|\; x_{(v'_{n+1}, v'_1)} = 1 \right\}$$

многогранника $P_{\text{ATSP}}(n+1)$. Очевидно, грань F и многогранник $P_{\text{ATSP}}(n)$ связаны невырожденным аффинным отображением

$$y_{(v_i, v_j)} = \begin{cases} x_{(v'_i, v'_j)}, & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n,\ 2 \leqslant j \leqslant n,\ i \neq j, \\ x_{(v'_i, v'_{n+1})}, & \text{при } 2 \leqslant i \leqslant n,\ j = 1, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{x} \in F$, $\boldsymbol{y} \in P_{\text{ATSP}}(n)$.

Для доказательства соотношения $P_{\text{knap}}(n, \boldsymbol{a}, b) \leqslant_A P_{\text{knap}}(n+1, (\boldsymbol{a}, 0), b)$ достаточно заметить, что

$$P_{\text{knap}}(n+1, (\boldsymbol{a}, 0), b) = \left\{ (\boldsymbol{x}, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in P_{\text{knap}}(n, \boldsymbol{a}, b) \right\}.$$

Следовательно, многогранник $P_{\text{knap}}(n, \boldsymbol{a}, b)$ аффинно эквивалентен грани многогранника $P_{\text{knap}}(n+1, (\boldsymbol{a}, 0), b)$, образованной гиперплоскостью $x_{n+1} = 0$ (или $x_{n+1} = 1$). ■

Соотношение (2.2) является простым примером того, что сравнивать можно и многогранники из разных семейств. Еще одним таким фактом, открытым независимо несколькими авторами [15], является *ковариантное отображение* $\xi\colon P_{\text{BQP}}(n) \to P_{\text{cut}}(n+1)$, задаваемое уравнениями

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ii}, & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n,\ j = n+1, \\ x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij}, & \text{при } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{cases}$$

Из невырожденности этого отображения следует

$$P_{\text{BQP}}(n) =_A P_{\text{cut}}(n+1).$$

Рассмотрим еще два семейства многогранников, ассоциированных с задачами об упаковке и разбиении множества.

Пусть $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ — матрица инциденций элементов множества $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ и элементов некоторого множества $S = \{S_1, \dots, S_n\} \subseteq 2^G$. Выпуклая оболочка множества

$$P_{\mathrm{pack}}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid A\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{1}\}$$

называется *многогранником упаковок множества* [40]. (Каждая вершина $\boldsymbol{x} \in P_{\mathrm{pack}}(A)$ этого многогранника является характеристическим вектором некоторой упаковки $T \subseteq S$.)

Множество вершин *многогранника разбиений множества* определяется по аналогии:

$$P_{\mathrm{part}}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}\}. \tag{2.4}$$

Непосредственно из определения следует

$$P_{\mathrm{part}}(A) \leqslant_A P_{\mathrm{pack}}(A). \tag{2.5}$$

Заметим также, что многогранник независимых множеств $P_{\mathrm{stab}}(G)$ является частным случаем многогранника упаковок множеств:

$$P_{\mathrm{stab}}(G) =_A P_{\mathrm{pack}}(A), \tag{2.6}$$

если A является матрицей инциденций вершин-ребер графа G.

2.1.2. Сравнение семейств многогранников

Прежде, чем перейти к сравнению семейств многогранников, установим еще несколько простых соотношений между $P_{\mathrm{stab}}(G)$, $P_{\mathrm{part}}(A)$, $P_{\mathrm{pack}}(A)$ и $P_{\mathrm{BQP}}(n)$.

Лемма 2.4. *Для любой матрицы $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ существует граф G на n вершинах такой, что $P_{\mathrm{pack}}(A) =_A P_{\mathrm{stab}}(G)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что каждое неравенство вида

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1$$

из системы $A\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{1}$ при условии $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$ эквивалентно набору неравенств

$$x_i + x_j \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k,$$

определяющих множество вершин некоторого многогранника независимых множеств. ■

Учитывая соотношение (2.6), можно сделать вывод о том, что семейства $\{P_{\text{pack}}(A)\}$ и $\{P_{\text{stab}}(G)\}$ идентичны (состоят из одних и тех же многогранников).

Лемма 2.5. *Для любого графа $G = (V, E)$ существует матрица $A \in \{0,1\}^{m\times n}$, $m = |E|$, $n = |V| + |E|$, такая, что $P_{\text{stab}}(G) =_A P_{\text{part}}(A)$.*

Доказательство. Для каждого неравенства

$$x_v + x_u \leqslant 1, \quad \{v, u\} \in E, \tag{2.7}$$

из описания многогранника $P_{\text{stab}}(G)$ введем вспомогательную переменную $y_{vu} = 1 - x_v - x_u$. Остается заметить, что множество 0/1-векторов, удовлетворяющих неравенствам (2.7), аффинно эквивалентно множеству 0/1-векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$x_v + x_u + y_{vu} = 1, \quad \{v, u\} \in E.$$ ■

Таким образом, согласно соотношению (2.5), семейство $\{P_{\text{part}}(A)\}$ содержит не только все многогранники семейств $\{P_{\text{pack}}(A)\}$ и $\{P_{\text{stab}}(G)\}$, но и некоторые их грани.

Введем теперь ключевое понятие этой главы — аналог полиномиальной сводимости Кука–Карпа–Левина [14] для семейств многогранников.

Определение 2.2. Семейство многогранников P *аффинно сводится* к семейству многогранников Q, если для каждого многогранника $p \in P$ найдется $q \in Q$ такой, что $p \leqslant_A q$, причем размерность пространства, в котором определен многогранник q, ограничена сверху полиномом от размерности пространства, в котором задан p. Обозначение: $P \propto_A Q$.

Замечание 2.1. В определении 2.2 важным условием является полиномиальная зависимость размерностей пространств, в которых определены многогранники, а не просто размерностей многогранников. Дело в том, что система ограничений, определяющих многогранник, может оказаться далеко не самым экономным способом его описания. Тем не менее, нашей целью является именно сравнение систем ограничений, или, другими словами, условий задач, ассоциированных с многогранниками.

В качестве примера многогранника с неэкономным описанием можно рассмотреть $P_{\text{part}}(A)$, задаваемый уравнениями

$$x_1 + x_i + x_j = 1, \quad 2 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Очевидно, он состоит из одной единственной точки $(1, 0, \dots, 0)$. Вместе с тем, он является гранью многогранника $P_{\text{pack}}(A)$, определяемого неравенствами

$$x_1 + x_i + x_j \leqslant 1, \quad 2 \leqslant i < j \leqslant n,$$

и имеющего размерность n.

На основе выведенных выше соотношений приведем несколько примеров использования обозначения из определения 2.2. Так, соотношение (2.2) можно переписать в виде $\Delta \leqslant_A C$. А из лемм 2.5, 2.4 и соотношения (2.5) следует

Теорема 2.6. $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{part}} \propto_A P_{\text{pack}} \propto_A P_{\text{stab}}$, *где* $P_{\text{stab}} = \{P_{\text{stab}}(G)\}$, $P_{\text{part}} = \{P_{\text{part}}(A)\}$, $P_{\text{pack}} = \{P_{\text{pack}}(A)\}$.

Перечислим некоторые очевидные свойства этого типа сводимости.

Теорема 2.7. *Пусть* $P \propto_A Q$. *Предположим, что в семействе* P *есть многогранники, имеющие одно или несколько из следующих свойств:*

1. *Сверхполиномиальность (по размерности многогранника) числа вершин или гиперграней.*

2. *Сверхполиномиальное кликовое число графа многогранника.*

3. *NP-полнота критерия несмежности вершин.*

4. *Сверхполиномиальное число прямоугольного покрытия.*

5. *Сверхполиномиальная сложность расширения.*

Тогда в Q имеются многогранники с теми же свойствами.

Сравним теперь семейства $P_{\mathrm{BQP}} = \{P_{\mathrm{BQP}}(n)\}$ и P_{stab}.

Теорема 2.8. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует граф $G = (V, E)$, $|V| = n(n+1)$, $|E| = n(2n-1)$, такой, что $P_{\mathrm{BQP}}(n) \leqslant_A P_{\mathrm{stab}}(G)$.*

(Похожий результат получен в [80], но с более слабым соотношением $\leqslant_E$ и при $|V| = 2n^2$. Кроме того, представленное ниже доказательство значительно проще изложенного в [80].)

Доказательство. Каждое равенство $x_{ij} = x_{ii}x_{jj}$ из уравнения (1.2), определяющего булев квадратичный многогранник, эквивалентно неравенствам

$$\begin{aligned} x_{ii} - x_{ij} &\geqslant 0, \\ x_{jj} - x_{ij} &\geqslant 0, \\ x_{ii} + x_{jj} - x_{ij} &\leqslant 1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

при условии $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Остается преобразовать их в систему неравенств вида $y_l + y_m \leqslant 1$. Для этого введем $n(n+1)$ новых 0/1-переменных:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= x_{ij}, & 1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ t_{ij} &= x_{ii} - x_{ij}, & 1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ u_i &= x_{ii}, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \bar{u}_i &= 1 - x_{ii}, & 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Тогда ограничения (2.8) эквивалентны

$$
\begin{aligned}
s_{ij} + \bar{u}_j &\leqslant 1,\\
t_{ij} + u_j &\leqslant 1,\\
u_i + \bar{u}_i &= 1,\\
s_{ij} + t_{ij} + \bar{u}_i &= 1,
\end{aligned}
$$

при условии целочисленности всех переменных. Очевидно, последние два равенства (точнее, $n(n+1)/2$ подобных равенств) определяют некоторую грань многогранника $P_{\mathrm{stab}}(G)$, где число вершин графа G равно $n(n+1)$, а $n(2n-1)$ его ребер определяют систему неравенств

$$
\begin{aligned}
s_{ij} + \bar{u}_j &\leqslant 1,\\
t_{ij} + u_j &\leqslant 1,\\
u_i + \bar{u}_i &\leqslant 1,\\
s_{ij} + \bar{u}_i &\leqslant 1,\\
t_{ij} + \bar{u}_i &\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

Более того, соотношения (2.9) связывают эту грань с многогранником $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ невырожденным аффинным отображением. ■

Утверждение 2.9. *Если граф $G = (V, E)$ неполный, то соотношение $P_{\mathrm{stab}}(G) \leqslant_A P_{\mathrm{BQP}}(n)$ не возможно ни при каком n.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в множество вершин $P_{\mathrm{stab}}(G)$ всегда входят вектора $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d$, где $d = |V|$. Если граф $G = (V, E)$ неполный, то $P_{\mathrm{stab}}(G)$ кроме «обязательных» векторов содержит еще как минимум один 0/1-вектор. Пусть $\boldsymbol{x}$ — один из таких (необязательных) векторов. Легко заметить, что вершины $\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x}$ многогранника $P_{\mathrm{stab}}(G)$ несмежны, так как соединяющий их отрезок пересекается с выпуклой оболочкой вершин $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d$. Следовательно, многогранник $P_{\mathrm{stab}}(G)$ не является 2-смежностным. Остается заметить, что многогранник $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ (а вместе с ним и его грани) является 2-смежностным [117].■

2.2. Многогранники покрытий и двойных покрытий

По аналогии с многогранниками упаковок и разбиений множества, *многогранником покрытий множества* называется выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{cover}}(M) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid M\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{1}\}, \quad \text{где } M \in \{0,1\}^{m\times n}.$$

Многогранником двойных покрытий будем называть выпуклую оболочку множества

$$P_{2\text{cover}}(B) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\},$$

где $B \in \{0,1\}^{m\times n}$, причем каждая строка матрицы B содержит ровно четыре единицы и не имеет нулевых столбцов. По-видимому, впервые это семейство многогранников было рассмотрено Мацуи [110]. Им же была установлена связь между многогранниками покрытий и двойных покрытий.

Теорема 2.10 (Мацуи [110, theorem 4.3]). *Для каждой матрицы $B \in \{0,1\}^{m\times n}$ с четырьмя единицами в каждой строке несложно описать матрицу $M \in \{0,1\}^{4m\times n}$ с тремя единицами в каждой строке, что $P_{2\text{cover}}(B) \leqslant_A P_{\text{cover}}(M)$.*

Известно также, что задача проверки несмежности вершин для многогранников двойных покрытий NP-полна [110]. Точнее, она NP-полна для некоторого подсемейства семейства $P_{2\text{cover}}$, о котором пойдет речь ниже. С целью упрощения обсуждения свойств этого подсемейства, мы приведем более удобное его описание, чем в первоисточнике [110].

