

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

На правах рукописи

МАКСИМЕНКО Александр Николаевич

**Комбинаторно-геометрические характеристики  
сложности задач комбинаторной оптимизации**

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Ярославль – 2017

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Основные понятия</b> . . . . .	14
1.1. Множества и графы . . . . .	14
1.2. Многогранники . . . . .	19
1.3. Сложность задач и алгоритмов . . . . .	30
1.4. Задачи дискретной оптимизации . . . . .	35
<b>Глава 2. Многогранники задач</b> . . . . .	43
2.1. Многогранники и полиэдры задач . . . . .	43
2.2. Задача идентификации грани . . . . .	50
2.3. Характеристики графа многогранника . . . . .	55
2.4. Гиперграни и расширение многогранника . . . . .	61
2.5. Вопросы . . . . .	70
<b>Глава 3. Аффинная сводимость</b> . . . . .	72
3.1. Аффинная сводимость задач . . . . .	72
3.2. Конусное разбиение пространства исходных данных . . . . .	75
3.3. Сравнение многогранников . . . . .	78
3.4. Аффинная сводимость многогранников . . . . .	82
<b>Глава 4. Примеры аффинной сводимости</b> . . . . .	90
4.1. Многогранники покрытий и двойных покрытий . . . . .	93
4.2. Многогранники с NP-полным критерием несмежности вершин . .	102
4.3. Многогранники линейных порядков и деревьев Штейнера в графе	109
4.4. Многогранники с простым критерием смежности вершин . . . . .	115
4.5. Многогранники задачи коммивояжера . . . . .	129
4.6. Булевы многогранники степени $p$ . . . . .	144

4.7. Конусное разбиение для задачи о кратчайшем орпути и многогранник задачи о назначениях . . . . .	151
<b>Глава 5. Расширенная аффинная сводимость . . . . .</b>	<b>154</b>
5.1. Теория . . . . .	154
5.2. Примеры . . . . .	160
5.3. Теорема Кука для многогранников . . . . .	164
<b>Глава 6. Циклические многогранники . . . . .</b>	<b>167</b>
6.1. Определение и свойства . . . . .	167
6.2. Компактная расширенная формулировка . . . . .	168
6.3. Диаметр ридж-графа циклического многогранника . . . . .	178
<b>Глава 7. Алгоритмы прямого типа . . . . .</b>	<b>187</b>
7.1. Теория алгоритмов прямого типа . . . . .	187
7.2. Кликовое число для задачи о кратчайшем орпути . . . . .	192
7.3. Примеры алгоритмов непрямого типа . . . . .	196
<b>Глава 8. Контрпримеры . . . . .</b>	<b>204</b>
8.1. Простые примеры . . . . .	204
8.2. Сложность расширения и число прямоугольного покрытия . . . . .	208
8.3. Другие комбинаторные характеристики . . . . .	214
<b>Глава 9. Заключение . . . . .</b>	<b>217</b>
9.1. Открытые вопросы . . . . .	220
9.2. Комментарии . . . . .	221
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>223</b>

## Введение

**Объект исследования.** Сформулируем задачу комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией следующим образом. Дано конечное множество  $E$ , каждому элементу  $e$  которого приписан некоторый вес  $c_e \in \mathbb{R}$ , и полиномиально вычисляемая функция (предикат)  $f: 2^E \rightarrow \{\text{ложь, истина}\}$ . Подмножество  $s \subseteq E$  называется *допустимым решением* этой задачи, если  $f(s)$  истинно. Множество всех допустимых решений обозначим  $S$ ,  $S = \{s \subseteq E \mid f(s)\}$ . Цель задачи состоит в отыскании *оптимального* решения  $s \in S$  с максимальным (минимальным) суммарным весом элементов.

Как правило, наибольший интерес представляет *общая задача*, когда  $S$  фиксировано, а веса  $c_e$  выбираются произвольно. Таким образом, общая задача однозначно определяется множеством всех своих допустимых решений  $S$ , а веса  $c_e$  представляют собой набор входных данных *частной задачи*. Далее для обозначения общей задачи будем пользоваться обозначением множества её решений  $S$ .

Например, в задаче о кратчайшем пути множество  $E$  есть множество дорог, соединяющих города, веса  $c_e$  являются длинами дорог, а предикат  $f$  принимает значение «истина» для каждого множества дорог, представляющего собой маршрут из города  $A$  в город  $B$ . Другими классическими примерами являются задача поиска минимального остовного дерева, задача о назначениях, задача коммивояжера, задача о рюкзаке и многие другие.

Чаще всего такие задачи встречаются в экономике при оптимизации использования ресурсов, планировании транспортной инфраструктуры и производства, оптимизации доставки грузов, составлении расписаний и т. п. [46]. Более того, в настоящее время задачи комбинаторной оптимизации встречаются практически везде: секвенирование генома, классификация биологических видов, моделирование молекул, планирование коммуникационных и электрических сетей, позиционирование спутников, дизайн и производство сверхбольших интегральных схем (VLSI) и печатных плат, криптография, машинное обучение

и т. д. [109].

Как известно [173], во многих случаях такие задачи полезно переводить на язык геометрии. А именно, для каждого допустимого решения  $s \in S$  рассматривается его *характеристический вектор*  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^E$ , координаты  $x_e$ ,  $e \in E$ , которого полагаются равными единице для  $e \in s$  и равны нулю для  $e \notin s$ . Далее множество всех характеристических векторов обозначаем  $X$ . Набор весов представляется в виде вектора  $\mathbf{c} = (c_e) \in \mathbb{R}^E$ . Цель задачи при такой интерпретации заключается в поиске характеристического вектора  $\mathbf{x} \in X$ , на котором целевая функция  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  достигает максимального (минимального) значения. Важно то, что экстремальные значения целевой функции не меняются при замене области определения  $X$  её выпуклой оболочкой  $\text{conv}(X)$ . Таким образом, с каждой задачей комбинаторной оптимизации ассоциируется некоторый выпуклый многогранник  $\text{conv}(X)$ , вершинами которого служит множество  $X$ . Многогранники, определяемые таким способом, принято называть комбинаторными.

С одной стороны, геометрическая интерпретация дает возможность при решении задачи пользоваться различными геометрическими инструментами, в частности, методами линейного программирования. Как показывает опыт многочисленных исследований в этой области, во многих случаях геометрический подход позволяет на порядки увеличивать скорость и качество решений [173].

С другой стороны, комбинаторная структура многогранника отражает структуру множества допустимых решений соответствующей задачи. Проиллюстрируем эту мысль с помощью понятия смежных решений. Допустимые решения  $s_1$  и  $s_2$  задачи  $S$  называются *смежными*, если для некоторого набора весов  $c_e$  оба эти решения являются оптимальными для соответствующей частной задачи и других оптимальных решений у неё нет. Смежность решений  $s_1$  и  $s_2$  означает, что при незначительном изменении входных данных частной задачи её оптимальное решение может меняться с  $s_1$  на  $s_2$  и обратно. То есть в алгоритме, решающем задачу, должна быть предусмотрена проверка, чувствительная к таким изменениям. Это, в свою очередь, накладывает ряд ограничений на структуру

алгоритма, решающего общую задачу  $S$ , и, в итоге, может использоваться для теоретических оценок сложности задачи. При геометрическом подходе смежность решений интерпретируется как наличие ребра между соответствующими вершинами многогранника  $\text{conv}(X)$ . Таким образом, граф многогранника задачи содержит в себе некоторую информацию о её структурной сложности. Продолжая эту мысль, вполне естественно обратиться к изучению свойств всей решетки граней (множества всех граней, упорядоченных по включению) многогранника задачи. Это и является основным объектом исследований настоящей работы.

**Актуальность темы исследования.** Широкий интерес к задачам комбинаторной оптимизации появился в 1950-х гг. Его возникновение было обусловлено тремя факторами: создание первых программируемых ЭВМ, создание концепции линейного программирования Канторовичем и Купмансом и разработка симплекс-метода Данцигом, а также накопленный опыт решения алгоритмических задач на графах. Именно в 1950-х гг. был разработан венгерский метод решения задачи о назначениях, алгоритм Форда-Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, несколько алгоритмов для нахождения кратчайших путей, заново открыты старые и предложены новые алгоритмы для нахождения минимального остовного дерева, а также их обобщение для нахождения в матроиде базы минимального веса [174]. В это же время, после разработки Данцигом симплекс-метода, были реализованы первые успешные попытки его применения к различным задачам комбинаторной оптимизации. В частности, с помощью техники линейного программирования был достигнут впечатляющий по тем временам прогресс в решении задачи коммивояжера [80].

Успешное применение симплекс-метода стало источником многочисленных размышлений о его теоретической эффективности. Так, например, было замечено, что нижней оценкой числа шагов симплекс-метода может служить диаметр графа многогранника. В связи с этим в 1957 году была сформулирована знаменитая гипотеза Хирша о том, что диаметр графа многогранника не может быть больше разности между числом его гиперграней и размерностью. С тех пор этой

гипотезе уделялось значительное внимание, но лишь в 2010 году Сантосу удалось построить пример 43-мерного многогранника с 86 гипергранями, диаметр которого больше, чем 43 [170]. Тем не менее, в общем виде<sup>1</sup> эта гипотеза до сих пор остается открытой и привлекает внимание видных ученых [186].

Одним из результатов автора настоящей работы является точное значение диаметра графа многогранника, двойственного к циклическому. В 1964 г. Кли [129] предположил, что этот диаметр равен  $\lfloor n/2 \rfloor$ , где  $n$  — число гиперграней. Но тремя годами позднее им же был найден контрпример [131]. С тех пор задача оставалась открытой.

Вместе с успехами и неудачами в решении отдельных задач в 1950–60-х гг. формировалось понятие эффективного алгоритма, окончательно сформулированное в работах Эдмондса [90] и Кобхэма [74]. В это же время Эдмондс [89] ввел понятие задачи, имеющей «хорошую характеристику», что, по-сути, является определением того, что позднее было названо классом NP. Всё это послужило предпосылками к открытию в начале 1970-х гг. Куком [78], Карпом [125] и Левиным [23] NP-полных задач [16]. Примечательно то, что каждый из них предложил свой способ сведения задач. В частности, понятие аффинной сводимости, являющееся одним из основных результатов настоящей работы, по своей сути ближе всего к сводимости Левина.

Открытие NP-полных задач послужило мощным толчком для дальнейших исследований, в том числе свойств многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами. В 1978 году Пападимитриу [154] показал, что задача проверки смежности<sup>2</sup> двух произвольно взятых вершин многогранника задачи коммивояжера NP-полна, т. е. она также сложна, как и сама задача коммивояжера. Позднее аналогичные результаты для многогранников некоторых других NP-трудных задач были получены Чунгом, Гейст и Родин, Мацуи, Бондаренко и

---

<sup>1</sup> Верно ли, что диаметр графа ограничен сверху полиномом от числа гиперграней и размерности многогранника?

<sup>2</sup> Точнее, несмежности

Юровым, Альфаки и Мурти, Фиорини [31]. С другой стороны, в 1975 г. Хватал показал [73], что для многогранника независимых множеств эта задача полиномиально разрешима. Более того, в 1984 г. Грешнев показал [15], что граф многогранника задачи об  $m$ -вершинной клике полон, т. е. задача проверки смежности вершин для него тривиальна. В 1986 г. аналогичный результат для многогранника задачи о максимальном разрезе был независимо получен Белошевым [7] и Барахона и Маджуб [53].

В 1979 году Хачиян [40] построил полиномиальный алгоритм для решения задачи линейного программирования. Этот факт стал теоретическим подтверждением эффективности геометрического подхода к решению задач комбинаторной оптимизации, что увеличило популярность исследований свойств комбинаторных многогранников. В частности, большое внимание исследованию свойств графов многогранников уделено в монографии Емеличева, Ковалева и Кравцова [18].

В 1980-х гг. Бондаренко [10] при исследовании свойств графов многогранников задач обнаружил, что кликовое число<sup>3</sup> графа многогранника хорошо предсказывает алгоритмическую сложность соответствующей оптимизационной задачи. А именно, им было доказана сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников следующих NP-трудных задач: коммивояжер, максимальная клика и вершинное покрытие, 3-сочетание. С другой стороны, кликовые числа графов многогранников оказались полиномиальны для следующих полиномиально разрешимых задач: сортировка, минимальное остовное дерево, задача о кратчайшем пути. На основании этих фактов была разработана теория алгоритмов прямого типа, утверждающая, что кликовое число является нижней оценкой сложности в некотором «широком классе алгоритмов» [10]. Недавно Бондаренко и его ученики дополнили список оценок кликовых чисел несколькими новыми результатами [1, 13, 14]. На основе понятия аффинной сводимости, введенного автором настоящей работы, обнаруженные Бондаренко факты объясняются тем,

---

<sup>3</sup> В оригинале эта характеристика называется плотностью графа



что все исследованные многогранники содержат в качестве грани булев квадратичный многогранник, кликовое число графа которого экспоненциально.

С другой стороны, открытие Хачияном полиномиального алгоритма для задачи линейного программирования породило волну попыток поиска компактного линейного описания для многогранника задачи коммивояжера. Все эти попытки были направлены на использование идеи расширенного представления многогранника (сам термин появился позднее). *Расширенным представлением* многогранника  $P$  называется набор линейных ограничений, описывающих многогранник  $Q$  такой, что  $P$  является ортогональной проекцией  $Q$ . Сам многогранник  $Q$  называется *расширением* многогранника  $P$ . К тому времени уже были известны примеры, когда число линейных неравенств необходимых для описания многогранника экспоненциально, а для его расширения — полиномиально относительно длины входных данных задачи. Ни одна из таких попыток не привела к успеху и в 1988 году Яннакакис [182] показал, что такие попытки в принципе не имеют перспектив, если предлагаемые расширенные представления удовлетворяют некоторым естественным условиям симметрии. Там же была высказана гипотеза, что утверждение остается справедливым и без условий симметрии. Кроме того, Яннакакис показал, что число линейных неравенств в расширенном представлении многогранника не может быть меньше, чем число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней многогранника. Впоследствии минимальное число линейных неравенств, необходимых для описания расширения многогранника было названо *сложностью расширения многогранника*.

В конце 2000-х гг. гипотеза Яннакакиса вновь привлекла внимание исследователей и в 2012 г. Фиорини, Массар, Покутта, Тивари и де Вульф показали, что число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней для булева квадратичного многогранника экспоненциально [97]. Этот прорыв привлек внимание большого числа исследователей и в настоящее время в этой области ведется активная работа [96, 99, 121, 123, 165, 166].

**Цель работы.** Целью работы является анализ сложностных характеристик для решеток граней многогранников, ассоциированных с задачами комбинаторной оптимизации. Это подразумевает: 1) поиск численных оценок различных комбинаторных характеристик для наиболее востребованных семейств многогранников, 2) разработка методологии, упрощающей такого рода поиски, 3) анализ перспективности использования тех или иных характеристик в качестве оценок сложности соответствующих оптимизационных задач.

**Методы исследования.** При исследовании семейств комбинаторных многогранников интенсивно используется новое в данной области понятие аффинной сводимости. Также используются методы теории выпуклых многогранников, теории графов, линейного программирования, комбинаторного анализа.

**Научная новизна.** Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Следующие результаты являются основными:

1. Найдено точное значение диаметра графа многогранника двойственного к циклическому.
2. Введено понятие аффинной сводимости семейств комбинаторных многогранников. Показано, что многогранники двойных покрытий аффинно сводятся к многогранникам следующих задач: рюкзак, коммивояжер, покрытие множества, кубический подграф, 3-выполнимость, назначения с линейным ограничением. Отсюда, в частности, следует NP-полнота проверки несмежности вершин для многогранников этих семейств.
3. Показано, что булевы квадратичные многогранники, многогранники квадратичного линейного упорядочивания и многогранники квадратичных назначений эквивалентны в смысле аффинной сводимости. В чуть более сложном классе эквивалентности лежат многогранники независимых множеств, многогранники упаковок и разбиений множества, многогранники задачи об  $n$ -назначениях для  $n \geq 3$ . В еще более сложный класс попадают многогранники двойных покрытий. В частности, булевы квадратичные

многогранники аффинно сводятся ко всем перечисленным в этом и предыдущем пунктах семействам многогранников. Таким образом показано, что различные комбинаторные характеристики сложности булевых квадратичных многогранников автоматически наследуются другими широко известными семействами многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами.

4. Показано, что для любого натурального  $k$  булевы квадратичные многогранники содержат  $k$ -смежные грани со сверхполиномиальным относительно размерности многогранника числом вершин.
5. Показано, что семейство многогранников любой задачи комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией аффинно сводится (в слабом смысле) к семейству булевых квадратичных многогранников. Таким образом, относительно слабой аффинной сводимости все перечисленные выше семейства многогранников образуют один класс эквивалентности.
6. Найдено компактное расширенное представление для циклических многогранников специального вида<sup>4</sup>.
7. Для нескольких упоминаемых в литературе комбинаторных характеристик сложности многогранников построены примеры задач, сложность которых принципиально отличается от значений соответствующих характеристик.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследований сложности задач комбинаторной оптимизации и поиска новых эффективных алгоритмов их решения. Значительная часть результатов может быть также использована в исследованиях комбинаторных свойств выпуклых многогранников.

---

<sup>4</sup> Циклические многогранники обладают максимальным числом граней среди всех многогранников, имеющих ту же размерность и такое же число вершин.

Значение полученных результатов подтверждается их цитированием как отечественными, так и зарубежными специалистами (список не включает соавторов соискателя): А.В. Николаев, А.В. Селиверстов, Р.Ю. Симанчев, L.B. Beasley, H. Fawzi, Q. Feng, H. Klauck, T. Lee, A. Makkeh, S. Massar, P.A. Parrilo, M.K. Patra, V. Pilaud, M. Pourmoradnasseri, K. Qi, J. Saunderson, D.O. Theis, H.R. Tiwary, K. Zhao.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Российской конференции «Дискретная оптимизация и исследование операции» (Алтай, 2010), на XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 2011), на Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2007, 2011), на Международной конференции «Дискретная геометрия» посвященной 100-летию А.Д. Александрова (Ярославль, 2012), на Международной топологической конференции «Александровские чтения» (Москва, 2012), на XXI Международном симпозиуме по математическому программированию (Берлин, 2012), на Международном симпозиуме по комбинаторной оптимизации (Оксфорд, 2012), на Международной конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013), на 26-й конференции Европейского отделения по комбинаторной оптимизации (2013, Париж), на семинаре Института математической оптимизации университета Отто фон Герике (Магдебург, 2013), на семинаре по дискретной математике в Свободном университете Берлина (2013), на 5-ом семинаре по комбинаторной оптимизации (Каржез, Франция, 2014), на 9-й международной конференции по теории графов и комбинаторике (Гренобль, Франция, 2014), на XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной 85-летию С.С. Рышкова (Тула, 2015), на 5-й Международной конференции по сетевому анализу (Нижний Новгород, 2015), на семинаре лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П.Г. Демидова, на Нижегородском семинаре по дискретной математике, на семинаре кафедры дифференциальной

геометрии и приложений МГУ им. М.В. Ломоносова.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы,  $n$  глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации  $P$  страниц, из них  $p_1$  страницы текста, включая  $f$  рисунков. Библиография включает  $B$  наименований на  $p_2$  страницах.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в  $N$  печатных работах, из них одна глава в монографии [12], одна глава в учебном пособии [6], 13 статей — в изданиях, рекомендованных ВАК [25–35, 57, 136], **2 статей в сборниках трудов конференций и 1 тезисов докладов**. Одна публикация подготовлена в соавторстве с Ю.В. Богомоловым, К. Пашковичем и С. Фиорини, причем вклад диссертанта был определяющим. Диссертация продолжает исследования, начатые автором в его кандидатской диссертации [24].

**Финансовая поддержка.** Исследования, включенные в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 00-01-00662-а, 03-01-00822-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № 02.740.11.0207), лабораторией «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П. Г. Демидова (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0057), а также проектами № 477 и № 984 в рамках базовой части гос. задания на НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова (2014–2016 гг.).

## Глава 1

**Основные понятия**

В этой главе приводятся определения и перечисляются известные факты, служащие основой для изложения результатов диссертации в последующих главах. В разделах 1.1 и 1.2 вводятся необходимые понятия теории графов и теории выпуклых многогранников, соответственно. В разделе 1.3 уточняются некоторые понятия теории сложности задач и алгоритмов и, в частности, теории NP-полных задач. Общепринятая формулировка задачи комбинаторной оптимизации уточняется в разделе 1.4.

**1.1. Множества и графы****1.1.1. Множества**

Для множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , будем пользоваться обозначением  $[n]$ . Целую часть действительного числа  $x$  обозначаем  $\lfloor x \rfloor$ . Наименьшее целое, большее или равное числу  $x$ , обозначаем  $\lceil x \rceil$ .

*Симметрической разностью* двух множеств  $X$  и  $Y$  называется множество

$$X \triangle Y := (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y).$$

**Свойство 1.1.** *Симметрическая разность обладает следующими свойствами:*

1.  $X \triangle Y = \emptyset \iff X = Y$ .
2. *Результат выражения  $X \triangle Y \triangle Z$  не зависит от перестановки множеств и порядка выполнения операций.*
3.  $X \triangle Y = Z \iff X \triangle Z = Y$ .

Пусть  $E$  — некоторое конечное множество. Множество всех подмножеств множества  $E$  обозначается  $2^E$ . *Характеристическим вектором* подмножества  $T \in 2^E$  называется 0/1-вектор  $v = \chi(T) \in \{0, 1\}^E$  с координатами

$$v_e = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in T, \\ 0, & \text{если } e \in E \setminus T. \end{cases}$$

Если же элементы множества  $E$  пронумерованы, то характеристический вектор может быть определен как  $v = \chi(T) \in \{0, 1\}^{|E|}$  с координатами

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in T, \\ 0, & \text{если } e_i \in E \setminus T. \end{cases}$$

Пусть  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  — конечное множество и  $S = \{S_1, \dots, S_n\} \subseteq 2^E$  — некоторый набор подмножеств множества  $E$ . Если каждый элемент  $e_i \in E$  принадлежит не более (не менее) чем одному из элементов  $S$ , то  $S$  называется *упаковкой (покрытием) множества  $E$* . Покрытие, являющееся одновременно упаковкой, называется *разбиением множества  $E$* . *Матрицей инцидентий* элементов множества  $E$  и элементов множества  $S$  называется матрица  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  с элементами

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in S_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

### 1.1.2. Графы

*Графом* или *неориентированным графом* называется упорядоченная пара  $G = (V, E)$ , где  $V$  — конечное множество, а  $E$  — некоторое множество двухэлементных подмножеств множества  $V$ . Элементы множества  $V$  называются *вершинами* графа  $G$ , а элементы множества  $E$  — его *ребрами*. Вершины  $v$  и  $u$  называются *концами* ребра  $\{v, u\}$ . Все рассматриваемые в диссертации графы не содержат кратных ребер (множество  $E$  не содержит одинаковых элементов) и

петель (концы любого ребра  $e \in E$  являются разными вершинами). Граф называется *полным*, если каждая пара его вершин образует ребро этого графа. Полный граф на  $n$  вершинах обозначается  $K_n$ .

Вершины  $v$  и  $u$  графа  $G = (V, E)$  называются *смежными* в  $G$ , если  $\{v, u\} \in E$ . Если же  $\{v, u\} \notin E$ , то вершины  $v$  и  $u$  называются *несмежными*. *Степенью* вершины  $v \in G$  называется число смежных с ней вершин. Вершина с нулевой степенью называется *изолированной*. Граф, степень каждой вершины которого равна трем, называется *кубическим*. Подмножество вершин  $V' \subseteq V$  называется *кликой* в графе  $G$ , если любые две вершины из  $V'$  смежны. Максимальный размер (мощность) клики в  $G$  называется *кликовым числом* графа  $G$  и обозначается  $\omega(G)$ . Подмножество вершин  $V' \subseteq V$  называется *независимым* в графе  $G$ , если любые две вершины из  $V'$  несмежны.

Пусть  $G' = (V', E')$  — еще один граф. Графы  $G$  и  $G'$  называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение  $f: V \rightarrow V'$  такое, что  $\{v, u\} \in E$  тогда и только тогда, когда  $\{f(v), f(u)\} \in E'$ . Граф  $G'$  называется *подграфом* графа  $G$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ . Далее, для краткости, любой граф  $G'$  изоморфный подграфу графа  $G$  будем называть подграфом графа  $G$ . Подграф  $G'$  графа  $G$  называется *порожденным*, если  $\forall v, u \in V'$  из  $\{v, u\} \in E$  следует  $\{v, u\} \in E'$ .

*Путем* в графе  $G$  называется множество ребер вида

$$P = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\},$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — попарно различные вершины,  $k \geq 2$ . В таком случае будем говорить, что путь  $P$  *соединяет* вершины  $v_1$  и  $v_k$ , и называть его  $v_1$ - $v_k$  *путем*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины соединяет некоторый путь в этом графе. Путь в графе  $G$  называется *гамильтоновым*, если каждая вершина графа принадлежит хотя бы одному ребру этого пути. *Расстоянием* между вершинами  $v$  и  $u$  в графе  $G$  называется наименьшее число ребер в соединяющем их пути; если же такой путь не существует, то расстояние полагается



равным  $+\infty$ . *Диаметром*  $\text{diam}(G)$  графа  $G$  называется наибольшее расстояние между его вершинами (выбор осуществляется среди всех пар вершин).

*Циклом* в графе  $G$  называется множество ребер вида

$$C = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\}\},$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — попарно различные вершины,  $k \geq 3$ . Цикл в графе называется *гамильтоновым*, если каждая вершина графа принадлежит ровно двум ребрам этого цикла. Если в графе есть гамильтонов цикл, то и сам граф называется *гамильтоновым*. Граф без циклов называется *лесом*, а связный лес — *деревом*.

Вершина  $v$  и ребро  $e$  называются *инцидентными*, если  $v \in e$ . *Матрицей инцидентий* вершин-ребер графа  $G = (V, E)$  называется матрица  $M \in \{0, 1\}^{n \times k}$ ,  $n = |V|$ ,  $k = |E|$ , элементы которой определяются следующим образом:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in e_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем говорить, что подмножество ребер  $E' \subseteq E$  *покрывает* вершины  $V$ , если каждая вершина  $v \in V$  инцидентна хотя бы одному ребру из  $E'$ . Аналогично, подмножество вершин  $V' \subseteq V$  *покрывает* ребра  $E$ , если каждое ребро  $e \in E$  инцидентно хотя бы одной вершине из  $V'$ .

Два ребра в графе называются *смежными*, если они содержат общую вершину, в противном случае они называются *несмежными*. Множество попарно несмежных ребер графа называется *паросочетанием*. Паросочетание, покрывающее все вершины графа, называется *совершенным*. Таким образом, совершенное паросочетание может быть только у графов с четным числом вершин.

*Разрезом* в графе  $G = (V, E)$  называется множество ребер вида

$$\delta(U) := \{\{u, v\} \in E \mid u \in U, v \in V \setminus U\}, \quad \text{где } U \subseteq V.$$

Из определения следует, что  $\delta(U) = \delta(V \setminus U)$ . Разрез  $\delta(U)$  называется *s-t разрезом*, если  $s \in U$  и  $t \in V \setminus U$ . Граф  $G = (V, E)$  называется *двудольным*, если множество

его вершин  $V$  можно разбить на две доли  $U$  и  $V \setminus U$  так, что  $\delta(U) = E$ . Двудольный граф называется *полным двудольным*, если  $\{u, v\} \in E$  для любых  $u \in U$  и  $v \in V \setminus U$ .

Граф  $G = (V, E)$  называется *реберно-взвешенным*, если на множестве его ребер  $E$  задана функция весов  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Число  $f(e)$  называется *весом* ребра  $e \in E$ . *Весом подмножества  $E' \subseteq E$  или подграфа  $G' = (V', E')$  реберно-взвешенного графа  $G$*  называется сумма весов входящих в него ребер. Граф  $G$  называется *вершинно-взвешенным*, если задана функция  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ . В таком случае число  $g(v)$  называется *весом* вершины  $v \in V$ , а *весом подмножества  $V' \subseteq V$*  называется сумма весов входящих в него вершин.

### 1.1.3. Орграфы

*Ориентированным графом* или *орграфом* называется упорядоченная пара  $D = (V, A)$ , где  $V$  — конечное множество, называемое *множеством вершин*,  $A$  — некоторое множество упорядоченных пар вершин, называемых *дугами*. Также, как и для графов, далее предполагаем, что в  $A$  нет кратных дуг и петель. Большинство перечисленных выше понятий для графов переносится (иногда с небольшими уточнениями) на орграфы.

Пусть  $(v, u) \in A$ . Вершина  $v$  называется *началом* дуги  $(v, u)$ , а вершина  $u$  — ее *концом*. Каждая из этих вершин и дуга  $(v, u)$  называются *инцидентными* друг другу. Орграф будем называть *полным*, если каждая упорядоченная пара его вершин образует дугу этого графа, то есть  $|A| = |V|(|V| - 1)$ .

*Орпутем* или просто *путем* в орграфе  $D$  будем называть множество дуг вида

$$P = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\},$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — попарно различные вершины,  $k \geq 2$ . Вершины  $v_1$  и  $v_k$  называются, соответственно, *началом* и *концом* пути  $P$ , а вершины  $v_2, \dots, v_k$  — его *внутренними вершинами*.

*Контуром* в орграфе  $D$  называется множество дуг вида

$$C = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\},$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — попарно различные вершины,  $k \geq 2$ . Орграф, не содержащий контуров, называется *ациклическим*.

*Разрезом* в орграфе  $D = (V, A)$  называется множество дуг вида

$$\delta^+(U) := \{(u, v) \in A \mid u \in U, v \in V \setminus U\}, \quad \text{где } U \subseteq V.$$

Разрез  $\delta^+(U)$  называется *s-t разрезом*, если  $s \in U$  и  $t \in V \setminus U$ .

Орграф  $D = (V, A)$  называется *транзитивным*, если из условий  $(v, u) \in A$  и  $(u, w) \in A$  следует  $(v, w) \in A$ . Так как мы не рассматриваем графы с петлями, то из транзитивности следует ацикличность. Таким образом, множество дуг транзитивного графа задает частичный порядок на множестве вершин графа и, наоборот, каждый частичный порядок может быть представлен множеством дуг некоторого транзитивного графа. Если для каждой пары вершин  $u, v \in V$  в множество  $A$  входит ровно одна из двух дуг  $(v, u)$  и  $(u, v)$ , то соответствующий орграф называется *турниром*. Транзитивный турнир задает линейный порядок на множестве вершин. Поэтому далее, говоря о частичном (линейном) порядке мы часто будем подразумевать соответствующий транзитивный орграф (турнир).

## 1.2. Многогранники

При изложении основополагающих понятий и фактов теории выпуклых многогранников будем придерживаться терминологии монографий [18] и [41].

Под  $\mathbb{R}^d$  будем понимать пространство всех вектор-столбцов длины  $d$  с вещественными координатами. Сами вектор-столбцы из  $\mathbb{R}^d$  будем выделять полужирным шрифтом:  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ . Вектор-столбцы, составленные из одних нулей или же одних единиц, будем обозначать  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{1}$  соответственно (их размерность ясна из контекста везде, где они будут использоваться). Единичные

векторы, образующие канонический базис в  $\mathbb{R}^d$ , обозначаем  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  (таким образом,  $\sum_{i \in [d]} \mathbf{e}_i = \mathbf{1}$ ). Следуя общепринятой практике [41], вектор-столбцы часто будут называться точками.

*Гиперплоскостью* в  $\mathbb{R}^d$  называется множество

$$H(\mathbf{a}, b) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\},$$

где  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$  — вектор нормали гиперплоскости,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , а число  $b \in \mathbb{R}$  определяет величину смещения гиперплоскости относительно начала координат,  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$  — матричное произведение вектор-строки  $\mathbf{a}^T$  на вектор-столбец  $\mathbf{x}$ , или, другими словами, скалярное произведение  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ .

Линейная комбинация  $\sum_{i \in [n]} \lambda_i \mathbf{x}_i$  точек  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  из  $\mathbb{R}^d$ , где  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in [n]$ , называется *аффинной комбинацией*, если  $\sum_{i \in [n]} \lambda_i = 1$ . *Аффинной оболочкой*  $\text{aff}(X)$  непустого множества  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  называется множество всех аффинных комбинаций каждого набора точек из  $X$ . Множество точек называется *аффинно независимым*, если ни одна точка этого множества не принадлежит аффинной оболочке остальных его точек. *Аффинной размерностью* множества  $X$  называется мощность аффинно независимого подмножества  $S \subseteq X$  минус один, при условии  $\text{aff}(S) = \text{aff}(X)$ . В частности, аффинная размерность пустого множества равна  $-1$ . *Размерность*  $\dim(X)$  множества  $X$  полагаем равной его аффинной размерности. (Так как далее рассматриваются только выпуклые множества и, в частности, выпуклые оболочки конечных множеств, то противоречия с другими общепринятыми определениями размерности не возникает.) Множество  $X \in \mathbb{R}^d$  называется *аффинным подпространством*, если вместе с любыми своими двумя различными точками оно содержит все их аффинные комбинации. Гиперплоскость является примером аффинного подпространства. Более того, всякое аффинное подпространство размерности  $d - k$  в  $\mathbb{R}^d$  может быть представлено как пересечение  $k$  гиперплоскостей [18].

Комбинация  $\sum_{i \in [n]} \lambda_i \mathbf{x}_i$  точек  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  из  $\mathbb{R}^d$ , где  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i \in [n]$ , называется *конической комбинацией*. *Конической оболочкой* конечного множества

$X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$  называется множеством всех конических комбинаций его точек:

$$\text{cone}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Примером может служить положительный ортант

$$\mathbb{R}_+^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \text{cone}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}.$$

Аффинная комбинация  $\sum_{i \in [n]} \lambda_i \mathbf{x}_i$  точек  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  из  $\mathbb{R}^d$  называется *выпуклой*, если  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i \in [n]$ . Множество  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  оно содержит все их выпуклые комбинации. Простым примером выпуклого множества может служить *замкнутое полупространство*

$$H^+(\mathbf{a}, b) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\},$$

определяемое гиперплоскостью  $H(\mathbf{a}, b)$ . Точка выпуклого множества называется *крайней*, если она не является выпуклой комбинацией никаких двух других точек этого множества. Множество всех крайних точек множества  $X$  обозначается  $\text{ext}(X)$ . *Выпуклой оболочкой* конечного множества  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$  называется множество всех выпуклых комбинаций его точек:

$$\text{conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Выпуклая оболочка (произвольного) множества  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  представляет собой объединение выпуклых оболочек всех конечных наборов точек из  $X$ .

С понятием выпуклой оболочки тесно связано понятие *суммы Минковского* двух непустых множеств  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  и  $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ :

$$X + Y := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}.$$

В частности, для любых  $X$  и  $Y$

$$\text{conv}(X + Y) = \text{conv}(X) + \text{conv}(Y).$$

*Выпуклым многогранником* называется выпуклая оболочка конечного множества точек. Так как далее речь пойдет только о выпуклых многогранниках, слово выпуклый будет опускаться. *Полиэдром* называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств, или, другими словами, множество решений системы линейных неравенств  $Ax \geq b$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

**Теорема 1.2 (Вейль–Минковский).** *Множество  $P$  является многогранником тогда и только тогда, когда  $P$  — ограниченный полиэдр.*

Таким образом, каждый многогранник может быть описан двумя альтернативными способами:

1. Как выпуклая оболочка множества своих вершин. В этом случае множество вершин называется *V-описанием* многогранника.
2. Как пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Тогда соответствующая система линейных неравенств (и, возможно, уравнений) называется его *H-описанием*.

То же самое верно и в отношении полиэдра при следующем уточнении [41]. *V-описанием полиэдра  $P$*  называется совокупность конечного множества точек  $X$  и конечного множества векторов  $Y$  таких, что

$$P = \text{conv}(X) + \text{cone}(Y).$$

*H-описание* часто называется *линейным*, *фасетным* или *внешним* описанием [19, 172]. В свою очередь, *V-описание* называют *вершинным* или *внутренним* описанием. Задача нахождения *H-описания* многогранника (полиэдра) по его *V-описанию* называется *задачей нахождения выпуклой оболочки*. Она эквивалентна (двойственна) задаче нахождения *V-описания* по *H-описанию* и поэтому обе они объединяются общим названием *задачи построения двойственного описания многогранника*. Эта задача является алгоритмически сложной [127]. обстоятельный обзор известных в настоящее время способов её решения можно найти в диссертации [3].

Следуя традициям [18, 41, 110], выпуклый многогранник размерности  $d$  будем называть  $d$ -многогранником. Простейшим примером  $d$ -многогранника является  $d$ -симплекс, представляющий собой выпуклую оболочку  $d + 1$  аффинно независимых точек в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq d$ .

Будем говорить, что неравенство  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$  выполнено для множества  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ , если оно выполнено для всех  $\mathbf{x} \in X$ . Гранью многогранника  $P$  называется любое множество вида

$$F = \{\mathbf{x} \in P \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\},$$

где неравенство  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$  выполнено для  $P$ . Из того, что  $\mathbf{a}$  может быть равным  $\mathbf{0}$ , следует, что пустое множество и сам многогранник  $P$  являются гранями  $P$ , они называются *несобственными* гранями  $P$ . Остальные грани называются *собственными* [18].

Если гиперплоскость  $H(\mathbf{a}, b)$  имеет хотя бы одну общую точку с многогранником  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  и при этом  $P$  целиком лежит в полупространстве  $H^+(\mathbf{a}, b)$ , то гиперплоскость  $H(\mathbf{a}, b)$  и полупространство  $H^+(\mathbf{a}, b)$  называются *опорными* к  $P$ . Таким образом, каждая собственная грань многогранника есть пересечение многогранника с некоторой его опорной гиперплоскостью.

Размерностью  $\dim(F)$  грани  $F$  называется размерность минимального содержащего её аффинного подпространства. Грани размерности  $k$  называются  $k$ -гранями, 0-грани — *вершинами* многогранника, 1-грани — его *ребрами*. Несложно доказывается, что множество крайних точек многогранника совпадает с множеством его вершин.  $(d - 1)$ -грани  $d$ -многогранника называются *гипергранями*. Для  $(d - 2)$ -граней в русскоязычных публикациях нет устойчивого термина, их называют гиперребрами [41], гребнями [4], риджами [17] (от англ. ridge). Мы будем придерживаться названия *ридж*.

В частности, число вершин и гиперграней  $d$ -симплекса равно  $d + 1$ , а число его  $k$ -граней,  $k \in [d - 2]$ , равно  $\binom{d+1}{k+1}$ . Таким образом, число всех граней  $d$ -симплекса равно  $2^{d+1}$ .

*Графом* или *1-скелетом* многогранника называется множество его вершин и ребер (точнее, пар вершин, образующих ребра многогранника). *Ридж-графом* многогранника будем называть множество его гиперграней и риджей (точнее, пар гиперграней, образующих риджи).

Для граней многогранника справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.3 ([41]).** Пусть  $P$  — многогранник, а  $V = \text{ext}(P)$  — множество его вершин. Тогда:

1.  $P = \text{conv}(V)$ .
2. Если  $F$  — некоторая грань многогранника  $P$ , то  $F$  — тоже многогранник и  $\text{ext}(F) = F \cap V$ .
3. Любое пересечение граней многогранника  $P$  — снова грань  $P$ .
4. Грань грани многогранника также является его гранью.

Многогранник называется *симплициальным*, если все его гиперграни являются симплексами. Многогранник называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно  $d$  гиперграням, где  $d$  — размерность многогранника. Симплексы и выпуклые многоугольники являются примерами простых и, одновременно, симплициальных многогранников. Примером простого многогранника является  $d$ -мерный *0/1-гиперкуб* (или, короче,  *$d$ -куб*) [41]:

$$\text{Cube}_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\} = \text{conv} \{ \{0, 1\}^d \}.$$

Примером симплициального многогранника может служить  $d$ -мерный *кроссполитон*, в русскоязычной литературе называемый *ортаэдром* [41]:

$$\text{Cross}_d := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i \in [d]} |x_i| \leq 1 \right\} = \text{conv} \{ \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_d \}.$$

Вектор, все координаты которого принадлежат множеству  $\{0, 1\}$ , называется *0/1-вектором*. Многогранник, все вершины которого являются 0/1-векторами,



называется *0/1-многогранником*. Другими словами, 0/1-многогранник представляет собой выпуклую оболочку некоторого подмножества вершин куба  $\text{Cube}_d$ . Заметим также, что  $\text{ext conv}(X) = X$  для любого  $X \subseteq \{0, 1\}^d$ .

Будем говорить, что множество из  $n \geq d + 1$  точек в  $\mathbb{R}^d$  находится в *общем положении*, если никакие  $d + 1$  из них не лежат в одной гиперплоскости [41]. Система линейных неравенств  $Ax \geq b$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq d + 1$ , называется *общей*, если для любого  $x \in \mathbb{R}^d$  одновременно обращаются в равенство не более чем  $d$  из этих неравенств.

Классы симплициальных и простых многогранников важны в следующем смысле [41]. Выпуклая оболочка множества точек, находящихся в общем положении, является симплициальным многогранником. Аналогично, система линейных неравенств общего вида, множество решений которой ограничено, определяет простой многогранник. Соответственно, любой многогранник может быть преобразован в симплициальный за счет небольшого шевеления (пертурбации) его вершин. Аналогично, любой ограниченный полиэдр может быть преобразован в простой многогранник за счет небольшого изменения (пертурбации) коэффициентов системы описывающих его линейных неравенств.

Многогранник называется *k-смежностным* ( $k \in \mathbb{N}$ ), если любые  $k$  его вершин являются множеством вершин некоторой собственной грани этого многогранника. В частности, любой многогранник является 1-смежностным, а  $d$ -симплекс является  $k$ -смежностным при  $k \in [d]$ .

Наиболее известными примерами  $k$ -смежностных многогранников, отличающихся от симплекса, являются циклические многогранники [18, 41, 110]. Множество вершин *циклического многогранника* определяется следующим образом:

$$C_d(T) := \{(t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d \mid t \in T\},$$

где множество  $T \subset \mathbb{R}$  — конечно. (Заметим, что  $C_d(T)$  является симплексом при  $|T| \leq d + 1$ .) Известно, что эти многогранники симплициальны,  $\lfloor d/2 \rfloor$ -смежност-

ны (то есть имеют максимальную степень смежности среди  $d$ -многогранников, не являющихся симплексами) и обладают наибольшим числом граней (каждой размерности) среди всех  $d$ -многогранников с тем же числом вершин  $n = |T|$ .

Ниже мы будем использовать для  $C_d(T)$  немного иное обозначение в тех случаях, когда множество  $T$  имеет специальный вид. Например, если  $T$  — множество целых чисел отрезка  $[a, b]$ , то  $C_d(T)$  будет заменяться более информативным  $C_d(a, b)$ .

Одной из самых простых и вместе с тем весьма полезных операций над многогранниками является операция образования пирамиды. Пусть  $P$  — некоторый  $d$ -многогранник, вложенный в пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > d$ , и пусть точка  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  не принадлежит аффинной оболочке этого многогранника. *Пирамидой* над  $P$  называется выпуклая оболочка  $\text{conv}\{P \cup \mathbf{x}\}$ . Многогранник  $P$  называется *основанием* пирамиды  $\text{conv}\{P \cup \mathbf{x}\}$ , а точка  $\mathbf{x}$  — ее *апексом* (или *вершиной пирамиды*). Гранями пирамиды являются все грани ее основания, а также все пирамиды над его гранями. В частности, число гиперграней пирамиды ровно на единицу больше числа гиперграней основания, то же верно и для числа вершин. Пирамида над симплицальным многогранником также является симплицальным многогранником. Пирамида над  $k$ -смежностным многогранником тоже  $k$ -смежностна.

### 1.2.1. Решетка граней и матрица инциденций

*Решеткой граней* многогранника  $P$  называется множество  $L(P)$  всех его граней, частично упорядоченное по включению.

В качестве примера рассмотрим 4-мерный выпуклый многогранник  $P$ , являющийся пирамидой, основание которой — трехмерный куб без одной вершины (см. рис. 1.1).  $P$  имеет 8 вершин, 8 гиперграней (одна из них изображена на рис. 1.1), 19 ребер и 19 риджей.

Решетку граней удобно визуализировать посредством диаграммы Хассе, представляющей собой нарисованный на плоскости граф, вершины которого

символизируют грани многогранника. Ребрами на диаграмме Хассе соединены те, и только те пары граней  $f$  и  $g$ , для которых одновременно выполняются следующие условия:

- 1)  $f$  является гранью  $g$  (в этом случае  $g$  расположена на диаграмме выше  $f$ );
- 2) не существует грани  $h$ , отличающейся от  $f$  и  $g$ , и такой, что  $f$  — грань  $h$  и  $h$  — грань  $g$ .

Решетка граней пирамиды над трехмерным кубом без вершины изображена на рис. 1.2.

Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если их решетки граней изоморфны. Если два многогранника комбинаторно эквивалентны, то говорят, что они являются многогранниками одного *комбинаторного типа*. Свойства и числовые характеристики многогранника, однозначно определяемые его решеткой граней, будем называть *комбинаторными*. В частности, размерность многогранника, число его вершин и число гиперграней являются комбинаторными характеристиками, а симплициальность, простота и  $k$ -смежность — комбинаторными свойствами.

Два многогранника называются *двойственными* друг к другу, если их решетки граней антиизоморфны. В частности, если  $P$  и  $Q$  двойственны, то вершины  $P$  соответствуют гиперграням  $Q$ , ребра  $P$  — риджам  $Q$  и т. д. Примером двойственных многогранников могут служить  $d$ -куб и  $d$ -мерный ортаэдр. Многогранник, изображенный на рис. 1.1, двойственен самому себе. Еще одним примером двойственного самому себе многогранника является  $d$ -симплекс. Вообще, многогранник, двойственный симплициальному, является простым, а многогранник,

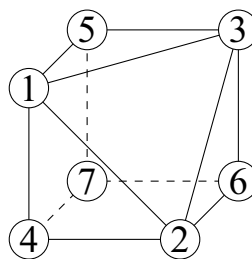


Рис. 1.1. Трехмерный куб без одной вершины

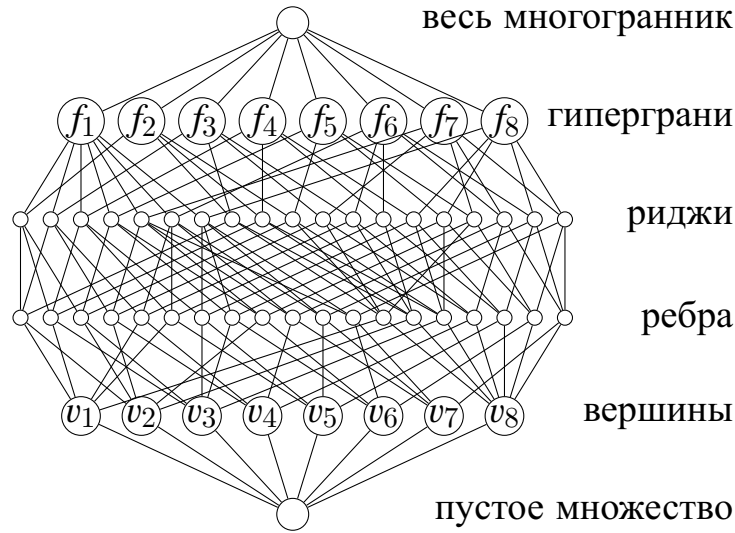


Рис. 1.2. Диаграмма Хассе решетки граней пирамиды над трехмерным кубом без вершины

двойственный простому, — симплициальным [18].

Пусть  $d$ -многогранник  $P$  задан в виде  $P = \text{conv}(V)$  и  $\mathbf{0}$  является внутренней точкой этого многогранника. (Выполнения последнего условия всегда можно добиться за счет операции смещения  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ .) Полярой к  $P$  называется многогранник

$$P^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{y}^T \mathbf{x} \leq 1, \forall \mathbf{y} \in V\}.$$

Поляра  $P^*$  является примером двойственного к  $P$  многогранника [18, 41].

Пусть  $P$  — некоторый многогранник,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  — множество его вершин, а  $F = \{F_1, \dots, F_k\}$  — множество его гиперграней. Тогда матрица инцидентий вершин-гиперграней  $M = (m_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times k}$  многогранника  $P$  определяется следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in F_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица  $M^T$  называется матрицей инцидентий гиперграней-вершин.

Решетка граней многогранника однозначно восстанавливается по его матрице инцидентий вершин-гиперграней. (Один из наиболее эффективных алгоритмов решения этой задачи описан в [122].) Так, например, диаграмма Хассе

на рис. 1.2 восстанавливается по матрице инцидентий

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Таким образом, все комбинаторные свойства многогранника однозначно определяются по его матрице инцидентий, а любые перестановки строк и/или столбцов этой матрицы не меняют этих свойств. Легко заметить, что матрицы инцидентий вершин-гиперграней двойственных многогранников преобразуются друг в друга операцией транспонирования и, возможно, перестановкой строк и/или столбцов. Например, симметрия относительно побочной (дополнительной) диагонали в матрице (1.1) говорит о двойственности соответствующего многогранника самому себе.

### 1.2.2. Аффинное и проективное преобразования многогранников

Отображение вида  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , называется *аффинным*. Частным случаем аффинного преобразования является *ортгональная проекция*  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ ,  $d > m$ . Два многогранника  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  и  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  называются *аффинно эквивалентными*, если существует взаимно-однозначное аффинное отображение  $\alpha: P \rightarrow Q$ . Из аффинной эквивалентности многогранников следует их комбинаторная эквивалентность.

Любые два  $d$ -симплекса аффинно эквивалентны. Поэтому далее вместо произвольного  $d$ -симплекса будет рассматриваться его канонический вариант

$$\Delta_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \text{conv}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\}.$$

Нетрудно доказать, что любой многогранник, имеющий  $n$  вершин, является аффинным образом симплекса  $\Delta_{n-1}$ .

*Проективным преобразованием* называется дробно-линейное отображение вида

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b},$$

где  $\alpha$  — аффинное отображение, размерности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$  одинаковы,  $b \in \mathbb{R}$ .

Проективные преобразования обладают следующими свойствами [41]:

1. Пусть  $P$  и  $Q$  — многогранники. Если проективное преобразование  $\tau: P \rightarrow Q$  взаимно-однозначно, то многогранники  $P$  и  $Q$  комбинаторно эквивалентны.
2. Пусть многогранник  $Q$  является аффинным образом некоторой грани многогранника  $P$ . Тогда существует проективное преобразование  $\tau: P \rightarrow Q$ .

### 1.3. Сложность задач и алгоритмов

Предполагается, что читатель знаком с основами теории сложности вообще [47, 107] и теории NP-полных задач в частности [16]. Тем не менее, чтобы избежать двусмысленности в дальнейшем, перечислим некоторые ключевые понятия и соглашения.

Для асимптотических сравнений пары функций  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  и  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  используются стандартные обозначения:

$f = O(g)$ , если найдутся  $c > 0$  и  $n^* \in \mathbb{N}$  такие, что  $f(n) \leq c \cdot g(n) \forall n \geq n^*$ .

$f = \Omega(g)$ , если найдутся  $c > 0$  и  $n^* \in \mathbb{N}$ , что  $f(n) \geq c \cdot g(n) \forall n \geq n^*$ .

$f = \Theta(g)$ , если  $f = O(g)$  и  $f = \Omega(g)$ .

$f = o(g)$ , если  $\forall c > 0$  найдется  $N_c \in \mathbb{N}$ , что  $f(n) < c \cdot g(n) \forall n \geq N_c$ .

Функцию  $f$  будем называть *полиномиальной* и обозначать  $f(n) = \text{poly}(n)$ , если найдется полином  $p = p(n)$  такой, что  $f(n) \leq p(n)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Функцию  $f$  будем называть *сверхполиномиальной*, если  $f = \Omega(p)$  для любого полино-

ма  $p$ . Так, например, функция  $f(n) = a^{\ln n}$ , где  $a > 0$ , является полиномиальной, а функция  $g(n) = a^{\ln^{1+\varepsilon} n}$  при  $a > 1$  и  $\varepsilon > 0$  — сверхполиномиальной. Значительная часть современной теории сложности опирается на фундаментальное различие между полиномиальными и сверхполиномиальными функциями. Точнее, речь, как правило, идет об отличии между полиномиальными функциями и функциями вида  $f(n) = \Omega(a^{n^\varepsilon})$ , где  $a > 1$ ,  $\varepsilon > 0$ . Последние иногда называются *экспоненциальными* [12].

Входные данные вычислительной задачи обычно представляют собой специальным образом упорядоченный набор чисел и меток (последние всегда можно заменить натуральными числами). Мы традиционно предполагаем, что входные данные кодируются в двоичную последовательность некоторым естественным образом. То есть вход задачи принадлежит множеству  $\{0, 1\}^* = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^m$ .

В частности, запись натурального числа  $n$  занимает  $\lceil \log_2(n+1) \rceil$  бит. Обозначаем:  $\text{size}(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . (Традиционно, длина входа  $I$  обозначается так:  $|I|$ . В случае, если входом является обычное (целое или рациональное) число, это создает путаницу. Поэтому в настоящей работе используется более информативное  $\text{size}(I)$ .) Соответственно,  $\text{size}(k) = \text{size}(|k|) + 1$  для целого числа  $k$ . Рациональное число  $p$  представляется парой взаимно простых чисел  $k$  (числитель) и  $n$  (знаменатель), где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В теоретических исследованиях длина входных данных задачи обычно полагается равной сумме длин соответствующих чисел. На практике же, чаще всего, длина входных данных пропорциональна произведению количества чисел на длину записи наибольшего из них. Тем не менее, длина каждой из этих кодировок полиномиальна (в данном случае, не более, чем квадратична) относительно длины другой.

*Временной сложностью алгоритма* называется функция, которая каждому натуральному  $n$  ставит в соответствие максимальное время (число операций), затрачиваемое алгоритмом для обработки входных данных длины  $n$  [16, 107]. Всюду далее под *сложностью алгоритма* будем понимать его временную сложность.

Под (временной) *сложностью задачи* будем понимать сложность (асимптотически) наиболее быстро решающего эту задачу алгоритма. (В настоящей работе рассматриваются только разрешимые задачи.) Строго говоря, сложность задачи существенно зависит от модели вычислений. С другой стороны, все реальные вычислительные устройства эквивалентны в смысле тезиса Кобхэма–Эдмондса [107, с. 33], который часто называют тезисом Чёрча–Тьюринга в сильной форме [47, с. 26].

**Тезис Кобхэма–Эдмондса.** *Любая физически реализуемая вычислительная модель может быть просимулирована (одноленточной) машиной Тьюринга с (не более чем) полиномиальным увеличением времени работы.*

В частности, этот тезис утверждает, что принадлежность задачи к классу  $P$  (полиномиально разрешимых задач) не зависит от выбора вычислительной модели.

Справедливости ради заметим, что, теоретически, с помощью квантовых вычислений можно решать задачи, принадлежность которых к классу  $P$  в настоящее время не доказана. Тем не менее, возможность физической реализации квантовых компьютеров (точнее, возможность их масштабирования) пока остается под вопросом (перспективы этого направления хорошо описаны в [42]).

Задачу часто удобно представлять в виде функции, аргументами которой являются входные данные, а значением — решение задачи. Функцию будем называть *полиномиально вычислимой*, если соответствующая задача имеет полиномиальную сложность.

*Предикатом* называется функция с множеством значений {ложь, истина} (или  $\{0, 1\}$ ). Любой предикат  $g$ , заданный на множестве  $\{0, 1\}^*$ , определяет некоторый язык  $L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid g(x)\}$ , и, наоборот, любой язык  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  очевидным образом определяет некоторый предикат, соответствующий задаче проверки условия  $x \in L$ .

**Определение 1.1 (классы NP и co-NP [47]).** Язык  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  принадлежит клас-



су NP, если найдется полином  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и полиномиально вычислимый предикат  $g: \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{\text{ложь, истина}\}$  такие, что для каждого  $x \in \{0, 1\}^*$

$$x \in L \iff \text{найдется } u \in \{0, 1\}^{p(\text{size}(x))} \text{ такой, что } g(x, u).$$

Язык  $L$  принадлежит классу co-NP, если язык  $\{0, 1\}^* \setminus L$  принадлежит NP.

Говорят, что задача проверки условия  $x \in L$  принадлежит классу NP (co-NP), если язык  $L$  принадлежит этому классу.

Классическое понятие полиномиальной сводимости может определяться по-разному в зависимости от типа решаемых задач [16, 107]. Чтобы избежать излишних (с точки зрения основных результатов диссертации) подробностей, везде далее, если не оговорено иное, под полиномиальной сводимостью мы будем понимать полиномиальную сводимость по Тьюрингу (иногда она называется сводимостью по Куку). Приведем наиболее короткое определение этого типа сводимости, предполагающее, что читатель знаком с понятием оракульной машины Тьюринга [16, 107]:

**Определение 1.2 (полиномиальная сводимость).** Задача  $\Pi$  *полиномиально сводится* к задаче  $\Pi'$ , если существует оракульная машина  $M$  такая, что для любой функции  $f$ , решающей задачу  $\Pi'$ , машина  $M$  с оракулом  $f$  решает задачу  $\Pi$  за полиномиальное время. (Обращение к оракулу  $f$  выполняется за единицу времени.)

Задача из класса NP (co-NP) называется *NP-полной* (*co-NP-полной*), если любая другая задача из этого класса полиномиально сводится к ней.

В качестве примера приведем формулировку наиболее известной NP-полной задачи о выполнимости булевой формулы.

Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  — множество булевых переменных. Каждая булева переменная может принимать лишь одно из двух значений: 1 или 0. Если  $u \in U$ , то  $u$  и  $\bar{u} = 1 - u$  называются *литералами*. Множество литералов, например

$\{u_2, \bar{u}_4, u_5\}$ , называется *дизъюнкцией* над  $U$  и обычно обозначается  $u_2 \vee \bar{u}_4 \vee u_5$ . Говорят, что дизъюнкция *выполнена* (принимает значение 1) при некотором наборе значений переменных, если хотя бы один из входящих в нее литералов равен 1. Пусть  $C = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$  — некоторый набор дизъюнкций, далее называемый *конъюнкцией*. В таких случаях говорят, что булева формула  $C$  задана в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ). Конъюнкция  $C$  называется *выполнимой*, если существует набор значений переменных такой, что выполненными оказываются все дизъюнкции из  $C$ .

**ЗАДАЧА О ВЫПОЛНИМОСТИ.** Дано множество переменных  $U$  и конъюнкция  $C$  над  $U$ . Верно ли, что  $C$  выполнима?

Исторически задача о выполнимости оказалась первой NP-полной задачей [78]. *Задача о  $k$ -выполнимости* представляет собой частный случай задачи о выполнимости, когда каждая дизъюнкция содержит ровно  $k$  литералов. Так как для любого натурального  $k \geq 3$  задача о выполнимости полиномиально сводится [125] к задаче о  $k$ -выполнимости, то последняя также является NP-полной.

*NP-трудными* задачами будем называть те, к которым полиномиально сводятся NP-полные задачи. Заметим, что некоторые исследователи при определении NP-трудной задачи предпочитают использовать сводимость по Карпу. В этом случае, в частности, классы NP-трудных и со-NP-трудных задач отличаются друг от друга при условии  $NP \neq \text{со-NP}$ . Мы же далее будем предполагать использование полиномиальной сводимости по Тьюрингу. При таком определении со-NP-полные задачи являются NP-трудными.

Далее нам также потребуется определение класса  $D^P$  [157]:

$$D^P = \{L_1 \cap L_2 \mid L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{со-NP}\}.$$

В частности, NP и со-NP являются подмножествами  $D^P$ , откуда следует, что все  $D^P$ -полные задачи являются NP-трудными. В качестве примера приведем две  $D^P$ -полные задачи [157]:

1. **ВЫПОЛНИМОСТЬ–НЕВЫПОЛНИМОСТЬ.** Даны две булевы формулы. Верно ли, что первая выполнима, а вторая — невыполнима.
2. **ТОЧНАЯ КЛИКА.** Дан граф  $G$  и число  $k \in \mathbb{N}$ . Верно ли, что  $k$  является кликовым числом этого графа.

## 1.4. Задачи дискретной оптимизации

*Задача дискретной оптимизации* определяется дискретным множеством *допустимых решений*  $X$  и *целевой функцией*  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Цель задачи заключается в отыскании *оптимального* решения  $x \in X$ , на котором целевая функция  $f$  достигает своего максимума (минимума). Задача минимизации всегда может быть преобразована в задачу максимизации (и наоборот) за счет умножения значений целевой функции на  $-1$ . Поэтому далее, если не оговорено иное, под задачей оптимизации будет подразумеваться задача нахождения максимума.

Наибольший интерес представляют задачи, в которых множество допустимых решений  $X$  задается неявно — как множество объектов, удовлетворяющих некоторому набору условий. Условия могут быть простыми. Например, в  $X$  входят все натуральные числа, не превосходящие 1000. А могут быть и сложными. Например,  $X$  состоит из (успешно компилируемых) программ на языке C длиной не более 1 Кбайт.

С учетом сделанного замечания задача дискретной оптимизации представляет собой четверку:

- *пространство решений*  $U$ ,
- *предикат допустимости*  $g: U \rightarrow \{\text{ложь, истина}\}$ , определяющий множество допустимых решений  $X = \{x \in U \mid g(x)\}$ ,
- *целевая функция*  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- *направление оптимизации*:  $\min$  или  $\max$ . По умолчанию,  $\max$ .

При такой постановке обычно молчаливо предполагается, что предикат допустимости и целевая функция вычисляются за конечное время. В противном случае

задача становится неразрешимой. На практике, как правило, речь идет о вычислимости за полиномиальное (относительно длины аргумента) время.

Для последующего уточнения терминологии нам понадобятся несколько типичных примеров таких задач. В конце каждого примера приводится описание соответствующей четверки.

**ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.** Даны: рациональная матрица  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$  и рациональные векторы  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$  и  $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^n$ . Нужно найти целочисленный вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ , для которого линейная функция  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  принимает максимальное значение при ограничении  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Как легко видеть, пространство решений  $U$  в этой задаче совпадает с  $\mathbb{Z}^n$ , предикатом допустимости является неравенство  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ , а целевая функция  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ .

**ЗАДАЧА ОТЫСКАНИЯ МАКСИМУМА МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК ОТРЕЗКА.** Даны: набор (рациональных) коэффициентов многочлена  $p(x) = \sum_{k=1}^d c_k x^k$  и два целых  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$ . Найти целое  $x \in [a, b]$  при котором  $p(x)$  принимает наибольшее значение. Здесь  $U = \mathbb{Z}$ , предикат допустимости проверяет выполнение ограничений  $a \leq x \leq b$ , целевая функция  $f(x) = p(x)$ .

**ЗАДАЧА БУЛЕВА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.** Дан набор (рациональных) коэффициентов многочлена

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} x_i x_j, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Требуется найти  $\mathbf{x}$ , при котором  $p(\mathbf{x})$  достигает максимума. Здесь  $U = \{0, 1\}^n$ , предикат  $g$  тождественно равен истине, а целевой функцией является многочлен  $p$ .

**ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ.** Дано множество предметов  $E$ . Для каждого предмета  $e \in E$  известны его размер  $a_e \in \mathbb{Q}$  и ценность  $c_e \in \mathbb{Q}$ . Кроме того, известен размер рюкзака  $A \in \mathbb{Q}$ . Требуется выбрать подмножество предметов  $x \subseteq E$  так, чтобы их суммарный размер был меньше размера рюкзака, а их суммарная ценность была бы максимальной. В этой задаче пространство решений  $U$  есть множество  $2^E$  всех подмножеств множества  $E$ , предикат допустимости  $g = g(\mathbf{x})$  определяется

неравенством  $\sum_{e \in x} a_e \leq A$ , а целевая функция  $f(x) = \sum_{e \in x} c_e$ .

**ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ.** Дано множество городов  $V$  и множество соединяющих их участков дорог (точнее, пар городов)  $E$ . Для каждого участка дороги  $e \in E$  известна его длина  $c_e \in \mathbb{Q}$ . (Далее мы предполагаем, что множество  $E$  содержит все пары городов. Если же какие-либо два города не соединены дорогой непосредственно, то полагаем длину этой дороги равной некоторому достаточно большому числу.) В множестве  $V$  выделены два города  $s$  и  $t$ . Требуется найти кратчайший (по суммарной длине участков дорог) путь, соединяющий  $s$  и  $t$ . Пространство решений в этой задаче состоит из всевозможных размещений из  $V \setminus \{s, t\}$ . Каждое размещение — последовательность городов некоторого пути, соединяющего  $s$  и  $t$ . Предикат допустимости тождественно равен истине. Целевая функция равна сумме длин участков дорог, составляющих данный путь. Направление оптимизации — минимум.

**ЗАДАЧА О РАСКРАСКЕ ВЕРШИН ГРАФА.** Задан граф  $G = (V, E)$ . Требуется каждой его вершине  $v \in V$  назначить некоторую метку  $k_v \in \mathbb{N}$  (символизирующую номер цвета) так, чтобы любые две смежные вершины имели разные метки, а значение наибольшей метки было бы минимальным. Таким образом,  $U = [n]^n$ , где  $n$  — число вершин графа, предикат  $g$  контролирует «разноцветность» смежных вершин, целевая функция  $f(\mathbf{u}) = \max\{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in U$ . Направление оптимизации — минимум.

Среди множества задач дискретной оптимизации особо выделяют *задачи комбинаторной оптимизации*, пространство решений которых конечно [173] и имеет комбинаторный характер.

Так, например, задача целочисленного линейного программирования не является комбинаторной, так как ее пространство решений, вообще говоря, не ограничено. Но при дополнительном ограничении  $|x_i| \leq B$ ,  $i \in [n]$ ,  $B \in \mathbb{Z}$ , задача становится комбинаторной. В задаче отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка пространство решений конечно, но имеет некомбинаторный характер. Тем не менее, эта задача становится комбинаторной, если

в качестве пространства решений рассмотреть множество последовательностей длины  $n$ , состоящих из нулей и единиц, и интерпретировать эти последовательности как двоичные записи целых чисел из отрезка  $[0, 2^n - 1]$ ,  $2^n > b$ .

Вообще, комбинаторность подразумевает, что пространство  $U$  представляет собой либо множество подмножеств (задача о рюкзаке), либо множество размещений с повторениями (задача булева квадратичного программирования, задача о раскраске графа), либо множество размещений без повторений (задача о кратчайшем пути). С целью обобщения всех этих и подобных им случаев будем предполагать, что пространство решений комбинаторной задачи представляет собой декартову степень  $S^d$  некоторого конечного множества  $S$  (в англоязычной литературе часто называемого *ground set*), где степень  $d \in \mathbb{N}$  называется *размерностью задачи*. При этом, разумеется, в предикат допустимости может быть добавлено дополнительное условие (например, является ли решение перестановкой или же размещением без повторений).

Центральной проблемой комбинаторной оптимизации является феномен *комбинаторного взрыва*. Так как пространство решений для задачи комбинаторной оптимизации конечно, то ее всегда (в теории) можно решить с помощью полного перебора всех решений. Поэтому такие задачи еще называют *переборными*. Тем не менее, при росте размерности задачи число потенциальных решений возрастает экспоненциально:  $|U| = |S|^d$ . При этом полный перебор становится практически невозможен, что вынуждает искать более рациональные способы поиска оптимального решения.

Изучение этой проблемы невозможно без введения понятия массовой задачи. В *индивидуальной задаче* дискретной (комбинаторной) оптимизации все входные данные (четверка, определяющая задачу) зафиксированы. *Массовая задача* комбинаторной оптимизации представляет собой последовательность или счетное множество однотипных индивидуальных задач, среди которых есть задачи с как угодно большой размерностью. Так, например, массовая задача о рюкзаке включает в себя все индивидуальные задачи, допускающие соответ-

ствующую формулировку. Другими словами, в массовой задаче о рюкзаке не зафиксировано множество предметов, их размеры и ценности.

В массовой задаче комбинаторной оптимизации целевая функция, как правило, зависит от некоторого набора параметров, фиксация которых отличает индивидуальную задачу от массовой. Например, в задаче о рюкзаке такими параметрами являются ценности предметов. То же самое верно и в отношении предиката допустимости. В задаче о рюкзаке он зависит от размеров предметов. Таким образом, индивидуальная задача по сути представляет собой вполне конкретный набор входных данных массовой задачи.

С учетом всех сделанных выше замечаний получаем следующее определение задачи комбинаторной оптимизации.

**Определение 1.3.** *Задача комбинаторной оптимизации* представляет собой шестёрку:

1. *Предикат входных данных*, определенный на множестве слов некоторого фиксированного алфавита (как правило, представляющих собой наборы чисел). Каждое слово (набор чисел)  $I$ , удовлетворяющее этому предикату, называется *входными данными* или *кодом* задачи.
2. *Размерность задачи*  $d = d(I) \in \mathbb{N}$ .
3. Конечное множество  $S = S(I)$ ,  
определяющее *пространство решений*  $U = S^d$ .
4. *Предикат допустимости*  $g = g(u, I) \in \{\text{ложь, истина}\}$ , где  $u \in U$ .
5. *Целевая функция*  $f = f(u, I) \in \mathbb{R}$ , где  $u \in U$ .
6. *Направление оптимизации*:  $\min$  или  $\max$ . По умолчанию,  $\max$ .