Прежде всего отметим, что вопрос «Содержит ли многогранник разбиений $P_{\text{part}}(A)$ хотя бы одну точку?» является NP-полной задачей даже если все строки матрицы A содержат ровно три единицы [14, 110]. С каждым многогранником $P_{\text{part}}(A)$, $A \in \{0,1\}^{m\times n}$, удовлетворяющим этому условию, свяжем многогранник, множество вершин $P_{\text{matsui}}(A) \subset \{0,1\}^{3n+3}$ которого определим следующим образом. Для трех координат вектора $\boldsymbol{x} \in P_{\text{matsui}}(A)$ введем особые обозначения

y_1, y_2, y_3. Каждой координате z_j вектора $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in P_{\text{part}}(A)$ будут соответствовать три координаты x_j, $\bar{x}_j$ и x'_j вектора $\boldsymbol{x} \in P_{\text{matsui}}(A)$, и два ограничения

$$x_j + \bar{x}_j = 1, \tag{2.10}$$
$$y_1 + y_2 + x'_j + \bar{x}_j = 2.$$

А для каждого ограничения вида $z_i + z_j + z_k = 1$ из описания $P_{\text{part}}(A)$ (случай, когда A не содержит ни одной строки, исключаем из рассмотрения) добавим к описанию множества $P_{\text{matsui}}(A)$ уравнение

$$y_3 + x_i + x'_j + x'_k = 2.$$

Заменяя каждое уравнение (2.10) в описании многогранника $P_{\text{matsui}}(A)$ на

$$a + b + x_j + \bar{x}_j = 2, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

приходим к следующему выводу.

Утверждение 2.11. *Для каждой матрицы $A \in \{0,1\}^{m\times n}$, имеющей ровно три единицы в каждой строке, несложно описать матрицу $B \in \{0,1\}^{(2n+m)\times(3n+5)}$, что $P_{\text{matsui}}(A) \leqslant_A P_{\text{2cover}}(B)$.*

Заметим теперь, что ограничения

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1,$$

определяют грань многогранника $P_{\text{matsui}}(A)$, аффинно эквивалентную многограннику $P_{\text{part}}(A)$. Таким образом,

$$P_{\text{part}}(A) \leqslant_A P_{\text{matsui}}(A). \tag{2.11}$$

То же самое верно и для следующих наборов ограничений:

1) $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$;

2) $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$;

3) $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$.

Обозначим эти грани (точнее, множества их вершин) F_1, F_2, F_3, F_4, в порядке упоминания. Заметим, что все четыре грани не имеют общих точек. Кроме того,

$$F_4 = \{\mathbf{1} - \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in F_1\}, \qquad F_3 = \{\mathbf{1} - \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in F_2\}.$$

Ограничениям

$$y_1 = y_2 = 0$$

удовлетворяет ровно одна вершина многогранника $P_{\mathrm{matsui}}(A)$, имеющая координаты $x'_j = \bar{x}_j = 1$, $y_3 = x_j = 0$, $j \in [n]$. Обозначим эту вершину $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$. Аналогично, если

$$y_1 = y_2 = 1,$$

то $x'_j = \bar{x}_j = 0$, $y_3 = x_j = 1$, $j \in [n]$. Обозначим эту вершину $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}$. Очевидно, $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$P_{\mathrm{matsui}}(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup \{\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}, \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}\},$$

причем все пять множеств не пересекаются. Кроме того, вершины $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ и $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}$ смежны тогда и только тогда, когда $F_1 = \varnothing$ (в противном случае $\mathrm{conv}\{F_1 \cup F_4\}$ и $\mathrm{conv}\{\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}, \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}\}$ имеют общую точку $\mathbf{1}/2$). Таким образом, в силу того, что F_1 аффинно эквивалентна $P_{\mathrm{part}}(A)$, приходим к следующему выводу.

Теорема 2.12 (Мацуи [110, theorem 4.1]). *Задача проверки несмежности вершин $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ и $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{0}}$ многогранника $P_{\mathrm{matsui}}(A)$ NP-полна.*

Следствие 2.13. *Для семейств многогранников покрытий P_{cover} и двойных покрытий $P_{2\mathrm{cover}}$ задача проверки несмежности вершин NP-полна.*

Как известно [60, 92], многогранники $P_{\mathrm{part}}(A)$ имеют простой критерий проверки смежности вершин. Соответственно, в предположении NP $\neq$ P аффинная сводимость $P_{\mathrm{matsui}} \propto_A P_{\mathrm{part}}$ невозможна. Покажем, что последнее верно и без указанного предположения.

$$\boldsymbol{y^0} = (\overbrace{\mathtt{1,0,1,1,}}^{I}\ \overbrace{\mathtt{0,0,0,0,1,1,1}}^{J})$$

$$\boldsymbol{\bar{y}^0} = (\mathtt{1,0,1,1,}\ \underbrace{\overset{j_0}{\mathtt{1}}\mathtt{,1,1,1,}}_{U_0}\underbrace{\mathtt{0,0,0}}_{\bar{U}_0})$$

Рис. 2.1. Множества индексов I, J, U_0, $\bar{U}_0$.

Теорема 2.14. *Если многогранник $P_{\text{matsui}}(A)$ не является отрезком, то $P_{\text{matsui}}(A) \leqslant_A P_{\text{stab}}(G)$ невозможно ни для какого графа G.*

Доказательство. Как было замечено выше, многогранник $P_{\text{matsui}}(A)$ обязательно содержит пару вершин $\boldsymbol{x^0}$ и $\boldsymbol{\bar{x}^0}$, и некоторое количество четверок вершин вида $\boldsymbol{x^{2i-1}} \in F_1$, $\boldsymbol{\bar{x}^{2i-1}} \in F_4$, $\boldsymbol{x^{2i}} \in F_2$, $\boldsymbol{\bar{x}^{2i}} \in F_3$, $i \in [k]$, $k \geqslant 1$. Причем

$$\boldsymbol{x^0} + \boldsymbol{\bar{x}^0} = \boldsymbol{x^{2i-1}} + \boldsymbol{\bar{x}^{2i-1}} = \boldsymbol{x^{2i}} + \boldsymbol{\bar{x}^{2i}}. \tag{2.12}$$

Предположим, что $P_{\text{matsui}}(A)$ аффинно эквивалентен некоторой грани

$$H = \{\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{\bar{y}^0}, \ldots, \boldsymbol{y^{2k}}, \boldsymbol{\bar{y}^{2k}}\}$$

многогранника $P_{\text{stab}}(G)$ для некоторого графа $G = (V, E)$. Очевидно, вершины этой грани должны наследовать свойство (2.12):

$$\boldsymbol{y^0} + \boldsymbol{\bar{y}^0} = \boldsymbol{y^{2i-1}} + \boldsymbol{\bar{y}^{2i-1}} = \boldsymbol{y^{2i}} + \boldsymbol{\bar{y}^{2i}}. \tag{2.13}$$

Покажем, что в многограннике $P_{\text{stab}}(G)$ есть еще пара вершин $\boldsymbol{y^*}$ и $\boldsymbol{\bar{y}^*}$, для которых

$$\boldsymbol{y^*} + \boldsymbol{\bar{y}^*} = \boldsymbol{y^0} + \boldsymbol{\bar{y}^0}. \tag{2.14}$$

Это будет означать, что пересечение $\operatorname{conv}\{\boldsymbol{y^*}, \boldsymbol{\bar{y}^*}\}$ и $\operatorname{conv}(H)$ не пусто. То есть H не является гранью $P_{\text{stab}}(G)$.

Пусть $\boldsymbol{y^0} = (y^0_1, \ldots, y^0_m)$ и $\boldsymbol{\bar{y}^0} = (\bar{y}^0_1, \ldots, \bar{y}^0_m)$, где m — число вершин графа G. Рассмотрим множество

$$I = \left\{i \in [m] \,\middle|\, y^0_i = \bar{y}^0_i\right\}.$$

Так как каждая вершина в $P_{\text{stab}}(G)$ является 0/1-вектором, то из (2.13) и (2.14) следует

$$y_i^* + \bar{y}_i^* = y_i^0 = \bar{y}_i^0 = \cdots = y_i^{2k} = \bar{y}_i^{2k} \quad \text{при } i \in I. \tag{2.15}$$

Далее будем рассматривать только те координаты, значения которых различны для каждой пары вершин (см. рис. 2.1):

$$J = \left\{ j \in [m] \;\middle|\; y_i^0 + \bar{y}_i^0 = 1 \right\} = [m] \setminus I.$$

Очевидно, $J \neq \varnothing$.

Зафиксируем какой нибудь индекс $j_0 \in J$ и для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$ определим множество

$$U_i = \begin{cases} \left\{ j \in J \;\middle|\; y_j^i = 1 \right\}, & \text{если } y_{j_0}^i = 1, \\ \left\{ j \in J \;\middle|\; \bar{y}_j^i = 1 \right\}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

По построению все эти множества попарно различны и $j_0 \in U_i$ (см. рис. 2.1). Для каждого U_i рассмотрим его дополнение $\bar{U}_i = J \setminus U_i$. Согласно данному определению, для любого $i \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$ и для любых $p, r \in U_i$ (а также для любых $p, r \in \bar{U}_i$) найдется вершина $\boldsymbol{y} \in H$ такая, что $y_p = y_r = 1$. То есть неравенство $y_p + y_r \leqslant 1$ отсутствует в описании многогранника $P_{\text{stab}}(G)$.

Введем в рассмотрение множество

$$S = S(i, j, t) = U_i \triangle U_j \triangle U_t, \quad 0 \leqslant i < j < t \leqslant 2k,$$

Покажем, что вектор $\boldsymbol{y^*}$ с координатами

$$y_i^* = \begin{cases} y_i^0, & \text{при } i \in I, \\ 1, & \text{при } i \in S, \\ 0, & \text{при } i \in J \setminus S, \end{cases}$$

и вектор $\bar{\boldsymbol{y}}^*$ с координатами

$$\bar{y}_i^* = \begin{cases} y_i^0, & \text{при } i \in I, \\ 0, & \text{при } i \in S, \\ 1, & \text{при } i \in J \setminus S, \end{cases}$$

принадлежат $P_{\text{stab}}(G)$. Для этого достаточно показать, что если вершины грани H удовлетворяют некоторому неравенству вида $y_p + y_r \leqslant 1$ из описания многогранника $P_{\text{stab}}(G)$, то $\boldsymbol{y}^*$ и $\bar{\boldsymbol{y}}^*$ тоже ему удовлетворяют.

Возможны несколько случаев.

Пусть $p, r \in I$, $p \neq r$. Так как при $i \in I$ i-е координаты вершин грани H и векторов $\boldsymbol{y}^*$ и $\bar{\boldsymbol{y}}^*$ совпадают, то из того, что неравенство $y_p + y_r \leqslant 1$ выполнено для H следует, что оно также выполнено и для векторов $\boldsymbol{y}^*$ и $\bar{\boldsymbol{y}}^*$.

Пусть $p \in I$, $r \in J$. (Случай $r \in I$, $p \in J$ разбирается аналогично.) Тогда $y_r^0 + \bar{y}_r^0 = y_r^* + \bar{y}_r^* = 1$. Следовательно, $\max\{y_r^*, \bar{y}_r^*\} = \max\{y_r^0, \bar{y}_r^0\} = 1$. И опять из выполнения неравенства $y_p + y_r \leqslant 1$ для H следует, что оно также выполнено для $\boldsymbol{y}^*$ и $\bar{\boldsymbol{y}}^*$.

Пусть $p \in S$, $r \in J \setminus S$. (Случай $r \in S$, $p \in J \setminus S$, разбирается аналогично.) Тогда $y_p^* + y_r^* = \bar{y}_p^* + \bar{y}_r^* = 1$ и требуемое ограничение выполнено.

Пусть $p, r \in S$, $p \neq r$, где $S = S(i, j, t)$. (Случай $p, r \in J \setminus S$, $p \neq r$, разбирается аналогично.) Покажем, что в этом случае p и r принадлежат одновременно одному из шести множеств: U_i, U_j, U_t, $\bar{U}_i$, $\bar{U}_j$, $\bar{U}_t$. Если это действительно так, то (как было сказано выше при определении этих множеств) неравенство $y_p + y_r \leqslant 1$ отсутствует в описании многогранника $P_{\text{stab}}(G)$.

Итак, предположим, что $p, r \in U_i \triangle U_j \triangle U_t$, и покажем, что тогда p и r принадлежат одновременно одному из множеств: U_i, U_j, U_t, $\bar{U}_i$, $\bar{U}_j$, $\bar{U}_t$. Заметим, что $U_i \triangle U_j \triangle U_t$ представляет собой объединение четырех множеств:

$$U_i \triangle U_j \triangle U_t = (U_i \cap U_j \cap U_t) \cup (U_i \cap \bar{U}_j \cap \bar{U}_t) \cup (\bar{U}_i \cap U_j \cap \bar{U}_t) \cup (\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \cap U_t).$$

Если p и r принадлежат одному из этих четырех множеств, то требуемое условие выполнено. Нетрудно проверяется, что условие выполнено и в случае, когда p и r принадлежат разным множествам. Например, если $p \in U_i \cap \bar{U}_j \cap \bar{U}_t$, а $r \in \bar{U}_i \cap \bar{U}_j \cap U_t$, то $p, r \in \bar{U}_j$.