Если входные данные  $I$  не зафиксированы, то задача называется *массовой*, иначе — *индивидуальной*.

Для фиксированных входных данных  $I$  предикат  $g$  однозначно определяет множество допустимых решений  $X = X(I) = \{u \in U \mid g(u, I)\}$ . Цель задачи — среди всех допустимых решений  $X$  найти такое, на котором целевая функция  $f$  принимает оптимальное значение. Найденное решение называется *оптимальным*.

**Замечание 1.1.** Если сложность вычисления одного из предикатов или же целевой функции сравнима с числом перебираемых решений, то проблема комбинаторного взрыва при решении такой задачи отходит на второй план. Поэтому, как правило, предполагается, что *все функции в определении 1.3 полиномиально вычислимы*.

**Замечание 1.2.** В дальнейшем, при описании задач мы не рассматриваем предикат входных данных, предполагая, что на вход задачи подаются только допустимые данные. Учитывая, что направление оптимизации по умолчанию — максимум, задача комбинаторной оптимизации будет представлять собой не шестерку, а четверку.

Не уменьшая общности, множество  $S$  можно представлять подмножеством целых чисел. Далее будем предполагать, что  $S = \{0, 1, \dots, k - 1\}$ , где  $k = |S(I)|$ .

**Определение 1.4 ([115, 147]).** Задача комбинаторной оптимизации называется *линейной*, если целевая функция линейна:  $f(u) = f(u, c) = c^T u$ , где  $u \in U = S^d$ , а целевой вектор  $c \in \mathbb{Q}^d$  содержится во входных данных задачи.

Таким образом, с учетом замечания 1.2, массовая линейная задача комбинаторной оптимизации представляет собой тройку функций  $d = d(I)$ ,  $S = S(I)$  и  $g = g(u, I)$ , определяющих множество допустимых решений.

**Замечание 1.3.** Умножение целевого вектора  $c$  на положительный скаляр не меняет оптимальности решений. Кроме того, за счет умножения  $c$  на наименьшее общее кратное знаменателей его компонент, его можно сделать целочисленным



за полиномиальное относительно размера  $\text{size}(\mathbf{c})$  время. Поэтому, не уменьшая общности, можно предполагать, что вектор  $\mathbf{c}$  — целочисленный.

Далее мы будем рассматривать исключительно линейные задачи комбинаторной оптимизации. С одной стороны, задачи с таким ограничением довольно часто встречаются на практике (например, задача целочисленного линейного программирования, задача о рюкзаке). С другой стороны, методы решения задач такого типа в настоящее время развиты настолько сильно, что даже задачи с нелинейной целевой функцией во многих случаях решаются более эффективно, если привести их к линейному виду. В качестве примера покажем, как выполняется это преобразование для некоторых, наиболее популярных задач.

В задаче булева квадратичного программирования вместо  $n$ -мерного вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  рассматривается вектор  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{n(n+1)/2}$ , координаты которого  $y_{ij} = x_i x_j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ . В этом случае пространство решений  $U = \{0, 1\}^{n(n+1)/2}$ , предикат допустимости проверяет выполнение условий  $y_{ij} = y_{ii} y_{jj}$ , а целевая функция линейна:  $f(\mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} y_{ij}$ .

По аналогии с предыдущей задачей, в задаче отыскания максимума многочлена можно вместо переменной  $x \in \mathbb{Z}$  рассмотреть вектор  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ , координаты которого должны удовлетворять условию  $y_k = y_1^k$ ,  $k \in [d]$ . Тогда целевая функция становится линейной:  $f(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^d c_k y_k$ .

В задаче о кратчайшем пути в качестве пространства решений обычно рассматривают множество  $\{0, 1\}^E$  характеристических векторов подграфов графа дорог. Тогда предикат допустимости для каждого  $\mathbf{u} = (u_e) \in \{0, 1\}^E$  должен проверять, является ли соответствующее подмножество участков дорог путем, соединяющим города  $s$  и  $t$ , а целевая функция  $f(\mathbf{u}) = \sum_{e \in E} c_e u_e$ .

В наиболее естественной интерпретации задачи о раскраске вершин графа каждой раскраске ставится в соответствие её характеристический вектор  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^{n^2}$ , координаты которого определяются следующим образом:  $u_{ji} = 1$ , если  $j$ -я вершина окрашена в  $i$ -й цвет, в противном случае  $u_{ji} = 0$ . Предикат

допустимости в таком случае проверяет корректность условий  $\sum_{i \in [n]} u_{ji} = 1$ ,  $j \in [n]$ , (каждая вершина окрашена одним цветом) и  $u_{ji} + u_{ki} \leq 1$ ,  $i \in [n]$ , если  $j$ -я и  $k$ -я вершины смежны. Тогда целевую функцию можно определить следующим образом:  $f(\mathbf{u}) = \sum_{i,j \in [n]} n^i u_{ji}$ . Ясно, что минимум будет достигаться при минимальном числе использованных цветов. (В разделе 4.4.3 приводится более экономная интерпретация этой задачи, в которой коэффициенты линейной функции принадлежат множеству  $\{0, 1\}$ .)

Довольно часто множество линейных задач комбинаторной оптимизации дополнительно ограничивается условием  $S = \{0, 1\}$ . Это связано с тем, что многие прикладные задачи допускают следующую формулировку [115, 147]. Дано конечное множество  $E$ , предикат допустимости  $g: 2^E \rightarrow \{\text{ложь, истина}\}$  и функция весов  $c: E \rightarrow \mathbb{Q}$ . Для каждого подмножества  $T \subseteq E$  определено значение целевой функции  $f(T) = \sum_{e \in T} c(e)$ . Требуется найти

$$T^* = \operatorname{argmax}_{T \subseteq E} \{f(T) \mid g(T)\}.$$

Пространство решений  $U = \{0, 1\}^E$  такой задачи состоит из характеристических векторов подмножеств множества  $E$ .

Другим, часто встречающимся типом ограничений, являются ограничения, накладываемые на выбор целевого вектора. В терминологии определения 1.3, выполнение этих условий проверяется (полиномиально вычислимым) предикатом входных данных. Во многих задачах эти ограничения являются линейными. Примером может служить классическая задача о кратчайшем пути, в которой ограничения неотрицательности длин участков дорог, то есть  $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ , переводят задачу из класса NP-трудных в класс полиномиально разрешимых. Далее будем называть такие задачи линейными задачами комбинаторной оптимизации с *ограничением на множество исходных данных (целевых векторов)*. В общем случае, ниже речь пойдет о проверяемых за полиномиальное время ограничениях вида  $\mathbf{c} \in P$ , где  $P = P(I)$  — некоторый полиэдр. (В случае задачи о кратчайшем пути,  $P = \mathbb{R}_+^d$ .)

## Глава 2

### Многогранники задач

Основная цель этой главы — обзор известных результатов по теме диссертации. Глава начинается с введения понятия семейства многогранников (полиэдров) задачи. В разделе 2.2 обсуждается задача идентификации граней многогранников задач. В разделе 2.3 перечислены некоторые известные факты для таких полиэдральных характеристик задач, как число вершин, диаметр и кликовое число графа многогранника. В разделе 2.4 вводятся понятия расширения многогранника, его сложности и числа прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней. В разделе 2.5 формулируются общие вопросы, ответы на которые будут представлены в последующих главах.

#### 2.1. Многогранники и полиэдры задач

Обратим внимание на то, что индивидуальная линейная задача комбинаторной оптимизации по сути сводится к оптимизации линейной целевой функции  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  на некотором конечном множестве допустимых решений  $X \in \mathbb{Z}^d$ . (В частности,  $X$  является подмножеством вершин куба  $\text{Cube}_d$  в широко распространенном случае, когда  $S = \{0, 1\}$ .) Причем оптимальное значение целевой функции инвариантно относительно замены множества  $X$  его выпуклой оболочкой  $\text{conv}(X)$ . Таким образом, линейная задача комбинаторной оптимизации эквивалентна оптимизации линейной функции на выпуклом многограннике  $\text{conv}(X)$ , называемом *многогранником задачи*. Заметим, что один и тот же многогранник соответствует множеству индивидуальных задач, отличающихся друг от друга только целевыми векторами. *Кодом* такого многогранника далее будем называть ту часть кода соответствующей индивидуальной задачи, которая определяет множество допустимых решений  $X$  (то есть не содержит избыточ-

ной информации о целевом векторе). При такой интерпретации массовая задача ассоциируется с семейством многогранников. В частности, в работе [155] предлагается формализовать задачу комбинаторной оптимизации как последовательность 0/1-многогранников  $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  таких, что для любого вектора  $\mathbf{v}$  и индекса  $n$  (кода многогранника) мы можем за полиномиальное время проверить, является ли  $\mathbf{v}$  вершиной многогранника  $P_n$ .

**Определение 2.1.** Каждое семейство многогранников, рассматриваемое в настоящей работе, определяется четверкой:

1. Множество кодов  $L$ , распознаваемое за полиномиальное время.
2. Размерность  $d = d(I) \in \mathbb{N}$ ,  $I \in L$ .
3. Функция  $k = k(I) \in \mathbb{N}$ ,  $I \in L$ . (Для 0/1-многогранников  $k(I) \equiv 1$ .)
4. Предикат допустимости  $g = g(\mathbf{x}, I) \in \{\text{истина, ложь}\}$ ,  $I \in L$ ,  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^d$ .

Полиномиально вычислимые функции  $d = d(I)$  и  $k = k(I)$  определяют пространство  $\{0, 1, \dots, k\}^d$ , в котором располагается многогранник с кодом  $I$ . Сам же многогранник представляет собой выпуклую оболочку множества

$$X(I) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1, \dots, k\}^d \mid g(\mathbf{x}, I)\}.$$

Соответственно,  $\{X(I) \mid I \in L\}$  — все семейство многогранников.

Семейство многогранников будем называть *комбинаторным*, если предикат допустимости  $g = g(\mathbf{x}, I)$  полиномиально вычислим.

**Замечание 2.1.** Здесь и далее при определении специальных многогранников мы часто будем называть многогранником множество его вершин, подразумевая V-описание многогранника. Эта произвольность связана с тем, что нас, в первую очередь, будут интересовать две операции над многогранниками: аффинное отображение и пересечение с опорной гиперплоскостью. Результатом каждой из этих операций является выпуклый многогранник, причем множество

вершин этого многогранника является результатом применения этих операций к множеству вершин исходного многогранника.

**Замечание 2.2.** Суммарная длина аргументов предиката  $g$  равна  $d \cdot \lceil \log_2(k + 1) \rceil + \text{size}(I)$ . Так как функция  $k = k(I)$  полиномиально вычислима, то длина аргументов полиномиальна относительно суммы  $d + \text{size}(I)$ , называемой далее *размером многогранника*  $X(I)$ .

**Замечание 2.3.** Выбор пространства  $\{0, 1, \dots, k\}^d$  вместо более общего  $\{a, a + 1, \dots, b\}^d$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , объясняется тем, что любое множество  $X \subseteq \{a, a + 1, \dots, b\}^d$  элементарным смещением  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{a}$  преобразуется в множество  $X' \subseteq \{0, k\}^d$ , где  $k = b - a$ . При этом не меняются не только комбинаторно-геометрические свойства этого множества, но и сложность задачи линейной оптимизации на нем. (Предполагается, что  $a$  и  $b$ , также, как и  $k$  в определении 2.1, полиномиально вычислимы относительно кода многогранника.)

**Замечание 2.4.** В [41, с. 420] комбинаторным многогранником называется класс комбинаторно эквивалентных выпуклых многогранников. В [139, 144] комбинаторными называются многогранники, у которых для каждой пары несмежных вершин середина соединяющего их отрезка является также серединой отрезка, соединяющего (некоторую) другую пару вершин этого многогранника. В настоящей работе эти определения не используются.

Обратимся к примерам.

С задачей булева квадратичного программирования ассоциируется *булев квадратичный многогранник*

$$P_{\text{ВQR}}(n) = \left\{ \mathbf{x} = (x_{ij}) \in \{0, 1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj}, 1 \leq i < j \leq n \right\}, \quad (2.1)$$

обладающий многими интересными свойствами [17]. В данном случае параметр  $n \in \mathbb{N}$  является кодом многогранника.

Булев квадратичный многогранник тесно связан с *многогранником разрезов*  $P_{\text{cut}}(n) \subseteq \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ , вершинами которого являются характеристические вектора разрезов полного неориентированного графа на  $n$  вершинах [17].

С задачей отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка связан циклический многогранник

$$C_d(a, b) = \{(x, x^2, \dots, x^d) \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.2)$$

Здесь кодом многогранника служит тройка  $(d, a, b)$ .

*Многогранник задачи о рюкзаке* представляет собой выпуклую оболочку подмножества 0/1-векторов, принадлежащих полупространству  $H^-(a, b)$ ,  $a \in \mathbb{Z}^n$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ :

$$P_{\text{кнп}}(a, b) = \{x \in \{0, 1\}^n \mid a^T x \leq b\}. \quad (2.3)$$

Кодом многогранника, как нетрудно догадаться, является пара  $(a, b)$ .

Пусть  $G(V, E)$  — полный неориентированный граф на  $n$  ( $n = |V|$ ) вершинах, среди которых выделены две:  $s$  и  $t$ . Пусть  $W \subseteq 2^E$  — множество всех  $s$ - $t$  путей в этом графе. *Многогранником путей* называется выпуклая оболочка множества всех характеристических векторов  $P_{\text{path}}(n) \subseteq \{0, 1\}^E$  для путей из  $W$ . Аналогично определяется *многогранник орпутьей*  $P_{\text{dipath}}(n) \subseteq \{0, 1\}^A$  для полного ориентированного графа  $D(V, A)$  на  $n$  вершинах.

С многогранником путей тесно связан *многогранник задачи коммивояжера* или *многогранник гамильтоновых циклов* [18]  $P_{\text{TSP}}(n)$ , представляющий собой выпуклую оболочку множества характеристических векторов всех гамильтоновых циклов полного неориентированного графа на  $n$  вершинах. В свою очередь, выпуклая оболочка множества характеристических векторов гамильтоновых контуров в полном ориентированном графе на  $n$  вершинах называется *многогранником асимметричной задачи коммивояжера* или *многогранником гамильтоновых контуров* и обозначается  $P_{\text{ATSP}}(n)$ .

Задаче о сортировке массива (по-видимому, одной из самых востребованных на практике) соответствует семейство *перестановочных многогранников* [18]

или *пермutoэдров* [41]. Вершинами пермutoэдра  $P_{\text{perm}}(n)$  являются вектора, полученные всевозможными перестановками координат вектора  $(1, 2, \dots, n)$ . Если же для перестановки  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  вместо вектора  $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  мы рассмотрим перестановочную матрицу  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n \times n}$  с компонентами

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi(i) = j, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

то получим *многогранник Биркгофа*  $P_{\text{Birk}}(n)$ , который еще называется *многогранником бистохастических матриц* и *многогранником задачи о назначениях* [18]. Перестановочную матрицу  $\mathbf{x}$  можно также интерпретировать как характеристический вектор совершенного паросочетания в полном двудольном графе, каждая доля которого содержит по  $n$  вершин. С этой точки зрения многогранник  $P_{\text{Birk}}(n)$  может быть также назван многогранником совершенных паросочетаний в двудольном графе.

*Многогранник совершенных паросочетаний*  $P_{\text{match}}(n)$  определяется как выпуклая оболочка всех характеристических векторов совершенных паросочетаний в полном графе на  $n$  вершинах.

Задача о поиске в полном реберно-взвешенном графе  $G(V, E)$  минимального (по суммарному весу входящих ребер) остовного (то есть связывающего все вершины графа) дерева может быть переформулирована как задача оптимизации на *многограннике остовных деревьев*  $P_{\text{tree}}(n) \subset \{0, 1\}^E$ ,  $n = |V|$ , вершинами которого являются характеристические векторы остовных деревьев в графе  $G$ .

Обобщением многогранников остовных деревьев являются многогранники матроидов (точнее, баз матроидов). В [92] приводится весьма оригинальное, но вместе с тем краткое и емкое определение этих многогранников. 0/1-многогранник в  $\mathbb{R}^n$  называется *многогранником матроида*, если он лежит в гиперплоскости  $H(1, r)$  при некотором целом  $r \in [n]$  и его вершины удовлетворяют следующему критерию смежности: вершины  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  смежны тогда и только тогда, когда найдутся  $i, j \in [n]$ ,  $i \neq j$ , такие, что  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ . При этом число  $r$  называ-

ется *рангом* матроида. В частности, ранг матроида остовных деревьев в полном графе на  $n$  вершинах равен  $n - 1$ .

Еще одно семейство многогранников, часто встречаемое в литературе, — *многогранники независимых множеств* в графе  $G = (V, E)$  [73], также называемые *многогранниками упаковок вершин* [145]:

$$P_{\text{stab}}(G) = \{x \in \{0, 1\}^V \mid x_v + x_u \leq 1 \text{ для каждого ребра } \{v, u\} \in E\}.$$

Этот, далеко не полный список многогранников задач, встречаемых в литературе, будет дополнен в главе 4 еще несколькими примерами.

Целесообразность изучения свойств многогранников задач обусловлена многими причинами. Основная причина состоит в том, что оптимальное значение целевой функции на множестве  $X$  и на его выпуклой оболочке  $\text{conv}(X)$  совпадают. То есть линейная задача комбинаторной оптимизации может быть сформулирована как задача оптимизации линейной функции на выпуклом многограннике. Еще в 1954 году Данциг, Фалкерсон и Джонсон [80], опираясь на эту идею и используя разработанный Данцигом симплекс-метод, достигли впечатляющего по тем временам прогресса в решении задачи коммивояжера. Впоследствии этот подход нашел широчайшее применение, породив большое число различных методов и их модификаций для решения задач такого типа. Естественно, трудоемкость того или иного метода (алгоритма) зависит от некоторых свойств или числовых характеристик соответствующих многогранников. Так, например, размерность многогранника служит нижней оценкой сложности соответствующей задачи, так как равна числу степеней свободы при поиске оптимального решения. Другими примерами комбинаторных характеристик многогранника, с помощью которых можно оценивать сложность соответствующей задачи, являются число его вершин, число гиперграней, числовые характеристики графа многогранника, числовые характеристики матрицы инциденций вершин-гиперграней. Примерами некомбинаторных характеристик могут служить сложность идентификации грани многогранника (гиперграни, вершины, ребра и т. п.), сложность



задачи отделимости для данного многогранника, минимальное число гиперграней расширения многогранника и многие другие. Роль каждой из этих характеристик в оценке сложности линейных задач комбинаторной оптимизации будет рассмотрена чуть ниже, в разделах 2.2, 2.3 и 2.4. Но прежде нам следует особо рассмотреть те часто встречающиеся на практике случаи задач, когда на целевой вектор накладываются некоторые естественные ограничения. Например, неотрицательность координат целевого вектора.

### 2.1.1. Полиэдры задач

Хорошо известно, что задача о кратчайшем (ор)пути полиномиально разрешима при условии неотрицательности длин ребер (дуг) [86]. Вместе с тем, если снять это ограничение, то задача становится NP-трудной [16]. То есть задача оптимизации линейной целевой функции на многограннике (ор)путей NP-трудна. Как же описать многогранник задачи с ограничением неотрицательности координат целевого вектора? Универсальным средством в этом случае является понятие доминанты многогранника [173].

Доминантой многогранника  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  называется полиэдр

$$P^\uparrow = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \exists x \in P \ y \geq x\} = P + \mathbb{R}_+^d,$$

где  $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq 0\} = \text{cone}\{e_1, \dots, e_d\}$ .

Таким образом, задаче о кратчайшем (ор)пути с ограничением неотрицательности длин ребер (дуг) соответствует задача оптимизации на полиэдре  $P_{\text{path}}^\uparrow(n)$  ( $P_{\text{dipath}}^\uparrow(n)$ ).

Аналогичным образом можно построить полиэдр для полиномиально разрешимой задачи о минимальном разрезе в полном неориентированном реберно взвешенном графе на  $n$  вершинах. С этой целью рассмотрим множество вершин  $P_{\text{cut}}(n)$  многогранника разрезов и удалим из него вершину с нулевыми координатами, соответствующую пустому разрезу. Доминанту выпуклой оболочки этого множества обозначим  $P_{\text{mincut}}(n)$  и будем называть *полиэдром разрезов* [77]. Для

полноты картины отметим, что в [176] исследуются свойства доминант многогранников  $s$ - $t$  разрез в произвольных (неполных) графах. В случае полного графа эти полиэдры двойственны к полиэдрам  $P_{\text{path}}^\uparrow(n)$  [173].

Немного сложнее определяется полиэдр задачи о кратчайшем пути в полном орграфе  $G(V, A)$  при условии, что в  $G$  отсутствуют контуры отрицательной длины:

$$P_{\text{shortpath}}(n) = P_{\text{dipath}}(n) + \text{cone}(\text{Cycle}(n)),$$

где  $n = |V|$ , а  $\text{Cycle}(n)$  — множество характеристических векторов контуров в графе  $G$ . Именно его, а не полиэдр  $P_{\text{dipath}}^\uparrow(n)$ , и будем в дальнейшем называть *полиэдром кратчайших орнудей*. Известно [168, 180], что его Н-описание значительно компактнее, чем у полиэдра  $P_{\text{dipath}}^\uparrow(n)$ . У него ровно  $|A|$  гиперграней, определяемых неравенствами вида  $x_a \geq 0$ ,  $a \in A$ . А сам полиэдр лежит в пересечении гиперплоскостей, определяемых следующими равенствами (для удобства сформулированными в терминах орграфа  $G$ ). Разность между числом дуг, выходящих из (начальной) вершины  $s$ , и числом входящих в неё дуг равна единице. Разность между числом дуг, входящих в (конечную) вершину  $t$ , и числом выходящих из неё равна единице. Та же разность для любой другой вершины равна нулю (условие сохранения потока).

Таким образом, для любой задачи оптимизации  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$  на конечном множестве  $X \subset \mathbb{Z}^d$ , целевой вектор  $\mathbf{c}$  которой должен удовлетворять набору ограничений вида  $\mathbf{c}^T \mathbf{a}_i \leq 0$ ,  $i \in [k]$ , соответствующий *полиэдр задачи* представляет собой сумму Минковского многогранника  $\text{conv}(X)$  и конуса  $\text{cone}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ .

## 2.2. Задача идентификации грани

Прежде, чем перейти к обсуждению характеристик многогранников (полиэдров), обратим внимание на задачу идентификации грани (вершины, ребра, гиперграни и т. д.).

Входные данные *задачи идентификации грани* состоят из кода многогран-

ника (полиэдра) и описания тестируемой грани. Способ описания тестируемой грани зависит от её размерности. Потенциальная вершина определяется вектором координат, ребро — двумя вершинами (векторами), гипергрань — коэффициентами соответствующего линейного уравнения. Выходом задачи идентификации грани является ответ Да или Нет.

### 2.2.1. Идентификация вершины

Практически для всех многогранников известных в настоящее время прикладных задач идентификация вершины является простой. В основном это связано с тем, что как в теоретических, так и в прикладных исследованиях наибольшее внимание уделяется тем случаям, когда множество допустимых решений  $X$  состоит только из 0/1-векторов. В этом случае  $X$  совпадает с множеством вершин многогранника  $\text{conv}(X)$ , а предикат допустимости  $g$  (из определения 2.1) идентифицирует вершины многогранника задачи. Если же среди вершин многогранника есть не только 0/1-вектора, то, строго говоря, идентификация вершины не сводится к вычислению одного предиката допустимости и может потребовать обработки всего множества допустимых решений  $X$ . В общем случае, эта задача является co-NP-полной [172, Theorem 18.5].

Теоретический интерес также представляют многогранники, для которых уже задача вычисления предиката допустимости является NP-трудной или же имеет экспоненциальную сложность. Например, в [183] рассматривается многогранник, вершинами которого являются характеристические вектора всех гамильтоновых подграфов полного графа (на  $n$  вершинах). Так как задача проверки гамильтоновости графа является NP-полной [125], то и задача идентификации вершины (а также задача вычисления предиката допустимости) такого многогранника NP-полна.

### 2.2.2. Идентификация гиперграни

Известно [173], что при условии  $NP \neq co-NP$  решение задачи идентификации гиперграни для семейства многогранников любой  $NP$ -трудной линейной задачи комбинаторной оптимизации не может быть реализовано за полиномиальное время. Более того, задача идентификации гиперграни является  $D^P$ -полной (и, следовательно,  $NP$ -трудной) для многогранников задачи коммивояжера [156], задачи о клике [157] и задачи о линейном упорядочивании [95].

С задачей идентификации гиперграни тесно связана задача *идентификации опорной гиперплоскости*: для данных  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$  и  $b \in \mathbb{Z}$  проверить, является ли гиперплоскость  $H(\mathbf{a}, b)$  опорной для данного многогранника  $P$ . Известно, что эта задача  $D^P$ -полна для многогранников задачи коммивояжера и задачи о клике [157]. А для многогранника задачи о рюкзаке доказана  $co-NP$ -полнота идентификации допустимого неравенства [111].

### 2.2.3. Идентификация ребра

Задача идентификации ребра многогранника часто называется *задачей о смежности вершин*. Интерес к этой задаче обычно обосновывается тем, что критерий смежности вершин многогранника может послужить основой для построения эффективного алгоритма, использующего технику локального поиска [139]. Кроме того, далее мы обратимся к рассмотрению таких характеристик графов многогранников, как диаметр и кликовое число, что предполагает более подробное освещение известных в этой области результатов о смежности вершин.

Прежде всего, сформулируем критерии смежности вершин для известных (и уже ставших классическими) полиномиально разрешимых задач комбинаторной оптимизации: задача о сортировке массива, задача о минимальном остовном дереве, задачи о назначениях и о паросочетаниях (в полном реберно-взвешенном графе), задача о кратчайшем пути, задача о минимальном разрезе и задача отыс-

кания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка.

Выше (раздел 2.1, с. 47), при определении многогранника матроида был сформулирован критерий смежности его вершин. Вершины  $x$  и  $y$  пермutoэдра  $P_{\text{perm}}(n)$  смежны тогда и только тогда, когда найдется  $i \in [n-1]$  такой, что вектор  $y$  получается из вектора  $x$  перестановкой  $i$ -й и  $(i+1)$ -й координат [18].

**Лемма 2.1 ([51]).** *Две вершины многогранника Биркгофа  $P_{\text{Birk}}(n)$  смежны тогда и только тогда, когда симметрическая разность  $p_1 \Delta p_2 = (p_1 \setminus p_2) \cup (p_2 \setminus p_1)$  соответствующих паросочетаний  $p_1$  и  $p_2$  образует (один) цикл.*

В точности так же формулируется критерий смежности и для многогранника совершенных паросочетаний  $P_{\text{match}}(n)$  [73, 150].

Для вершин полиэдров  $P_{\text{path}}^{\uparrow}(n)$ ,  $P_{\text{dipath}}^{\uparrow}(n)$  и полиэдра кратчайших орпутьей  $P_{\text{shortpath}}(n)$  известен следующий критерий смежности. Приведем его формулировку для орграфа.

**Лемма 2.2 ([25, 173]).** *Пусть  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  — два различных  $s$ - $t$  пути в полном орграфе  $D$  на  $n$  вершинах. Тогда их характеристические вектора  $\chi(\tilde{x})$  и  $\chi(\tilde{y})$  являются смежными вершинами полиэдра  $P_{\text{shortpath}}(n)$  (и  $P_{\text{dipath}}^{\uparrow}(n)$ ), если, и только если, симметрическая разность  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  образует неориентированный цикл, состоящий из двух орпутьей, имеющих общее начало и общий конец, и не имеющих других общих вершин.*

**Замечание 2.5.** Доказательство этой леммы для полиэдра  $P_{\text{dipath}}^{\uparrow}(n)$  имеется в [173, theorem 13.4, p. 202], но содержит неточность. Там сказано, что если объединение двух орпутьей  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  содержит третий орпуть  $\tilde{z}$ , то вектор  $w = \chi(\tilde{x}) + \chi(\tilde{y}) - \chi(\tilde{z})$  тоже является характеристическим вектором некоторого орпуть. В частности, это утверждение неверно для орпутьей, изображенных на рис. 2.1. В работе [163], исследующей свойства графа полиэдра  $P_{\text{shortpath}}(n)$ , также содержатся неточности как в определении самого полиэдра (утверждается, что  $P_{\text{shortpath}}(n)$  совпадает с



Рис. 2.1. Пример двух орпутей  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , соответствующих паре несмежных вершин многогранника  $P_{\text{dipath}}^{\uparrow}(4)$

многогранником орпутей  $P_{\text{dipath}}(n)$ , так и в описании критерия смежности вершин (смешаны понятия цикла и контура). Точное доказательство этой леммы приводится ниже, в разделе 7.2.

**Лемма 2.3 ([58]).** *Вершины  $x$  и  $y$  полиэдра разрезов  $P_{\text{mincut}}(n)$  смежны тогда и только тогда, когда для соответствующих разрезов  $\delta(A)$  и  $\delta(B)$  в полном графе  $G(V, E)$  выполняется одно из условий:*

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{или} \quad A \subset B \quad \text{или} \quad B \subset A \quad \text{или} \quad A \cup B = V.$$

**Замечание 2.6.** В формулировке критерия смежности в [58] потеряно последнее условие. Тем не менее, все последующие рассуждения легко корректируются.

Формулировка критерия смежности вершин для полиэдров  $s$ - $t$  разрезов в полном (ор)графе [176] является частным случаем утверждения леммы 2.3 в том смысле, что для  $s$ - $t$  разрезов всегда выполнены условия  $A \cap B \neq \emptyset$  (так как  $s \in A \cap B$ ) и  $A \cup B \neq V$  (так как  $t \notin A \cup B$ ).

Критерий смежности вершин циклического многогранника  $C_d(a, b)$  особенно прост [101]. Каждые две его вершины смежны при  $d \geq 4$ .

Обратимся теперь к результатам распознавания смежности вершин на многогранниках NP-трудных задач. Их можно разделить на две группы. Прежде всего, перечислим многогранники, для которых установлена полиномиальная разрешимость задачи о смежности вершин.

Попарная смежность вершин многогранника разрезов  $P_{\text{cut}}(n)$  и булева квадратичного многогранника  $P_{\text{BQP}}(n)$  была независимо установлена несколькими авторами [7, 15, 53].

Согласно [73], пара вершин многогранника независимых множеств  $P_{\text{stab}}(G)$  смежна тогда и только тогда, когда симметрическая разность соответствующих независимых множеств индуцирует связный подграф в  $G$ . По-сути, этот же критерий смежности верен и для многогранников упаковок множеств и многогранников разбиений множеств [113]. Кроме того, частным случаем многогранников разбиений множеств являются многогранники трехиндексной (а также многоиндексной) задачи о назначениях (см. раздел 4.4.1).

Полиномиальный алгоритм для проверки смежности вершин многогранника линейных порядков описан в [184].

Идентификация смежности вершин co-NP-полна для многогранников следующих задач: задача коммивояжера [154], задача о рюкзаке [72, 103, 138], задача о покрытии множества [138], задача о кубическом подграфе [59], задача о назначениях с ограничением [44], задача о 3-выполнимости и задача о частичном упорядочивании [94].

## 2.3. Характеристики графа многогранника

### 2.3.1. Вершины многогранника

Число вершин многогранника является верхней оценкой числа проверок, выполняемых при полном переборе всех допустимых решений. Разумеется, эта оценка справедлива только в тех случаях, когда имеется эффективная процедура перебора всех допустимых решений. В худшем случае вместо множества допустимых решений приходится перебирать все пространство решений  $U = S^d$  и верхней оценкой становится экспонента  $|S|^d$ .

Заметим, что полиномиальная сложность идентификации вершины многогранника еще не гарантирует полиномиальность вычисления общего числа вершин. С целью иллюстрации этого утверждения рассмотрим задачу подсчета числа вершин многогранника задачи о рюкзаке  $P_{\text{кnap}}(a, b)$ . Задача идентификации вершины этого многогранника является простой. Достаточно проверить, что

данный вектор  $x$  является 0/1-вектором и удовлетворяет неравенству  $a^T x \leq b$ .

**Утверждение 2.4.** *Задача нахождения числа вершин многогранника  $P_{\text{кнар}}(a, b)$  является NP-трудной.*

**Доказательство.** Рассмотрим частный случай задачи, положив  $2b = a^T \mathbf{1}$ . Заметим, что при таком условии число 0/1-векторов  $x$ , удовлетворяющих ограничению  $a^T x \leq b$ , совпадает с числом 0/1-векторов  $y$ , удовлетворяющих ограничению  $a^T y \geq b$ . (Соотношение  $y = \mathbf{1} - x$  определяет взаимно-однозначное соответствие между этими множествами.)

Пусть  $N$  — число вершин многогранника  $P_{\text{кнар}}(a, b)$ , а  $K$  — число его вершин, удовлетворяющих равенству  $a^T x = b$ . В силу сделанного выше замечания, эти числа связаны соотношением  $2N = 2^n + K$ , где  $n$  — размерность вектора  $a$ , а  $2^n$  — число всех 0/1-векторов этой размерности. Таким образом, задача вычисления  $N$  эквивалентна вычислению  $K$ . Но уже задача проверки неравенства  $K > 0$  является NP-полной (задача о сумме размеров [16]). ■

### 2.3.2. Диаметр графа

Основной мотивацией для оценок диаметров графов многогранников является тот факт, что симплекс-метод [81] решает задачу линейного программирования, двигаясь по ребрам графа многогранника от исходной вершины к оптимальной. Таким образом, если правило выбора ребра (англ. pivot rule) в симплекс-методе идеально (выбирает кратчайший путь до оптимальной вершины), то диаметр графа многогранника равен числу шагов симплекс-метода при наихудшем выборе исходной вершины.

В 1957 году Уоррен Хирш высказал гипотезу о том, что диаметр графа полиэдра не превосходит разности между числом его гиперграней и размерностью [82]. Вскоре после публикации этой гипотезы был найден контрпример — 4-мерный полиэдр с 8 гипергранями и 15 вершинами, диаметр графа которого



равен 5 [131]. Поэтому гипотеза была скорректирована на случай ограниченных полиэдров (многогранников) и только в 2010 году был найден контрпример для многогранников [170]. Тем не менее, построение многогранников, диаметр графа которых был бы хотя бы в два раза больше числа гиперграней, является очень амбициозной задачей [171]. С другой стороны, до сих пор не известны полиномиальные верхние оценки диаметра графа произвольного многогранника. Поэтому главной целью этого направления исследований является полиномиальная гипотеза Хирша:

**Гипотеза 2.5 (полиномиальная гипотеза Хирша).** *Существует такая полиномиальная функция  $f(n, d)$ , что для любого  $d$ -мерного многогранника (полиэдра) с  $n$  гипергранями его диаметр графа не превышает  $f(n, d)$ .*

Как следует из приведенных выше (в начале раздела) рассуждений, эта гипотеза связана с возможностью построения сильно полиномиального (то есть не зависящего от размера входных чисел) алгоритма линейного программирования на основе симплекс-метода. Задача построения такого алгоритма включена Смэйлом в список математических задач XXI века [177].

В силу изложенных выше причин, оценке диаметров графов для различных семейств многогранников посвящено большое число работ. Часть из них, а также ссылки на более ранние обзоры по этой теме можно найти в [128, 171]. Здесь же мы перечислим в первую очередь некоторые известные оценки диаметров графов многогранников ассоциированных с задачами комбинаторной оптимизации:

1. Диаметр пермutoэдра  $P_{\text{perm}}(n)$  равен  $n(n - 1)/2$  [18].
2. Непосредственно из критерия смежности вершин многогранника матроида следует, что диаметр его графа меньше либо равен рангу  $r$ . В частности, диаметр графа многогранника остовных деревьев  $P_{\text{tree}}(n)$  равен  $n - 1$  при  $n \geq 4$ .

3. Диаметр графа полиэдра кратчайших путей  $P_{\text{shortpath}}(n)$  (и полиэдра  $P_{\text{dipath}}^{\uparrow}(n)$ ) равен двум при  $n \geq 4$ . Достаточно заметить, что вершина, соответствующая пути, составленному из одной единственной дуги  $(s, t)$ , смежна со всеми остальными вершинами полиэдра (см. критерий смежности в лемме 2.2).
4. Диаметр графа полиэдра  $P_{\text{mincut}}(n)$  (и полиэдров  $s$ - $t$  разрезов в полном (ор)графе) равен двум при  $n \geq 4$ . Достаточно заметить, что вершина, соответствующая разрезу  $\delta(S)$ , где  $S$  состоит из одной вершины, смежна со всеми остальными вершинами полиэдра (см. критерий смежности в лемме 2.3).
5. Диаметр графа многогранника Биркгофа  $P_{\text{Birk}}(n)$  равен двум при  $n \geq 4$  [51]. То же верно и для многогранника паросочетаний  $P_{\text{match}}(n)$  [150].
6. Диаметр графа циклического многогранника равен единице [101].
7. Диаметры графов многогранника разрезов  $P_{\text{cut}}(n)$  и булева квадратичного многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$  равны единице [7, 15, 53].
8. Диаметр графа многогранника асимметричной задачи коммивояжера  $P_{\text{ATSP}}(n)$  равен двум при  $n \geq 6$  [150]. В той же работе доказан аналогичный факт для многогранника  $k$ -назначений и некоторых других.
9. Диаметр графа многогранника задачи коммивояжера  $P_{\text{TSP}}(n)$  не превосходит четырех [164].
10. Диаметр многогранника линейных порядков  $P_{\text{LO}}(n)$  (см. определение на с. 109) равен двум [184].
11. Диаметр многогранника  $k$ -циклов не превосходит пяти [105].

Этот список может быть дополнен более свежими (но имеющими более сложные формулировки) оценками диаметров графов для транспортных многогран-

ников [61, 83, 128], обобщенных ассоциэдров [69, 70] и многогранников разбиений множества [60].

Вообще, диаметр графа 0/1-многогранника не превышает его размерности [143]. Более того, если  $X \subseteq \{0, 1, \dots, k\}^d$ , то диаметр графа многогранника  $\text{conv}(X)$  не превышает  $k \cdot \dim(\text{conv}(X)) \leq kd$  [132]. В качестве примера заметим, что для пермutoэдра  $k = n - 1$ ,  $\dim(P_{\text{perm}}(n)) = n - 1$ , а диаметр равен  $n(n - 1)/2$ .

### 2.3.3. Кликовое число графа

В 1980-х годах В. А. Бондаренко ввел понятие класса алгоритмов прямого типа для задач комбинаторной оптимизации [10] (см. также более современную, исправленную и дополненную версию в [12]). Ключевой особенностью алгоритмов этого класса является то, что их трудоемкость оценивается снизу кликовым числом графа многогранника соответствующей линейной задачи комбинаторной оптимизации (в [10] кликовое число называется плотностью). Более подробное описание этой теории содержится ниже, в главе 7. Здесь же мы приводим лишь краткий обзор известных результатов. Всюду далее кликовое число графа многогранника  $P$  обозначаем  $\omega(P)$ .

В [10] показано, что алгоритмы сортировки, жадный алгоритм для матроидов (в частности, для задачи о минимальном остовном дереве), алгоритм Дейкстры для кратчайшего пути в графе, алгоритм Хелда–Карпа–Беллмана и алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера являются алгоритмами прямого типа. При этом установлена сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников ассоциированных с такими NP-трудными задачами, как задача о максимальном разрезе [7, 53], задача о клике [15], задачи об остовных деревьях с дополнительными ограничениями [14], задача о кубическом графе [59], задача коммивояжера [8], задача о 3-значениях, задача разбиения на клики и некоторые другие [10]. В то же время, кликовое число полиномиально для следующих многогранников (ассоциированных с полиномиально разрешимыми задачами):

для пермutoэдра оно равно двум [100], для многогранника остовных деревьев в полном графе на  $n$  вершинах равно  $\lfloor n^2/4 \rfloor$  при  $n > 3$  [5], для обобщенных перестановочных многогранников ограничено сверху размерностью пространства (размерностью многогранника плюс один) [10].

Эта характеристика может быть также определена для тех случаев, когда на целевой вектор накладываются некоторые ограничения. Например, ограничения неотрицательности для классических задач о кратчайшем пути и минимальном разрезе в графе. Хорошо известно, что без такого ограничения эти задачи NP-трудны, а с ним — полиномиально разрешимы. В таких случаях вместо графа многогранника рассматривается граф конусного разбиения пространства исходных данных задачи [25]. В частности, для задач о кратчайшем пути и минимальном разрезе с ограничением неотрицательности графы конусных разбиений являются графами соответствующих полиэдров  $P_{\text{shortpath}}(n)$  и  $P_{\text{mincut}}(n)$  (в предположении, что лучи не являются ребрами графа полиэдра). Известно, что для обеих упомянутых задач кликовые числа графов многогранников экспоненциальны, а при ограничении неотрицательности — полиномиальны [13, 25].

Вместе с тем, известны примеры полиномиально разрешимых задач с экспоненциальным  $\omega(P)$ .

В первую очередь, это релаксационный многогранник задачи булева квадратичного программирования, имеющий полиномиальное  $H$ -описание и экспоненциальное кликовое число графа [9, 148].

Второй пример связан с задачей отыскания максимума многочлена на множестве целых точек отрезка. Как известно, эта задача разрешима полиномиально относительно степени многочлена и логарифма от числа целых точек отрезка [153, 167]. (С точностью до полилогарифма трудоемкость составляет  $\Theta(d^2(d + \tau))$ , где  $d$  — степень многочлена, а  $\tau$  равно минимальному из двух чисел: длина записи коэффициентов многочлена и логарифм числа точек отрезка.) С другой стороны, связанный с этой задачей циклический многогранник  $C_d(a, b)$  2-смежностен (другими словами, его граф полон) при  $d \geq 4$ , а число его

вершин совпадает с числом целых точек отрезка  $[a, b]$ . То есть кликовое число  $\omega(C_d(a, b)) = b - a + 1$  принимает экспоненциальное значение, если длина отрезка  $[a, b]$  экспоненциальна.

## 2.4. Гиперграни и расширение многогранника

### 2.4.1. Гиперграни и задача делимости

Вообще говоря, задача построения  $H$ -описания полиэдра по его  $V$ -описанию является алгоритмически сложной [127]. Если же  $H$ -описание полиэдра задачи все таки удастся найти, то линейная задача комбинаторной оптимизации преобразуется в задачу линейного программирования. Последняя, как известно [40, 124], полиномиально разрешима относительно размерности (числа переменных), числа гиперграней (неравенств), и размера коэффициентов (длины входа).

На практике, как правило, нахождение  $H$ -описания полиэдра является чрезвычайно трудной задачей. Во многих случаях трудной является уже задача идентификации гиперграни (см. раздел 2.2.2 выше).

Заметим также, что для решения линейной задачи комбинаторной оптимизации методами линейного программирования не обязательно наличие  $H$ -описания многогранника задачи. В 1982 году Карп и Пападимитриу показали [126], что для эффективного решения линейной задачи комбинаторной оптимизации достаточно иметь эффективный алгоритм решения задачи делимости: для заданного многогранника  $P$  и вектора  $v$  с рациональными координатами определить, принадлежит ли вектор многограннику и, если не принадлежит, то сгенерировать гиперплоскость (линейное неравенство), отсекающую  $v$  от  $P$ .

### 2.4.2. Расширения многогранников

Почти все многогранники, ассоциированные с задачами комбинаторной оптимизации, имеют экспоненциальное число гиперграней, что делает практически невозможным непосредственное использование методов линейного программирования. Один из подходов к решению этой проблемы состоит в переходе к расширенной формулировке многогранника [76, 117].

*Расширением* полиэдра  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  называется полиэдр  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  вместе с аффинным отображением  $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , удовлетворяющим условию  $P = \alpha(Q)$ . Так как для нас важны в первую очередь свойства полиэдра  $Q$ , то далее мы часто будем называть расширением непосредственно этот полиэдр, подразумевая, что аффинное отображение  $\alpha$  удовлетворяет всем разумным требованиям. Любое Н-описание расширения вместе с отображением  $\alpha$  называется *расширенным описанием* или *расширенной формулировкой*.

Из определения расширения следует, что задача оптимизации линейной функции на полиэдре сводится к задаче оптимизации линейной функции на его расширении. А именно, если полиэдр  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  является образом полиэдра  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  при отображении  $\alpha(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$ , где  $A \in \mathbb{Q}^{d \times n}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^d$ , то задача оптимизации линейной функции  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  при ограничении  $\mathbf{x} \in P$  эквивалентна оптимизации линейной функции  $\mathbf{c}^T A\mathbf{y} + \mathbf{c}^T \mathbf{b}$  при ограничении  $\mathbf{y} \in Q$ .

Классическим примером потенциала использования расширенных формулировок является пермutoэдр  $P_{\text{perm}}(n)$ . Его Н-описание полностью известно [41, 161], а число гиперграней равно  $2^n - 2$ . С другой стороны, нетрудно заметить (см. определения на с. 47), что  $P_{\text{perm}}(n)$  является линейной проекцией многогранника Биркгофа  $P_{\text{Birk}}(n)$  при преобразовании  $x \mapsto x \cdot (1, 2, \dots, n)$ , где  $x$  —  $n \times n$ -матрица, а  $(1, 2, \dots, n)$  — вектор-столбец. (То есть многогранник Биркгофа является расширением пермutoэдра.) Следовательно, задача линейной оптимизации на пермutoэдре сводится к задаче линейной оптимизации на многограннике Биркгофа. При этом для Н-описания последнего требуется всего  $2n - 1$  уравнений и  $n^2$

неравенств [56]. Более того, не так давно [106] для пермutoэдра  $P_{\text{perm}}(n)$  была найдена расширенная формулировка с числом неравенств  $\Theta(n \log n)$  (минимальным возможным с точностью до постоянного множителя).

*Размером расширения (расширенной формулировки)* называется число гиперграней (число неравенств в H-описании) расширения. Приведенный выше пример показывает, что размер расширения может быть значительно меньше размера исходного многогранника. В настоящее время известно много других примеров столь же значительного уменьшения размера за счет перехода к расширенной формулировке [76, 117].

*Сложностью расширения (расширенной формулировки)*  $xc(P)$  многогранника  $P$  называется минимальный размер среди всех его расширений. Известно [96], что величина  $xc(P)$  не изменится, если в качестве расширений рассматривать только ограниченные полиэдры (многогранники).

Сложность расширения многогранников задач хорошо согласуется с такими перечисленными выше характеристиками, как размерность многогранника, число его вершин и гиперграней.

**Свойство 2.6.** Пусть  $P$  — выпуклый многогранник,  $\text{vert}(P)$  — число его вершин,  $\text{facet}(P)$  — число его гиперграней,  $\text{face}(P)$  — число всех граней (в том числе несобственных). Тогда

1.  $xc(P) > \dim(P)$ , так как число гиперграней многогранника всегда больше его размерности.
2.  $xc(P) \leq \text{facet}(P)$ .
3.  $xc(P) \leq \text{vert}(P)$ , так как любой многогранник на  $n$  вершинах является аффинным образом симплекса  $\Delta_{n-1}$ .
4.  $xc(P) \geq \log_2 \text{face}(P)$  [106].

Кроме того, эта характеристика обладает следующим естественным свойством, позволяющим делать оценки на основе сравнения.

**Свойство 2.7.** Если многогранник  $Q$  или одна из его граней являются расширением многогранника  $P$ , то  $xc(P) \leq xc(Q)$ .

За последние несколько лет в этом направлении было получено довольно много новых результатов. Перечислим наиболее интересные (в контексте настоящей работы):

1. Для перестановочного многогранника  $xc(P_{\text{perm}}(n)) = \Theta(n \log n)$  [106].
2. Сложность расширения многогранника остовных деревьев  $P_{\text{tree}}(n)$  оценивается сверху величиной  $O(n^3)$ , где  $n$  — число вершин графа [137].
3. Сложность расширения полиэдра разрезов  $P_{\text{mincut}}(n)$  равна  $O(n^3)$  [68, 76].
4. Сложность расширения полиэдра  $s$ - $t$  разрезов равна  $\Theta(n^2)$ , где  $n$  — число вершин графа [76, 102].
5. Число неравенств в описании полиэдра кратчайших орпутей  $P_{\text{shortpath}}(n)$  совпадает с числом дуг в соответствующем орграфе (см. раздел 2.1.1), то есть  $xc(P_{\text{shortpath}}(n)) \leq n(n-1)$ .
6. Ранее уже упоминалось, что для описания многогранника Биркгофа  $P_{\text{Birk}}(n)$  достаточно  $n^2$  неравенств. В [96] показано, что для описания его расширения меньшего числа неравенств будет недостаточно:  $xc(P_{\text{Birk}}(n)) = n^2$ .
7. Сложность расширения для многогранника совершенных паросочетаний в планарных графах полиномиальна [52].
8. Разработан фреймворк для построения расширенных формулировок на основе объединения многогранников и использования существующих алгоритмов динамического программирования [119].
9. Сложность расширения для булева квадратичного многогранника экспоненциальна:  $xc(P_{\text{BQR}}(n)) = 2^{\Theta(n)}$  [98, 123].



10. Сложность расширения для многогранника задачи коммивояжера экспоненциальна:  $\text{xc}(P_{\text{TSP}}(n)) = 2^{\Omega(n)}$  [166].

Ряд других, не вошедших в этот список результатов, можно найти в обзорах [76, 117, 179].

Вообще, оказалось, что сложность расширения многогранников хорошо согласуется с текущими представлениями о сложности соответствующих линейных задач комбинаторной оптимизации. Тем не менее, недавно был найден пример значительного расхождения реальной вычислительной сложности задачи и сложности расширения её многогранника. Это классическая задача о паросочетаниях в полном графе на  $n$  вершинах. Для её решения в настоящее время известно несколько различных алгоритмов с трудоемкостью  $O(n^3)$ , где  $n$  — число вершин графа [173]. С другой стороны, в 2014 году Ротфосс доказал [166], что сложность расширения многогранника  $P_{\text{match}}(n)$  этой задачи равна  $2^{\Omega(n)}$ .

Заметим также, что сложность расширенной формулировки не является комбинаторной характеристикой многогранника. Этот факт иллюстрируется следующим простым примером. Сложность расширения правильного  $n$ -угольника равна  $O(\log n)$  [54]. При этом существуют примеры (неправильных)  $n$ -угольников, сложность расширения которых равна  $\Omega(\sqrt{n})$  [99]. С другой стороны, комбинаторные свойства  $n$ -угольника однозначно определяются числом его вершин.

Методы получения оценок для сложности расширения прежде всего опираются на свойства 2.6 и 2.7. Непосредственные верхние оценки предполагают построение соответствующих примеров расширений. Нижние оценки, как правило, опираются на факторизационную теорему Яннакакиса [183], для формулировки которой нам потребуется пара определений.

**Определение 2.2.** Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  — множество вершин (V-описание) многогранника  $P \subseteq \mathbb{R}^d$ , а неравенства  $a_j^T x \leq b_j$ ,  $a_j \in \mathbb{R}^d$ ,  $b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in [m]$ , определяют его гиперграницы (H-описание без учета уравнений). Ячейка  $M(i, j)$  матрицы невязок  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  для заданных V-описания и H-описания многогран-

ника  $P$  определяется следующим образом:

$$M(i, j) = b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_i.$$

В частности,  $M(i, j) \geq 0$ , то есть матрица  $M$  неотрицательна.

Из определения также следует, что матрица невязок  $M$  связана с матрицей инцидентий вершин-гиперграней  $K \in \{0, 1\}^{n \times m}$  многогранника  $P$ :

$$K(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } M(i, j) = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Определение 2.3.** Представление неотрицательной матрицы  $M \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$  в виде произведения неотрицательных матриц  $T$  и  $U$  размера  $n \times r$  и  $r \times m$ , соответственно, называется *неотрицательной факторизацией*. Неотрицательным рангом  $\text{rank}_+(M)$  матрицы  $M$  называется наименьшее натуральное  $r$ , для которого возможна такая факторизация. Неотрицательный ранг может быть также определен как наименьшее  $r \in \mathbb{N}$  такое, что  $M$  представима в виде суммы  $r$  неотрицательных матриц ранга один.

**Теорема 2.8 (Яннакакис [96, 182]).** Сложность расширения многогранника равна неотрицательному рангу его матрицы невязок.

Известно [75], что аналогичное утверждение верно также и для расширений полиэдров при соответствующей корректировке понятия матрицы невязок.

В следующем разделе рассматривается комбинаторный аналог этой теоремы (теорема 2.9), значительно упрощающий получение нижних оценок сложности расширений.

### 2.4.3. Число прямоугольного покрытия

Ранее уже было отмечено, что матрица невязок тесно связана с матрицей инцидентий гиперграней-вершин. А с неотрицательным рангом матрицы невязок связано число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий, являющееся в некотором смысле его комбинаторным аналогом.

**Определение 2.4 ([96]).** Пусть  $M \in \{0, 1\}^{n \times k}$  — матрица инцидентий. Множество  $I \times J$ , где  $I \subseteq [n]$ ,  $J \subseteq [k]$ , называется *0-прямоугольником* в матрице  $M$ , если  $M(i, j) = 0$  для всех  $i \in I$  и  $j \in J$ . *Прямоугольным покрытием* матрицы  $M$  называется множество 0-прямоугольников, объединение которых совпадает с множеством нулевых ячеек в  $M$ . *Числом прямоугольного покрытия* матрицы называется наименьшее число 0-прямоугольников, необходимое для её прямоугольного покрытия. Число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней (гиперграней-вершин) многогранника  $P$  обозначаем  $rc(P)$ .

В качестве примера на рис. 2.2 изображена матрица инцидентий восьмиугольника, а на рис. 2.3 — шесть покрывающих её 0-прямоугольников. Пример расширения правильного восьмиугольника, имеющего 6 гиперграней, представлен на рис. 2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.2. Матрица инцидентий гиперграней-вершин восьмиугольника.

Непосредственно из определений 2.3 и 2.4 следует, что число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий не превосходит неотрицательного ранга матрицы невязок. Иными словами, справедлива следующая

**Теорема 2.9 (Яннакакис [96, 182]).**  $xc(P) \geq rc(P)$  для любого выпуклого многогранника  $P$ .

Известно также, что нижние оценки в свойстве 2.6 верны и для числа прямоугольного покрытия.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ 0 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3. Шесть 0-прямоугольников, покрывающих матрицу инцидентий восьмиугольника. (Единицы сохранены для удобства восприятия.)

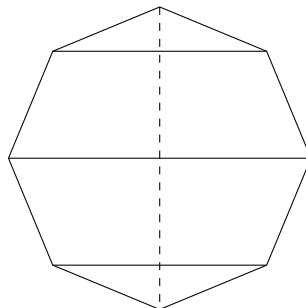


Рис. 2.4. Расширение восьмиугольника в  $\mathbb{R}^3$  (вид сверху), имеющее 6 гиперграней.

**Свойство 2.10 ([96]).** Пусть  $P$  — выпуклый многогранник,  $\text{face}(P)$  — число всех его граней. Тогда

$$\dim(P) + 1 \leq \log_2 \text{face}(P) \leq \text{rc}(P).$$

Кроме того, свойство 2.7 при замене  $\text{xc}(\cdot)$  на  $\text{rc}(\cdot)$  тоже остается верным. С рядом других свойств числа прямоугольного покрытия матрицы инцидентий гиперграней-вершин многогранника можно ознакомиться в [96].

Практически все известные в настоящее время нижние оценки сложности расширения многогранников получены с использованием теоремы 2.9 и (фактически комбинаторных) свойств 2.10, 2.7. Исключениями являются следующие три примера:

1. Для многогранника паросочетаний  $P_{\text{match}}(n)$  установлена экспоненциальная нижняя оценка сложности расширения [166]. При этом  $\text{rc}(P_{\text{match}}(n)) \in [n^2, n^4]$ , согласно [96].
2. Установлен факт существования  $n$ -угольников, сложность расширения которых не меньше  $\sqrt{2n}$  [99], тогда как число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий  $n$ -угольника находится в диапазоне  $[\log_2(2n), 2 \log_2(2n)]$  (как следует из [54, 99]).
3. Доказано существование семейств многогранников матроидов с экспоненциальной сложностью расширения [165] (в доказательстве используется тот факт, что число различных матроидов дважды экспоненциально относительно числа элементов множества-носителя [88]). В то же время число прямоугольного покрытия для них не превышает квадрата от числа элементов множества-носителя [118].

Заметим, что задача о паросочетаниях является полиномиально разрешимой, а среди многоугольников и матроидов есть пимеры полиномиально разрешимых задач (например, оптимизация на вершинах правильного  $n$ -угольника и оптимизация на матроиде остовных деревьев). Таким образом, все известные факты

говорят о том, что число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней многогранника дает весьма точную нижнюю оценку сложности соответствующей оптимизационной задачи. (Исчерпывающее теоретическое обоснование этого феномена пока неизвестно.)

## 2.5. Вопросы

Как следует из перечисленных выше фактов, многогранники NP-трудных задач во многих случаях обладают схожими свойствами. Например: NP-полнота задачи распознавания несмежности вершин, небольшой диаметр графа, сверхполиномиальное кликовое число графа, сверхполиномиальные сложность расширения и число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней. Часто эти сходства обусловлены тесными связями геометрического характера, обнаруживаемыми в разное время разными исследователями. Перечислим несколько известных примеров:

1. Булев квадратичный многогранник  $P_{\text{BQP}}(n)$  аффинно эквивалентен многограннику разрезов  $P_{\text{cut}}(n - 1)$  [17, раздел 5.2].
2. Многогранник совершенных паросочетаний  $P_{\text{match}}(2n)$  есть проекция некоторой грани многогранника задачи коммивояжера  $P_{\text{TSP}}(6n)$  [183].
3. Для каждого графа  $G = (V, E)$  многогранник упаковок вершин  $P_{\text{stab}}(G)$  является проекцией некоторой грани многогранника асимметричной задачи коммивояжера  $P_{\text{ATSP}}(n)$ , где  $n = |V| + 4|E|$  [183].
4. Многогранник  $P_{\text{ATSP}}(n)$  является гранью многогранника  $P_{\text{TSP}}(2n)$  [114].
5. Фиорини [94] показал, что многогранники задачи о 3-выполнимости и многогранники задачи о частичном упорядочивании являются гранями друг друга при надлежащем выборе кода многогранника (точные формулировки см. в разделе 4.2.3).

6. Авис и Тивари [48] показали, что многогранник задачи о 3-выполнимости является проекцией грани многогранника трехиндексной задачи о назначениях (подробнее — в разделе 4.4.1).
7. Бучхейм, Вигеле и Женг [65] показали, что многогранник квадратичной задачи линейного упорядочивания аффинно эквивалентен грани булева квадратичного многогранника (см. раздел 4.4.2). Аналогичный факт для многогранника квадратичной задачи о назначениях установлен независимо несколькими авторами [116, 162, 169].

В связи с этим естественными являются следующие вопросы общего характера. Можно ли систематически использовать такой способ сравнения для различных (других) семейств многогранников? Какие выводы на основе сравнений такого типа можно сделать в отношении различных комбинаторно-геометрических характеристик многогранников? Ответы на эти вопросы содержатся в главах 3–5.

Перечислим рассмотренные в этой главе характеристики многогранников: сложность идентификации грани (вершины, ребра, гиперграни), число вершин, число гиперграней, диаметр графа, кликовое число графа, сложность расширения, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней. Для каждой из них естественно задать следующий вопрос. Есть ли связь между данной характеристикой многогранника и сложностью соответствующей оптимизационной задачи? Кроме того, возникают вопросы более общего характера. Какие известные в настоящее время комбинаторно-геометрические характеристики многогранника наиболее адекватно отражают сложность соответствующей задачи? Есть ли связь между комбинаторным типом многогранника и сложностью задачи оптимизации на нем? Исследованию этих проблем посвящены главы 7 и 8.

## Глава 3

### Аффинная сводимость

Всё познается в сравнении.

В этой главе описана теория аффинной сводимости, активно используемая в следующих двух главах. В разделе 3.1 вводится определение аффинной сводимости задач, служащее основой для различных его модификаций в последующих разделах. В разделе 3.2 приводятся определения конусного разбиения пространства исходных данных задачи и аффинной сводимости таких разбиений. Далее, в разделе 3.3 вводится естественный способ сравнения многогранников, позволяющий сравнивать их различные комбинаторно-геометрические характеристики сложности, и приводятся примеры его применения для нескольких комбинаторных семейств многогранников. В последнем разделе главы вводится определение аффинной сводимости семейств многогранников (наиболее часто используемое в следующей главе), приводятся относительно простые примеры его использования и устанавливается связь между аффинной сводимостью семейств многогранников и аффинной сводимостью конусных разбиений пространств исходных данных задач.

#### 3.1. Аффинная сводимость задач

Согласно определениям 1.3, 1.4 и 2.1, входные данные линейной задачи комбинаторной оптимизации состоят из кода  $I$ , называемого кодом многогранника (определяющего множество допустимых решений  $X(I)$ ), и целевого вектора  $c$ .

**Определение 3.1 (аффинная сводимость задач).** Рассмотрим две массовые линейные задачи комбинаторной оптимизации. Для кода многогранника и целевого



вектора первой задачи используем обозначения  $I$  и  $\mathbf{c}$ , соответственно. Для второй задачи —  $I'$  и  $\mathbf{c}'$ . Тройку функций, определяющих множество допустимых решений  $X = X(I) \subset \mathbb{Z}^d$  первой задачи, обозначаем  $d$ ,  $S$  и  $g$ . Для второй задачи используем обозначения  $X' = X'(I') \subset \mathbb{Z}^{d'}$ ,  $d'$ ,  $S'$  и  $g'$ , соответственно.

Будем говорить, что линейная задача комбинаторной оптимизации  $(d, S, g)$  *аффинно сводится* к задаче  $(d', S', g')$ , если существуют вычислимые за полиномиальное относительно длины входных данных задачи время:

1. Преобразование  $\tau$  каждого кода  $I$  первой задачи в код  $I'$  для второй задачи:

$$\tau: I \mapsto I'.$$

2. Алгоритм построения для каждого кода  $I$  аффинного отображения

$$\alpha: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}, \quad \text{где } d = d(I), \quad d' = d'(\tau(I)).$$

3. Функция  $\beta: Y \rightarrow X$ , где  $X = X(I)$ , а  $Y$  — это множество всех таких  $\mathbf{y} \in X' = X'(\tau(I))$ , для каждого из которых найдется целевой вектор  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  такой, что  $(\alpha(\mathbf{c}))^T \mathbf{y} \geq (\alpha(\mathbf{c}))^T \mathbf{x}'$  для всех  $\mathbf{x}' \in X'$ .

Причем для любого  $\mathbf{y} \in Y$  и любого  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  выполнено

$$\left( \forall \mathbf{x}' \in X' \quad (\alpha(\mathbf{c}))^T \mathbf{y} \geq (\alpha(\mathbf{c}))^T \mathbf{x}' \right) \iff \left( \forall \mathbf{x} \in X \quad \mathbf{c}^T \beta(\mathbf{y}) \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \right).$$

Непосредственно из определения следует, что аффинная сводимость задач влечет их полиномиальную сводимость, так как преобразование  $\tau$  и аффинное отображение  $\alpha$  преобразуют входные данные первой задачи во входные данные второй задачи за полиномиальное время, а функция  $\beta$  преобразует оптимальное решение второй задачи в оптимальное решение первой задачи.

Корректировка определения аффинной сводимости задач для случаев с ограничением на множество целевых векторов (например, для задачи о кратчайшем пути) очевидна. А именно, рассмотрим пару задач из определения 3.1 со следующими ограничениями. Предположим, что целевой вектор первой задачи должен

удовлетворять предикату  $p: \mathbb{R}^d \rightarrow \{\text{ложь, истина}\}$ , где  $p$  зависит от кода  $I$ , а целевой вектор второй задачи — предикату  $p'$ .

**Определение 3.2 (аффинная сводимость задач с ограничением).** Для линейной задачи комбинаторной оптимизации  $(d, S, g)$  с ограничением  $p$  введем обозначение для множества исходных данных:

$$Q = Q(I) := \{c \in \mathbb{R}^d \mid p(c)\}.$$

А множество исходных данных задачи  $(d', S', g')$  с ограничением  $p'$  обозначаем  $Q' = Q'(I')$ .

Будем говорить, что задача  $(d, S, g)$  с ограничением  $p$  *аффинно сводится* к задаче  $(d', S', g')$  с ограничением  $p'$ , если существуют вычислимы за полиномиальное относительно размера входных данных задачи время:

1. Преобразование  $\tau$  каждого кода  $I$  первой задачи в код  $I'$  для второй задачи:

$$\tau: I \mapsto I'.$$

2. Алгоритм построения для каждого кода  $I$  аффинного отображения

$$\alpha: Q \rightarrow Q', \quad \text{где } Q' = Q(\tau(I)).$$

3. Функция  $\beta: Y \rightarrow X$ , где  $X = X(I)$ , а  $Y$  — это множество всех таких  $y \in X' = X'(\tau(I))$ , для каждого из которых найдется целевой вектор  $c \in Q$  такой, что  $(\alpha(c))^T y \geq (\alpha(c))^T x'$  для всех  $x' \in X'$ .

Причем для любого  $y \in Y$  и любого  $c \in Q$  выполнено

$$\left( \forall x' \in X' \quad (\alpha(c))^T y \geq (\alpha(c))^T x' \right) \iff \left( \forall x \in X \quad c^T \beta(y) \geq c^T x \right).$$

Далее нас в первую очередь будут интересовать свойства многогранников задач и связанных с ними геометрических конструкций. Поэтому данное определение будет модифицировано в соответствии с целями изучения соответствующих геометрических объектов.

В некотором смысле посредником между аффинной сводимостью задач и аффинной сводимостью многогранников является аффинная сводимость конусных разбиений пространств исходных данных задач.

### 3.2. Конусное разбиение пространства исходных данных

Пусть  $P$  — выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^d$ . Конус грани  $F$  многогранника  $P$  определим следующим образом:

$$K(F) := \{c \in \mathbb{R}^d \mid c^T x \geq c^T y, \forall x \in F, \forall y \in P\}.$$

В частности,  $0 \in K(F)$  для любой грани  $F$ . Заметим также, что определение конуса грани не изменится, если многогранник  $P$  и его грань  $F$  заменить соответствующими множествами вершин.

Множество всех конусов  $K(F)$ , где  $F$  пробегает множество непустых граней многогранника  $P$ , называется *нормальным веером* [41, с. 257].

Нормальный веер является двойственной к многограннику геометрической структурой. А именно,  $\dim K(F) = d - \dim(F)$  и, если  $F$  является собственной гранью грани  $G$  многогранника  $P$ , то  $K(G)$  является гранью конуса  $K(F)$ . Обратно, любая грань конуса  $K(F)$  есть конус  $K(G)$ , соответствующий некоторой грани  $G$  многогранника  $P$  такой, что  $F \subset G$ .

Так как любой выпуклый многогранник  $P$  однозначно определяется множеством своих вершин  $X = \text{ext}(P)$ , то и его нормальный веер однозначно определяется набором конусов его вершин

$$\mathcal{K}(X) := \{K(x) \mid x \in X\},$$

который далее будем называть *конусным разбиением пространства исходных данных* задачи линейной оптимизации на  $X$  [10]. Это название объясняется тем, что задачу оптимизации вдоль целевого вектора  $c \in \mathbb{R}^d$  на множестве  $X \in \mathbb{R}^d$  можно переформулировать как задачу поиска такого  $x \in X$ , что  $c \in K(x)$ .

Пусть  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — вершины многогранника  $P \subset \mathbb{R}^d$ . Будем называть конусы  $K(\mathbf{x})$  и  $K(\mathbf{y})$  *смежными*, если они имеют общую гипергрань:

$$\dim(K(\mathbf{x}) \cap K(\mathbf{y})) = d - 1.$$

Очевидно, конусы  $K(\mathbf{x})$  и  $K(\mathbf{y})$  смежны тогда и только тогда, когда смежны вершины  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Соответственно, граф многогранника  $\text{conv}(X)$  совпадает с графом конусного разбиения  $\mathcal{K}(X)$ .

Относительно многогранника задачи  $\text{conv}(X)$  преимущество конусного разбиения  $\mathcal{K}(X)$  пространства исходных данных заключается в том, что имеется возможность простой интерпретации различных дополнительных линейных ограничений на целевой вектор  $\mathbf{c}$ . Так, например, в классической задаче о кратчайшем пути накладываются ограничения  $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$  (для задачи максимизации). То есть вместо конусного разбиения всего пространства в этой задаче рассматривается конусное разбиение отрицательного ортанта. На языке многогранников это означает переход от многогранника путей  $P_{\text{path}}(n)$  к полиэдру  $P_{\text{path}}^{\uparrow}(n)$  (см. раздел 2.1.1).

По аналогии с определением конуса  $K(\mathbf{x})$  для вершины  $\mathbf{x}$  многогранника  $P \subset \mathbb{R}^d$  введем обозначение

$$K(\mathbf{x}, Q) := \{\mathbf{c} \in Q \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in P\} = K(\mathbf{x}) \cap Q,$$

где  $Q$  — полиэдр в  $\mathbb{R}^d$ . Множество всех таких конусов при фиксированном  $Q$  обозначим  $\mathcal{K}(X, Q)$  и будем называть *разбиением  $Q$  по множеству  $X$* . Граф такого разбиения определяется по аналогии с графом конусного разбиения. Таким образом, граф разбиения  $\mathcal{K}(X, Q)$  является подграфом графа конусного разбиения  $\mathcal{K}(X)$ .