Для завершения доказательства остается показать, что найдется тройка индексов i, j, t, $0 \leqslant i < j < t \leqslant 2k$, что $S(i, j, t)$ будет отличаться от каждого из множеств U_p и $\bar{U}_p$, $0 \leqslant p \leqslant 2k$.

Начнем с простого случая, когда $k = 1$. Нетрудно проверить, что

$$S(0, 1, 2) = U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_2 \notin \{U_0, U_1, U_2, \bar{U}_0, \bar{U}_1, \bar{U}_2\},$$

так как все множества различны и, кроме того, все U_i имеют общий элемент j_0:

$$U_i \vartriangle U_j \neq \varnothing \quad \text{и} \quad U_i \vartriangle U_j \neq J, \quad \text{при } i \neq j.$$

Предположим теперь, что $k > 1$. Рассмотрим тройки вида

$$U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant 2k.$$

Как было замечено выше,

$$U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_i \notin \{U_0, U_1, U_i\}.$$

Кроме того, $U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_i \neq \bar{U}_j$ при любом $j \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$, так как $j_0 \notin \bar{U}_j$. Предположим, что

$$U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_i = U_j \tag{2.16}$$

при некотором $j \in \{2, 3, \ldots, 2k\} \setminus \{i\}$. Но тогда, в силу свойств симметрической разности (свойство 1.1 на с. 13)

$$U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_j = U_i.$$

Причем

$$U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_t \neq U_j, \quad \forall t \neq i,$$

так как иначе $U_t = U_i$, что невозможно по условию. По тем же соображениям,

$$U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_t \neq U_i, \quad \forall t \neq j.$$

Таким образом, тройки, для которых выполнено условие (2.16), разбиваются на пары. Но общее число множеств U_i, $2 \leqslant i \leqslant 2k$, нечетно. То есть обязательно найдется множество U_i, для которого $S(0, 1, i) = U_0 \vartriangle U_1 \vartriangle U_i$ будет отличаться от всех остальных. ■

Учитывая, что $P_{\text{matsui}}(A)$ является гранью многогранника двойных покрытий, получаем

Следствие 2.15. *$P_{\text{2cover}} \not\leqslant_A P_{\text{stab}}$ и $P_{\text{cover}} \not\leqslant_A P_{\text{stab}}$.*

2.3. Многогранники с NP-полным критерием несмежности вершин

В этом разделе мы рассмотрим несколько семейств многогранников, к которым аффинно сводятся многогранники двойных покрытий. Как следствие, для всех этих многогранников задача проверки несмежности вершин NP-полна. Начнем с простых примеров.

2.3.1. Многогранники задачи о рюкзаке

Если в описании многогранников задачи о рюкзаке (уравнение (1.4) на с. 41) неравенство заменить равенством, то получим *многогранники задаче о рюкзаке с равенством*:

$$P_{\text{eq}}(\boldsymbol{a}, b) = \left\{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \;\middle|\; \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = b\right\}, \qquad \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^n, \quad b \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно,

$$P_{\text{eq}}(\boldsymbol{a}, b) \leqslant_A P_{\text{knap}}(\boldsymbol{a}, b).$$

Подсемейство многогранников $P_{\text{eq}}(\boldsymbol{a}, b)$, удовлетворяющее условию $2b = \boldsymbol{a}^T \mathbf{1}$, обозначим $P_{\text{numpart}}(\boldsymbol{a})$. Оно непосредственно связано с задачей о разбиении чисел, входящей в список из 21 задачи, NP-полнота которых была доказана в фундаментальной работе Карпа [102].

Теорема 2.16. *Для любой матрицы* $B \in \{0,1\}^{m\times n}$*, имеющей ровно четыре единицы в каждой строке, можно за полиномиальное (от её размера) время построить вектор* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^n$*,* $\|\boldsymbol{a}\|_\infty \leqslant 4^m$*, что* $P_{\text{2cover}}(B) =_A P_{\text{numpart}}(\boldsymbol{a})$*.*

Доказательство. Достаточно заметить, что система линейных диофантовых уравнений $B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ может быть агрегирована в одно уравнение (см. [18, 118]). Например, можно сложить все уравнения системы $B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$, предварительно умножив каждое из них на 4^i, где $i \in [m]$ — номер уравнения. ■

Следствие 2.17. *Задача проверки несмежности вершин для семейств многогранников* $P_{\text{numpart}}(\boldsymbol{a})$*,* $P_{\text{eq}}(\boldsymbol{a}, b)$ *и* $P_{\text{knap}}(\boldsymbol{a}, b)$ *NP-полна.*

Ранее этот результат об NP-полноте был получен в работах [59, 84, 110] иными методами.

2.3.2. Многогранники задачи о назначениях с ограничением

Пусть $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $b \in Z$. *Многогранник задачи о назначениях с ограничением* определяется как выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{CA}}(\boldsymbol{a}, b) = \left\{\boldsymbol{x} \in P_{\text{birk}}(n) \,\middle|\, \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\right\},$$

где $P_{\text{birk}}(n)$ — многогранник Биркгофа.

Интерес к этой задаче и её многограннику обусловлен многочисленными приложениями (см., например, [142]). NP-полнота задачи распознавания несмежности вершин этого многогранника была обнаружена Альфаки и Мурти [36].

Покажем, что многогранники задачи о рюкзаке с равенством аффинно сводятся к этому семейству.

Теорема 2.18. *Для каждого* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^n$ *и* $b \in Z$ *найдется* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^{2n\times 2n}$ *такой, что*

$$P_{\text{eq}}(\boldsymbol{a}, b) \leqslant_A P_{\text{CA}}(\boldsymbol{c}, b).$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что многогранник $P_{\text{birk}}(2n)$ содержит грань, являющуюся n-мерным кубом. Эта грань лежит в пересечении гиперплоскостей $x_{ij} = 0$, для всех (i, j) не входящих в множество

$$S = \{(i,i) \mid i \in [2n]\} \cup \{(2i-1, 2i) \mid i \in [n]\} \cup \{(2i, 2i-1) \mid i \in [n]\}.$$

Для данного по условию вектора $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим координаты вектора $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}$ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_p, & \text{если } i = j = 2p,\ p \in [n], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что множество вершин указанной выше грани (n-мерного куба), попадающих гиперплоскость $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = b$, аффинно эквивалентно многограннику $P_{\text{eq}}(\boldsymbol{a}, b)$. С другой стороны, оно же является гранью многогранника $P_{\text{CA}}(\boldsymbol{c}, b)$. ■

2.3.3. Многогранники задачи о k-выполнимости и задачи о частичном упорядочивании

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ — множество булевых переменных. Не уменьшая общности, полагаем $u_i \in \{0, 1\}$, где 1 трактуется как «истина», а 0 — как «ложь». Пусть $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ — некоторый набор дизъюнкций (конъюнкция дизъюнкций) над U.

Для каждого выполняющего конъюнкцию C набора значений переменных рассмотрим вектор $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \{0, 1\}^d$. Множество всех таких векторов обозначаем $P_{\text{sat}}(U, C)$, а его выпуклая оболочка называется *многогранником задачи о выполнимости*. В случае, если каждая дизъюнкция в C состоит ровно из k литералов, он называется *многогранником задачи о k-выполнимости*.

Теорема 2.19. *Для каждой матрицы $B \in \{0, 1\}^{m \times n}$, имеющей ровно четыре единицы в каждой строке, можно за линейное время построить конъюнкцию*

$C = \{C_1, \ldots, C_{8m}\}$ *над* $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *такую, что* $|C_i| = 3$, $i \in [8m]$, *и*

$$P_{2\mathrm{cover}}(B) =_A P_{\mathrm{sat}}(U, C).$$

Доказательство. Каждое уравнение вида $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ из системы $B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ можно заменить набором из восьми дизъюнкций:

$$\bigvee_{j \neq i} x_j \quad \text{и} \quad \bigvee_{j \neq i} \bar{x}_j, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

■

Следствие 2.20. *Задача распознавания несмежности двух произвольных вершин многогранника задачи о 3-выполнимости NP-полна.*

Ранее, Фиорини [76] доказал этот факт (NP-полноты несмежности вершин) непосредственно. В той же работе Фиорини показано, что многогранники задачи о 3-выполнимости тесно связаны с многогранниками задачи о частичном упорядочивании. Сформулируем ее на языке теории графов. Подграф $D' = (V, A')$ полного орграфа $D = (V, A)$ будем называть *частичным порядком*, если он ацикличен и транзитивен:

$$((u, v) \in A') \& ((v, w) \in A') \Rightarrow (u, w) \in A'.$$

Многогранник частичных порядков представляет собой выпуклую оболочку множества $P_{\mathrm{PO}}(n)$ характеристических векторов всех частичных порядков полного орграфа на n вершинах.

Теорема 2.21 (Фиорини [76, Lemma 3.2]). *Многогранник задачи о 3-выполнимости* $P_{\mathrm{sat}}(U, C)$, $U = \{u_1, \ldots, u_d\}$, $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$, $|C_i| = 3$, $i \in [n]$, *аффинно эквивалентен грани многогранника частичных порядков* $P_{\mathrm{PO}}(m)$ *при* $m = 3d + 7n$.

Из этого, в частности, следует NP-полнота задачи распознавания несмежности вершин для многогранника частичных порядков.

Более того, семейства многогранников частичных порядков и многогранников задачи о 3-выполнимости эквивалентны с точки зрения аффинной сводимости.

Теорема 2.22 (Фиорини [76, Theorem 1.2]). *Многогранник $P_{\mathrm{PO}}(m)$ аффинно эквивалентен грани многогранника задачи о 3-выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U, C)$, где $|U| = n(n-1)+1$, $|C| = n(n-1)(n-3/2)$.*

Рассмотрим теперь отдельно семейства многогранников задачи о k-выполнимости для разных $k \geqslant 3$ (случай $k = 2$ не представляет интереса). Почти очевидно следующее утверждение.

Лемма 2.23 (Фиорини [76, Lemma 4.1]). *Многогранник задачи о выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U, C)$ при $|c| \leqslant k$, $c \in C$, является гранью многогранника задачи о k-выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U', C')$, где $|C'| = |C|$, $|U'| = |U| + k - m$, $m = \min\{|c| \mid c \in C\}$.*

Оказывается, семейства многогранников задачи о k-выполнимости для разных значений $k \geqslant 3$ относятся к разным классам эквивалентности с точки зрения аффинной сводимости.

Теорема 2.24 (Фиорини [76, Proposition 4.1]). *Существуют примеры многогранников задачи о k-выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U, C)$ при $|U| = k$ и $|C| \geqslant 1$ такие, что для любых U' и C', при условии $|c'| < k$, $c' \in C'$, справедливо*

$$P_{\mathrm{sat}}(U, C) \not\leqslant_A P_{\mathrm{sat}}(U', C').$$

Рассмотрим теперь семейство всех многогранников задачи о выполнимости $P_{\mathrm{sat}} = \{P_{\mathrm{sat}}(U, C)\}$ и покажем, что оно эквивалентно многогранникам покрытий.

Теорема 2.25. $P_{\mathrm{cover}} \propto_A P_{\mathrm{sat}} \propto_A P_{\mathrm{cover}}$.

Доказательство. Пусть $A \in \{0,1\}^{m \times n}$. Рассмотрим $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и для каждого неравенства вида

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} \geqslant 1$$

системы $A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{1}$ добавим в C дизъюнкцию

$$u_{i_1} \vee u_{i_2} \vee \cdots \vee u_{i_k}.$$

Очевидно,

$$P_{\text{cover}}(A) =_A P_{\text{sat}}(U, C).$$

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — некоторый набор булевых переменных и $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ — конъюнкция дизъюнкций над U. Для каждого $i \in [n]$ введем в рассмотрение пару переменных x_i и $\bar{x}_i$, и свяжем их неравенством

$$x_i + \bar{x}_i \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Переменные x_i будут соответствовать литералам u_i в C, а переменные $\bar{x}_i$ — литералам $\bar{u}_i$. Для каждой дизъюнкции C_j, $j \in [m]$, заменяя литералы соответствующими переменными, расставляя вместо $\vee$ знаки сложения, и добавляя справа $\geqslant 1$, получим m неравенств. Вместе с неравенствами (2.17) они описывают некоторый многогранник $P_{\text{cover}}(A)$. Заменяя неравенство в (2.17) равенством, получим грань этого многогранника, аффинно эквивалентную $P_{\text{sat}}(U, C)$. ■

2.3.4. Многогранники кубических подграфов

Пусть $G = (V, E)$ — полный граф на k вершинах и пусть T_k — множество всех его кубических подграфов. (Напомним, что степень каждой вершины кубического графа равна трем.) *Многогранником кубических подграфов* называется выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{3-factor}}(k) = \left\{\chi(H) \in \{0, 1\}^E \;\middle|\; H \in T_k\right\}.$$

Известно, что задача проверки несмежности вершин этого многогранника NP-полна [49]. Покажем, что многогранники двойных покрытий являются гранями этого многогранника.