Очевидно, что при переходе от всего пространства исходных данных к полиэдру  $Q$  конусы нормального веера могут менять свои геометрические очертания (превращаясь в полиэдры) и уменьшаться по размерности, вплоть до полного исчезновения. С точки зрения комбинаторной структуры, нормальный веер

при этом может терять часть своих элементов, новые элементы появиться не могут.

**Замечание 3.1.** Так как решение задачи оптимизации инвариантно относительно умножения целевого вектора на положительный скаляр, то, не уменьшая общности, вместо конусного разбиения  $\mathcal{K}(X)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^d$  можно ограничиться рассмотрением разбиения  $\mathcal{K}(X, \text{Cube}(-1, 1))$ , где

$$\text{Cube}(-1, 1) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

**Определение 3.3 (аффинная сводимость разбиений исходных данных).** Будем говорить, что разбиение множества исходных данных задачи  $(d, S, g)$  с ограничением  $p$  *аффинно сводится* к разбиению исходных данных задачи  $(d', S', g')$  с ограничением  $p'$ , если первая задача аффинно сводится ко второй и, кроме того, аффинное отображение  $\alpha$  и функция  $\beta$  в определении 3.2 биективны.

Нетрудно заметить, что если условия этого определения выполнены, то аффинное отображение  $\alpha$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между разбиением множества исходных данных первой задачи и некоторой частью разбиения исходных данных второй задачи. Откуда следует, в частности, что граф разбиения первой задачи является подграфом графа разбиения второй.

В качестве простого примера такого типа сводимости рассмотрим задачу коммивояжера с ограничением  $-1 \leq c \leq 1$  и эту же задачу, но с ограничением  $c \geq 0$ . Так как значение целевой функции для задачи коммивояжера представляет собой сумму ровно  $n$  координат целевого вектора ( $n$  — число городов), то добавление одного и того же скаляра ко всем координатам не изменит решения задачи. Следовательно, чтобы аффинно свести разбиение задачи коммивояжера с ограничением  $-1 \leq c \leq 1$  к задаче с ограничением  $c \geq 0$ , достаточно положить  $\alpha: c \mapsto c + 1$ .

### 3.3. Сравнение многогранников

Как известно, сравнение является одним из наиболее распространенных и универсальных методов исследования. Чтобы воспользоваться им, введем следующую операцию сравнения, задающую частичный порядок на множестве всех выпуклых многогранников.

**Определение 3.4.** В случае, когда многогранник  $P$  аффинно эквивалентен многограннику  $Q$  или же его грани, будем использовать обозначение  $P \leqslant_A Q$ . Факт аффинной эквивалентности многогранников  $P$  и  $Q$  обозначаем  $P =_A Q$ .

В главе 5 будет рассмотрен более мягкий вариант этого определения, в котором слова «аффинно эквивалентен» заменены на «является аффинным образом», а для соответствующего соотношения используется обозначение  $\leqslant_E$ . Там же будет проведен анализ различий в использовании этих двух соотношений при исследовании свойств многогранников.

Нетрудно заметить, что соотношение  $\leqslant_A$  оказывается особенно полезным при сравнении комбинаторных свойств (т. е. свойств решеток граней) многогранников.

**Свойство 3.1.** Если  $P \leqslant_A Q$ , то решетка граней многогранника  $P$  изоморфна либо всей решетке граней многогранника  $Q$  (если  $P$  и  $Q$  эквивалентны), либо некоторой подрешетке (индуцированной гранью многогранника  $Q$ ), а матрица инцидентий вершин-гиперграней многогранника  $P$  является подматрицей (полученной удалением строк и столбцов) матрицы инцидентий многогранника  $Q$ . В частности:

1. Число вершин многогранника  $P$  не превосходит числа вершин  $Q$ .
2. Число  $i$ -граней многогранника  $P$  не превосходит числа  $i$ -граней многогранника  $Q$  при  $i \leqslant \dim(P)$ .

3. Граф многогранника  $P$  изоморфен некоторому подграфу графа многогранника  $Q$ .
4. Число гиперграней  $P$  не превосходит числа гиперграней  $Q$ .
5. Для чисел прямоугольных покрытий матриц инцидентий вершин-гиперграней выполнено  $\text{rc}(P) \leq \text{rc}(Q)$ .

В качестве примеров перечислим некоторые очевидные соотношения для симплексов и циклических многогранников. Прежде всего, симплекс  $\Delta_n$  является гранью симплекса  $\Delta_{n+1}$ , а в силу транзитивности соотношения  $\leq_A$  получаем

$$\Delta_n \leq_A \Delta_{n+k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Кроме того,

$$\Delta_m \leq_A C_n(S) \quad \text{при } m < n \leq |S|, \quad (3.2)$$

так как циклический многогранник  $C_n(S)$  симплициален. По той же причине

$$C_n(S) \not\leq_A C_{n+k}(S') \quad (3.3)$$

для всех  $n, k \in \mathbb{N}$  и любых множеств  $S$  и  $S'$ , при условии  $|S| > n + 1 > 2$ .

Заметим, что множество симплексов  $\Delta = \{\Delta_n\}$  и множество циклических многогранников  $C = \{C_n(S) \mid n \in \mathbb{N}, S \subset \mathbb{Q}, |S| < \infty\}$  представляют собой примеры семейств многогранников задач комбинаторной оптимизации. В связи с этим интерес представляет следующий вопрос. Какая из двух ситуаций (3.1) или (3.3) является наиболее типичной для известных семейств многогранников задач? Опыт показывает, что в большинстве случаев легко проверяется справедливость соотношений вида (3.1). При доказательстве такого рода соотношений удобно пользоваться следующим очевидным утверждением.

**Лемма 3.2.** Пусть  $P \subset \mathbb{R}^d$  — 0/1-многогранник. Тогда  $F_i = \{\mathbf{x} \in P \mid x_i = 0\}$  и  $G_i = \{\mathbf{x} \in P \mid x_i = 1\}$ ,  $i \in [d]$ , являются гранями (быть может несобственными) многогранника  $P$ .

Рассмотрим три наиболее часто встречающихся в литературе семейства многогранников: булевы квадратичные многогранники  $P_{\text{BQP}}(n)$ , многогранники асимметричной задачи коммивояжера  $P_{\text{ATSP}}(n)$  и многогранники задачи о рюкзаке  $P_{\text{кnap}}(n, \mathbf{a}, b)$ .

**Утверждение 3.3.**

$$P_{\text{BQP}}(n) \leq_A P_{\text{BQP}}(n+1),$$

$$P_{\text{ATSP}}(n) \leq_A P_{\text{ATSP}}(n+1),$$

$$P_{\text{кnap}}(\mathbf{a}, b) \leq_A P_{\text{кnap}}((\mathbf{a}, 0), b), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся леммой 3.2. Рассмотрим грань  $F$  многогранника  $P_{\text{BQP}}(n+1)$ , образованную гиперплоскостью  $x_{n+1, n+1} = 0$ . Тогда для всех  $\mathbf{x} \in F$  выполняется  $x_{i, n+1} = 0$  при  $i \in [n+1]$ . Нетрудно увидеть, что множество вершин грани  $F$  преобразуется в множество вершин многогранника  $P_{\text{BQP}}(n)$  (и, наоборот,  $P_{\text{BQP}}(n)$  в  $F$ ) аффинным отображением (ортогональной проекцией)  $x_{ij} \mapsto y_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Для доказательства соотношения  $P_{\text{ATSP}}(n) \leq_A P_{\text{ATSP}}(n+1)$  достаточно установить взаимно однозначное соответствие между множеством гамильтоновых контуров полного орграфа  $D = (V, A)$  на  $n$  вершинах и подмножеством гамильтоновых контуров орграфа  $D' = (V', A')$  на  $n+1$  вершинах, в котором удалены все дуги, входящие в вершину  $v'_1$ , и дуги, выходящие из  $v'_{n+1}$ , за исключением дуги  $(v'_{n+1}, v'_1)$ . Заметим, что характеристические вектора указанного подмножества контуров орграфа  $D' = (V', A')$  являются вершинами грани

$$F = \left\{ \mathbf{x} \in P_{\text{ATSP}}(n+1) \mid x_{(v'_{n+1}, v'_1)} = 1 \right\}$$

многогранника  $P_{\text{ATSP}}(n+1)$ . Очевидно, грань  $F$  и многогранник  $P_{\text{ATSP}}(n)$  связаны биективным аффинным отображением

$$y_{(v_i, v_j)} = \begin{cases} x_{(v'_i, v'_j)}, & \text{при } 1 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq n, \quad i \neq j, \\ x_{(v'_i, v'_{n+1})}, & \text{при } 2 \leq i \leq n, \quad j = 1, \end{cases}$$



где  $\mathbf{x} \in F$ ,  $\mathbf{y} \in P_{\text{ATSP}}(n)$ .

Для доказательства соотношения  $P_{\text{кнап}}(\mathbf{a}, b) \leq_A P_{\text{кнап}}((\mathbf{a}, 0), b)$  достаточно заметить, что

$$P_{\text{кнап}}((\mathbf{a}, 0), b) = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in P_{\text{кнап}}(\mathbf{a}, b)\}.$$

Следовательно, многогранник  $P_{\text{кнап}}(\mathbf{a}, b)$  аффинно эквивалентен грани многогранника  $P_{\text{кнап}}((\mathbf{a}, 0), b)$ , образованной гиперплоскостью  $x_{n+1} = 0$ . ■

Соотношение (3.2) является простым примером сравнения многогранников из разных семейств. Еще одним таким фактом, открытым независимо несколькими авторами [17, с. 84], является *ковариантное отображение*  $\xi: P_{\text{BQP}}(n) \rightarrow P_{\text{cut}}(n+1)$ , задаваемое уравнениями

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ii}, & \text{при } 1 \leq i \leq n, j = n+1, \\ x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij}, & \text{при } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Из невырожденности этого отображения следует

$$P_{\text{BQP}}(n) =_A P_{\text{cut}}(n+1).$$

Рассмотрим еще два семейства многогранников, ассоциированных с задачами об упаковке и разбиении множества.

Пусть  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  — матрица инцидентностей элементов множества  $G$ ,  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ , и элементов некоторого множества  $S$ ,  $S = \{S_1, \dots, S_n\} \subseteq 2^G$ . Выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{pack}}(A) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$$

называется *многогранником упаковок множества* [49]. (Каждая вершина  $\mathbf{x} \in P_{\text{pack}}(A)$  этого многогранника является характеристическим вектором некоторой упаковки  $T \subseteq S$ .)

Множество вершин *многогранника разбиений множества* определяется по аналогии:

$$P_{\text{part}}(A) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{1}\}. \quad (3.4)$$

Непосредственно из определения следует

$$P_{\text{part}}(A) \leq_A P_{\text{pack}}(A). \quad (3.5)$$

Заметим также, что многогранник независимых множеств  $P_{\text{stab}}(G)$  (см. определение на с. 48) является частным случаем многогранника упаковок множеств:

$$P_{\text{stab}}(G) =_A P_{\text{pack}}(A), \quad (3.6)$$

где  $A$  является матрицей инцидентий ребер-вершин графа  $G$ .

### 3.4. Аффинная сводимость многогранников

Прежде, чем перейти к сравнению семейств многогранников, установим еще несколько простых соотношений между  $P_{\text{stab}}(G)$ ,  $P_{\text{part}}(A)$ ,  $P_{\text{pack}}(A)$  и  $P_{\text{BQP}}(n)$ .

**Лемма 3.4.** *Для любой матрицы  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  существует граф  $G$  на  $n$  вершинах такой, что  $P_{\text{pack}}(A) =_A P_{\text{stab}}(G)$ .*

**Доказательство.** Достаточно заметить, что каждое неравенство вида

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 1$$

из системы  $Ax \leq 1$  при условии  $x \in \{0, 1\}^n$  эквивалентно набору неравенств

$$x_i + x_j \leq 1, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

определяющих некоторый многогранник независимых множеств. ■

Учитывая соотношение (3.6), можно сделать вывод о том, что семейства  $\{P_{\text{pack}}(A)\}$  и  $\{P_{\text{stab}}(G)\}$  идентичны (состоят из одних и тех же многогранников).

**Лемма 3.5 ([136]).** *Для любого графа  $G = (V, E)$  существует матрица  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ ,  $m = |E|$ ,  $n = |V| + |E|$ , имеющая ровно по три единицы в каждой строке, что  $P_{\text{stab}}(G) =_A P_{\text{part}}(A)$ .*

**Доказательство.** Для каждого неравенства

$$x_v + x_u \leq 1, \quad \{v, u\} \in E, \quad (3.7)$$

из описания многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$  введем вспомогательную переменную  $y_{vu} = 1 - x_v - x_u$ . Остается заметить, что множество 0/1-векторов, удовлетворяющих неравенствам (3.7), аффинно эквивалентно множеству 0/1-векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$x_v + x_u + y_{vu} = 1, \quad \{v, u\} \in E. \quad \blacksquare$$

Таким образом, согласно соотношению (3.5), семейство  $\{P_{\text{part}}(A)\}$  содержит не только все многогранники семейств  $\{P_{\text{pack}}(A)\}$  и  $\{P_{\text{stab}}(G)\}$ , но и некоторые их грани.

Введем теперь понятие аффинной сводимости семейств многогранников. Сумму длины кода многогранника и размерности пространства, в котором он определен, будем называть *размером* многогранника. Таким образом, размер многогранника пропорционален длине входа соответствующей задачи комбинаторной оптимизации, если размер координат целевого вектора задачи ограничен сверху некоторой константой.

**Определение 3.5.** Будем говорить, что семейство многогранников  $P$  *аффинно сводится* к семейству многогранников  $Q$ , если найдутся полиномиально вычисляемые (относительно размера многогранника  $p \in P$ ):

1. Преобразование  $\tau$  кода  $I$  каждого многогранника  $p = p(I) \in P$  в код  $I'$  многогранника  $q = q(I') \in Q$ .
2. Алгоритм построения для каждого кода  $I$  аффинного отображения

$$\alpha: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}, \quad d = d(I), \quad d' = d'(\tau(I)),$$

такого, что многогранник  $\alpha(p)$  является гранью (возможно несобственной) многогранника  $q$  и аффинно эквивалентен  $p$ .

Факт аффинной сводимости  $P$  к  $Q$  обозначаем так:  $P \propto_A Q$ .

**Замечание 3.2.** В определении 3.5 важным условием является полиномиальная зависимость относительно размера многогранника, а не его размерности. Дело в том, что система ограничений, определяющих многогранник, может оказаться далеко не самым экономным способом его описания. Тем не менее, нашей целью является именно сравнение входных данных задач, ассоциированных с многогранниками.

В качестве примера многогранника с неэкономным описанием можно рассмотреть  $P_{\text{part}}(A)$ , задаваемый уравнениями

$$x_1 + x_i + x_j = 1, \quad 2 \leq i < j \leq n.$$

Очевидно, он состоит из одной единственной точки  $(1, 0, \dots, 0)$ . Вместе с тем, согласно соотношению (3.5), он является гранью многогранника  $P_{\text{pack}}(A)$ , определяемого неравенствами

$$x_1 + x_i + x_j \leq 1, \quad 2 \leq i < j \leq n,$$

и имеющего размерность  $n$ . Такой «неэкономный» способ сравнения многогранников вполне допускается определением 3.5.

**Замечание 3.3.** Как правило, доказательство аффинной сводимости семейства  $P$  к семейству  $Q$  выполняется по следующей схеме. Для каждого кода  $I$ , задающего многогранник  $p(I) \in P$  приводится описание кода  $I'$  многогранника  $q(I') \in Q$ , его грани  $F$  и биективного аффинного отображения  $\alpha: p(I) \rightarrow F$ . Полиномиальная вычислимость указанных процедур, как правило, очевидна. Поэтому в дальнейшем мы не уделяем внимание проверке этих условий, а сам факт аффинной сводимости формулируем как утверждение вида «Для каждого кода  $I$ , задающего многогранник  $p(I)$  из семейства  $P$ , существует код  $I'$ , определяющий многогранник  $q(I') \in Q$ , такой, что  $p(I) \leq_A q(I')$ ». (Примерами могут служить леммы 3.4 и 3.5.) Наш выбор объясняется тем, что данное утверждение, в отличие от  $P \propto_A Q$ , содержит информацию о качестве сведения.

На основе выведенных выше соотношений приведем несколько примеров использования обозначения из определения 3.5. Так, соотношение (3.2) можно переписать в виде  $\Delta \propto_A C$ . А из лемм 3.5, 3.4 и соотношения (3.5) следует

**Теорема 3.6 ([34]).**  $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{part}} \propto_A P_{\text{pack}} \propto_A P_{\text{stab}}$ , где  $P_{\text{stab}} = \{P_{\text{stab}}(G)\}$ ,  $P_{\text{part}} = \{P_{\text{part}}(A)\}$ ,  $P_{\text{pack}} = \{P_{\text{pack}}(A)\}$ .

Перечислим некоторые очевидные свойства этого типа сводимости.

**Теорема 3.7.** Пусть  $P \propto_A Q$ . Предположим, что в семействе  $P$  есть многогранники, имеющие одно или несколько из следующих свойств:

1. Сверхполиномиальность числа вершин или гиперграней (относительно размера многогранника).
2. Сверхполиномиальное кликовое число графа многогранника.
3. NP-полнота критерия несмежности вершин.
4. Сверхполиномиальное число прямоугольного покрытия.
5. Сверхполиномиальная сложность расширения.

Тогда в  $Q$  имеются многогранники с теми же свойствами.

Сравним теперь семейства  $P_{\text{BQP}} = \{P_{\text{BQP}}(n)\}$  и  $P_{\text{stab}}$ .

**Теорема 3.8 ([34, 136]).** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует граф  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n(n+1)$ ,  $|E| = n(2n-1)$ , такой, что  $P_{\text{BQP}}(n) \leqslant_A P_{\text{stab}}(G)$ .

(Похожий результат получен в [98], но с более слабым соотношением  $\leqslant_E$  (см. определение 5.1 на с. 154) и при  $|V| = 2n^2$ .)

**Доказательство.** Каждое равенство  $x_{ij} = x_{ii}x_{jj}$  из уравнения (2.1), определяющего булев квадратичный многогранник, эквивалентно неравенствам

$$\begin{aligned} x_{ii} - x_{ij} &\geq 0, \\ x_{jj} - x_{ij} &\geq 0, \\ x_{ii} + x_{jj} - x_{ij} &\leq 1, \end{aligned} \tag{3.8}$$

при условии  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Остается преобразовать их в систему неравенств вида  $y_l + y_m \leq 1$ . Для этого введем  $n(n + 1)$  новых 0/1-переменных:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= x_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ t_{ij} &= x_{ii} - x_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ u_i &= x_{ii}, & 1 \leq i \leq n, \\ \bar{u}_i &= 1 - x_{ii}, & 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Тогда ограничения (3.8) эквивалентны

$$\begin{aligned} s_{ij} + \bar{u}_j &\leq 1, \\ t_{ij} + u_j &\leq 1, \\ u_i + \bar{u}_i &= 1, \\ s_{ij} + t_{ij} + \bar{u}_i &= 1, \end{aligned}$$

при условии целочисленности всех переменных. Очевидно, последние два равенства (точнее,  $n(n + 1)/2$  подобных равенств) определяют некоторую грань многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$ , где число вершин графа  $G$  равно  $n(n + 1)$ , а  $n(2n - 1)$  его ребер определяют систему неравенств

$$\begin{aligned} s_{ij} + \bar{u}_j &\leq 1, \\ t_{ij} + u_j &\leq 1, \\ u_i + \bar{u}_i &\leq 1, \\ s_{ij} + \bar{u}_i &\leq 1, \\ t_{ij} + \bar{u}_i &\leq 1. \end{aligned}$$

Более того, соотношения (3.9) связывают эту грань с многогранником  $P_{\text{BQP}}(n)$  невырожденным аффинным отображением. ■

**Утверждение 3.9.** *Если граф  $G = (V, E)$  неполный, то соотношение  $P_{\text{stab}}(G) \leq_A P_{\text{BQP}}(n)$  невозможно ни при каком  $n$ .*

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что в множество вершин  $P_{\text{stab}}(G)$  всегда входят вектора  $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ , где  $d = |V|$ . Если граф  $G = (V, E)$  неполный, то  $P_{\text{stab}}(G)$  кроме «обязательных» векторов содержит еще как минимум один 0/1-вектор. Пусть  $\mathbf{x}$  — один из таких (необязательных) векторов. Легко заметить, что вершины  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{x}$  многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$  несмежны, так как соединяющий их отрезок пересекается с выпуклой оболочкой вершин  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ . Следовательно, многогранник  $P_{\text{stab}}(G)$  не является 2-смежностным. Остается заметить, что многогранник  $P_{\text{BQP}}(n)$  (а вместе с ним и его грани) является 2-смежностным [148]. ■

Покажем, что аффинная сводимость многогранников тесно связана с аффинной сводимостью конусных разбиений пространств исходных данных соответствующих задач.

**Теорема 3.10.** *Пусть линейная задача комбинаторной оптимизации  $(d, S, g)$  определяет семейство многогранников  $P = \{p(I)\}$ , а задача  $(d', S', g')$  — семейство многогранников  $Q = \{q(I')\}$ . Предположим, что семейство  $P$  аффинно сводится к  $Q$  и, кроме того, для каждого  $p \in P$  определена опорная к соответствующему многограннику  $q$  гиперплоскость  $H(\mathbf{a}, h)$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{d'}$ ,  $d' = d'(I')$ , задающая грань  $\alpha(p) = q \cap H(\mathbf{a}, h)$ , аффинно эквивалентную  $p$ .*

*Тогда разбиение множества исходных данных задачи  $(d, S, g)$  с ограничением  $-1 \leq c \leq 1$  аффинно сводится к разбиению множества исходных данных задачи  $(d', S', g')$ .*

**Доказательство.** Согласно определению 3.3 (аффинной сводимости разбиений исходных данных), достаточно описать:

- 1) преобразование  $\tau: I \mapsto I'$ ,
- 2) обратимое аффинное отображение  $\alpha': \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ ,
- 3) биективную функцию  $\beta: \text{ext}(F) \rightarrow \text{ext}(p)$ , где  $F = \alpha(p)$  — грань многогранника  $q$ , аффинно эквивалентная  $p$ ,

удовлетворяющие условиям определения 3.2 (аффинной сводимости задач с ограничением). Часть этих условий уже выполнена: преобразование  $\tau$  уже известно, а  $\beta(y) = \alpha^{-1}(y)$ ,  $y \in F$ . Заметим также, что обратное к заданному аффинному отображению может быть найдено за полиномиальное время (см., например, [181]). Остается описать обратимое аффинное отображение  $\alpha'$ , удовлетворяющее условиям пункта 3 определения 3.2.

Для определенности предположим, что аффинное отображение  $\alpha$  выражается формулой

$$y = Ax + b, \quad \text{где } x \in p, \quad y \in F. \quad (3.10)$$

Так как  $p$  и  $F$  аффинно эквивалентны, то для любого  $y^* \in F$  и любого вектора  $c \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = d(I)$ ,

$$\left( \forall y \in F \quad c^T A^{-1} y^* \geq c^T A^{-1} y \right) \iff \left( \forall x \in p \quad c^T \beta(y^*) = c^T A^{-1}(y^* - b) \geq c^T x \right).$$

Теперь скорректируем целевой вектор  $v = c^T A^{-1}$  таким образом, чтобы неравенство  $v^T y > v^T y'$  выполнялось для любых  $y \in \text{ext } F$  и  $y' \in \text{ext}(q) \setminus \text{ext}(F)$ .

Гиперплоскость  $H(a, h)$  является опорной к  $q$  и  $F = q \cap H(a, h)$ . Иными словами,  $a^T y = h$  для всех  $y \in F$  и, не уменьшая общности,  $a^T y' < h$  для всех  $y' \in \text{ext}(q) \setminus \text{ext}(F)$ . Так как  $h \in \mathbb{Z}$  и  $a, y' \in \mathbb{Z}^{d'}$ , то

$$h - a^T y' \geq 1 \quad \forall y' \in \text{ext}(q) \setminus \text{ext}(F).$$

Выберем число  $N \in \mathbb{N}$  так, что  $N > \max_{y \in q} \|A^{-1} y\|_1$ , где  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ . (Очевидно, это можно сделать за полиномиальное время.) Тогда для любых  $y \in \text{ext } F$ ,



$\mathbf{y}' \in \text{ext}(q) \setminus \text{ext}(F)$  и  $-1 \leq \mathbf{c} \leq 1$  выполнено

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}^T A^{-1} + 2N\mathbf{a}^T) \mathbf{y} &= \\ &= \mathbf{c}^T A^{-1} \mathbf{y} + 2Nh > -N + 2Nh > \mathbf{c}^T A^{-1} \mathbf{y}' + 2Nh - 2N \geq \\ &\geq (\mathbf{c}^T A^{-1} + 2N\mathbf{a}^T) \mathbf{y}'. \end{aligned}$$

Таким образом, аффинная сводимость разбиения множества исходных данных задачи  $(d, S, g)$  с ограничением  $-1 \leq \mathbf{c} \leq 1$  к разбиению множества исходных данных задачи  $(d', S', g')$  определяется преобразованием  $\tau$  из определения аффинной сводимости семейств многогранников, аффинным отображением  $\alpha': \mathbf{c} \mapsto \mathbf{c}^T A^{-1} + 2N\mathbf{a}^T$  и биективной функцией  $\beta: \mathbf{y} \mapsto A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$ . ■

**Замечание 3.4.** Для всех примеров аффинной сводимости многогранников, представленных в настоящей работе, грань  $F = \alpha(p)$  соответствующего многогранника  $q$  описывается как пересечение нескольких опорных (к  $q$ ) гиперплоскостей, задаваемых системой уравнений с целочисленными коэффициентами вида

$$A\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

причем для каждого  $\mathbf{y}' \in \text{ext}(q) \setminus \text{ext}(F)$  в этой системе имеется хотя бы одно уравнение, в котором левая часть отрицательна (положительна). Очевидно, эта система может быть агрегирована в одно уравнение

$$\mathbf{1}^T A\mathbf{y} + \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 0,$$

определяющее гиперплоскость  $H(\mathbf{1}^T A, -\mathbf{1}^T)$ , опорную к  $q$  и удовлетворяющую условиям теоремы 3.10.

Например, в доказательстве теоремы 3.8 соответствующая система состоит из уравнений

$$u_i + \bar{u}_i - 1 = 0, \quad i \in [n],$$

$$s_{ij} + t_{ij} + \bar{u}_i - 1 = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

## Глава 4

### Примеры аффинной сводимости

При изучении наук примеры полезнее правил.

*И. Ньютон*

В последнем разделе предыдущей главы в качестве примера было показано, что семейства многогранников независимых множеств  $P_{\text{stab}}$ , многогранников разбиений  $P_{\text{part}}$  и многогранников упаковок  $P_{\text{pack}}$  эквивалентны в смысле аффинной сводимости, а семейство булевых квадратичных многогранников  $P_{\text{BQR}}$  аффинно сводится к ним. Причем сводимость  $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{BQR}}$  невозможна. В этой главе будет доказан ряд аналогичных утверждений для часто встречаемых в литературе семейств многогранников. Выявленные взаимосвязи (за исключением последнего раздела главы) изображены на рис. 4.1. Каждая стрелка означает аффинную сводимость семейства многогранников, расположенного в начале стрелки, к семейству многогранников, на которое указывает стрелка. Перечеркнутая (крестом) стрелка означает, что аффинная сводимость в данном направлении невозможна. Сплошные стрелки — известные факты. Пунктирные стрелки — факты, выявленные в настоящей работе. Для семейства многогранников двойных покрытий и других семейств, расположенных ниже его на рис. 4.1, задача проверки несмежности вершин NP-полна. Для семейств, расположенных выше, эта задача полиномиально разрешима. Исключением являются многогранники деревьев Штейнера, для которых статус этой задачи не установлен.

В первом разделе главы приводятся определения многогранников покрытий и двойных покрытий множества. Основное внимание в этом разделе уделяется специальным многогранникам  $P_{\text{Matsui}}(A)$ , где матрица  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  содержит ровно три единицы в каждой строке. Эти многогранники являются многогранниками двойных покрытий и обладают следующими свойствами:

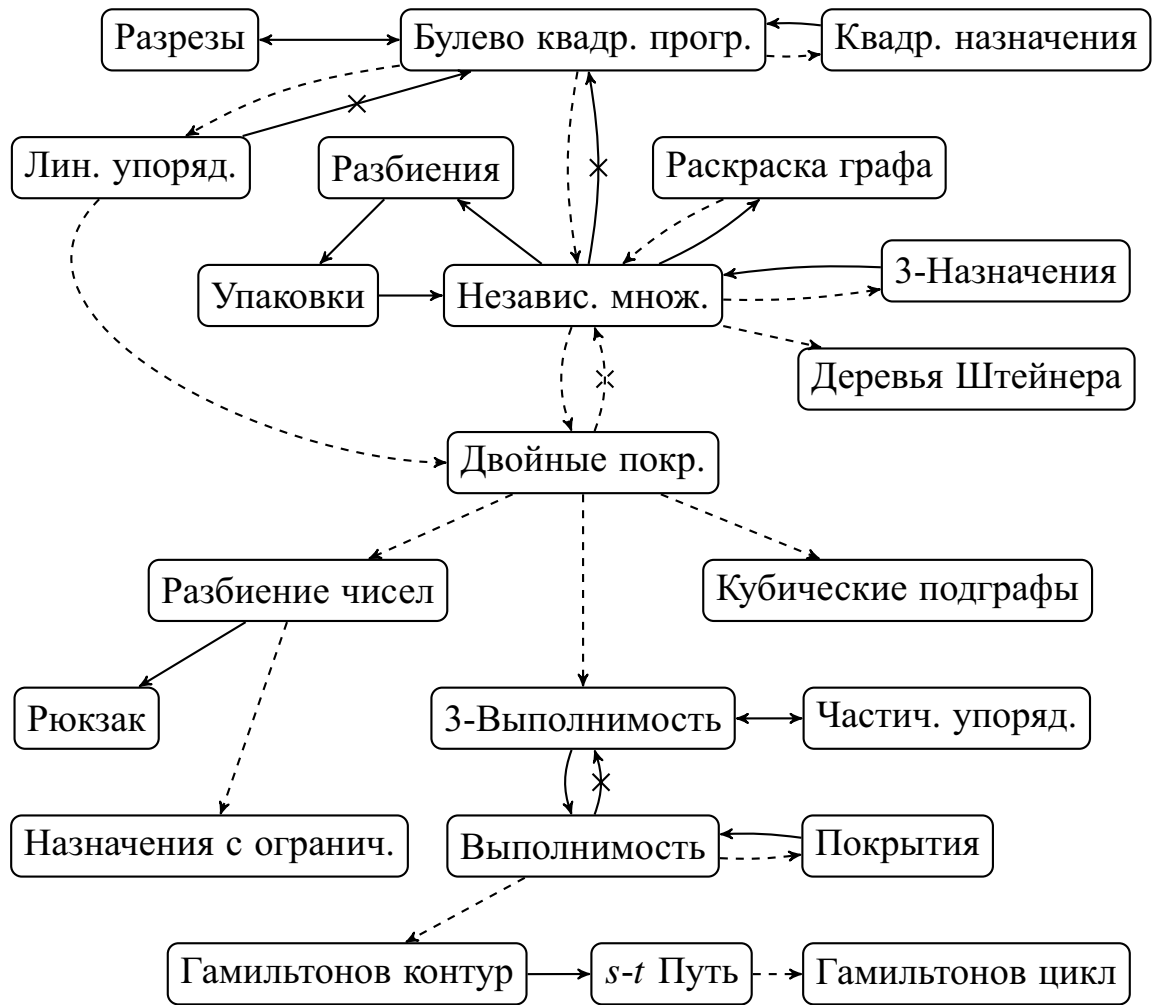


Рис. 4.1. Аффинная сводимость многогранников NP-трудных задач

1.  $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{Matsui}}$ .
2. Задача распознавания несмежности вершин для  $P_{\text{Matsui}}$  NP-полна.
3. Если многогранник  $P_{\text{Matsui}}(A)$  не является отрезком, то  $P_{\text{Matsui}}(A) \leq_A P_{\text{stab}}(G)$  невозможно ни для какого графа  $G$ .

Последнее свойство говорит о безусловном структурном отличии многогранников двойных покрытий от многогранников независимых множеств и аффинно сводящихся к ним семейств.

Далее, в разделе 4.2 рассматриваются семейства многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин: многогранники задачи о рюкзаке, многогранники задачи о разбиении чисел, многогранники задачи о назначениях с ограничением, многогранники задачи о  $k$ -выполнимости, многогранники задачи

о частичном упорядочивании, многогранники кубических подграфов. Показано, что многогранники двойных покрытий аффинно сводятся к этим семействам.

В разделе 4.3 рассматриваются многогранники линейных порядков и многогранники деревьев Штейнера в графе. Показано, что булевы квадратичные многогранники аффинно сводятся к первому семейству, а многогранники независимых множеств — ко второму.

В разделе 4.4 рассматриваются семейства многогранников, имеющих простой критерий смежности вершин. С точки зрения аффинной сводимости они разбиваются на два класса эквивалентности. Многогранники трехиндексной задачи о назначениях и несколько семейств многогранников раскрасок графа лежат в одном классе эквивалентности с многогранниками независимых множеств. А многогранники квадратичной задачи линейных упорядочиваний и квадратичной задачи о назначениях оказываются эквивалентны семейству булевых квадратичных многогранников.

Семейства многогранников для различных вариаций задачи коммивояжера рассматриваются в разделе 4.5. Показано, что многогранники задачи о выполнимости аффинно сводятся к многогранникам асимметричной задачи коммивояжера, а последние, в свою очередь, аффинно сводятся к остальным, рассматриваемым в этом разделе семействам. В целом картина обнаруженных взаимосвязей изображена на рис. 4.10.

По аналогии с булевыми квадратичными многогранниками в разделе 4.6 вводятся в рассмотрение булевы многогранники  $P_{\text{ВQR}}(n, p)$  степени  $p$ . Для  $p = 2$ ,  $P_{\text{ВQR}}(n, p)$  совпадает с  $P_{\text{ВQR}}(n)$ . Для  $p = 1$ ,  $P_{\text{ВQR}}(n, p)$  —  $n$ -мерный 0/1-куб. Показано, что  $P_{\text{ВQR}}(n, p)$   $s$ -смежностен при  $s \leq p + \lfloor p/2 \rfloor$ . Для  $m \in \mathbb{N}$  и  $k \geq 2m$  доказано, что  $P_{\text{ВQR}}(k, 2m) \leq_A P_{\text{ВQR}}(n)$  при  $n = \Theta(\binom{k}{m})$ . Следовательно, для любого  $k \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2^{2 \cdot \lceil k/3 \rceil}$ ,  $P_{\text{ВQR}}(n)$  имеет  $k$ -смежностную грань со сверхполиномиальным числом  $2^{\Theta(n^{1/\lceil k/3 \rceil})}$  вершин.