Теорема 2.26. *$P_{\text{2cover}}(A) \leqslant_A P_{\text{3-factor}}(k)$, где матрица $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ имеет ровно четыре единицы в каждой строке и $k = 6m+4s+2t$, s — число столбцов матрицы A, содержащих лишь одну единицу, t — число столбцов матрицы A, содержащих ровно две единицы.*

Доказательство. Через $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \{0,1\}^n$ будем обозначать вектор, удовлетворяющий условию $A\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$, определяющему вершины многогранника $P_{2\text{cover}}(A)$. Через $\boldsymbol{y} = (y_{lh}) \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}$ — характеристический вектор кубического подграфа графа $G = (V, E)$ из описания многогранника $P_{3\text{-factor}}(k)$. Воспользуемся тем, что для многогранника $P_{3\text{-factor}}(k)$ гиперплоскости вида $y_{lh} = 0$ являются опорными. Искомую грань будем определять как пересечение нескольких таких гиперплоскостей. Очевидно, если выполнено $y_{lh} = 0$, то мы можем рассматривать только те подграфы графа G, которые не содержат ребро (v_l, v_h). Таким образом, чтобы определить нужную нам грань, мы опишем некоторый подграф G' графа G, подразумевая, что для не входящих в него ребер выполнено $y_{lh} = 0$.

Разберем в начале случай, когда в каждом *столбце* матрицы A присутствует не менее трех единиц. Множество вершин V графа G будет состоять из трех подмножеств: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ и T, где $|T| = 4m$. Обозначения элементов множества T поставим в зависимость от содержимого матрицы A:

$$T = \{t_{ij} \mid a_{ij} = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

(Поскольку каждая строка матрицы A содержит ровно 4 единицы, то $|T| = 4m$.)

Все вершины t_{ij} с одинаковым вторым индексом $j = \mathrm{const}$ соединяем ребрами в циклы (порядок соединения не важен). Напомним, что, по предположению, в каждом столбце матрицы A содержится не менее трех ненулевых элементов. Всего образуется n таких циклов. Вершины множества W тоже соединяем циклом. Добавляем в граф G' ребра (w_i, u_i) и ребра (u_i, t_{ij}), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Как уже было сказано ранее, построенный подграф G' определяет некоторую опорную гиперплоскость к многограннику кубических подграфов. Рассмотрим еще одну опорную гиперплоскость, положив степени вершин множества W равными трем. Пересечение обеих указанных гиперплоскостей с многогранником кубических подграфов и будет искомой гранью. Нетрудно проверить, что множество ее вершин аффинно эквивалентно множеству вершин многогранника соответствующей задачи о двойном покрытии.

Остается рассмотреть тот случай, когда (некоторые) столбцы матрицы A содержат одну или две единицы. Сложность здесь состоит лишь в том, чтобы соединить соответствующие одну или две вершины множества T в цикл. Чтобы сделать цикл «с одной вершиной», добавим в T четыре вспомогательные: s_{j1}, s_{j2}, s_{j3}, s_{j4}. Для цикла «с двумя вершинами» добавим в множество T две: s_{j1}, s_{j2}. Соединим их так, как показано на рис. 2.2.

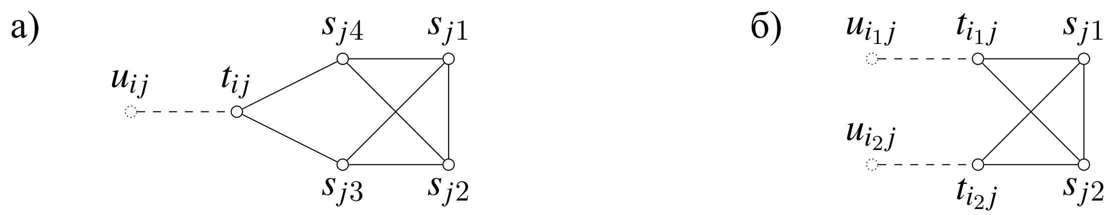

Рис. 2.2. Циклы с «одной» и «двумя» вершинами.

Очевидно, что это не внесет существенных изменений в общую конструкцию, а число вершин увеличится на $4s + 2t$, где s — число столбцов матрицы A, содержащих лишь одну единицу, t — число столбцов с двумя единицами. ■

2.4. Многогранники с простым критерием смежности вершин

2.4.1. Многогранник трехиндексной задачи о назначениях

Пусть S — конечное множество. Координаты вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{S\times S\times S}$ будем обозначать $x(s,t,u)$, где $s,t,u \in S$. *Трехиндексная аксиальная задача о назначениях* (или *3-сочетаниях*) может быть сформулирована как следующая задача 0/1-программирования:

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in S}\sum_{u\in S} c(s,t,u)\cdot x(s,t,u) \to \max,$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in S} x(s,t,u) = 1 \quad \forall u \in S, \tag{2.18}$$

$$\sum_{s\in S}\sum_{u\in S} x(s,t,u) = 1 \quad \forall t \in S, \tag{2.19}$$

$$\sum_{t\in S}\sum_{u\in S} x(s,t,u) = 1 \quad \forall s \in S, \tag{2.20}$$

$$x(s,t,u) \in \{0,1\} \quad \forall s,t,u \in S, \tag{2.21}$$

где $c(s,t,u) \in \mathbb{Z}$ — координаты вектора входных данных. Через $P_{\text{3-A}}(m)$, $m = |S|$, обозначим множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{S\times S\times S}$, удовлетворяющих ограничениям (2.18)–(2.21). Выпуклая оболочка множества $P_{\text{3-A}}(m)$ называется *многогранником трехиндексной аксиальной задачи о назначениях*. Далее, в целях экономии места, мы будем опускать слово «аксиальной».

По-видимому, первыми работами, посвященными изучению свойств этого многогранника, являются [74] и [41]. Более свежий обзор имеется в [125]. В работах Кравцова (см. [19] и ссылки в ней) изучаются свойства нецелочисленных вершин релаксаций этого многогранника.

Очевидно, $P_{\text{3-A}}(m)$ является частным случаем $P_{\text{part}}(A)$:

$$P_{\text{3-A}}(m) =_A P_{\text{part}}(A), \tag{2.22}$$

где A — $(3m \times m^3)$-матрица, образованная коэффициентами левых частей уравнений (2.18)–(2.20). Таким образом, семейство многогранников трехиндексной задачи о назначениях аффинно сводится к многогранникам разбиений:

$$P_{\text{3-A}} \propto_A P_{\text{part}}.$$

Пользуясь стандартным алгоритмом сведéния задачи 3-выполнимость к задаче 3-сочетаний [14], Авис и Тивари [39] показали, что многогранник задачи 3-выполнимость $P_{\text{sat}}(U,C)$, $|c| = 3$, $c \in C$, является проекцией грани многогранника $P_{\text{3-A}}(m)$, где $m = O(kn)$, $k = |U|$, $n = |C|$. Однако, из неравенства (2.22) и теоремы 2.6 об эквивалентности P_{stab} и P_{part} следует, что $P_{\text{3-A}} \propto_A P_{\text{stab}}$. С другой стороны, так как семейство P_{2cover} аффинно сводится к многогранникам задачи

3-выполнимость (теорема 2.19), а P_{stab} не может быть сведено к $P_{2\text{cover}}$ (теорема 2.14), то аффинное свéдение многогранников задачи 3-выполнимость к $P_{3\text{-A}}$ невозможно.

Покажем, что $P_{\text{stab}} \propto_A P_{3\text{-A}}$. Таким образом, $P_{3\text{-A}}$ окажется в одном классе эквивалентности вместе с P_{stab}, P_{part} и P_{pack}.

Для графа $G(V, E)$ в определении многогранника $P_{\text{stab}}(G)$ через

$$V_{\text{isol}} = \{v \in V \mid v \notin e \ \forall e \in E\},$$

обозначим множество изолированных вершин.

Теорема 2.27. *$P_{\text{stab}}(G) \leqslant P_{3\text{-A}}(m)$ при $m = 3|E| + 2|V_{isol}|$.*

Доказательство. Множество S в определении $P_{3\text{-A}}(m)$ составим из трех типов элементов:

1. v и $\bar{v}$ для каждой изолированной вершины $v \in V_{\text{isol}}$.

2. e для каждого ребра $e \in E$.

3. (e, v) для каждого $e \in E$ и $v \in e$.

Построим множество троек $Q \subset S \times S \times S$ так, чтобы грань

$$F = \left\{x \in P_{3\text{-A}}(m) \mid x(q) = 0 \ \forall q \notin Q\right\}$$

многогранника $P_{3\text{-A}}(m)$ была аффинно эквивалентна многограннику $P_{\text{stab}}(G)$.

Для каждого $v \in V_{\text{isol}}$ множество Q будет содержать четыре тройки:

$$(v, v, v), \quad (\bar{v}, \bar{v}, \bar{v}), \quad (v, v, \bar{v}), \quad (\bar{v}, \bar{v}, v).$$

Других троек, содержащих v или $\bar{v}$ в Q нет. Следовательно, если $\boldsymbol{x} \in F$, то для каждого $v \in V_{\text{isol}}$ возможны только две альтернативы:

$$x(v, v, v) = x(\bar{v}, \bar{v}, \bar{v}) = 1 \quad \text{или} \quad x(v, v, \bar{v}) = x(\bar{v}, \bar{v}, v) = 1.$$

Рассмотрим теперь элементы e и (e, v) множества S, где $e \in E$ и $v \in e$. Для каждой неизолированной вершины $v \in V \setminus V_{\mathrm{isol}}$ рассмотрим множество инцидентных ей ребер $E(v) = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\}$, где $p = d_G(v)$ — степень вершины v. Множество троек Q содержит

1. $\bigl(e, e, e\bigr)$ для каждого $e \in E$.

2. $\bigl((e, v), (e, v), (e, v)\bigr)$ для всех $e \in E$ и $v \in e$.

3. $\bigl(e, e, (e, v)\bigr)$ для всех $e \in E$ и $v \in e$.

4. $\bigl((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}\bigr)$ для каждой неизолированной вершины v и каждого $e_{i_q} \in E(v)$, где сложение $q + 1$ выполняется по модулю p.

Полагая $x(u, v, w) = 0$ для всех остальных троек $(u, v, w) \notin Q$, перейдем к рассмотрению соответствующей грани многогранника $P_{3\text{-A}}(m)$. Перечислим некоторые свойства её вершин.

Заметим, что для каждого $(e, v) \in S$ множество Q содержит в точности две тройки с элементом (e, v) в третьей компоненте: $\bigl((e, v), (e, v), (e, v)\bigr)$ и $\bigl(e, e, (e, v)\bigr)$. Следовательно, уравнение (2.18) для $u = (e, v)$ принимает вид

$$x\bigl((e, v), (e, v), (e, v)\bigr) + x\bigl(e, e, (e, v)\bigr) = 1. \tag{2.23}$$

То есть, $x\bigl((e, v), (e, v), (e, v)\bigr)$ выражается линейно через $x\bigl(e, e, (e, v)\bigr)$.

Заметим также, что для каждого $e \in S$ множество Q содержит ровно три тройки с элементом e в первой компоненте: $\bigl(e, e, e\bigr)$, $\bigl(e, e, (e, v_1)\bigr)$ и $\bigl(e, e, (e, v_2)\bigr)$, где $e = \{v_1, v_2\}$. Следовательно, уравнение (2.20) при $s = e$ эквивалентно

$$x\bigl(e, e, e\bigr) + x\bigl(e, e, (e, v_1)\bigr) + x\bigl(e, e, (e, v_2)\bigr) = 1.$$

То есть $x\bigl(e, e, e\bigr) = 1 - x\bigl(e, e, (e, v_1)\bigr) - x\bigl(e, e, (e, v_2)\bigr)$ и

$$x\bigl(e, e, (e, v_1)\bigr) + x\bigl(e, e, (e, v_2)\bigr) \leqslant 1. \tag{2.24}$$

Рассуждая по аналогии, получаем следующее уравнение

$$x\big((e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v)\big) + x\big((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}\big) = 1$$

для каждой неизолированной v и каждого $e_{i_q} \in E(v)$, где сложение $q+1$ выполняется по модулю $p = d_G(v)$. Вместе с уравнением (2.23) получаем

$$x\big((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}\big) = 1 - x\big((e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v)\big) = x\big(e_{i_q}, e_{i_q}, (e_{i_q}, v)\big). \quad (2.25)$$

Кроме того, так как

$$x\big((e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v)\big) + x\big((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}\big) = 1,$$

то

$$x\big((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}\big) = 1 - x\big((e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v)\big) = x\big(e_{i_{q+1}}, e_{i_{q+1}}, (e_{i_{q+1}}, v)\big). \quad (2.26)$$

Так как левые части формул (2.25) и (2.26) совпадают, то

$$x\big(e_{i_{q+1}}, e_{i_{q+1}}, (e_{i_{q+1}}, v)\big) = x\big(e_{i_q}, e_{i_q}, (e_{i_q}, v)\big).$$

Значит $x\big(e, e, (e, v)\big) = x\big(e', e', (e', v)\big)$ для любых двух ребер e и e', $v \in e$, $v \in e'$.

Таким образом, для вершин описанной грани F все переменные $x(s, t, u)$ выражаются линейно через $x\big(e, e, (e, v)\big)$, а неравенство (2.24) является неравенством вида $y_i + y_j \leqslant 1$ из описания многогранника $P_{\mathrm{stab}}(G)$. ■

Замечание 2.2. Полученные результаты могут быть легко обобщены на случай p-индексной задачи о назначениях ($p > 3$). По аналогии, вершины $P_{p\text{-A}}(m)$ многогранника p-индексной аксиальной задачи о назначениях являются 0/1-векторами в $\mathbb{R}^{m^p}$. Координаты $x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $i_1, i_2, \ldots, i_p \in \{1, 2, \ldots, p\}$, каждого такого вектора удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\sum_{i_2,i_3,\ldots,i_p} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 1 \quad \forall i_1 \in \{1,\ldots,p\},$$
$$\sum_{i_1,i_3,i_4,\ldots,i_p} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 1 \quad \forall i_2 \in \{1,\ldots,p\},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{p-1}} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 1 \quad \forall i_p \in \{1,\ldots,p\}.$$

Очевидно,

$$P_{p\text{-A}}(m) \leqslant_A P_{\text{part}}(A),$$

для некоторой (просто определяемой) матрицы $A \in \{0,1\}^{pm \times m^p}$. С другой стороны, уравнения

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0 \quad \forall i_p \neq i_{p-1}$$

определяют грань многогранника $P_{p\text{-A}}(m)$, аффинно эквивалентную $P_{(p-1)\text{-A}}(m)$. Таким образом, по теореме 2.27

$$P_{\text{stab}}(G) \leqslant_A P_{p\text{-A}}(m) \quad \text{при } m = 3|E| + 2|V_{\text{isol}}| \leqslant 3|V|(|V|-1)/2.$$

2.4.2. Многогранники квадратичной задачи линейных упорядочиваний и квадратичной задачи о назначениях

Начнем с описания задачи линейного упорядочивания на языке теории графов.

Пусть $D = (V, A)$ — орграф, $V = \{1, 2, \ldots, m\}$. Предполагается, что орграф D полный, то есть $(i, j) \in A$ и $(j, i) \in A$ для всех $i, j \in V$, $i \neq j$. Ацикличный турнир в орграфе D будем называть *линейным порядком*. Эквивалентное определение: линейный порядок — это частичный порядок являющийся турниром.

Координаты y_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant m$ характеристического вектора $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m(m-1)/2}$

для линейного порядка L в D определим следующим образом:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } (i,j) \in L, \\ 0 & \text{если } (j,i) \in L. \end{cases}$$

Обозначим через $P_{\mathrm{LO}}(m)$ множество всех характеристических векторов линейных порядков в D. Выпуклая оболочка $P_{\mathrm{LO}}(m)$ называется *многогранником линейных порядков*. $P_{\mathrm{LO}}(m)$ может быть также определен как множество векторов $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{m(m-1)/2}$, удовлетворяющих 3-контурым неравенствам (см., например, [88]):

$$0 \leqslant y_{ij} + y_{jk} - y_{ik} \leqslant 1, \quad i < j < k. \tag{2.27}$$

В [52] многогранник квадратичной задачи линейного упорядочивания определен следующим образом. Пусть

$$I = \big\{(i,j,k,l) \mid i < j,\ k < l,\ \text{и } (i,j) \prec (k,l)\big\},$$

где $(i,j) \prec (k,l)$ означает либо $i < k$, либо $i = k$ и $j < l$. Для каждой пары различных переменных y_{ij} и y_{kl} вводится новая переменная

$$z_{ijkl} = y_{ij} y_{kl}, \quad (i,j,k,l) \in I. \tag{2.28}$$

Обозначим через $P_{\mathrm{QLO}}(m)$ множество всех векторов $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^d$, $d = \binom{m}{2}\left(\binom{m}{2}+1\right)/2$, с координатами y_{ij} и z_{ijkl}, удовлетворяющих ограничениям (2.27) и (2.28). Выпуклая оболочка множества $P_{\mathrm{QLO}}(m)$ называется *многогранником квадратичной задачи линейного упорядочивания*.

Теорема 2.28 ([52]). *$P_{\mathrm{QLO}}(m) \leqslant_A P_{\mathrm{BQP}}(n)$ при $n = \binom{m}{2}$.*

Бучхейм, Вигеле и Женг [52] используют этот факт в алгоритме ветвей и отсечений для решения квадратичной задачи линейного упорядочивания.

Покажем, что аффинное сведéние в обратную сторону также возможно.

Теорема 2.29. *$P_{\mathrm{BQP}}(n) \leqslant_A P_{\mathrm{QLO}}(m)$ при $m = 2n$.*

Доказательство. Идея доказательства проста. Покажем, что среди граней $P_{\text{LO}}(m)$ есть n-мерный куб. При переходе от $P_{\text{LO}}(m)$ к $P_{\text{QLO}}(m)$ этот куб преобразуется в булев квадратичный многогранник.

Воспользуемся тем, что равенства $y_{ij} = 0$ и $y_{ij} = 1$ определяют опорные гиперплоскости для $P_{\text{LO}}(m)$ и $P_{\text{QLO}}(m)$. Пусть

$$J = \{(2i-1, 2i) \mid i \in [n]\}.$$

Положим

$$y_{ij} = 0 \quad \text{для всех } (i,j) \notin J,\ 1 \leqslant i < j \leqslant m. \tag{2.29}$$

Незафиксированными остаются только переменные y_{ij}, где i нечетно и $j = i + 1$. Обратим внимание на 3-контурные неравенства (2.27). Предполагая $i < j < k$, имеем два случая:

1. Если $(i,j) \notin J$, то $y_{ij} = y_{ik} = 0$. Тогда неравенство (2.27) преобразуется в $0 \leqslant y_{jk} \leqslant 1$.

2. Если $(i,j) \in J$, то i нечетно, $j = i + 1$ четно и $k > i + 1$. Следовательно, неравенство (2.27) эквивалентно $0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1$.

Таким образом, n переменных $y_{i\,i+1}$, где i четно, могут принимать значения 0 или 1 независимо друг от друга. Следовательно, гиперплоскости (2.29) определяют грань $P_{\text{LO}}(m)$, являющуюся n-мерным кубом.

Обратим внимание на переменные z_{ijkl}, $(i,j,k,l) \in I$. Если $(i,j) \notin J$ или $(k,l) \notin J$, то $z_{ijkl} = 0$. В случае $(i,j) \in J$ и $(k,l) \in J$ имеем $z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}$, и, кроме того, y_{ij} и y_{kl} не связаны никакими другими зависимостями.

Таким образом, описанная грань $P_{\text{QLO}}(m)$ и многогранник $P_{\text{BQP}}(n)$ связаны следующим аффинным невырожденным отображением:

$$x_{ii} = y_{2i-1,\,2i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$x_{ij} = z_{2i-1,\,2i,\,2j-1,\,2j} = y_{2i-1,\,2i} \cdot y_{2j-1,\,2j}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

где $\boldsymbol{y} \in P_{\text{QLO}}(m)$, $\boldsymbol{x} \in P_{\text{BQP}}(n)$. ■

Для многогранника квадратичной задачи о назначениях история повторяется почти дословно.

Множество вершин $P_{\mathrm{birk}}(m)$ многогранника задачи о назначениях (многогранника Биркгофа) состоит из векторов $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{m\times m}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_j y_{ij} = 1, \ \forall i \in [m], \tag{2.30}$$

$$\sum_i y_{ij} = 1, \ \forall j \in [m]. \tag{2.31}$$

Чтобы определеить многогранник квадратичной задачи о назначениях, введем новые переменные z_{ijkl} так же, как это было сделано в (2.28):

$$z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}, \text{ где } (i,j) \prec (k,l). \tag{2.32}$$

Обозначим через $P_{\mathrm{QA}}(m)$ множество всех векторов $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^d$, $d = m^2 + \binom{m^2}{2}$, с координатами y_{ij} и z_{ijkl}, удовлетворяющих условиям (2.30), (2.31) и (2.32). Выпуклая оболочка множества $P_{\mathrm{QA}}(m)$ называется *многогранником квадратичной задачи о назначениях*. В литературе также встречается описание *многогранника квадратичных полуназначений* [134]. При определении его множества вершин $P_{\mathrm{QSA}}(m)$ условие (2.31) опускается.

Теорема 2.30 ([94, 127, 134]). *$P_{\mathrm{QA}}(m) \leqslant_A P_{\mathrm{QSA}}(m) \leqslant_A P_{\mathrm{BQP}}(n)$ при $n = m^2$.*

Эта связь используется в [94] для вывода неравенств, допустимых для $P_{\mathrm{QA}}(m)$. В частности, так как $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ 2-смежностен, то $P_{\mathrm{QA}}(m)$ тоже 2-смежностен. В [94] также показано, что многогранник линейных порядков $P_{\mathrm{LO}}(m)$ и многогранник коммивояжера $P_{\mathrm{TSP}}(m)$ являются проекциями некоторых граней многогранника $P_{\mathrm{QA}}(m)$. Заметим, что аффинные сводимости $P_{\mathrm{LO}} \propto_A P_{\mathrm{QA}}$ и $P_{\mathrm{TSP}} \propto_A P_{\mathrm{QA}}$ невозможны, так как $P_{\mathrm{LO}}(m)$ не 2-смежностен при $m \geqslant 3$ [147], а $P_{\mathrm{TSP}}(m)$ не 2-смежностен при $m \geqslant 6$ [119].

Теорема 2.31. *$P_{\mathrm{BQP}}(n) \leqslant_A P_{\mathrm{QA}}(m)$ для $m = 2n$.*

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2.29, достаточно заметить, что многогранник Биркгофа $P_{\text{birk}}(2n)$ содержит грань, являющуюся n-мерным кубом. (Здесь мы используем тот же факт, что и при доказательстве теоремы 2.18.) Положим

$$S = \{(i,i) \mid i \in [2n]\} \cup \{(2i-1, 2i) \mid i \in [n]\} \cup \{(2i, 2i-1) \mid i \in [n]\}.$$

Тогда уравнения

$$y_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \notin S$$

определяют требуемую грань. ■

Таким образом, семейства многогранников P_{QLO}, P_{QA} и P_{QSA} находятся в одном классе эквивалентности (в смысле $\propto_A$) вместе с P_{BQP} и P_{cut}.

2.5. Многогранники раскрасок и деревьев Штейнера в графе

2.5.1. Многогранники деревьев Штейнера

Пусть $G = (V, E)$ — реберно-взвешенный граф, а T — некоторое подмножество его вершин. *Деревом Штейнера на T* называется подграф $G' = (V', E')$, $T \subseteq V'$, графа G, являющийся деревом. Задача Штейнера (в графе) заключается в отыскании дерева Штейнера с минимальным суммарным весом ребер. *Многогранником деревьев Штейнера* называется выпуклая оболочка множества $P_{\text{steiner}}(G, T) \subseteq \{0, 1\}^E$ всех характеристических векторов деревьев Штейнера на T [58].