В последнем разделе главы рассматриваются задача о назначениях и задача о кратчайшем орпути с ограничением неотрицательности длин контуров. Пока-

зано, что конусное разбиение множества исходных данных последней аффинно сводится к конусному разбиению пространства исходных данных первой. Как следствие, граф полиэдра кратчайших орпутьей  $P_{\text{shortpath}}(n + 1)$  является подграфом графа многогранника Биркгофа  $P_{\text{Birk}}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.1. Многогранники покрытий и двойных покрытий

По аналогии с многогранниками упаковок и разбиений множества, *многогранником покрытий множества* называется выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{cover}}(M) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \mid M\mathbf{x} \geq \mathbf{1}\}, \quad \text{где } M \in \{0, 1\}^{m \times n}.$$

*Многогранником двойных покрытий* будем называть выпуклую оболочку множества

$$P_{2\text{cover}}(B) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \mid B\mathbf{x} = \mathbf{2}\},$$

где  $B \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , причем каждая строка матрицы  $B$  содержит ровно четыре единицы и не имеет нулевых столбцов. По-видимому, впервые это семейство многогранников было рассмотрено Мацуи [138]. Им же была установлена связь между многогранниками покрытий и двойных покрытий.

**Теорема 4.1 (Мацуи [138, theorem 4.3]).** *Для каждой матрицы  $B \in \{0, 1\}^{m \times n}$  с четырьмя единицами в каждой строке несложно описать матрицу  $M \in \{0, 1\}^{4m \times n}$  с тремя единицами в каждой строке, что  $P_{2\text{cover}}(B) \leq_A P_{\text{cover}}(M)$ .*

Известно также, что задача проверки несмежности вершин для многогранников двойных покрытий NP-полна [138]. Точнее, она NP-полна для некоторого подсемейства семейства  $P_{2\text{cover}}$ , о котором пойдет речь ниже. С целью упрощения обсуждения свойств этого подсемейства, мы приведем более удобное его описание, чем в первоисточнике [138].

Прежде всего отметим, что вопрос «Содержит ли многогранник разбиений  $P_{\text{part}}(A)$  хотя бы одну точку?» является NP-полной задачей, даже если каждая

строка матрицы  $A$  содержит ровно три единицы [16, 138]. С каждым многогранником  $P_{\text{part}}(A)$ ,  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , удовлетворяющим этому условию, свяжем многогранник, множество вершин  $P_{\text{Matsui}}(A) \subset \{0, 1\}^{3n+3}$  которого определим следующим образом. Для трех координат вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{Matsui}}(A)$  введем особые обозначения  $y_1, y_2, y_3$ . Каждой координате  $z_j$  вектора  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in P_{\text{part}}(A)$  будут соответствовать три координаты  $x_j, \bar{x}_j$  и  $x'_j$  вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{Matsui}}(A)$ , и два ограничения

$$x_j + \bar{x}_j = 1, \quad (4.1)$$

$$y_1 + y_2 + x'_j + \bar{x}_j = 2.$$

А для каждого ограничения вида  $z_i + z_j + z_k = 1$  из описания  $P_{\text{part}}(A)$  (случай, когда  $A$  не содержит ни одной строки, исключаем из рассмотрения) добавим к описанию множества  $P_{\text{Matsui}}(A)$  уравнение

$$y_3 + x_i + x'_j + x'_k = 2.$$

Заменяя каждое уравнение (4.1) в описании многогранника  $P_{\text{Matsui}}(A)$  на

$$a + b + x_j + \bar{x}_j = 2, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

приходим к следующему выводу.

**Утверждение 4.2.** *Для каждой матрицы  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , имеющей ровно три единицы в каждой строке, несложно описать матрицу  $B \in \{0, 1\}^{(2n+m) \times (3n+5)}$ , что  $P_{\text{Matsui}}(A) \leqslant_A P_{2\text{cover}}(B)$ .*

Более того, в [138] описан многогранник двойных покрытий, аффинно эквивалентный  $P_{\text{Matsui}}(A)$ , но его описание требует большего числа переменных и уравнений.

Обратим теперь внимание на то, что ограничения

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1,$$

определяют грань многогранника  $P_{\text{Matsui}}(A)$ , аффинно эквивалентную многограннику  $P_{\text{part}}(A)$ . Таким образом,

$$P_{\text{part}}(A) \leqslant_A P_{\text{Matsui}}(A). \quad (4.2)$$

То же самое верно и для следующих наборов ограничений:

$$1) \ y_1 = 1, \ y_2 = 0, \ y_3 = 1;$$

$$2) \ y_1 = 0, \ y_2 = 1, \ y_3 = 0;$$

$$3) \ y_1 = 1, \ y_2 = 0, \ y_3 = 0.$$

Введем для этих граней (точнее, множеств их вершин) следующие обозначения:

$$F_1 = \{\mathbf{x} \in P_{\text{Matsui}}(A) \mid y_1 = 0, \ y_2 = 1, \ y_3 = 1\},$$

$$F_2 = \{\mathbf{x} \in P_{\text{Matsui}}(A) \mid y_1 = 1, \ y_2 = 0, \ y_3 = 1\},$$

$$F_3 = \{\mathbf{x} \in P_{\text{Matsui}}(A) \mid y_1 = 0, \ y_2 = 1, \ y_3 = 0\},$$

$$F_4 = \{\mathbf{x} \in P_{\text{Matsui}}(A) \mid y_1 = 1, \ y_2 = 0, \ y_3 = 0\}.$$

Заметим, что никакие две из этих четырех граней не имеют общих точек. Кроме того,

$$F_4 = \{\mathbf{1} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in F_1\}, \quad F_3 = \{\mathbf{1} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in F_2\}. \quad (4.3)$$

Ограничениям

$$y_1 = y_2 = 0$$

удовлетворяет ровно одна вершина многогранника  $P_{\text{Matsui}}(A)$ , имеющая координаты

$$x'_j = \bar{x}_j = 1, \quad y_3 = x_j = 0, \quad j \in [n].$$

Обозначим эту вершину  $\mathbf{x}^0$ . Аналогично, если

$$y_1 = y_2 = 1,$$

то

$$x'_j = \bar{x}_j = 0, \quad y_3 = x_j = 1, \quad j \in [n].$$

Обозначим эту вершину  $\bar{x}^0$ . Очевидно,  $\bar{x}^0 = 1 - x^0$ .

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$P_{\text{Matsui}}(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup \{x^0, \bar{x}^0\},$$

причем никакие два из этих пяти множеств не имеют общих точек. Кроме того, вершины  $x^0$  и  $\bar{x}^0$  смежны тогда и только тогда, когда  $F_1 = \emptyset$  (в противном случае  $\text{conv}\{F_1 \cup F_4\}$  и  $\text{conv}\{x^0, \bar{x}^0\}$  имеют общую точку  $1/2$ ). Таким образом, в силу того, что  $F_1$  аффинно эквивалентна  $P_{\text{part}}(A)$ , приходим к следующему выводу.

**Теорема 4.3 (Мацуи [138, theorem 4.1]).** *Задача проверки несмежности вершин  $x^0$  и  $\bar{x}^0$  многогранника  $P_{\text{Matsui}}(A)$  NP-полна.*

**Следствие 4.4.** *Для семейств многогранников покрытий  $P_{\text{cover}}$  и двойных покрытий  $P_{2\text{cover}}$  задача проверки несмежности вершин NP-полна.*

Покажем теперь, что соотношение (4.2) выполнено и в тех случаях, когда число единиц в строках матрицы  $A$  отличается от трех. Точнее, для каждой матрицы  $B$  (с любым числом единиц в строках) можно построить матрицу  $A$ , имеющую три единицы в каждой строке, что

$$P_{\text{part}}(B) \leq_A P_{\text{Matsui}}(A).$$

Согласно лемме 3.5, для любого графа  $G = (V, E)$  существует матрица  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ ,  $m = |E|$ ,  $n = |V| + |E|$ , имеющая ровно по три единицы в каждой строке и такая, что  $P_{\text{stab}}(G) =_A P_{\text{part}}(A)$ . Вместе с соотношением (4.2) это дает аффинную сводимость

$$P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{Matsui}}.$$

Но  $P_{\text{part}} \propto_A P_{\text{stab}}$  (см. теорему 3.6), следовательно,  $P_{\text{part}} \propto_A P_{\text{Matsui}}$ .

Как известно [73], многогранники  $P_{\text{stab}}(G)$  имеют простой критерий проверки смежности вершин. Соответственно, в предположении  $\text{NP} \neq \text{P}$  аффинная сводимость  $P_{\text{Matsui}} \propto_A P_{\text{stab}}$  невозможна. Покажем, что и без условия  $\text{NP} \neq \text{P}$



ни один нетривиальный многогранник семейства  $P_{\text{Matsui}}$  не может быть гранью многогранников семейства  $P_{\text{stab}}$ .

**Теорема 4.5 ([37]).** *Если многогранник  $P_{\text{Matsui}}(A)$  не является отрезком, то соотношение  $P_{\text{Matsui}}(A) \leqslant_A P_{\text{stab}}(G)$  невозможно ни для какого графа  $G$ .*

**Доказательство.** Как было замечено выше, многогранник  $P_{\text{Matsui}}(A)$  обязательно содержит пару вершин  $\mathbf{x}^0$  и  $\bar{\mathbf{x}}^0$ , и некоторое количество четверок вершин вида  $\mathbf{x}^{2i-1} \in F_1$ ,  $\bar{\mathbf{x}}^{2i-1} \in F_4$ ,  $\mathbf{x}^{2i} \in F_2$ ,  $\bar{\mathbf{x}}^{2i} \in F_3$ ,  $i \in [k]$ ,  $k \geqslant 1$ . Причем, согласно (4.3),

$$\mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{x}^{2i-1} + \bar{\mathbf{x}}^{2i-1} = \mathbf{x}^{2i} + \bar{\mathbf{x}}^{2i}. \quad (4.4)$$

Предположим, что  $P_{\text{Matsui}}(A)$  аффинно эквивалентен некоторой грани

$$H = \{\mathbf{y}^0, \bar{\mathbf{y}}^0, \dots, \mathbf{y}^{2k}, \bar{\mathbf{y}}^{2k}\}$$

многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$  для некоторого графа  $G = (V, E)$ . Очевидно, вершины этой грани должны наследовать свойство (4.4):

$$\mathbf{y}^0 + \bar{\mathbf{y}}^0 = \mathbf{y}^{2i-1} + \bar{\mathbf{y}}^{2i-1} = \mathbf{y}^{2i} + \bar{\mathbf{y}}^{2i}. \quad (4.5)$$

Покажем, что в многограннике  $P_{\text{stab}}(G)$  есть еще пара вершин  $\mathbf{y}^*$  и  $\bar{\mathbf{y}}^*$ , для которых

$$\mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{y}}^* = \mathbf{y}^0 + \bar{\mathbf{y}}^0. \quad (4.6)$$

Это будет означать, что пересечение  $\text{conv}\{\mathbf{y}^*, \bar{\mathbf{y}}^*\}$  и  $\text{conv}(H)$  не пусто. То есть  $H$  не является гранью  $P_{\text{stab}}(G)$ .

Пусть  $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)$  и  $\bar{\mathbf{y}}^0 = (\bar{y}_1^0, \dots, \bar{y}_m^0)$ , где  $m$  — число вершин графа  $G$ .

Рассмотрим множество

$$I = \{i \in [m] \mid y_i^0 = \bar{y}_i^0\}.$$

Так как каждая вершина в  $P_{\text{stab}}(G)$  является 0/1-вектором, то из (4.5) и (4.6) следует

$$y_i^* = \bar{y}_i^* = y_i^0 = \bar{y}_i^0 = \dots = y_i^{2k} = \bar{y}_i^{2k} \quad \text{при } i \in I. \quad (4.7)$$

Далее будем рассматривать только те координаты, значения которых различны для каждой пары вершин (см. рис. 4.2):

$$J = \left\{ j \in [m] \mid y_j^0 + \bar{y}_j^0 = 1 \right\} = [m] \setminus I.$$

Очевидно,  $J \neq \emptyset$ .

Зафиксируем какойнибудь индекс  $j_0 \in J$  и для каждого  $i \in \{0, 1, \dots, 2k\}$  определим множество

$$U_i = \begin{cases} \left\{ j \in J \mid y_j^i = 1 \right\}, & \text{если } y_{j_0}^i = 1, \\ \left\{ j \in J \mid \bar{y}_j^i = 1 \right\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По построению все эти множества попарно различны и  $j_0 \in U_i$  (см. рис. 4.2). Для каждого  $U_i$  рассмотрим его дополнение  $\bar{U}_i = J \setminus U_i$ . Согласно данному определению, для любого  $i \in \{0, 1, \dots, 2k\}$  и для любых  $p, r \in U_i$  (а также для любых  $p, r \in \bar{U}_i$ ) найдется вершина  $\mathbf{y} \in H$  такая, что  $y_p = y_r = 1$ . То есть неравенство  $y_p + y_r \leq 1$  отсутствует в описании многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$ .

Далее нам понадобится определение *симметрической разности* двух множеств  $X$  и  $Y$ :

$$X \triangle Y = (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y).$$

Симметрическая разность обладает следующими свойствами:

$$1. \quad X \triangle Y = \emptyset \iff X = Y.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^0 &= (\overbrace{1, 0, 1, 1}^I, \overbrace{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1}^J) \\ &\quad \quad \quad j_0 \\ \bar{\mathbf{y}}^0 &= (1, 0, 1, 1, \underbrace{1, 1, 1, 1}_{U_0}, \underbrace{0, 0, 0}_{\bar{U}_0}) \end{aligned}$$

Рис. 4.2. Множества индексов  $I, J, U_0, \bar{U}_0$ .

2. Результат выражения  $X \triangle Y \triangle Z$  не зависит от перестановки множеств и порядка выполнения операций.
3.  $X \triangle Y = Z \iff X \triangle Z = Y$ .

Введем в рассмотрение множество

$$S = S(i, j, t) = U_i \triangle U_j \triangle U_t, \quad 0 \leq i < j < t \leq 2k,$$

Рассмотрим вектор  $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*(S)$  с координатами

$$y_i^* = \begin{cases} y_i^0, & \text{при } i \in I, \\ 1, & \text{при } i \in S, \\ 0, & \text{при } i \in J \setminus S, \end{cases}$$

и вектор  $\bar{\mathbf{y}}^* = \bar{\mathbf{y}}^*(S)$  с координатами

$$\bar{y}_i^* = \begin{cases} y_i^0, & \text{при } i \in I, \\ 0, & \text{при } i \in S, \\ 1, & \text{при } i \in J \setminus S, \end{cases}$$

**Лемма 4.6.** Векторы  $\mathbf{y}^*$  и  $\bar{\mathbf{y}}^*$  принадлежат  $P_{\text{stab}}(G)$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что если вершины грани  $H$  удовлетворяют некоторому неравенству вида  $y_p + y_r \leq 1$  из описания многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$ , то  $\mathbf{y}^*$  и  $\bar{\mathbf{y}}^*$  тоже ему удовлетворяют.

Возможны несколько случаев.

**I.** Пусть  $p, r \in I$ ,  $p \neq r$ . Так как при  $i \in I$   $i$ -е координаты вершин грани  $H$  и векторов  $\mathbf{y}^*$  и  $\bar{\mathbf{y}}^*$  совпадают, то из того, что неравенство  $y_p + y_r \leq 1$  выполнено для  $H$  следует, что оно также выполнено и для векторов  $\mathbf{y}^*$  и  $\bar{\mathbf{y}}^*$ .

**II.** Пусть  $p \in I$ ,  $r \in J$ . (Случай  $r \in I$ ,  $p \in J$  разбирается аналогично.) Тогда  $y_r^0 + \bar{y}_r^0 = y_r^* + \bar{y}_r^* = 1$ . Следовательно,  $\max\{y_r^*, \bar{y}_r^*\} = \max\{y_r^0, \bar{y}_r^0\} = 1$ . И опять из выполнения неравенства  $y_p + y_r \leq 1$  для  $H$  следует, что оно также выполнено для  $\mathbf{y}^*$  и  $\bar{\mathbf{y}}^*$ .

**III.** Пусть  $p \in S, r \in J \setminus S$ . (Случай  $r \in S, p \in J \setminus S$ , разбирается аналогично.) Тогда  $y_p^* + y_r^* = \bar{y}_p^* + \bar{y}_r^* = 1$  и требуемое ограничение выполнено.

**IV.** Пусть  $p, r \in S, p \neq r$ , где  $S = S(i, j, t)$ . (Случай  $p, r \in J \setminus S, p \neq r$ , разбирается аналогично.) Покажем, что в этом случае  $p$  и  $r$  принадлежат одновременно одному из шести множеств:  $U_i, U_j, U_t, \bar{U}_i, \bar{U}_j, \bar{U}_t$ . Если это действительно так, то (как было сказано выше при определении этих множеств) неравенство  $y_p + y_r \leq 1$  отсутствует в описании многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$ .

Итак, предположим, что  $p, r \in U_i \triangle U_j \triangle U_t$ , и покажем, что тогда  $p$  и  $r$  принадлежат одновременно одному из множеств:  $U_i, U_j, U_t, \bar{U}_i, \bar{U}_j, \bar{U}_t$ . Заметим, что  $U_i \triangle U_j \triangle U_t$  представляет собой объединение четырех множеств:

$$U_i \triangle U_j \triangle U_t = (U_i \cap U_j \cap U_t) \cup (U_i \cap \bar{U}_j \cap \bar{U}_t) \cup (\bar{U}_i \cap U_j \cap \bar{U}_t) \cup (\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \cap U_t).$$

Если  $p$  и  $r$  принадлежат одному из этих четырех множеств, то требуемое условие выполнено. Нетрудно проверяется, что условие выполнено и в случае, когда  $p$  и  $r$  принадлежат разным множествам. Например, если  $p \in U_i \cap \bar{U}_j \cap \bar{U}_t$ , а  $r \in \bar{U}_i \cap \bar{U}_j \cap U_t$ , то  $p, r \in \bar{U}_j$ . ■

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что найдется множество  $S$  такое, что вектор  $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*(S)$  (а вместе с ним и вектор  $\bar{\mathbf{y}}^* = \bar{\mathbf{y}}^*(S)$ ) будет отличаться от всех остальных вершин грани  $H$ .

**Лемма 4.7.** *Существует  $t \in \{2, 3, \dots, 2k\}$  такое, что  $S(0, 1, t)$  отличается от каждого из множеств  $U_p$  и  $\bar{U}_p$ ,  $0 \leq p \leq 2k$ .*

**Доказательство.** Начнем с простого случая, когда  $k = 1$ . Нетрудно проверить, что

$$S(0, 1, 2) = U_0 \triangle U_1 \triangle U_2 \notin \{U_0, U_1, U_2, \bar{U}_0, \bar{U}_1, \bar{U}_2\},$$

так как все множества различны и, кроме того, все  $U_i$  имеют общий элемент  $j_0$ :

$$U_i \triangle U_j \neq \emptyset \quad \text{и} \quad U_i \triangle U_j \neq J, \quad \text{при } i \neq j.$$

Предположим теперь, что  $k > 1$ . Рассмотрим тройки вида

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_i, \quad 2 \leq i \leq 2k.$$

Как было замечено выше,

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_i \notin \{U_0, U_1, U_i\}.$$

Кроме того,  $U_0 \triangle U_1 \triangle U_i \neq \bar{U}_j$  при любом  $j \in \{0, 1, \dots, 2k\}$ , так как  $j_0 \notin \bar{U}_j$ .

Предположим, что

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_i = U_j \tag{4.8}$$

при некотором  $j \in \{2, 3, \dots, 2k\} \setminus \{i\}$ . Но тогда, в силу свойств симметрической разности,

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_j = U_i.$$

Причем

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_t \neq U_j, \quad \forall t \neq i,$$

так как иначе  $U_t = U_i$ , что невозможно по условию. По тем же соображениям,

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_t \neq U_i, \quad \forall t \neq j.$$

Таким образом, все возможные индексы  $i$  и  $j$ , для которых выполнено условие (4.8), разбиваются на непересекающиеся пары. Но множество  $\{2, 3, \dots, 2k\}$  содержит нечетное число индексов. Значит, обязательно найдется  $i \in \{2, 3, \dots, 2k\}$ , для которого  $S(0, 1, i) = U_0 \triangle U_1 \triangle U_i$  будет отличаться от каждого из множеств  $U_p$  и  $\bar{U}_p$ ,  $0 \leq p \leq 2k$ . ■

Теорема доказана. ■

Учитывая, что  $P_{\text{Matsui}}(A)$  является гранью многогранника двойных покрытий, получаем

**Следствие 4.8.**  $P_{2\text{cover}} \not\subset_A P_{\text{stab}}$  и  $P_{\text{cover}} \not\subset_A P_{\text{stab}}$ .

## 4.2. Многогранники с NP-полным критерием несмежности вершин

В этом разделе мы рассмотрим несколько семейств многогранников, к которым аффинно сводятся многогранники двойных покрытий. Как следствие, для всех этих многогранников задача проверки несмежности вершин NP-полна. Начнем с простых примеров.

### 4.2.1. Многогранники задачи о рюкзаке

Если в описании многогранников задачи о рюкзаке (уравнение (2.3) на с. 46) неравенство заменить равенством, то получим *многогранники задачи о рюкзаке с равенством*:

$$P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, b) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \quad b \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

Очевидно,

$$P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, b) \leq_A P_{\text{knap}}(\mathbf{a}, b).$$

Подсемейство многогранников  $P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, b)$ , удовлетворяющее условию  $2b = \mathbf{a}^T \mathbf{1}$ , обозначим  $P_{\text{numpart}}(\mathbf{a})$ . Оно непосредственно связано с задачей о разбиении чисел, входящей в список из 21 задачи, NP-полнота которых была доказана в фундаментальной работе Карпа [125].

**Теорема 4.9 ([31]).** *Для любой матрицы  $B \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , имеющей ровно четыре единицы в каждой строке, можно за полиномиальное (от её размера) время построить вектор  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$  такой, что  $P_{2\text{cover}}(B) =_A P_{\text{numpart}}(\mathbf{a})$ .*

**Доказательство.** Достаточно заметить, что система линейных диофантовых уравнений  $B\mathbf{x} = \mathbf{2}$  может быть агрегирована в одно уравнение (см. [20, 149]). Например, можно сложить все уравнения системы  $B\mathbf{x} = \mathbf{2}$ , предварительно умножив каждое из них на  $4^i$ , где  $i \in [m]$  — номер уравнения. ■

**Следствие 4.10.** *Задача проверки несмежности вершин для семейств многогранников  $P_{\text{numpart}}(\mathbf{a})$ ,  $P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $P_{\text{knar}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  NP-полна.*

Ранее этот результат об NP-полноте был получен в работах [72, 103, 138] иными методами.

#### 4.2.2. Многогранники задачи о назначениях с ограничением

Пусть  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ . Многогранник задачи о назначениях с ограничением определяется как выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{CA}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in P_{\text{Birk}}(n) \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

где  $P_{\text{Birk}}(n)$  — многогранник Биркгофа.

Интерес к этой задаче и её многограннику обусловлен многочисленными приложениями (см., например, [178]). NP-полнота задачи распознавания несмежности вершин этого многогранника была обнаружена Альфаки и Мурти [44].

Покажем, что многогранники задачи о рюкзаке с равенством аффинно сводятся к этому семейству.

**Теорема 4.11 ([31]).** *Для каждого  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}$  найдется  $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}$  такой, что*

$$P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq_A P_{\text{CA}}(\mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что многогранник  $P_{\text{Birk}}(2n)$  содержит грань, являющуюся  $n$ -мерным кубом. Эта грань лежит в пересечении гиперплоскостей  $x_{ij} = 0$ , для всех  $(i, j)$  не входящих в множество

$$S = \{(i, i) \mid i \in [2n]\} \cup \{(2i - 1, 2i) \mid i \in [n]\} \cup \{(2i, 2i - 1) \mid i \in [n]\}.$$

Для данного по условию вектора  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  определим координаты вектора  $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}$  следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_p, & \text{если } i = j = 2p, p \in [n], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что множество вершин указанной выше грани ( $n$ -мерного куба), попадающих гиперплоскость  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = b$ , аффинно эквивалентно многограннику  $P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, b)$ . С другой стороны, оно же является гранью многогранника  $P_{\text{CA}}(\mathbf{c}, b)$ . ■

#### 4.2.3. Многогранники задачи о $k$ -выполнимости и задачи о частичном упорядочивании

Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$  — множество булевых переменных. Не уменьшая общности, полагаем  $u_i \in \{0, 1\}$ , где 1 трактуется как «истина», а 0 — как «ложь». Пусть  $C = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  — некоторый набор дизъюнкций (конъюнкция дизъюнкций) над  $U$ .

Для каждого выполняющего конъюнкцию  $C$  набора значений переменных рассмотрим соответствующий вектор  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \{0, 1\}^d$ . Множество всех таких векторов обозначаем  $P_{\text{sat}}(U, C)$ , а его выпуклая оболочка называется *многогранником задачи о выполнимости*. В случае, если каждая дизъюнкция в  $C$  состоит ровно из  $k$  литералов, он называется *многогранником задачи о  $k$ -выполнимости*.

**Теорема 4.12 ([31]).** Для каждой матрицы  $B \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , имеющей ровно четыре единицы в каждой строке, можно за линейное время построить конъюнкцию  $C = \{D_1, \dots, D_{8m}\}$  над  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  такую, что  $|D_i| = 3$ ,  $i \in [8m]$ , и

$$P_{2\text{cover}}(B) =_A P_{\text{sat}}(U, C).$$

**Доказательство.** Каждое уравнение вида  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$  из системы  $B\mathbf{x} = \mathbf{2}$  можно заменить набором из восьми дизъюнкций:

$$\bigvee_{j \neq i} x_j \quad \text{и} \quad \bigvee_{j \neq i} \bar{x}_j, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad \blacksquare$$

**Следствие 4.13.** Задача распознавания несмежности двух произвольных вершин многогранника задачи о 3-выполнимости NP-полна.



Ранее, Фиорини [94] доказал этот факт (NP-полноты несмежности вершин) непосредственно. В той же работе Фиорини показано, что многогранники задачи о 3-выполнимости тесно связаны с многогранниками задачи о частичном упорядочивании. Сформулируем ее на языке теории графов. Подграф  $D' = (V, A')$  полного орграфа  $D = (V, A)$  будем называть *частичным порядком*, если он ацикличесен и транзитивен:

$$((u, v) \in A') \& ((v, w) \in A') \Rightarrow (u, w) \in A'.$$

*Многогранник частичных порядков* представляет собой выпуклую оболочку множества  $P_{PO}(n)$  характеристических векторов всех частичных порядков полного орграфа на  $n$  вершинах.

**Теорема 4.14 (Фиорини [94, Lemma 3.2]).** *Многогранник задачи о 3-выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$ ,  $U = \{u_1, \dots, u_d\}$ ,  $C = \{D_1, \dots, D_n\}$ ,  $|D_i| = 3$ ,  $i \in [n]$ , аффинно эквивалентен грани многогранника частичных порядков  $P_{PO}(m)$  при  $m = 3d + 7n$ .*

Из этого, в частности, следует NP-полнота задачи распознавания несмежности вершин для многогранника частичных порядков.

Более того, семейства многогранников частичных порядков и многогранников задачи о 3-выполнимости эквивалентны с точки зрения аффинной сводимости.

**Теорема 4.15 (Фиорини [94, Theorem 1.2]).** *Многогранник  $P_{PO}(m)$  аффинно эквивалентен грани многогранника задачи о 3-выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$ , где  $|U| = n(n-1) + 1$ ,  $|C| = n(n-1)(n-3/2)$ .*

Рассмотрим теперь отдельно семейства многогранников задачи о  $k$ -выполнимости для разных  $k \geq 3$  (случай  $k = 2$  не представляет интереса). Почти очевидно следующее утверждение.

**Лемма 4.16 (Фиорини [94, Lemma 4.1]).** *Многогранник задачи о выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$  при  $|D_i| \leq k$ ,  $D_i \in C$ , является гранью многогранника задачи о  $k$ -выполнимости  $P_{\text{sat}}(U', C')$ , где  $|C'| = |C|$ ,  $|U'| = |U| + k - m$ ,  $m = \min\{|D_i| \mid D_i \in C\}$ .*

Оказывается, семейства многогранников задачи о  $k$ -выполнимости для разных значений  $k \geq 3$  относятся к разным классам эквивалентности с точки зрения аффинной сводимости.

**Теорема 4.17 (Фиорини [94, Proposition 4.1]).** *Существуют примеры многогранников задачи о  $k$ -выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$  при  $|U| = k$  и  $|C| \geq 1$  такие, что для любых  $U'$  и  $C'$ , при условии  $|D'| < k$ ,  $D' \in C'$ , справедливо*

$$P_{\text{sat}}(U, C) \not\leq_A P_{\text{sat}}(U', C').$$

Рассмотрим теперь семейство всех многогранников задачи о выполнимости  $P_{\text{sat}} = \{P_{\text{sat}}(U, C)\}$  и покажем, что оно эквивалентно многогранникам покрытий.

**Теорема 4.18.**  $P_{\text{cover}} \propto_A P_{\text{sat}} \propto_A P_{\text{cover}}$ .

**Доказательство.** Пусть  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ . Рассмотрим  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  и для каждого неравенства вида

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} \geq 1$$

системы  $Ax \geq 1$  добавим в  $C$  дизъюнкцию

$$u_{i_1} \vee u_{i_2} \vee \dots \vee u_{i_k}.$$

Очевидно,

$$P_{\text{cover}}(A) =_A P_{\text{sat}}(U, C).$$

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  — некоторый набор булевых переменных и  $C = \{D_1, \dots, D_m\}$  — конъюнкция дизъюнкций над  $U$ . Для каждого  $i \in [n]$  введем в рассмотрение пару переменных  $x_i$  и  $\bar{x}_i$ , и свяжем их неравенством

$$x_i + \bar{x}_i \geq 1. \quad (4.10)$$

Переменные  $x_i$  будут соответствовать литералам  $u_i$  в  $C$ , а переменные  $\bar{x}_i$  — литералам  $\bar{u}_i$ . Для каждой дизъюнкции  $D_j$ ,  $j \in [m]$ , заменяя литералы соответствующими переменными, расставляя вместо  $\vee$  знаки сложения, и добавляя справа

$\geq 1$ , получим  $m$  неравенств. Вместе с неравенствами (4.10) они описывают некоторый многогранник  $P_{\text{cover}}(A)$ . Заменяя неравенство в (4.10) равенством, получим грань этого многогранника, аффинно эквивалентную  $P_{\text{sat}}(U, C)$ . ■

#### 4.2.4. Многогранники кубических подграфов

Пусть  $G = (V, E)$  — полный граф на  $k$  вершинах и пусть  $T_k$  — множество всех его кубических подграфов. (Напомним, что степень каждой вершины кубического графа равна трем.) *Многогранником кубических подграфов* называется выпуклая оболочка множества

$$P_{3\text{-factor}}(k) = \{\chi(H) \in \{0, 1\}^E \mid H \in T_k\}.$$

Известно, что задача проверки несмежности вершин этого многогранника NP-полна [59]. Покажем, что многогранники двойных покрытий являются гранями этого многогранника.

**Теорема 4.19 ([31]).**  $P_{2\text{cover}}(A) \leq_A P_{3\text{-factor}}(k)$ , где матрица  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  имеет ровно четыре единицы в каждой строке и  $k = 6m + 4s + 2t$ ,  $s$  — число столбцов матрицы  $A$ , содержащих лишь одну единицу,  $t$  — число столбцов матрицы  $A$ , содержащих ровно две единицы.

**Доказательство.** Через  $\mathbf{x} = (x_i) \in \{0, 1\}^n$  будем обозначать вектор, удовлетворяющий условию  $A\mathbf{x} = \mathbf{2}$ , определяющему вершины многогранника  $P_{2\text{cover}}(A)$ . Через  $\mathbf{y} = (y_{lh}) \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}$  — характеристический вектор кубического подграфа графа  $G = (V, E)$  из описания многогранника  $P_{3\text{-factor}}(k)$ . Воспользуемся тем, что для многогранника  $P_{3\text{-factor}}(k)$  гиперплоскости вида  $y_{lh} = 0$  являются опорными. Искомую грань будем определять как пересечение нескольких таких гиперплоскостей. Очевидно, если выполнено  $y_{lh} = 0$ , то мы можем рассматривать только те подграфы графа  $G$ , которые не содержат ребро  $(v_l, v_h)$ . Таким образом, чтобы определить нужную нам грань, мы опишем некоторый подграф  $G'$  графа  $G$ , подразумевая, что для не входящих в него ребер выполнено  $y_{lh} = 0$ .

Разберем в начале случай, когда в каждом *столбце* матрицы  $A$  присутствует не менее трех единиц. Множество вершин  $V$  графа  $G$  будет состоять из трех подмножеств:  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  и  $T$ , где  $|T| = 4m$ . Обозначения элементов множества  $T$  поставим в зависимость от содержимого матрицы  $A = (a_{ij})$ :

$$T = \{t_{ij} \mid a_{ij} = 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

(Поскольку каждая строка матрицы  $A$  содержит ровно 4 единицы, то  $|T| = 4m$ .)

Все вершины  $t_{ij}$  с одинаковым вторым индексом  $j = \text{const}$  соединяем ребрами в циклы (порядок соединения не важен). Напомним, что, по предположению, в каждом столбце матрицы  $A$  содержится не менее трех ненулевых элементов. Всего образуется  $n$  таких циклов. Вершины множества  $W$  тоже соединяем циклом. Добавляем в граф  $G'$  ребра  $(w_i, u_i)$  и ребра  $(u_i, t_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Как уже было сказано ранее, построенный подграф  $G'$  определяет некоторую опорную гиперплоскость к многограннику кубических подграфов. Рассмотрим еще одну опорную гиперплоскость, положив степени вершин множества  $W$  равными трем. Пересечение обеих указанных гиперплоскостей с многогранником кубических подграфов и будет искомой гранью. Нетрудно проверить, что множество ее вершин аффинно эквивалентно множеству вершин многогранника соответствующей задачи о двойном покрытии.