Теорема 2.32. *Для любого графа $G = (V, E)$ за линейное время можно построить граф $G' = (V', E')$, $|V'| = |V| + |E| + 1$, $|E'| = 4|E| + |V|$, и указать множество $T \subset V'$ такие, что $P_{\text{stab}}(G) \leqslant_A P_{\text{steiner}}(G', T)$.*

Доказательство. Пусть $G = ([n], E)$ — граф, определяющий многогранник $P_{\text{stab}}(G)$. Положим

$$T = \{v_0'\} \cup \left\{t_{ij} \,\middle|\, i < j,\ \{i,j\} \in E\right\}$$

и определим множество вершин и ребер графа $G' = (V', E')$ следующим образом:

$$V' = T \cup \{v'_1, \ldots, v'_n\} \cup \{v'_{ij} \mid i < j,\ \{i, j\} \in E\},$$

$$E' = \{\{v'_0, v'\} \mid v' \in V' \setminus T\} \cup \{\{v'_{ij}, t_{ij}\}\} \cup \{\{v'_k, t_{ij}\} \mid k \in \{i, j\}\}.$$

Таким образом, каждая вершина t_{ij} инцидентна ровно трем ребрам

$$\{v', t_{ij}\}, \quad v' \in V_{ij} = \{v'_{ij}, v'_i, v'_j\}.$$

Причем как минимум одно из них должно входить в дерево Штейнера на T. Следовательно, неравенство

$$x_{\{v'_{ij}, t_{ij}\}} + x_{\{v'_i, t_{ij}\}} + x_{\{v'_j, t_{ij}\}} \geqslant 1$$

выполнено для каждого $\boldsymbol{x} \in P_{\text{steiner}}(G', T) \subset \{0, 1\}^{E'}$. Полагая

$$x_{\{v'_{ij}, t_{ij}\}} + x_{\{v'_i, t_{ij}\}} + x_{\{v'_j, t_{ij}\}} = 1, \tag{2.33}$$

перейдем к рассмотрению соответствующей грани многогранника деревьев Штейнера.

Предположим, что некоторое ребро $\{v', t_{ij}\}$, $v' \in V_{ij}$ входит в дерево Штейнера на T. Тогда, в силу того, что t_{ij} и v'_0 должны быть связаны, а степени всех вершин из $T \setminus \{v'_0\}$ равны единице, приходим к выводу, что ребро $\{v', v'_0\}$ обязано присутствовать в этом дереве. Другими словами, $x_{\{v'_0, v'\}} \geqslant x_{\{v', t_{ij}\}}$, $v' \in V_{ij}$. Очевидно, ограничения

$$x_{\{v'_0, v'\}} = x_{\{v', t_{ij}\}}, \quad v' \in V_{ij},$$

вместе с (2.33) определяют некоторую грань многогранника $P_{\text{steiner}}(G', T)$. Таким образом, все координаты вектора $\boldsymbol{x}$, принадлежащего множеству вершин этой грани, выражаются линейно через координаты $x_{\{v'_0, v'\}}$, $v' \in V' \setminus T$. Кроме того, для них выполняются ограничения

$$x_{\{v'_0, v'_{ij}\}} + x_{\{v'_0, v'_i\}} + x_{\{v'_0, v'_j\}} = 1.$$

То есть координаты $x_{\{v_0',v_{ij}'\}}$ линейно зависят от $x_{\{v_0',v_i'\}}$ и $x_{\{v_0',v_j'\}}$, и последнее уравнение эквивалентно ограничению

$$x_{\{v_0',v_i'\}} + x_{\{v_0',v_j'\}} \leqslant 1.$$

Таким образом, описанная грань многогранника $P_{\text{steiner}}(G',T)$ оказывается аффинно эквивалентна многограннику $P_{\text{stab}}(G)$, если положить $y_i = x_{\{v_0',v_i'\}}$ для $\boldsymbol{y} \in P_{\text{stab}}(G)$. ■

2.5.2. Многогранники раскрасок вершин графа

Одной из наиболее известных NP-полных задач является задача о раскраске вершин графа [102], сформулированная выше, на с. 36. Она имеет многочисленные приложения от составления расписаний и распределения частот в сетях сотовой связи, до распределения ресурсов в компиляторах и автоматизации вычисления производных [53]. В литературе можно найти несколько принципиально отличающихся друг от друга определений многогранников раскрасок графа. Рассмотрим несколько наиболее естественных определений, отбросив, в частности, те, где размерность многогранника экспоненциальна относительно числа вершин графа. Далее предполагаем, что раскрашиваемый граф $G = (V, E)$ не содержит изолированных вершин (раскраска которых тривиальна) и не является полным.

Стандартная формулировка

Для каждой раскраски графа $G = (V, E)$ рассмотрим её характеристический вектор $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{V \times k}$, $1 \leqslant k \leqslant |V|$, координаты которого определим следующим образом:

$$x_{v,c} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ раскрашена цветом } c, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Множество всех таких векторов обозначим $P_{\text{color1}}(G, k)$. Нетрудно заметить, что это множество может быть описано следующим набором ограничений [69, 112]:

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leqslant 1, \qquad \{v, u\} \in E, \quad c \in [k], \tag{2.34}$$

$$\sum_{c=1}^{k} x_{v,c} = 1, \qquad v \in V, \tag{2.35}$$

$$x_{v,c} \in \{0, 1\}, \qquad v \in V, \quad c \in [k].$$

Здесь неравенство (2.34) запрещает окрашивать смежные вершины одним цветом, а уравнение (2.35) означает, что каждая вершина будет окрашена ровно одним цветом. Очевидно, множество $P_{\text{color1}}(G, k)$ не пусто тогда и только тогда, когда вершины графа G могут быть раскрашены в k цветов. А минимизируя на этом множестве линейную функцию

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{v \in V,\ c \in [k]} x_{v,c} |V|^c$$

можно найти раскраску с наименьшим числом цветов.

Утверждение 2.33. *$P_{\text{stab}}(G) \leqslant_A P_{\text{color1}}(G, |V|)$ для любого графа $G = (V, E)$.*

Доказательство. Для удобства положим $V = [n]$. Рассмотрим грань многогранника $P_{\text{color1}}(G, |V|)$, лежащую в пересечении гиперплоскостей

$$x_{v,c} = 0, \quad \text{где } v \neq c \text{ и } c \neq 1.$$

Тогда уравнения (2.35) примут вид

$$x_{v,1} + x_{v,v} = 1, \qquad v \in [n],$$

А из неравенств (2.34) нетривиальными останутся лишь

$$x_{v,1} + x_{u,1} \leqslant 1, \qquad \{v, u\} \in E.$$

Очевидно, эта грань аффинно эквивалентна многограннику $P_{\text{stab}}(G)$. ■

Значительное внимание в литературе (см., например, [53, 113]) уделяется следующей модификации этого многогранника. Положим $V = [n]$ и $k = n$, а неравенства (2.34) заменим на

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leqslant w_c, \qquad \{v, u\} \in E, \quad c \in [n],$$
$$w_c \in \{0, 1\}, \qquad c \in [n].$$

(Если переменная w_c равна нулю, то цвет c не используется.) Обозначим множество векторов $\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^{n(n+1)}$, удовлетворяющих этим ограничениям, через $P_{\text{color2}}(G)$. При таком подходе целевая функция для задачи поиска хроматического числа графа G приобретает особенно простой вид:

$$\sum_{c \in [n]} w_c \to \min .$$

Очевидно,

$$P_{\text{color1}}(G, k) \leqslant_A P_{\text{color2}}(G).$$

Достаточно положить $w_c = 1$ при $c \in [k]$ и $w_c = 0$ при $c > k$.

Покажем теперь, что семейства многогранников P_{color1} и P_{color2} лежат в одном классе эквивалентности с многогранниками независимых множеств. Так как $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{color1}} \propto_A P_{\text{color2}}$, то остается доказать $P_{\text{color2}} \propto_A P_{\text{stab}}$.

Утверждение 2.34. *Для любого графа $G = ([n], E)$ за линейное время можно построить $G' = (V', E')$, $|V'| = n(n + 2)$, $|E'| = n^2(n + 1)/2 + (|E| + 1)n$, что*

$$P_{\text{color2}}(G) \leqslant_A P_{\text{stab}}(G').$$

Доказательство. Достаточно систему ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i \in [n], \tag{2.36}$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leqslant w_j, \qquad \{i, k\} \in E, \quad j \in [n], \tag{2.37}$$

описывающую многогранник $P_{\text{color2}}(G)$, преобразовать в систему ограничений вида $y_i + y_j \leqslant 1$.

Заметим, прежде всего, что неравенства (2.37) эквивалентны неравенствам

$$\begin{aligned} x_{ij} &\leqslant w_j, && i,j \in [n], \\ x_{ij} + x_{kj} &\leqslant 1, && \{i,k\} \in E, \quad j \in [n], \end{aligned} \tag{2.38}$$

при условии целочисленности переменных.

Введем дополнительные переменные $\bar{w}_j \in \{0,1\}$, $j \in [n]$, и рассмотрим систему ограничений

$$\begin{aligned} x_{ij} + x_{ik} &\leqslant 1, && i,j,k \in [n], \quad j < k, \\ w_j + \bar{w}_j &\leqslant 1, && j \in [n], \\ x_{ij} + \bar{w}_j &\leqslant 1, && i,j \in [n], \\ x_{ij} + x_{kj} &\leqslant 1, && \{i,k\} \in E, \quad j \in [n]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Очевидно, она определяет многогранник $P_{\text{stab}}(G')$ для некоторого графа $G' = (V', E')$, где $|V'| = n(n+2)$, $|E'| = n^2(n+1)/2+(|E|+1)n$. Полагая $w_j+\bar{w}_j = 1$, перейдем к рассмотрению некоторой грани этого многогранника. Ограничение (2.39) при этом превратится в (2.38). Остается заметить, что равенство (2.36) определяет грань этой грани, аффинно эквивалентную многограннику $P_{\text{color2}}(G)$. ■

Замечание 2.3. На основе той же идеи в [69] показано, что $P_{\text{color1}} \propto_A P_{\text{stab}}$. Там же этот факт используется для вывода нового семейства допустимых неравенств для многогранников семейства P_{color1}.

Формулировка с представителями

Пусть $G = (V,E)$ — раскрашиваемый граф и $V = [n]$. Введем обозначение $\bar{E} = \{\{i,j\} \subset V \mid \{i,j\} \notin E\}$. Для $i \in V$ определим $\bar{N}(i) = \{j \in V \mid \{i,j\} \in \bar{E}\}$. Для произвольного $U \subseteq V$ через $E(U)$ обозначаем множество ребер графа G, оба конца которых лежат в U, а через $G[U] = (U, E[U])$ — подграф графа G, индуцированный множеством U.

Каждой вершине $i \in [n]$ графа G поставим в соответствие координату x_{ii}, а каждой паре вершин $\{i, j\} \in \bar{E}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, — координату x_{ij} 0/1-вектора $\boldsymbol{x}$. Значения этих переменных имеют следующий смысл. Для произвольной раскраски графа G переменная x_{ii} равна единице, если вершина i имеет наименьший номер среди всех вершин, окрашенных тем же цветом, то есть эта вершина является их *представителем*. А $x_{ij} = 1$, если i и j окрашены в один цвет и i является представителем.

В [54] в качестве многогранника раскрасок вершин графа G предлагается рассмотреть выпуклую оболочку множества 0/1-векторов $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих ограничениям

$$x_{ii} + \sum_{j<i,\ j\in\bar{N}(i)}^{n} x_{ji} = 1, \qquad i \in [n],$$

$$x_{ij} + x_{ik} \leqslant x_{ii}, \qquad \{j, k\} \in E(\bar{N}(i)), \quad i < j < k, \tag{2.40}$$

$$x_{ij} \leqslant x_{ii}, \qquad \text{если } j \text{ изолирована в } G[\bar{N}(i)],\ i < j. \tag{2.41}$$

Первое ограничение гарантирует, что каждая вершина либо сама является представителем, либо представлена вершиной с меньшим номером. Второе ограничение запрещает смежным вершинам иметь общего представителя. Обозначим множество всех таких векторов $\boldsymbol{x}$ через $P_{\text{color3}}(G)$.

Учитывая целочисленность переменных, ограничения (2.40) и (2.41) можно заменить следующими:

$$x_{ij} + x_{ik} \leqslant 1, \qquad \{j, k\} \in E(\bar{N}(i)), \quad i < j < k,$$

$$x_{ij} \leqslant x_{ii}, \qquad j \in \bar{N}(i), \quad i < j.$$

Заметим, что описание многогранника $P_{\text{color3}}(G)$ очень похоже на описание многогранника $P_{\text{color2}}(G)$. Поэтому следующий факт доказывается точно также, как и утверждение 2.34.

Утверждение 2.35. *Для любого графа $G = ([n], E)$ за линейное время можно* *построить* $G' = (V', E')$, $|V'| = 2n + |\bar{E}|$, $|E'| = O(n^3)$, *что*

$$P_{\text{color3}}(G) \leqslant_A P_{\text{stab}}(G').$$

Покажем теперь, что $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{color3}}$.

Утверждение 2.36. $P_{\text{stab}}(G) \leqslant_A P_{\text{color3}}(G')$ *для любого графа* $G = ([n], E)$ *и* $G' = ([n] \cup \{0\}, E)$.