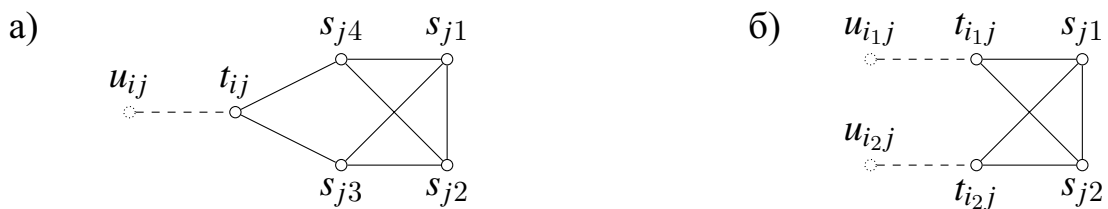


Рис. 4.3. Циклы с «одной» и «двумя» вершинами.

Остается рассмотреть тот случай, когда (некоторые) столбцы матрицы  $A$  содержат одну или две единицы. Сложность здесь состоит лишь в том, чтобы соединить соответствующие одну или две вершины множества  $T$  в цикл. Чтобы сделать цикл «с одной вершиной», добавим в  $T$  четыре вспомогательные:  $s_{j1}$ ,

$s_{j2}, s_{j3}, s_{j4}$ . Для цикла «с двумя вершинами» добавим в множество  $T$  две:  $s_{j1}, s_{j2}$ . Соединим их так, как показано на рис. 4.3.

Очевидно, что это не внесет существенных изменений в общую конструкцию, а число вершин увеличится на  $4s + 2t$ , где  $s$  — число столбцов матрицы  $A$ , содержащих лишь одну единицу,  $t$  — число столбцов с двумя единицами. ■

### 4.3. Многогранники линейных порядков и деревьев Штейнера в графе

#### 4.3.1. Многогранники линейных порядков

Пусть  $D = (V, A)$  — орграф,  $V = [m]$ . Предполагается, что орграф  $D$  полный, то есть  $(i, j) \in A$  и  $(j, i) \in A$  для всех  $i, j \in V, i \neq j$ . Транзитивный турнир (точнее, множество его дуг) в орграфе  $D$  будем называть *линейным порядком* (см. определение в разделе 1.1.3 на с. 19). Каждый линейный порядок  $L$  в  $D$  соответствует некоторой перестановке  $\pi: [n] \rightarrow [n]$ , удовлетворяющей условию

$$\pi(i) < \pi(j) \iff (i, j) \in L. \quad (4.11)$$

Координаты  $y_{ij}, 1 \leq i < j \leq m$  характеристического вектора  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m(m-1)/2}$  для линейного порядка  $L$  в  $D$  определим следующим образом:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } (i, j) \in L, \\ 0 & \text{если } (j, i) \in L. \end{cases}$$

Обозначим через  $P_{LO}(m)$  множество всех характеристических векторов линейных порядков в  $D$ . Выпуклая оболочка  $P_{LO}(m)$  называется *многогранником линейных порядков*.  $P_{LO}(m)$  может быть также определен как множество 0/1-векторов  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{m(m-1)/2}$ , удовлетворяющих 3-контурным неравенствам (см., например, [108]):

$$0 \leq y_{ij} + y_{jk} - y_{ik} \leq 1, \quad i < j < k. \quad (4.12)$$

Тема исследования этого многогранника довольно популярна и насчитывает несколько десятков публикаций (см., например, [21, 87], а также ссылки в них).

**Утверждение 4.20.** *Для каждого  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 3$ , существует матрица  $B \in \{0, 1\}^{r \times t}$ ,  $r = \binom{m}{3} + \binom{m}{2}$ ,  $t = \binom{m}{3} + m(m-1) + 2$ , имеющая ровно четыре единицы в каждой строке и такая, что  $P_{\text{LO}}(m) \leq_A P_{2\text{cover}}(B)$ .*

**Доказательство.** В дополнение к переменным  $y_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , из описания многогранника  $P_{\text{LO}}(m)$ , введем две переменные  $z$  и  $h$ . Для каждой  $y_{ij}$  введем дополнительную переменную  $\bar{y}_{ij}$  и уравнение

$$y_{ij} + \bar{y}_{ij} + z + h = 2. \quad (4.13)$$

А каждое 3-контурное неравенство (4.12) заменим уравнением

$$y_{ij} + y_{jk} + \bar{y}_{ik} + t_{ijk} = 2, \quad (4.14)$$

где  $t_{ijk}$  — еще одна (для каждого 3-контурного неравенства) дополнительная переменная. С одной стороны, система из  $\binom{m}{2} + \binom{m}{3}$  уравнений (4.13) и (4.14) определяет некоторый многогранник двойных покрытий. С другой стороны, в пересечении опорных гиперплоскостей  $z = 0$  и  $h = 1$  находится грань этого многогранника, аффинно эквивалентная  $P_{\text{LO}}(m)$ . ■

В этой связи заметим, что многогранники двойных покрытий (во всяком случае, некоторые из них) едва ли могут быть гранями  $P_{\text{LO}}(m)$ , так как критерий смежности вершин последних полиномиален [184].

Покажем, что  $P_{\text{LO}}(2n)$  содержит в качестве грани булев квадратичный многогранник  $P_{\text{BQP}}(n)$ .

**Теорема 4.21 ([36]).**  $P_{\text{BQP}}(n) \leq_A P_{\text{LO}}(2n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{y} = (y_{ij}) \in P_{\text{LO}}(2n)$ . Воспользуемся тем, что неравенства  $y_{ij} \geq 0$ , при  $1 \leq i < j \leq 2n$ , и 3-контурные неравенства (4.12) выполнены

для всех  $\mathbf{y} \in P_{\text{LO}}(2n)$ , а соответствующие равенства определяют (некоторые) опорные гиперплоскости для многогранника  $P_{\text{LO}}(2n)$ .

Покажем, что многогранник  $P_{\text{BQP}}(n)$  аффинно эквивалентен грани  $F \subset P_{\text{LO}}(2n)$ , задаваемой следующими ограничениями:

$$y_{2i,2j-1} = 0, \quad (4.15)$$

$$y_{2i-1,2i} + y_{2i,2j} - y_{2i-1,2j} = 0, \quad (4.16)$$

$$y_{2i-1,2j-1} + y_{2j-1,2j} - y_{2i-1,2j} = 0, \quad (4.17)$$

для всех  $1 \leq i < j \leq n$ .

Из (4.16) и (4.17) выводим

$$y_{2i-1,2j} = y_{2i-1,2i} + y_{2i,2j}, \quad (4.18)$$

$$y_{2i-1,2j-1} = y_{2i-1,2i} + y_{2i,2j} - y_{2j-1,2j}. \quad (4.19)$$

Таким образом, все координаты вектора  $\mathbf{y} \in F$  линейно зависят от координат  $y_{2i-1,2i}$ ,  $i \in [n]$ , и  $y_{2i,2j}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ .

Покажем, что значения координаты  $y_{2i,2j}$  однозначно определяются значениями координат  $y_{2i-1,2i}$  и  $y_{2j-1,2j}$ . Из (4.18) и  $y_{2i-1,2j} \leq 1$  следует  $y_{2i,2j} \leq 1 - y_{2i-1,2i}$ , иными словами,

$$y_{2i-1,2i} = 1 \Rightarrow y_{2i,2j} = 0.$$

Из 3-контурного неравенства  $0 \leq y_{2i,2j-1} + y_{2j-1,2j} - y_{2i,2j}$  и уравнения (4.15) следует  $y_{2i,2j} \leq y_{2j-1,2j}$ , то есть

$$y_{2j-1,2j} = 0 \Rightarrow y_{2i,2j} = 0.$$

А из (4.19) и  $y_{2i-1,2j-1} \geq 0$  следует  $y_{2i,2j} \geq y_{2j-1,2j} - y_{2i-1,2i}$ , то есть

$$y_{2i,2j} = 1, \quad \text{если } y_{2i-1,2i} = 0 \text{ и } y_{2j-1,2j} = 1.$$

Таким образом, учитывая, что вектор  $\mathbf{y} \in F$  является 0/1-вектором,

$$y_{2i,2j} = y_{2j-1,2j}(1 - y_{2i-1,2i}). \quad (4.20)$$

Итак, все вершины грани  $F$  должны быть 0/1-векторами, удовлетворяющими соотношению (4.20), и все координаты этих векторов линейно зависят от  $y_{2i-1,2i}$ ,  $i \in [n]$ , и  $y_{2i,2j}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  (см. уравнения (4.15), (4.18) и (4.19)). Покажем теперь, что каждому набору значений переменных  $y_{2i-1,2i}$ ,  $i \in [n]$ , на самом деле соответствует некоторая вершина грани  $F$ .

Пусть

$$I_0 = \{i \in [n] \mid y_{2i-1,2i} = 0\}, \quad I_1 = \{i \in [n] \mid y_{2i-1,2i} = 1\}.$$

Далее предполагаем, что элементы множеств  $I_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$  и  $I_1 = \{i'_1, \dots, i'_{n-k}\}$  отсортированы *по убыванию*. Линейный порядок для соответствующей вершины  $\mathbf{y} \in F$  представим перестановкой  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  (см. условие (4.11)). Положим

$$\begin{aligned} \pi(2i_s - 1) &= n - k + 2s, & \pi(2i_s) &= \pi(2i_s - 1) - 1, & s &\in [k], \\ \pi(2i'_t - 1) &= t, & \pi(2i'_t) &= n + k + t, & t &\in [n - k]. \end{aligned}$$

Так, например, в случае  $n = 3$  вершины грани  $F \subset P_{\text{LO}}(6)$  соответствуют восьми перестановкам (записанным в виде  $\pi^{-1}(1) \dots \pi^{-1}(6)$ , то есть если цифра  $i$  располагается в этой последовательности левее  $j$ , то  $y_{ij} = 1$ )

$$\begin{array}{llll} 654321, & k = 3, & I_0 = \{3, 2, 1\}, & I_1 = \emptyset, \\ 165432, & k = 2, & I_0 = \{3, 2\}, & I_1 = \{1\}, \\ 365214, & k = 2, & I_0 = \{3, 1\}, & I_1 = \{2\}, \\ 543216, & k = 2, & I_0 = \{2, 1\}, & I_1 = \{3\}, \\ 316542, & k = 1, & I_0 = \{3\}, & I_1 = \{2, 1\}, \\ 514362, & k = 1, & I_0 = \{2\}, & I_1 = \{3, 1\}, \\ 532164, & k = 1, & I_0 = \{1\}, & I_1 = \{3, 2\}, \\ 531642, & k = 0, & I_0 = \emptyset, & I_1 = \{3, 2, 1\}. \end{array}$$

Из описания перестановки  $\pi$  следует, что  $y_{2i_s-1,2i_s} = 0$ , при  $s \in [k]$ , а  $y_{2i'_t-1,2i'_t} = 1$ , при  $t \in [n - k]$ . Справедливость соотношений (4.15)–(4.17) прове-



ряется перебором четырех случаев, в зависимости от принадлежности индексов  $i, j$  множествам  $I_0, I_1$ .

Завершая доказательство, установим между  $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in P_{\text{BQR}}(n)$  и  $\mathbf{y} \in F \subset P_{\text{LO}}(2n)$  взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{aligned} x_{ii} &= y_{2i-1, 2i}, & i &\in [n], \\ x_{ij} &= y_{2j-1, 2j} - y_{2i, 2j}, & 1 \leq i < j \leq [n]. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

#### 4.3.2. Многогранники деревьев Штейнера

Пусть  $G = (V, E)$  — реберно-взвешенный граф, а  $T$  — некоторое подмножество его вершин. *Деревом Штейнера на  $T$*  называется подграф  $G' = (V', E')$ ,  $T \subseteq V'$ , графа  $G$ , являющийся деревом. Задача Штейнера (в графе) заключается в отыскании дерева Штейнера с минимальным суммарным весом ребер. *Многогранником деревьев Штейнера* называется выпуклая оболочка множества  $P_{\text{Steiner}}(G, T) \subseteq \{0, 1\}^E$  всех характеристических векторов деревьев Штейнера на  $T$  [71].

**Теорема 4.22.** *Для любого графа  $G = (V, E)$  за линейное время можно построить граф  $G' = (V', E')$ ,  $|V'| = |V| + |E| + 1$ ,  $|E'| = 4|E| + |V|$ , и указать множество  $T \subset V'$  такие, что  $P_{\text{stab}}(G) \leq_A P_{\text{Steiner}}(G', T)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $G = ([n], E)$  — граф, определяющий многогранник  $P_{\text{stab}}(G)$ . Положим

$$T = \{v'_0\} \cup \{t_{ij} \mid i < j, \{i, j\} \in E\}$$

и определим множество вершин и ребер графа  $G' = (V', E')$  следующим образом:

$$V' = T \cup \{v'_1, \dots, v'_n\} \cup \{v'_{ij} \mid i < j, \{i, j\} \in E\},$$

$$E' = \{\{v'_0, v'\} \mid v' \in V' \setminus T\} \cup \{\{v'_{ij}, t_{ij}\}\} \cup \{\{v'_k, t_{ij}\} \mid k \in \{i, j\}\}.$$

Таким образом, каждая вершина  $t_{ij}$  инцидентна ровно трем ребрам

$$\{v', t_{ij}\}, \quad v' \in V_{ij} = \{v'_{ij}, v'_i, v'_j\}.$$

Причем как минимум одно из них должно входить в дерево Штейнера на  $T$ .

Следовательно, неравенство

$$x_{\{v'_{ij}, t_{ij}\}} + x_{\{v'_i, t_{ij}\}} + x_{\{v'_j, t_{ij}\}} \geq 1$$

выполнено для каждого  $x \in P_{\text{Steiner}}(G', T) \subset \{0, 1\}^{E'}$ . Полагая

$$x_{\{v'_{ij}, t_{ij}\}} + x_{\{v'_i, t_{ij}\}} + x_{\{v'_j, t_{ij}\}} = 1, \quad (4.21)$$

перейдем к рассмотрению соответствующей грани многогранника деревьев Штейнера.

Предположим, что некоторое ребро  $\{v', t_{ij}\}$ ,  $v' \in V_{ij}$  входит в дерево Штейнера на  $T$ . Тогда, в силу того, что  $t_{ij}$  и  $v'_0$  должны быть связаны, а степени всех вершин из  $T \setminus \{v'_0\}$  равны единице, приходим к выводу, что ребро  $\{v', v'_0\}$  обязано присутствовать в этом дереве. Другими словами,  $x_{\{v'_0, v'\}} \geq x_{\{v', t_{ij}\}}$ ,  $v' \in V_{ij}$ . Очевидно, ограничения

$$x_{\{v'_0, v'\}} = x_{\{v', t_{ij}\}}, \quad v' \in V_{ij},$$

вместе с (4.21) определяют некоторую грань многогранника  $P_{\text{Steiner}}(G', T)$ . Таким образом, все координаты вектора  $x$ , принадлежащего множеству вершин этой грани, выражаются линейно через координаты  $x_{\{v'_0, v'\}}$ ,  $v' \in V' \setminus T$ . Кроме того, для них выполняются ограничения

$$x_{\{v'_0, v'_{ij}\}} + x_{\{v'_0, v'_i\}} + x_{\{v'_0, v'_j\}} = 1.$$

То есть координаты  $x_{\{v'_0, v'_{ij}\}}$  линейно зависят от  $x_{\{v'_0, v'_i\}}$  и  $x_{\{v'_0, v'_j\}}$ , и последнее уравнение эквивалентно ограничению

$$x_{\{v'_0, v'_i\}} + x_{\{v'_0, v'_j\}} \leq 1.$$

Таким образом, описанная грань многогранника  $P_{\text{Steiner}}(G', T)$  оказывается аффинно эквивалентна многограннику  $P_{\text{stab}}(G)$ , если положить  $y_i = x_{\{v'_0, v'_i\}}$  для  $y \in P_{\text{stab}}(G)$ . ■

## 4.4. Многогранники с простым критерием смежности вершин

### 4.4.1. Многогранник трехиндексной задачи о назначениях

Пусть  $S$  — конечное множество. Координаты вектора  $x \in \mathbb{R}^{S \times S \times S}$  будем обозначать  $x(s, t, u)$ , где  $s, t, u \in S$ . Трехиндексная аксиальная задача о назначениях (или 3-сочетаниях) может быть сформулирована как следующая задача 0/1-программирования:

$$\sum_{s \in S} \sum_{t \in S} \sum_{u \in S} c(s, t, u) \cdot x(s, t, u) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{t \in S} x(s, t, u) = 1 \quad \forall u \in S, \quad (4.22)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{u \in S} x(s, t, u) = 1 \quad \forall t \in S, \quad (4.23)$$

$$\sum_{t \in S} \sum_{u \in S} x(s, t, u) = 1 \quad \forall s \in S, \quad (4.24)$$

$$x(s, t, u) \in \{0, 1\} \quad \forall s, t, u \in S, \quad (4.25)$$

где  $c(s, t, u) \in \mathbb{Z}$  — координаты целевого вектора. Через  $P_{3-A}(m)$ ,  $m = |S|$ , обозначим множество всех векторов  $x \in \mathbb{R}^{S \times S \times S}$ , удовлетворяющих ограничениям (4.22)–(4.25). Выпуклая оболочка множества  $P_{3-A}(m)$  называется *многогранником трехиндексной аксиальной задачи о назначениях*. Далее, в целях экономии места, мы будем опускать слово «аксиальной».

По-видимому, первыми работами, посвященными изучению свойств этого многогранника, являются [91] и [50]. Более свежий обзор имеется в [159]. В работах Кравцова (см. [22] и ссылки в ней) изучаются свойства нецелочисленных вершин релаксаций этого многогранника.

Очевидно,  $P_{3-A}(m)$  является частным случаем  $P_{\text{part}}(A)$ :

$$P_{3-A}(m) =_A P_{\text{part}}(A), \quad (4.26)$$

где  $A$  —  $(3m \times m^3)$ -матрица, образованная коэффициентами левых частей уравнений (4.22)–(4.24). Таким образом, семейство многогранников трехиндексной задачи о назначениях аффинно сводится к многогранникам разбиений:

$$P_{3-A} \propto_A P_{\text{part}}.$$

Пользуясь стандартным алгоритмом сведения задачи 3-выполнимости к задаче 3-сочетаний [16], Авис и Тивари [48] показали, что многогранник задачи 3-выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$ ,  $|c| = 3$ ,  $c \in C$ , является проекцией грани многогранника  $P_{3-A}(m)$ , где  $m = O(kn)$ ,  $k = |U|$ ,  $n = |C|$ . Однако, из (4.26) и теоремы 3.6 об эквивалентности  $P_{\text{stab}}$  и  $P_{\text{part}}$  следует, что  $P_{3-A} \propto_A P_{\text{stab}}$ . С другой стороны, так как семейство  $P_{2\text{cover}}$  аффинно сводится к многогранникам задачи 3-выполнимости (теорема 4.12), а  $P_{\text{stab}}$  не может быть сведено к  $P_{2\text{cover}}$  (теорема 4.5), то аффинное сведение многогранников задачи 3-выполнимости к  $P_{3-A}$  невозможно.

Покажем, что  $P_{\text{stab}} \propto_A P_{3-A}$ . Таким образом,  $P_{3-A}$  окажется в одном классе эквивалентности вместе с  $P_{\text{stab}}$ ,  $P_{\text{part}}$  и  $P_{\text{pack}}$ .

Для графа  $G(V, E)$  в определении многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$  через

$$V_{\text{isol}} = \{v \in V \mid v \notin e \ \forall e \in E\},$$

обозначим множество изолированных вершин.

**Теорема 4.23 ([136]).**  $P_{\text{stab}}(G) \leq P_{3-A}(m)$  при  $m = 3|E| + 2|V_{\text{isol}}|$ .

**Доказательство.** Множество  $S$  в определении  $P_{3-A}(m)$  составим из трех типов элементов:

1.  $v$  и  $\bar{v}$  для каждой изолированной вершины  $v \in V_{\text{isol}}$ .
2.  $e$  для каждого ребра  $e \in E$ .

3.  $(e, v)$  для каждого  $e \in E$  и  $v \in e$ .

Построим множество троек  $Q \subset S \times S \times S$  так, чтобы грань

$$F = \{x \in P_{3-A}(m) \mid x(q) = 0 \ \forall q \notin Q\}$$

многогранника  $P_{3-A}(m)$  была аффинно эквивалентна многограннику  $P_{\text{stab}}(G)$ .

Для каждого  $v \in V_{\text{isol}}$  множество  $Q$  будет содержать четыре тройки:

$$(v, v, v), \quad (\bar{v}, \bar{v}, \bar{v}), \quad (v, v, \bar{v}), \quad (\bar{v}, \bar{v}, v).$$

Других троек, содержащих  $v$  или  $\bar{v}$  в  $Q$  нет. Следовательно, если  $x \in F$ , то для каждого  $v \in V_{\text{isol}}$  возможны только две альтернативы:

$$x(v, v, v) = x(\bar{v}, \bar{v}, \bar{v}) = 1 \quad \text{или} \quad x(v, v, \bar{v}) = x(\bar{v}, \bar{v}, v) = 1.$$

Рассмотрим теперь элементы  $e$  и  $(e, v)$  множества  $S$ , где  $e \in E$  и  $v \in e$ . Для каждой неизолированной вершины  $v \in V \setminus V_{\text{isol}}$  рассмотрим множество инцидентных ей ребер  $E(v) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\}$ , где  $p = d_G(v)$  — степень вершины  $v$ . Множество троек  $Q$  содержит

1.  $(e, e, e)$  для каждого  $e \in E$ .
2.  $((e, v), (e, v), (e, v))$  для всех  $e \in E$  и  $v \in e$ .
3.  $(e, e, (e, v))$  для всех  $e \in E$  и  $v \in e$ .
4.  $((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q})$  для каждой неизолированной вершины  $v$  и каждого  $e_{i_q} \in E(v)$ , где сложение  $q + 1$  выполняется по модулю  $p$ .

Полагая  $x(u, v, w) = 0$  для всех остальных троек  $(u, v, w) \notin Q$ , перейдем к рассмотрению соответствующей грани многогранника  $P_{3-A}(m)$ . Перечислим некоторые свойства её вершин.

Заметим, что для каждого  $(e, v) \in S$  множество  $Q$  содержит в точности две тройки с элементом  $(e, v)$  в третьей компоненте:  $((e, v), (e, v), (e, v))$  и  $(e, e, (e, v))$ .

Следовательно, уравнение (4.22) для  $u = (e, v)$  принимает вид

$$x((e, v), (e, v), (e, v)) + x(e, e, (e, v)) = 1. \quad (4.27)$$

То есть,  $x((e, v), (e, v), (e, v))$  выражается линейно через  $x(e, e, (e, v))$ .

Заметим также, что для каждого  $e \in S$  множество  $Q$  содержит ровно три тройки с элементом  $e$  в первой компоненте:  $(e, e, e)$ ,  $(e, e, (e, v_1))$  и  $(e, e, (e, v_2))$ , где  $e = \{v_1, v_2\}$ . Следовательно, уравнение (4.24) при  $s = e$  эквивалентно

$$x(e, e, e) + x(e, e, (e, v_1)) + x(e, e, (e, v_2)) = 1.$$

То есть  $x(e, e, e) = 1 - x(e, e, (e, v_1)) - x(e, e, (e, v_2))$  и

$$x(e, e, (e, v_1)) + x(e, e, (e, v_2)) \leq 1. \quad (4.28)$$

Рассуждая по аналогии, получаем следующее уравнение

$$x((e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v)) + x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1$$

для каждой неизолированной  $v$  и каждого  $e_{i_q} \in E(v)$ , где сложение  $q + 1$  выполняется по модулю  $p = d_G(v)$ . Вместе с уравнением (4.27) получаем

$$x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1 - x((e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v)) = x(e_{i_q}, e_{i_q}, (e_{i_q}, v)). \quad (4.29)$$

Кроме того, так как

$$x((e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v)) + x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1,$$

то

$$x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1 - x((e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v)) = x(e_{i_{q+1}}, e_{i_{q+1}}, (e_{i_{q+1}}, v)). \quad (4.30)$$

Так как левые части формул (4.29) и (4.30) совпадают, то

$$x(e_{i_{q+1}}, e_{i_{q+1}}, (e_{i_{q+1}}, v)) = x(e_{i_q}, e_{i_q}, (e_{i_q}, v)).$$

Значит  $x(e, e, (e, v)) = x(e', e', (e', v))$  для любых двух ребер  $e$  и  $e'$ ,  $v \in e$ ,  $v \in e'$ .

Таким образом, для вершин описанной грани  $F$  все переменные  $x(s, t, u)$  выражаются линейно через  $x(e, e, (e, v))$ , а неравенство (4.28) является неравенством вида  $y_i + y_j \leq 1$  из описания многогранника  $P_{\text{stab}}(G)$ . ■

**Замечание 4.1.** Полученные результаты могут быть легко обобщены на случай  $p$ -индексной задачи о назначениях ( $p > 3$ ). По аналогии, вершины  $P_{p-A}(m)$  многогранника  $p$ -индексной аксиальной задачи о назначениях являются 0/1-векторами в  $\mathbb{R}^{m^p}$ . Координаты  $x_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ,  $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, p\}$ , каждого такого вектора удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i_2, i_3, \dots, i_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= 1 \quad \forall i_1 \in \{1, \dots, p\}, \\ \sum_{i_1, i_3, i_4, \dots, i_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= 1 \quad \forall i_2 \in \{1, \dots, p\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= 1 \quad \forall i_p \in \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$P_{p-A}(m) \leq_A P_{\text{part}}(A),$$

для некоторой (просто определяемой) матрицы  $A \in \{0, 1\}^{pm \times m^p}$ . С другой стороны, уравнения

$$x_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0 \quad \forall i_p \neq i_{p-1}$$

определяют грань многогранника  $P_{p-A}(m)$ , аффинно эквивалентную  $P_{(p-1)-A}(m)$ . Таким образом, по теореме 4.23,

$$P_{\text{stab}}(G) \leq_A P_{p-A}(m) \quad \text{при } m = 3|E| + 2|V_{\text{isol}}| \leq 3|V|(|V| - 1)/2.$$

#### 4.4.2. Многогранники квадратичной задачи линейных упорядочиваний и квадратичной задачи о назначениях

Выше, в разделе 4.3.1, был определен многогранник линейных порядков  $P_{\text{LO}}(m)$ . Многогранник квадратичной задачи линейного упорядочивания являет-

ся в некотором смысле его усложнением.

Пусть

$$I = \{(i, j, k, l) \mid i < j, k < l, \text{ и } (i, j) < (k, l)\},$$

где  $(i, j) < (k, l)$  означает либо  $i < k$ , либо  $i = k$  и  $j < l$ . Для каждой пары различных переменных  $y_{ij}$  и  $y_{kl}$  вводится новая переменная

$$z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}, \quad (i, j, k, l) \in I. \quad (4.31)$$

Обозначим через  $P_{\text{QLO}}(m)$  множество всех векторов  $\mathbf{z} \in \{0, 1\}^d$ ,  $d = \binom{m}{2} (\binom{m}{2} + 1) / 2$ , с координатами  $y_{ij}$  и  $z_{ijkl}$ , удовлетворяющих ограничениям (4.12) и (4.31). Выпуклая оболочка множества  $P_{\text{QLO}}(m)$  называется *многогранником квадратичной задачи линейного упорядочивания* [65].

**Теорема 4.24 (Бучхейм, Вигеле и Женг [65]).**  $P_{\text{QLO}}(m) \leq_A P_{\text{BQP}}(n)$  при  $n = \binom{m}{2}$ .

Бучхейм, Вигеле и Женг [65] используют этот факт в алгоритме ветвей и отсечений для решения квадратичной задачи линейного упорядочивания.

Покажем, что аффинное сведение в обратную сторону также возможно.

**Теорема 4.25 ([136]).**  $P_{\text{BQP}}(n) \leq_A P_{\text{QLO}}(m)$  при  $m = 2n$ .

**Доказательство.** Идея доказательства проста. Покажем, что среди граней  $P_{\text{LO}}(m)$  есть  $n$ -мерный куб. При переходе от  $P_{\text{LO}}(m)$  к  $P_{\text{QLO}}(m)$  этот куб преобразуется в булев квадратичный многогранник.

Воспользуемся тем, что равенства  $y_{ij} = 0$  и  $y_{ij} = 1$  определяют опорные гиперплоскости для  $P_{\text{LO}}(m)$  и  $P_{\text{QLO}}(m)$ . Пусть

$$J = \{(2i - 1, 2i) \mid i \in [n]\}.$$

Положим

$$y_{ij} = 0 \quad \text{для всех } (i, j) \notin J, \quad 1 \leq i < j \leq m. \quad (4.32)$$

Незафиксированными остаются только переменные  $y_{ij}$ , где  $i$  нечетно и  $j = i + 1$ . Обратим внимание на 3-контурные неравенства (4.12). Предполагая  $i < j < k$ , имеем два случая:



1. Если  $(i, j) \notin J$ , то  $y_{ij} = y_{ik} = 0$ . Тогда неравенство (4.12) преобразуется в  $0 \leq y_{jk} \leq 1$ .
2. Если  $(i, j) \in J$ , то  $i$  нечетно,  $j = i + 1$  четно и  $k > i + 1$ . Следовательно, неравенство (4.12) эквивалентно  $0 \leq y_{ij} \leq 1$ .

Таким образом,  $n$  переменных  $y_{ii+1}$ , где  $i$  четно, могут принимать значения 0 или 1 независимо друг от друга. Следовательно, гиперплоскости (4.32) определяют грань  $P_{LO}(m)$ , являющуюся  $n$ -мерным кубом.

Обратим внимание на переменные  $z_{ijkl}$ ,  $(i, j, k, l) \in I$ . Если  $(i, j) \notin J$  или  $(k, l) \notin J$ , то  $z_{ijkl} = 0$ . В случае  $(i, j) \in J$  и  $(k, l) \in J$  имеем  $z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}$ , и, кроме того,  $y_{ij}$  и  $y_{kl}$  не связаны никакими другими зависимостями.

Таким образом, описанная грань  $P_{QLO}(m)$  и многогранник  $P_{BQR}(n)$  связаны следующим аффинным невырожденным отображением:

$$x_{ii} = y_{2i-1, 2i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$x_{ij} = z_{2i-1, 2i, 2j-1, 2j} = y_{2i-1, 2i} \cdot y_{2j-1, 2j}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

где  $\mathbf{y} \in P_{QLO}(m)$ ,  $\mathbf{x} \in P_{BQR}(n)$ . ■

Для многогранника квадратичной задачи о назначениях история повторяется почти дословно.

Множество вершин  $P_{Birk}(m)$  многогранника задачи о назначениях (многогранника Биркгофа) состоит из векторов  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{m \times m}$ , удовлетворяющих условиям

$$\sum_j y_{ij} = 1, \quad \forall i \in [m], \tag{4.33}$$

$$\sum_i y_{ij} = 1, \quad \forall j \in [m]. \tag{4.34}$$

Чтобы определить многогранник квадратичной задачи о назначениях, введем новые переменные  $z_{ijkl}$  так же, как это было сделано в (4.31):

$$z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}, \quad \text{где } (i, j) < (k, l). \tag{4.35}$$

Обозначим через  $P_{QA}(m)$  множество всех векторов  $z \in \{0, 1\}^d$ ,  $d = m^2 + \binom{m^2}{2}$ , с координатами  $y_{ij}$  и  $z_{ijkl}$ , удовлетворяющих условиям (4.33), (4.34) и (4.35). Выпуклая оболочка множества  $P_{QA}(m)$  называется *многогранником квадратичной задачи о назначениях*. В литературе также встречается описание *многогранника квадратичных полуназначений* [169]. При определении его множества вершин  $P_{QSA}(m)$  условие (4.34) опускается.

**Теорема 4.26 ([116, 162, 169]).**  $P_{QA}(m) \leq_A P_{QSA}(m) \leq_A P_{BQP}(n)$  при  $n = m^2$ .

Эта связь используется в [116] для вывода неравенств, допустимых для  $P_{QA}(m)$ . В частности, так как  $P_{BQP}(n)$  2-смежностен, то  $P_{QA}(m)$  тоже 2-смежностен. В [116] также показано, что многогранник линейных порядков  $P_{LO}(m)$  и многогранник коммивояжера  $P_{TSP}(m)$  являются проекциями некоторых граней многогранника  $P_{QA}(m)$ . Заметим, что аффинные сводимости  $P_{LO} \propto_A P_{QA}$  и  $P_{TSP} \propto_A P_{QA}$  невозможны, так как  $P_{LO}(m)$  не 2-смежностен при  $m \geq 3$  [184], а  $P_{TSP}(m)$  не 2-смежностен при  $m \geq 6$  [150].

**Теорема 4.27 ([136]).**  $P_{BQP}(n) \leq_A P_{QA}(m)$  для  $m = 2n$ .

**Доказательство.** По аналогии с доказательством теоремы 4.25, достаточно заметить, что многогранник Биркгофа  $P_{Birk}(2n)$  содержит грань, являющуюся  $n$ -мерным кубом. (Здесь мы используем тот же факт, что и при доказательстве теоремы 4.11.) Положим

$$S = \{(i, i) \mid i \in [2n]\} \cup \{(2i - 1, 2i) \mid i \in [n]\} \cup \{(2i, 2i - 1) \mid i \in [n]\}.$$

Тогда уравнения

$$y_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \notin S$$

определяют требуемую грань. ■

Таким образом, семейства многогранников  $P_{QLO}$ ,  $P_{QA}$  и  $P_{QSA}$  находятся в одном классе эквивалентности (в смысле  $\propto_A$ ) вместе с  $P_{BQP}$  и  $P_{cut}$ .

### 4.4.3. Многогранники раскрасок вершин графа

Одной из наиболее известных NP-полных задач является задача о раскраске вершин графа [125], сформулированная выше, на с. 37. Она имеет многочисленные приложения: от составления расписаний и распределения частот в сетях сотовой связи, до распределения ресурсов в компиляторах и автоматизации дифференцирования [66, 151]. В литературе можно найти несколько принципиально отличающихся друг от друга определений многогранников раскрасок графа. Рассмотрим несколько наиболее естественных определений, отбросив, в частности, те, где размерность многогранника экспоненциальна относительно числа вершин графа.

Далее предполагаем, что раскрашиваемый граф  $G = (V, E)$  не содержит изолированных вершин (раскраска которых тривиальна). Также исключим из рассмотрения случаи противоположного характера, когда в графе  $G$  есть вершина, смежная со всеми остальными (тогда ее цвет должен отличаться от цветов всех остальных вершин).