Доказательство. Рассмотрим многогранник $P_{\text{color3}}(G')$, $G' = (V', E)$, $V' = \{0, 1, \ldots, n\}$. По аналогии с доказательством утверждения 2.33, положим $x_{ij} = 0$ для всех $0 < i < j$, $\{i, j\} \in \bar{E}$ и перейдем к рассмотрению соответствующей грани многогранника $P_{\text{color3}}(G')$. Для остальных координат будут выполнены ограничения

$$\begin{aligned} x_{00} &= 1, && \\ x_{ii} + x_{0i} &= 1, && i \in [n], \\ x_{0i} + x_{0j} &\leqslant 1, && \{i, j\} \in E, \quad i < j. \end{aligned}$$

Таким образом, описанная грань аффинно эквивалентна многограннику $P_{\text{stab}}(G)$.■

2.6. Многогранники задачи коммивояжера

SAT -> ATSP

Billera Sarangarajan.

Из утверждения 2.24 следует, что не существует конечной булевой формулы в конъюнктивной нормальной форме, описывающей множество вершин многогранника (а)симметричной задачи коммивояжера [76].

2.7. Слабая аффинная сводимость

Определение. Пусть последовательность конечных множеств $X_n \in \mathbb{Z}^d$, где $d = d(n)$ полиномиальна, такова, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{Z}^d$ задача проверки принадлежности $x \in X_n$ принадлежит классу NP. Тогда семейство (последовательность) многогранников $P(n) = \mathrm{conv}(X_n)$ называется *комбинаторным*.

Примечание. В [111, 115] комбинаторными называются многогранники, у которых для каждой пары несмежных вершин середина соединяющего их отрезка является также серединой отрезка, соединяющего другую пару вершин этого многогранника.

Лемма. Пусть семейство многогранников $P(n) \in \mathbb{Z}^d$, $d = d(n)$, комбинаторно. Тогда существует комбинаторное семейство многогранников $Q(n) \in \{0, 1\}^k$, $k = k(n)$, что $Q(n)$ является расширением $P(n)$.

Теорема. Пусть многогранник $P \subseteq \mathbb{R}^d$ является образом многогранника $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ при ортогональном проецировании $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $n > d$. Пусть, кроме того, $\pi(\mathrm{ext}\, Q) = \mathrm{ext}\, P$. Тогда граф многогранника P является подграфом графа многогранника Q.

Доказательство. Для каждой вершины $\boldsymbol{v} \in \mathrm{ext}\, P$ определим множество

$$W(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{ext}\, Q \mid \pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}\}.$$

Очевидно, $\mathrm{conv}(W(\boldsymbol{v}))$ является гранью многогранника Q.

Для удобства полагаем, что $\mathbb{R}^d$ вложено в $\mathbb{R}^n$, а проецирование π преобразует $(x_1, \ldots, x_n)$ в $(x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0)$. Вспомогательный вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ определим следующим образом. Если $n = d + 1$, то $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e_n}$, иначе $\boldsymbol{c} = \lambda_{d+1}\boldsymbol{e_{d+1}} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e_n}$ и коэффициенты λ_{d+1}, $\ldots$, λ_n подобраны так, что для любого $\boldsymbol{v} \in \mathrm{ext}\, P$ и любых двух вершин $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in W(\boldsymbol{v})$ из неравенства $\boldsymbol{w_1} \neq \boldsymbol{w_2}$ следует $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w_1} \neq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w_2}$. Ясно, что в силу конечности множества вершин многогранника Q такой вектор $\boldsymbol{c}$ существует. С помощью этого вектора в каждом множестве $W(\boldsymbol{v})$ выделим уникальную вершину

$$\boldsymbol{w_v} = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{w} \in W(\boldsymbol{v})}\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w}\}.$$

Остается показать, что если вершины $\boldsymbol{v_1}$ и $\boldsymbol{v_2}$ многогранника P смежны, то соответствующие вершины $\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{w_{v_1}}$ и $\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{w_{v_2}}$ тоже смежны.

Предположим, что вершины $\boldsymbol{v_1}$ и $\boldsymbol{v_2}$ многогранника P смежны. Тогда многогранники $F_1 = \operatorname{conv}(W(\boldsymbol{v_1}))$ и $F_2 = \operatorname{conv}(W(\boldsymbol{v_2}))$, а также их выпуклая оболочка $F = \operatorname{conv}(F_1 \cup F_2)$ являются гранями многогранника Q. Причем $\operatorname{aff}(F_1)$ и $\operatorname{aff}(F_2)$ ортогональны вектору $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}$. (Соответственно, линейная функция $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$ принимает разные значения для $\boldsymbol{w_1}$ и $\boldsymbol{w_2}$.) Подберем числа $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, так, чтобы линейная функция $f(\boldsymbol{x}) = \beta\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + \gamma\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ принимала одинаковые значения для $\boldsymbol{w_1}$ и $\boldsymbol{w_2}$. Нетрудно проверить, что тогда

$$f(\boldsymbol{w_1}) = f(\boldsymbol{w_2}) > f(\boldsymbol{w}) \quad \text{для всех } \boldsymbol{w} \in W(\boldsymbol{v_1}) \cup W(\boldsymbol{v_2}) \setminus \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}\}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{w_1}$ и $\boldsymbol{w_2}$ смежны. Доказано.

Следствие. Пусть многогранник $P \subseteq \mathbb{R}^d$ является образом многогранника $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ при аффинном отображении $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$. Пусть, кроме того, $\pi(\operatorname{ext} Q) = \operatorname{ext} P$. Тогда $\omega(P) \leqslant \omega(Q)$.

Список литературы

1. Антонов А. И., Бондаренко В. А. Полиэдральные графы задач РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ и ПОЛНЫЙ ДВУДОЛЬНЫЙ ПОДГРАФ // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 6. С. 101–106.
2. Бастраков С. И. Алгоритмические вопросы построения двойственного описания выпуклого полиэдра: Кандидатская диссертация / Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского. 2016.
3. Бастраков С. И., Золотых Н. Ю. Использование идей алгоритма QUICKHULL в методе двойного описания // Выч. мет. программирование. 2011. Т. 12, № 2. С. 232–237.
4. Белов Ю. А. О плотности графа матроида // Модели исследования операций в вычислительных системах. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 95–100.
5. Белов Ю. А., Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические вопросы сложности дискретных задач. ЯрГУ Ярославль, 2006.
6. Белошевский М. И. Многогранник задачи о максимальном разрезе // Модели и алгоритмы математического обеспечения ЭВМ. Ярославль: ЯрГУ, 1986. С. 12–20.
7. Бондаренко В. А. Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 45–50.
8. Бондаренко В. А. Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ вычислительных систем. 1987. Т. 1987. С. 133–134.
9. Бондаренко В. А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. Ярославль, 1995.
10. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. URSS М., 2008.
11. Бондаренко В. А., Николаев А. В. Комбинаторно-геометрические свойства задачи о разрезе // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 2. С. 127–129.

12. Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 4. С. 453–463.
13. Грешнев С. Н. Многогранник задачи о m-вершинном подграфе полного графа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 5. С. 790–793.
14. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
15. Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001.
16. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
17. Золотых Н. Ю. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 1. С. 153–163.
18. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). Мн: БГУ, 1977.
19. Кравцов В. М. О характеризации типов максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1908–1912.
20. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9, № 3. С. 115–116.
21. Максименко А. Н. Графы многогранников и сводимость задач комбинаторной оптимизации: Кандидатская диссертация / Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова. 2004.
22. Максименко А. Н. Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1693–1696.
23. Максименко А. Н. Диаметр ридж-графа циклического многогранника //

Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 2. С. 146–152.

24. Максименко А. Н. Многогранники задачи о выполнимости являются гранями многогранника задачи коммивояжёра // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 76–83.
25. Максименко А. Н. Аналог теоремы Кука для многогранников // Изв. вузов. Математика. 2012. Т. 56, № 8. С. 34–42.
26. Максименко А. Н. Об аффинной сводимости комбинаторных многогранников // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, № 6. С. 661—-663.
27. Максименко А. Н. Многогранники коммивояжера и разрезов. Аффинная сводимость // Дискретная математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 31–38.
28. Максименко А. Н. Общая грань некоторых 0/1-многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–118.
29. Максименко А. Н. k-Смежностные грани булева квадратичного многогранника // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 2. С. 95–103.
30. Максименко А. Н. Характеристики сложности: кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 5. С. 116–130.
31. Максименко А. Н. Наиболее простые семейства многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460, № 3. С. 272–274.
32. Максименко А. Н. Сложность задач комбинаторной оптимизации в терминах решёток граней ассоциированных многогранников // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23, № 3. С. 61–80.
33. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады АН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1093–1096.
34. Циглер Г. Теория многогранников. М.: Издательство МЦНМО, 2014.
35. Aaronson S. The limits of quantum computers // Scientific American. 2008. Vol. 298, no. 3. P. 62–69.

36. Alfakih A. Y., Murty K. G. Adjacency on the constrained assignment problem // Discrete applied mathematics. 1998. Vol. 87, no. 1. P. 269–274.

37. Applications of combinatorial optimization / Ed. by V. T. Paschos. Wiley-ISTE, 2014.

38. Arora S., Barak B. Computational complexity: a modern approach. Cambridge University Press, 2009.

39. Avis D., Tiwary H. R. On the extension complexity of combinatorial polytopes // Mathematical Programming. 2015. Vol. 153, no. 1. P. 95–115.

40. Balas E., Padberg M. W. Set partitioning: A survey // SIAM review. 1976. Vol. 18, no. 4. P. 710–760.

41. Balas E., Saltzman M. J. Facets of the three-index assignment polytope // Discrete Applied Mathematics. 1989. Vol. 23, no. 3. P. 201–229.

42. Balinski M. L., Russakoff A. On the assignment polytope // Siam Review. 1974. Vol. 16, no. 4. P. 516–525.

43. Barahona F. On cuts and matchings in planar graphs // Mathematical Programming. 1993. Vol. 60, no. 1-3. P. 53–68.

44. Barahona F., Mahjoub A. R. On the cut polytope // Mathematical programming. 1986. Vol. 36, no. 2. P. 157–173.

45. Ben-Tal A., Nemirovski A. On polyhedral approximations of the second-order cone // Mathematics of Operations Research. 2001. Vol. 26, no. 2. P. 193–205.

46. Birkhoff G. Three observations on linear algebra // Univ. Nac. Tucumán. Revista A. 1946. Vol. 5. P. 147–151.

47. Bogomolov Y., Fiorini S., Maksimenko A., Pashkovich K. Small Extended Formulations for Cyclic Polytopes // Discrete & Computational Geometry. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 809–816.

48. Bondarenko V., Nikolaev A. On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 2016.

49. Bondarenko V. A., Yurov S. V. About a polyhedron of cubic graphs // Funda-

menta Informaticae. 1996. Vol. 25, no. 1. P. 35–38.

50. Borgwardt S. On the diameter of partition polytopes and vertex-disjoint cycle cover // Mathematical Programming. 2013. Vol. 141, no. 1-2. P. 1–20.
51. Borgwardt S., De Loera J. A., Finhold E., Miller J. The hierarchy of circuit diameters and transportation polytopes // Discrete Applied Mathematics. 2015.
52. Buchheim C., Wiegele A., Zheng L. Exact algorithms for the quadratic linear ordering problem // INFORMS Journal on Computing. 2010. Vol. 22, no. 1. P. 168–177.
53. Burke E. K., Mareček J., Parkes A. J., Rudová H. A supernodal formulation of vertex colouring with applications in course timetabling // Annals of Operations Research. 2010. Vol. 179, no. 1. P. 105–130.
54. Campêlo M., Campos V. A., Corrêa R. C. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156, no. 7. P. 1097–1111.
55. Carr R. D., Konjevod G., Little G. et al. Compacting cuts: a new linear formulation for minimum cut // ACM Transactions on Algorithms (TALG). 2009. Vol. 5, no. 3. P. 27.
56. Ceballos C., Manneville T., Pilaud V., Pournin L. Diameters and geodesic properties of generalizations of the associahedron // DMTCS Proc., 27th International Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. 2015.
57. Ceballos C., Pilaud V. The diameter of type D associahedra and the non-leaving-face property // European Journal of Combinatorics. 2016. Vol. 51. P. 109–124.
58. Chopra S., Rao M. R. The Steiner tree problem I: Formulations, compositions and extension of facets // Mathematical Programming. 1994. Vol. 64, no. 1. P. 209–229.
59. Chung S. J. Structural complexity of adjacency on 0-1 convex polytopes: Ph. D. thesis / University of Michigan. 1980.
60. Chvátal V. On certain polytopes associated with graphs // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1975. Vol. 18, no. 2. P. 138–154.

61. Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Proc. 1964 Internat. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. 1964. P. 24–30.

62. Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G. Extended formulations in combinatorial optimization // 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 1–48.

63. Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G. Extended formulations in combinatorial optimization // Annals of Operations Research. 2013. Vol. 204, no. 1. P. 97–143.

64. Conforti M., Rinaldi G., Wolsey L. On the cut polyhedron // Discrete Mathematics. 2004. Vol. 277, no. 1. P. 279–285.

65. Cook S. A. The complexity of theorem proving procedures // Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing. 1971. P. 151–158.

66. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem // Journal of the Operations Research Society of America. 1954. Vol. 2, no. 4. P. 393–410. http://dx.doi.org/10.1287/opre.2.4.393. URL: `http://dx.doi.org/10.1287/opre.2.4.393`.

67. Dantzig G. B. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities // Activity Analysis of Production and Allocation. Wiley, 1951. P. 339–347.

68. Dantzig G. B. Linear programming and extensions. Princeton university press, 1963.

69. Delle Donne D., Marenco J. Polyhedral studies of vertex coloring problems: The standard formulation // Discrete Optimization. 2016. Vol. 21. P. 1–13.

70. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische mathematik. 1959. Vol. 1, no. 1. P. 269–271.

71. Dukes W. Bounds on the number of generalized partitions and some applications // Australasian Journal of Combinatorics. 2003. Vol. 28. P. 257–262.

72. Edmonds J. Minimum partition of a matroid into independent subsets // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. 1965. Vol. 69. P. 67–72.

73. Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of mathematics. 1965. Vol. 17, no. 3. P. 449–467.

74. Euler R. Odd cycles and a class of facets of the axial 3-index assignment polytope // Applicationes Mathematicae. 1987. Vol. 3, no. 19. P. 375–386.

75. Feichtner E. M., Sturmfels B. Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans // Portugaliae Mathematica. 2005. Vol. 62, no. 4. P. 437–468.

76. Fiorini S. A combinatorial study of partial order polytopes // European Journal of Combinatorics. 2003. Vol. 24, no. 2. P. 149–159.

77. Fiorini S. How to recycle your facets // Discrete Optimization. 2006. Vol. 3, no. 2. P. 136–153.

78. Fiorini S., Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations // Discrete Mathematics. 2013. Vol. 313, no. 1. P. 67–83.

79. Fiorini S., Massar S., Pokutta S. et al. Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds // Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM. 2012. P. 95–106.

80. Fiorini S., Massar S., Pokutta S. et al. Exponential lower bounds for polytopes in combinatorial optimization // Journal of the ACM (JACM). 2015. Vol. 62, no. 2. P. 17.

81. Fiorini S., Rothvoß T., Tiwary H. R. Extended formulations for polygons // Discrete & computational geometry. 2012. Vol. 48, no. 3. P. 658–668.

82. Gale D. Neighborly and cyclic polytopes // Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 7. 1963. P. 225–232.

83. Garg N., Vazirani V. V. A polyhedron with alls–t cuts as vertices, and adjacency of cuts // Mathematical programming. 1995. Vol. 70, no. 1-3. P. 17–25.

84. Geist D., Rodin E. Y. Adjacency of the 0–1 knapsack problem // Computers and operations research. 1992. Vol. 19, no. 8. P. 797–800.

85. Girlich E., Höding M., Horbach A., Kovalev M. On the facets and diameter of

the k-cycle polytope // Optimization. 2006. Vol. 55, no. 4. P. 311–339.

86. Goemans M. X. Smallest compact formulation for the permutahedron // Mathematical Programming. 2015. Vol. 153, no. 1. P. 5–11.

87. Goldreich O. Computational complexity: a conceptual perspective. Cambridge University Press, 2008.

88. Grötschel M., Jünger M., Reinelt G. Facets of the linear ordering polytope // Mathematical Programming. 1985. Vol. 33, no. 1. P. 43–60.

89. Grötschel M., Lovász L. Combinatorial Optimization // Handbook of Combinatorics (Vol. 2) / Ed. by R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1995. P. 1541–1597.

90. Grünbaum B. Convex Polytopes / Ed. by V. Kaibel, V. Klee, G. Ziegler. Graduate Texts in Mathematics. 2nd edition edition. Springer, 2003. 471 p. ISBN: 9780387004242. URL: `https://books.google.ru/books?id=5iV75P9gIUgC`.

91. Hartvigsen D., Zemel E. The complexity of lifted inequalities for the knapsack problem // Discrete Applied Mathematics. 1992. Vol. 39, no. 2. P. 113–123.

92. Ikura Y., Nemhauser G. L. Simplex pivots on the set packing polytope // Mathematical programming. 1985. Vol. 33, no. 2. P. 123–138.

93. Jünger M., Reinelt G., Thienel S. Practical problem solving with cutting plane algorithms in combinatorial optimization // Combinatorial Optimization, DIMACS. 1995. Vol. 20. P. 111–152.

94. Kaibel V. Polyhedral combinatorics of the quadratic assignment problem: Ph. D. thesis / Universität zu Köln. 1997.

95. Kaibel V. Extended Formulations in Combinatorial Optimization // Optima 85. 2011. P. 2–7.

96. Kaibel V., Lee J., Walter M., Weltge S. Extended Formulations for Independence Polytopes of Regular Matroids // Graphs and Combinatorics. 2016. Vol. 32, no. 5. P. 1931–1944.

97. Kaibel V., Loos A. Branched polyhedral systems // International Conference

on Integer Programming and Combinatorial Optimization / Springer. 2010. P. 177–190.

98. Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Symmetry Matters for Sizes of Extended Formulations // SIAM J. Discrete Math. 2012. Vol. 26, no. 3. P. 1361–1382. URL: http://dx.doi.org/10.1137/110839813.
99. Kaibel V., Pfetsch M. E. Computing the face lattice of a polytope from its vertex-facet incidences // Comput. Geom. 2002. Vol. 23, no. 3. P. 281–290.
100. Kaibel V., Weltge S. A Short Proof that the Extension Complexity of the Correlation Polytope Grows Exponentially // Discrete & Computational Geometry. 2015. Vol. 53, no. 2. P. 397–401.
101. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM. 1984. P. 302–311.
102. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. Plenum Press, 1972. P. 85–103.
103. Karp R. M., Papadimitriou C. H. On linear characterizations of combinatorial optimization problems // SIAM Journal on Computing. 1982. Vol. 11, no. 4. P. 620–632.
104. Khachiyan L., Boros E., Borys K. et al. Generating all vertices of a polyhedron is hard // Discrete & Computational Geometry. 2008. Vol. 39, no. 1. P. 174–190.
105. Klee V. Diameters of polyhedral graphs // Canad. J. Math. 1964. Vol. 16. P. 602–614.
106. Klee V., Walkup D. W. The d-step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$ // Acta Mathematica. 1967. Vol. 117, no. 1. P. 53–78.
107. Kleinschmidt P., Onn S. On the diameter of convex polytopes // Discrete mathematics. 1992. Vol. 102, no. 1. P. 75–77.
108. Maksimenko A. N. A special role of Boolean quadratic polytopes among other combinatorial polytopes // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Vol. 23, no. 1. P. 23–40.

109. Martin R. K. Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations // Operations Research Letters. 1991. Vol. 10, no. 3. P. 119–128.

110. Matsui T. NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes // Lecture Notes in Operations Research. 1995. Vol. 1. P. 249–258.

111. Matsuia T., Tamura S. Adjacency on combinatorial polyhedra // Discrete applied mathematics. 1995. Vol. 56, no. 2. P. 311–321.

112. Mehrotra A., Trick M. A. A column generation approach for graph coloring // informs Journal on Computing. 1996. Vol. 8, no. 4. P. 344–354.

113. Méndez-Díaz I., Zabala P. A cutting plane algorithm for graph coloring // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156, no. 2. P. 159–179.

114. Naddef D. The Hirsch conjecture is true for (0, 1)-polytopes // Mathematical Programming. 1989. Vol. 45, no. 1. P. 109–110.

115. Naddef D., Pulleyblank W. R. Hamiltonicity and combinatorial polyhedra // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1981. Vol. 31, no. 3. P. 297–312.

116. Nemhauser G. L., Trotter L. E. Vertex packings: structural properties and algorithms // Mathematical Programming. 1975. Vol. 8, no. 1. P. 232–248.

117. Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. 1989. Vol. 45, no. 1-3. P. 139–172.

118. Padberg M. W. Equivalent knapsack-type formulations of bounded integer linear programs: An alternative approach // Naval Research Logistics Quarterly. 1972. Vol. 19, no. 4. P. 699–708.

119. Padberg M. W., Rao M. R. The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two // Mathematical Programming. 1974. Vol. 7, no. 1. P. 32–45.

120. Pan V. Y. Univariate Polynomials: Nearly Optimal Algorithms for Numerical Factorization and Root-finding // Journal of Symbolic Computation. 2002. Vol. 33, no. 5. P. 701–733.

121. Papadimitriou C. H. The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Mathematical Programming. 1978. Vol. 14, no. 1. P. 312–324.

122. Papadimitriou C. H. Polytopes and complexity // Progress in Combinatorial Optimization. 1984. P. 295–305.

123. Papadimitriou C. H., Wolfe D. The complexity of facets resolved // Journal of Computer and System Sciences. 1988. Vol. 37, no. 1. P. 2–13.

124. Papadimitriou C. H., Yannakakis M. The complexity of facets (and some facets of complexity) // Journal of Computer and System Sciences. 1984. Vol. 28, no. 2. P. 244–259.

125. Qi L., Sun D. Polyhedral methods for solving three index assignment problems // Nonlinear Assignment Problems / Ed. by P. M. Pardalos, L. S. Pitsoulis. Springer, 2000. P. 91–107.

126. Rado R. An inequality // Journal of the London Mathematical Society. 1952. Vol. 27. P. 1–6.

127. Rijal M. P. Scheduling, design and assignment problems with quadratic costs: Ph. D. thesis / New York University. 1995.

128. Rispoli F. J. The monotonic diameter of the perfect matching and shortest path polytopes // Operations research letters. 1992. Vol. 12, no. 1. P. 23–27.

129. Rispoli F. J., Cosares S. A bound of 4 for the diameter of the symmetric traveling salesman polytope // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 1998. Vol. 11, no. 3. P. 373–380.

130. Rothvoß T. Some 0/1 polytopes need exponential size extended formulations // Mathematical Programming. 2013. Vol. 142, no. 1-2. P. 255–268.

131. Rothvoß T. The matching polytope has exponential extension complexity // Proceedings of the 46th annual ACM symposium on theory of computing / ACM. 2014. P. 263–272.

132. Sagraloff M., Mehlhorn K. Computing real roots of real polynomials // Journal of Symbolic Computation. 2016. Vol. 73. P. 46–86.

133. Saigal R. A proof of the Hirsch conjecture on the polyhedron of the shortest route problem // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1969. Vol. 17, no. 6. P. 1232–1238.

134. Saito H., Fujie T., Matsui T., Matuura S. A study of the quadratic semi-assignment polytope // Discrete Optimization. 2009. Vol. 6, no. 1. P. 37–50.

135. Santos F. A counterexample to the Hirsch Conjecture // Annals of Mathematics. 2012. Vol. 176, no. 1. P. 383–412.

136. Santos F. Recent progress on the combinatorial diameter of polytopes and simplicial complexes // Top. 2013. Vol. 21, no. 3. P. 426–460.

137. Schrijver A. Theory of linear and integer programming. John Wiley & Sons, 1998.

138. Schrijver A. Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. Springer, 2003.

139. Schrijver A. On the history of combinatorial optimization (till 1960) // Discrete Optimization / Ed. by K. Aardal, G. Nemhauser, R. Weismantel. Elsevier, 2005. P. 1–68.

140. Skutella M., Weber A. On the dominant of the s-t-cut polytope: Vertices, facets, and adjacency // Mathematical Programming. 2010. Vol. 124, no. 1. P. 441–454.

141. Smale S. Mathematical problems for the next century // The Mathematical Intelligencer. 1998. Vol. 20, no. 2. P. 7–15.

142. Toktas B., Yen J. W., Zabinsky Z. B. Addressing capacity uncertainty in resource-constrained assignment problems // Computers & operations research. 2006. Vol. 33, no. 3. P. 724–745.

143. Vanderbeck F., Wolsey L. A. Reformulation and decomposition of integer programs // 50 Years of Integer Programming 1958-2008. Springer, 2010. P. 431–502.

144. Vohra R. V. Mechanism design: a linear programming approach. Cambridge University Press, 2011. Vol. 47.

145. Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM. 1988. P. 223–228.

146. Yannakakis M. Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Pro-

grams // Journal of computer and system sciences. 1991. Vol. 43. P. 441–466.

147. Young H. P. On permutations and permutation polytopes // Polyhedral combinatorics. Springer, 1978. P. 128–140.

148. Ziegler G. M. Who Solved the Hirsch Conjecture? // Documenta Mathematica Extra Volume: Optimization Stories. 2012. P. 75–85.