#### Стандартная формулировка

Для каждой раскраски графа  $G = (V, E)$  рассмотрим её характеристический вектор  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{V \times k}$ ,  $1 \leq k \leq |V|$ , координаты которого определим следующим образом:

$$x_{v,c} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ раскрашена цветом } c, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Множество всех таких векторов обозначим  $P_{\text{color1}}(G, k)$ . Нетрудно заметить, что это множество может быть описано следующим набором ограничений [84, 140]:

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leq 1, \quad \{v, u\} \in E, \quad c \in [k], \quad (4.36)$$

$$\sum_{c=1}^k x_{v,c} = 1, \quad v \in V, \quad (4.37)$$

$$x_{v,c} \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad c \in [k].$$

Здесь неравенство (4.36) запрещает окрашивать смежные вершины одним цветом, а уравнение (4.37) означает, что каждая вершина будет окрашена ровно одним цветом. Очевидно, множество  $P_{\text{color1}}(G, k)$  не пусто тогда и только тогда, когда вершины графа  $G$  могут быть раскрашены в  $k$  цветов. А минимизируя на этом множестве линейную функцию

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{v \in V, c \in [k]} x_{v,c} |V|^c$$

можно найти раскраску с наименьшим числом цветов.

**Утверждение 4.28.**  $P_{\text{stab}}(G) \leq_A P_{\text{color1}}(G, |V|)$  для любого графа  $G = (V, E)$ .

**Доказательство.** Для удобства положим  $V = [n]$ . Рассмотрим грань многогранника  $P_{\text{color1}}(G, |V|)$ , лежащую в пересечении гиперплоскостей

$$x_{v,c} = 0, \quad \text{где } v \neq c \text{ и } c \neq 1.$$

Тогда уравнения (4.37) примут вид

$$x_{v,1} + x_{v,v} = 1, \quad v \in [n],$$

А из неравенств (4.36) нетривиальными останутся лишь

$$x_{v,1} + x_{u,1} \leq 1, \quad \{v, u\} \in E.$$

Очевидно, эта грань аффинно эквивалентна многограннику  $P_{\text{stab}}(G)$ . ■

Значительное внимание в литературе (см., например, [66, 141]) уделяется следующей модификации этого многогранника. Положим  $V = [n]$  и  $k = n$ , а неравенства (4.36) заменим на

$$\begin{aligned} x_{v,c} + x_{u,c} &\leq w_c, & \{v, u\} \in E, & \quad c \in [n], \\ w_c &\in \{0, 1\}, & c &\in [n]. \end{aligned}$$

(Если переменная  $w_c$  равна нулю, то цвет  $c$  не используется.) Обозначим множество векторов  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n(n+1)}$ , удовлетворяющих этим ограничениям, через  $P_{\text{color2}}(G)$ . При таком подходе целевая функция для задачи поиска хроматического числа графа  $G$  приобретает особенно простой вид:

$$\sum_{c \in [n]} w_c \rightarrow \min.$$

Очевидно,

$$P_{\text{color1}}(G, k) \leq_A P_{\text{color2}}(G).$$

Достаточно положить  $w_c = 1$  при  $c \in [k]$  и  $w_c = 0$  при  $c > k$ .

Покажем теперь, что семейства многогранников  $P_{\text{color1}}$  и  $P_{\text{color2}}$  лежат в одном классе эквивалентности с многогранниками независимых множеств. Так как  $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{color1}} \propto_A P_{\text{color2}}$ , то остается доказать  $P_{\text{color2}} \propto_A P_{\text{stab}}$ .

**Утверждение 4.29.** *Для любого графа  $G = ([n], E)$  за линейное время можно построить  $G' = (V', E')$ ,  $|V'| = n(n+2)$ ,  $|E'| = n^2(n+1)/2 + (|E| + 1)n$ , что*

$$P_{\text{color2}}(G) \leq_A P_{\text{stab}}(G').$$

**Доказательство.** Достаточно систему ограничений

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i \in [n], \tag{4.38}$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq w_j, \quad \{i, k\} \in E, \quad j \in [n], \tag{4.39}$$

описывающую многогранник  $P_{\text{color2}}(G)$ , преобразовать в систему ограничений вида  $y_i + y_j \leq 1$ .

Заметим, прежде всего, что неравенства (4.39) эквивалентны неравенствам

$$\begin{aligned} x_{ij} &\leq w_j, & i, j &\in [n], \\ x_{ij} + x_{kj} &\leq 1, & \{i, k\} &\in E, \quad j \in [n], \end{aligned} \quad (4.40)$$

при условии целочисленности переменных.

Введем дополнительные переменные  $\bar{w}_j \in \{0, 1\}$ ,  $j \in [n]$ , и рассмотрим систему ограничений

$$\begin{aligned} x_{ij} + x_{ik} &\leq 1, & i, j, k &\in [n], \quad j < k, \\ w_j + \bar{w}_j &\leq 1, & j &\in [n], \\ x_{ij} + \bar{w}_j &\leq 1, & i, j &\in [n], \\ x_{ij} + x_{kj} &\leq 1, & \{i, k\} &\in E, \quad j \in [n]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Очевидно, она определяет многогранник  $P_{\text{stab}}(G')$  для некоторого графа  $G' = (V', E')$ , где  $|V'| = n(n+2)$ ,  $|E'| = n^2(n+1)/2 + (|E|+1)n$ . Полагая  $w_j + \bar{w}_j = 1$ , перейдем к рассмотрению некоторой грани этого многогранника. Ограничение (4.41) при этом превратится в (4.40). Остается заметить, что равенство (4.38) определяет грань этой грани, аффинно эквивалентную многограннику  $P_{\text{color2}}(G)$ . ■

**Замечание 4.2.** На основе той же идеи в [84] показано, что  $P_{\text{color1}} \propto_A P_{\text{stab}}$ . Там же этот факт используется для вывода нового семейства допустимых неравенств для многогранников семейства  $P_{\text{color1}}$ .

### Формулировка с представителями

Пусть  $G = (V, E)$  — раскрашиваемый граф и  $V = [n]$ . Введем обозначение  $\bar{E} = \{\{i, j\} \subset V \mid \{i, j\} \notin E\}$ . Для  $i \in V$  определим  $\bar{N}(i) = \{j \in V \mid \{i, j\} \in \bar{E}\}$ . Для произвольного  $U \subseteq V$  через  $E(U)$  обозначаем множество ребер графа  $G$ , оба конца которых лежат в  $U$ , а через  $G[U] = (U, E[U])$  — подграф графа  $G$ , индуцированный множеством  $U$ .

Каждой вершине  $i \in [n]$  графа  $G$  поставим в соответствие координату  $x_{ii}$ , а каждой паре вершин  $\{i, j\} \in \bar{E}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , — координату  $x_{ij}$  0/1-вектора  $\mathbf{x}$ . Значения этих переменных имеют следующий смысл. Для произвольной раскраски графа  $G$  переменная  $x_{ii}$  равна единице, если вершина  $i$  имеет наименьший номер среди всех вершин, окрашенных тем же цветом, то есть эта вершина является их *представителем*. А  $x_{ij} = 1$ , если  $i$  и  $j$  окрашены в один цвет и  $i$  является представителем для  $j$ .

В [67] в качестве многогранника раскрасок вершин графа  $G$  предлагается рассмотреть выпуклую оболочку множества 0/1-векторов  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющих ограничениям

$$x_{ii} + \sum_{j < i, j \in \bar{N}(i)}^n x_{ji} = 1, \quad i \in [n], \quad (4.42)$$

$$x_{ij} + x_{ik} \leq x_{ii}, \quad \{j, k\} \in E(\bar{N}(i)), \quad i < j < k, \quad (4.43)$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \quad \text{если } j \text{ изолирована в } G[\bar{N}(i)], i < j. \quad (4.44)$$

Первое ограничение гарантирует, что каждая вершина либо сама является представителем, либо представлена вершиной с меньшим номером. Второе ограничение запрещает смежным вершинам иметь общего представителя. Обозначим множество всех таких векторов  $\mathbf{x}$  через  $P_{\text{color3}}(G)$ . Тогда минимум суммы

$$\sum_{i \in [n]} x_{ii} \quad (4.45)$$

по всем  $\mathbf{x} \in P_{\text{color3}}(G)$  совпадает с хроматическим числом графа  $G$ .

Учитывая целочисленность переменных, ограничения (4.43) и (4.44) можно заменить следующими:

$$x_{ij} + x_{ik} \leq 1, \quad \{j, k\} \in E(\bar{N}(i)), \quad i < j < k, \quad (4.46)$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \quad j \in \bar{N}(i), \quad i < j. \quad (4.47)$$

Заметим, что описание многогранника  $P_{\text{color3}}(G)$  очень похоже на описание многогранника  $P_{\text{color2}}(G)$ . Поэтому следующий факт доказывается точно также, как и утверждение 4.29.

**Утверждение 4.30.** Для любого графа  $G = ([n], E)$  за линейное время можно построить  $G' = (V', E')$ ,  $|V'| = 2n + |\bar{E}|$ ,  $|E'| = O(n^3)$ , что

$$P_{\text{color3}}(G) \leq_A P_{\text{stab}}(G').$$

Покажем теперь, что  $P_{\text{stab}} \propto_A P_{\text{color3}}$ .

**Утверждение 4.31.**  $P_{\text{stab}}(G) \leq_A P_{\text{color3}}(G')$  для любого графа  $G = ([n], E)$  и  $G' = ([n] \cup \{0\}, E)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим многогранник  $P_{\text{color3}}(G')$ , где  $G' = (V', E)$  и  $V' = \{0, 1, \dots, n\}$ . По аналогии с доказательством утверждения 4.28, положим  $x_{ij} = 0$  для всех  $0 < i < j$ ,  $\{i, j\} \in \bar{E}$  и перейдем к рассмотрению соответствующей грани многогранника  $P_{\text{color3}}(G')$ . Для остальных координат будут выполнены ограничения

$$\begin{aligned} x_{00} &= 1, \\ x_{ii} + x_{0i} &= 1, \quad i \in [n], \\ x_{0i} + x_{0j} &\leq 1, \quad \{i, j\} \in E, \quad i < j. \end{aligned}$$

Таким образом, описанная грань аффинно эквивалентна многограннику  $P_{\text{stab}}(G)$ . ■

В [79, 151] фактически предложена модификация многогранника  $P_{\text{color3}}(G)$ , получаемая за счет удаления лишних переменных (см. уравнения (4.42))

$$x_{ii} = 1 - \sum_{j < i, j \in \bar{N}(i)}^n x_{ji}, \quad i \in [n].$$

При этом уравнения (4.42) заменяются неравенствами

$$x_{ji} + x_{ki} \leq 1, \quad j, k \in \bar{N}(i), \quad j < k < i,$$

неравенства (4.46) сохраняются в неизменном виде, неравенства (4.47) преобразуются в

$$x_{ij} + x_{ki} \leq 1, \quad j, k \in \bar{N}(i), \quad k < i < j,$$



а целевая функция (4.45) принимает вид

$$n - \sum_{\{i,j\} \in \bar{E}, i < j} x_{ij}.$$

(Особого рассмотрения требует легко идентифицируемая ситуация, когда граф  $G$  содержит пару вершин  $i$  и  $j$ , не смежных между собой, но смежных со всеми остальными вершинами. В этом случае следует положить  $x_{ij} = 1$ .) Очевидно, эта модификация является многогранником независимых множеств  $P_{\text{stab}}(H)$ , где граф  $H$  имеет  $|\bar{E}|$  вершин, а его ребра определяются описанными выше неравенствами.

Таким образом, все рассмотренные выше семейства многогранников раскрасок графа эквивалентны (в смысле аффинной сводимости) семейству многогранников независимых множеств.

## 4.5. Многогранники задачи коммивояжера

### 4.5.1. Многогранники классической задачи

Пусть  $G = ([m], E)$  — полный граф. Для каждого гамильтонова цикла  $H \subseteq E$  в этом графе рассмотрим его характеристический вектор  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^E$  с координатами

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } \{i, j\} \text{ входит в } H, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выше, на с. 46 многогранник гамильтоновых циклов (многогранник симметричной задачи коммивояжера) был определен как выпуклая оболочка множества  $P_{\text{TSP}}(m)$  всех таких векторов. Таким же образом определен и многогранник гамильтоновых контуров (многогранник асимметричной задачи коммивояжера), представляющий собой выпуклую оболочку множества всех характеристических векторов  $P_{\text{ATSP}}(n) \subset \{0, 1\}^A$  гамильтоновых контуров в полном орграфе  $D = ([n], A)$ .

О сходстве многогранников  $P_{\text{TSP}}$  и  $P_{\text{ATSP}}$  было известно и раньше (см., например, [10, 114]), здесь этот факт лишь приобретает новый вид.

**Лемма 4.32.**  $P_{\text{ATSP}}(n) \leq_A P_{\text{TSP}}(m)$  для  $m = 2n$ .

**Доказательство.** Пусть  $m = 2n$ . Воспользуемся тем, что гиперплоскости вида  $y_{ij} = 0$  и  $y_{ij} = 1$  являются опорными для многогранника  $P_{\text{TSP}}(m)$ . Кроме того, гиперплоскости  $y_{ij} = 0$  и  $y_{ij} = 1$  разбивают множество вершин многогранника  $P_{\text{TSP}}(m)$  на два подмножества, соответствующие гамильтоновым циклам, содержащим или же не содержащим ребро  $\{i, j\}$ . Этой особенностью воспользуемся, чтобы определить грань, аффинно эквивалентную многограннику  $P_{\text{ATSP}}(n)$ .

Разобьем множество вершин  $[m]$  на два равномоощных подмножества  $T = \{1, 2, \dots, n\}$  и  $U = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ . Рассмотрим набор  $S$  гамильтоновых циклов, каждый из которых обладает следующими свойствами:

1. Не проходит по ребрам вида  $\{i, j\}$  и  $\{n + i, n + j\}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ .
2. Обязательно содержит ребра  $\{i, n + i\}$ ,  $i \in [n]$ .

В силу сделанного выше замечания эти циклы соответствуют множеству вершин некоторой грани многогранника  $P_{\text{TSP}}(m)$ . Заметим, что любой гамильтонов цикл из набора  $S$  кроме  $n$  «обязательных» ребер должен содержать еще  $n$  ребер вида  $\{i, n + j\}$ ,  $i, j \in [n]$ ,  $i \neq j$ . Поставим в соответствие каждому ребру  $\{i, n + j\}$  графа  $G = ([2n], E)$  симметричной задачи дугу  $(i, j)$  орграфа  $D = ([n], A)$  асимметричной задачи. Нетрудно убедиться, что таким образом будет установлено взаимно-однозначное соответствие между гамильтоновыми циклами набора  $S$  и гамильтоновыми контурами орграфа  $D$ . Отсюда следует, что указанная грань многогранника  $P_{\text{TSP}}(m)$  аффинно эквивалентна многограннику  $P_{\text{ATSP}}(n)$ . ■

С другой стороны, многогранник  $P_{\text{ATSP}}(n)$  может быть преобразован в  $P_{\text{TSP}}(m)$ , где  $m = n$ , с помощью очевидного линейного отображения  $y_{ij} = x_{ij} + x_{ji}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . При этом каждая пара противоположно направленных гамильтоновых контуров будет отображаться в один гамильтонов цикл.

Ниже все рассмотрения будут касаться лишь многогранника асимметричной задачи. Теперь они могут быть легко перенесены и на симметричный случай. Мы также будем пользоваться обозначением  $P_{\text{ATSP}}(D')$  для множества всех характеристических векторов гамильтоновых контуров подграфа  $D'$  полного орграфа  $D$ . Очевидно,  $P_{\text{ATSP}}(D') \leq_A P_{\text{ATSP}}(n)$ , если число вершин орграфа  $D'$  не превосходит  $n$ .

**Теорема 4.33 ([27]).** Пусть  $U = \{u_1, \dots, u_d\}$  — множество булевых переменных,  $C = \{C_1, \dots, C_m\}$  — набор дизъюнкций над  $U$ ,  $\text{len}(C)$  — суммарная длина всех дизъюнкций из набора  $C$ , измеряемая в литералах. Тогда

$$P_{\text{sat}}(U, C) \leq_A P_{\text{ATSP}}(n), \quad \text{где } n = |U| + 2 \text{len}(C).$$

**Доказательство.** Достаточно для каждого многогранника  $P_{\text{sat}}(U, C)$  привести пример подграфа  $D'$  полного орграфа  $D = (V, A)$  такого, что  $P_{\text{sat}}(U, C)$  окажется аффинно эквивалентен многограннику  $P_{\text{ATSP}}(D')$ . С этой целью, при помощи стандартных средств классической теории сводимости [16] мы сконструируем алгоритм сведения задачи выполнимости к задаче гамильтонов контур. При этом между множествами допустимых решений этих задач установится взаимно-однозначное соответствие. То же соответствие установится и между вершинами многогранников этих задач. Далее останется лишь показать, что оно представляет собой аффинное невырожденное отображение.

Искомый орграф  $D'$  будем конструировать из вершин  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , и компонент  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Вершины  $v_i$  будут соответствовать переменным  $u_i \in U$ , а компоненты  $D_j$  — дизъюнкциям  $C_j$ . Из каждой вершины  $v_i$  в орграфе  $D'$  будут выходить ровно две дуги, соответствующие значениям «истина» и «ложь» переменной  $u_i$ . Относительно вершины  $v_i$  из всего множества компонент  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , выделим два подмножества:  $H_i$  будет содержать все те компоненты, соответствующие дизъюнкции которых содержат литерал  $u_i$ ;  $\bar{H}_i$  будет содержать все те компоненты, соответствующие дизъюнкции которых содержат литерал  $\bar{u}_i$ .

Из вершины  $v_i$  дугу «истина» направим в «первую» (порядок не важен) компоненту из множества  $H_i$ . Затем «первую» компоненту соединим дугой со «второй» компонентой из  $H_i$  и т. д. Таким образом, все компоненты из  $H_i$  будут соединены ориентированной цепью. Из последней компоненты соответствующую дугу направим в вершину  $v_{i+1}$  (сложение по модулю  $d$ ). Если множество  $H_i$  пустое, то дугу «истина» из вершины  $v_i$  направим непосредственно в  $v_{i+1}$ . Аналогичные построения сделаем с множеством  $\bar{H}_i$ , начав цепочку с дуги «ложь», выходящей из  $v_i$  (см., для примера, рис. 4.4). Итак, в каждую компоненту  $D_j$  теперь входит и выходит ровно столько дуг, сколько литералов содержится в соответствующем дизъюнкте  $C_j$ .

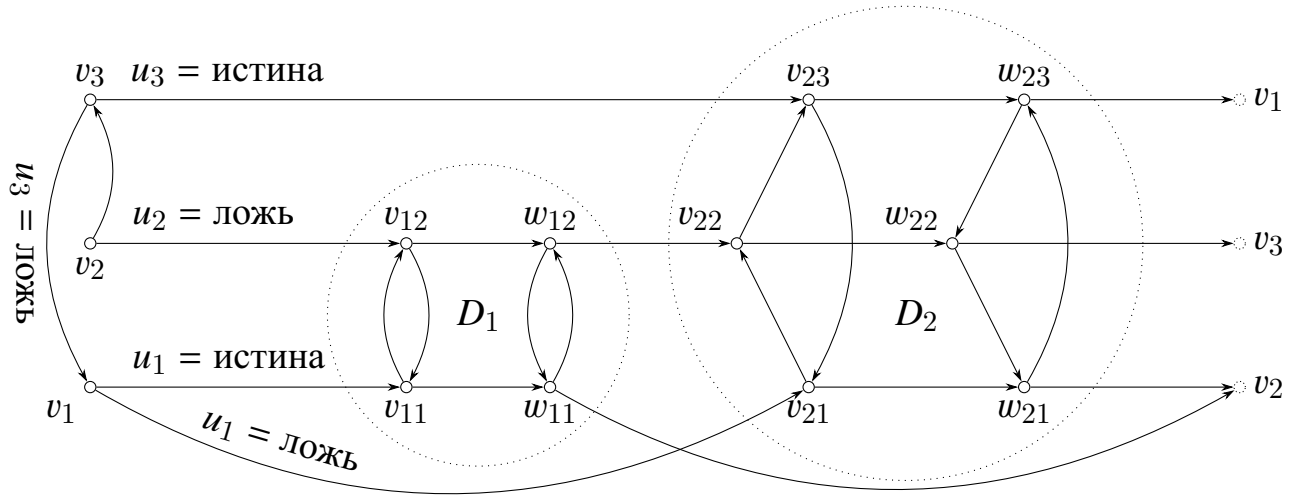


Рис. 4.4. Орграф  $D'$  для формулы  $(u_1 \vee \bar{u}_2) \wedge (\bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3)$ .

Определим внутреннее устройство компоненты  $D_j$ . Она состоит из вершин  $v_{jl}$  и  $w_{jl}$ ,  $1 \leq l \leq p_j$ , где  $p_j$  — число литералов в дизъюнкте  $C_j$ . Таким образом, между парами  $v_{jl}$  и  $w_{jl}$  ( $1 \leq l \leq p_j$ ) и литералами дизъюнкта  $C_j$  можно установить взаимно-однозначное соответствие. И, следовательно, каждая такая пара оказывается «привязанной» к некоторой вершине  $v_i$ , точнее, к одной из двух исходящих из этой вершины дуг, соответствующих значению «истина» для литералов  $u_i$  и  $\bar{u}_i$ , соответственно. Вершины компоненты соединены между собой «внутренними» дугами трех типов:  $(v_{jl}, w_{jl})$ ,  $(v_{jl}, v_{j,l+1})$  и  $(w_{j,l+1}, w_{jl})$ ,  $1 \leq l \leq p_j$ , (сложение  $l + 1$  выполняется по модулю  $p_j$ ). Других «внутренних» дуг у ком-

поненты  $D_j$  нет. О том, как «внешние» дуги соединяют  $D_j$  с другими компонентами и вершинами  $v_i$  конструируемого орграфа, в общих чертах было сказано выше. Остается лишь уточнить детали. Допустим, что пара вершин  $v_{j1}, w_{j1}$  соответствует литералу  $\bar{y}_i$ , присутствующему в дизъюнкте  $C_j$ . Тогда, как было сказано, компонента  $D_j$  является одним из звеньев цепи, соединяющей вершину  $v_i$  и другие компоненты из множества  $\bar{H}_i$ . Причем начало цепи проходит по дуге «ложь». Из двух дуг, соединяющих компоненту  $D_j$  с соседями по этой цепи, входящая дуга будет оканчиваться в  $v_{j1}$ , а исходящая — начинаться в  $w_{j1}$ .

Покажем, что прохождение гамильтонова контура по компоненте  $D_j$  однозначно определяется набором дуг этого контура, входящих извне в эту компоненту. А именно, покажем, что наличием (или отсутствием) дуги, входящей в вершину  $v_{jl}$ , однозначно определяется наличие «внешней» дуги, исходящей из  $w_{jl}$ , и дуги  $(v_{j\ l-1}, w_{j\ l-1})$ , а также отсутствие дуг  $(v_{j\ l-1}, v_{jl})$  и  $(w_{jl}, w_{j\ l-1})$  (вычитание  $l - 1$  выполняется по модулю  $p_j$ ).

Действительно, если в некотором гамильтоновом контуре присутствует «внешняя» для  $D_j$  дуга, входящая в  $v_{jl}$ , то дуги  $(v_{j\ l-1}, v_{jl})$  в нем быть не может. Но тогда покинуть вершину  $v_{j\ l-1}$  данный гамильтонов контур может только по дуге  $(v_{j\ l-1}, w_{j\ l-1})$ . Значит, дуга  $(w_{jl}, w_{j\ l-1})$  в нем отсутствует. Последнее означает, что покинуть вершину  $w_{jl}$  этот гамильтонов контур может только по исходящей из нее «внешней» дуге. С помощью аналогичных рассуждений легко проверяется случай, когда в гамильтоновом контуре отсутствует «внешняя» для  $D_j$  дуга, входящая в  $v_{jl}$ .

Заметим теперь, что конфигурация любого гамильтонова контура в орграфе  $D'$  однозначно определяется набором дуг, берущих начало в вершинах  $v_i$ , или, что то же самое, набором значений булевых переменных  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Кроме того, гамильтонов контур в орграфе  $D'$  для каждой компоненты  $D_j$  должен содержать хотя бы одну входящую в нее дугу (соответственно, дизъюнкция  $C_j$  должна содержать хотя бы один литерал, принимающий значение «истина»). Заметим также, что все дуги, соединяющие множество компонент  $H_i$

(или  $\bar{H}_i$ ), присутствуют (или отсутствуют) в некотором гамильтоновом контуре вместе с дугой «истина», выходящей из  $v_i$ . Таким образом, наличие «внешних» дуг в гамильтоновом контуре линейно зависит от значений переменных из  $U$ . А «внутренние» дуги компонент  $D_j$ , как было показано выше, линейно зависят от «внешних». Таким образом, многогранник  $P_{\text{sat}}(U, C)$  оказывается аффинно эквивалентен  $P_{\text{ATSP}}(D')$ . ■

С другой стороны, из утверждения 4.17 следует, что для любого фиксированного  $k \in \mathbb{N}$  семейство многогранников (а)симметричной задачи коммивояжера не может быть аффинно сведено к семейству многогранников задачи о  $k$ -выполнимости [94].

Теорема 4.33 имеет ряд интересных следствий.

Первое из них — NP-полнота проверки несмежности вершин для многогранников  $P_{\text{ATSP}}$  и  $P_{\text{TSP}}$ , наследующих это свойство от многогранников задачи о 3-выполнимости. В [154] этот факт был доказан иными методами.

Второе следствие связано с тем, что семейство многогранников задачи о выполнимости совпадает с семейством 0/1-многогранников. Например, пусть  $U = \{u_1, \dots, u_d\}$  и набор  $C$  состоит из одной дизъюнкции  $\{u_1, u_2, \dots, u_{d-1}, \bar{u}_d\}$ . Тогда множество  $P_{\text{sat}}(U, C)$  содержит все  $d$ -мерные 0/1-вектора за исключением вектора  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ . Теперь, чтобы убрать из этого множества еще один 0/1-вектор, например  $(0, 1, \dots, 1, 1)$ , достаточно добавить в  $C$  еще одну дизъюнкцию:

$$C = \{\{u_1, u_2, \dots, u_{d-1}, \bar{u}_d\}, \{u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n\}\}.$$

Действуя далее в том же духе, приходим к следующему выводу.

**Лемма 4.34.** *Для каждого  $X \subseteq \{0, 1\}^d$  можно построить набор дизъюнкций  $C$  над  $U = \{u_1, \dots, u_d\}$  так, что  $X = P_{\text{sat}}(U, C)$  и  $\text{len}(C) = kd$ , где  $k = 2^d - |X|$ .*

А с учетом теоремы 4.33, получаем

**Следствие 4.35.** Любой  $d$ -мерный 0/1-многогранник на  $2^d - k$  вершинах ( $0 \leq k \leq 2^d - 1$ ) аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника  $P_{\text{ATSP}}(n)$  при  $n = (2k + 1)d$ .

Ранее Биллера и Сарангараджан [55] доказали это утверждение для  $n = (4k + 1)d$  иными средствами.

В этой связи упомянем следующий факт. Число комбинаторно неэквивалентных  $d$ -мерных 0/1-многогранников ограничено снизу величиной  $2^{2^{d-2}}$  при  $d \geq 6$  [185, Proposition 8] (см. также [41, с. 102, упр. 2.6]). (Все 0/1-многогранники для  $d \leq 5$  перечисляются в [43].) С другой стороны, если  $f(n)$  — число всех граней 0/1-многогранника  $P_{0/1}(n) \subset \mathbb{R}^n$ , то

$$f(n) \leq n \binom{2^n}{n} \leq 2^{n^2}.$$

Таким образом, если каждый  $d$ -мерный 0/1-многогранник является гранью некоторого многогранника  $P_{0/1}(n)$ , то  $n$  экспоненциально по  $d$ . В частности, то же самое верно и в отношении многогранника  $P_{\text{ATSP}}(n)$ , но с небольшой корректировкой:  $n$  сверхполиномиально по  $d$ .

Обратим теперь внимание на то, что в некоторых частных случаях длину формулы  $C$  в лемме 4.34 можно существенно уменьшить. В качестве иллюстрации приведем альтернативное описание многогранника  $P_{\text{VQR}}(m)$ .

Заметим, что набор ограничений (из определения  $P_{\text{VQR}}(m)$ )

$$x_{ij} = x_{ii}x_{jj},$$

где  $x_{ii}, x_{jj} \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , эквивалентен выполнению дизъюнкций

$$x_{ii} \vee \bar{x}_{ij}, \quad x_{jj} \vee \bar{x}_{ij}, \quad \bar{x}_{ii} \vee \bar{x}_{jj} \vee x_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Таким образом, булев квадратичный многогранник  $P_{\text{VQR}}(m)$  является многогранником задачи о выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$ , где  $|U| = m(m + 1)/2$ ,  $\text{len}(C) = 7m(m - 1)/2$ .

Используя теорему 4.33, получаем

**Следствие 4.36 ([27]).**  $P_{\text{BQP}}(m) \leq_A P_{\text{ATSP}}(n)$ , где  $n = 7,5m^2 - 6,5m$ .

Покажем теперь, что между семействами  $P_{\text{BQP}}$  и  $P_{\text{ATSP}}$  имеется более тесная связь.

**Теорема 4.37.**  $P_{\text{BQP}}(m) \leq_A P_{\text{ATSP}}(n)$ , где  $n = 2m^2 - m$ .

**Доказательство.** Также, как это было сделано в доказательстве теоремы 4.33, приведем пример орграфа  $D'$  на  $2m^2 - m$  вершинах такого, что  $P_{\text{BQP}}(m)$  аффинно эквивалентен многограннику  $P_{\text{ATSP}}(D')$ .

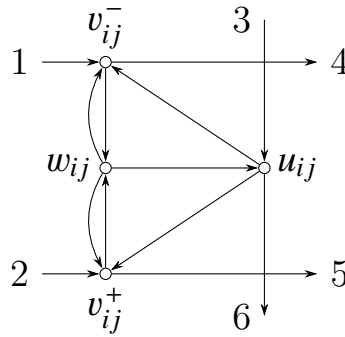


Рис. 4.5. Компонента  $E_{ij}$  орграфа  $D'$ .

Построения начнем с описания свойств типичной компоненты  $E_{ij}$  орграфа  $D'$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ . Эта компонента состоит из четырех вершин  $v_{ij}^-$ ,  $v_{ij}^+$ ,  $w_{ij}$  и  $u_{ij}$ . Все дуги орграфа  $D'$ , инцидентные этим вершинам, указаны на рисунке 4.5. Как видно, вершина  $w_{ij}$  не имеет непосредственных «соединений» с внешними для компоненты  $E_{ij}$  вершинами.

Будем предполагать, кроме того, что проходящий через эту компоненту гамильтонов контур обязательно содержит ровно одну из дуг 1 и 2, оканчивающихся в вершинах  $v_{ij}^-$  и  $v_{ij}^+$ , соответственно. Нетрудно проверить, что такой гамильтонов контур может иметь лишь одну из четырех конфигураций, представленных на рис. 4.6. При этом набор дуг каждой конфигурации однозначно определяется набором дуг 1, 2 и 3, направленных извне в данную компоненту.

Чтобы убедиться в этом, введем следующие обозначения. Координаты векторов из  $P_{\text{ATSP}}(D')$ , соответствующие дугам 1–6 компоненты  $E_{ij}$ , обозначим  $x_{ij}^1$ ,



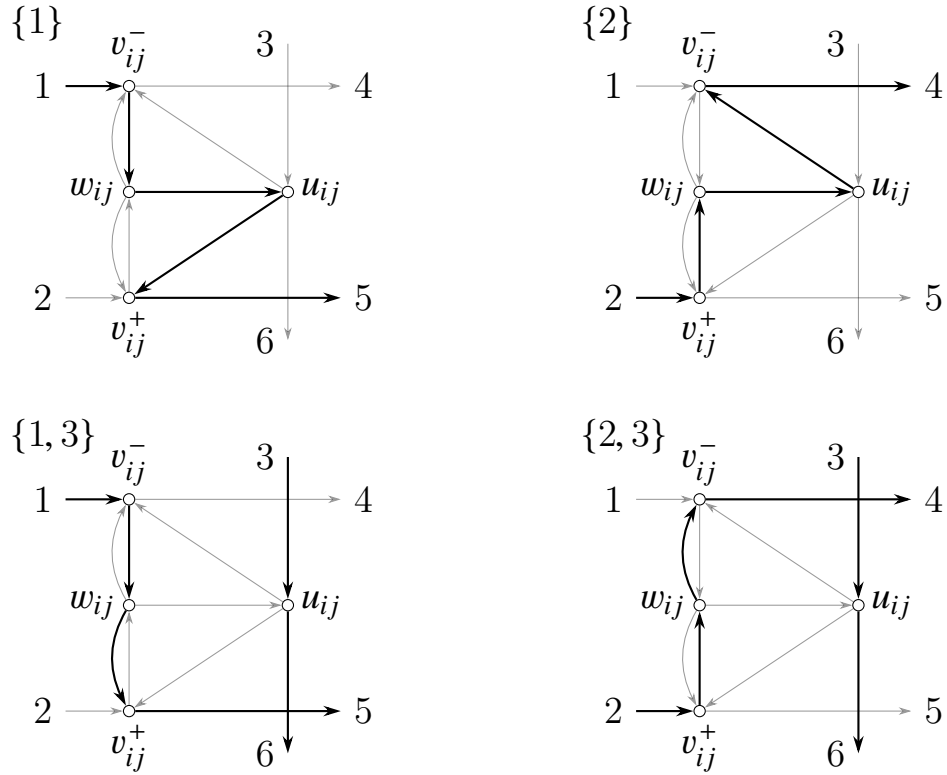


Рис. 4.6. Четыре варианта прохождения гамильтонова контура в зависимости от набора дуг, входящих извне в компоненту  $E_{ij}$ .

...,  $x_{ij}^6$  соответственно. Так как гамильтонов контур должен содержать ровно одну из дуг 1 и 2, получаем первое уравнение

$$x_{ij}^2 = 1 - x_{ij}^1. \quad (4.48)$$

На рис. 4.6 можно углядеть еще ряд соотношений:

$$x_{ij}^5 = x_{ij}^1, \quad x_{ij}^4 = x_{ij}^2, \quad x_{ij}^6 = x_{ij}^3. \quad (4.49)$$

Теперь разберемся с внутренними дугами компоненты. Для произвольной дуги, ведущей из вершины  $a$  в вершину  $b$ , соответствующую координату характеристического вектора обозначаем  $x(a, b)$ . Из рис. 4.6 видны следующие взаимосвязи:

$$x(v_{ij}^+, w_{ij}) = x_{ij}^2, \quad x(v_{ij}^-, w_{ij}) = x_{ij}^1, \quad x(w_{ij}, u_{ij}) = 1 - x_{ij}^3. \quad (4.50)$$

Для характеристики оставшихся четырех дуг введем дополнительную пе-

ременную

$$e_{ij} = x_{ij}^2 x_{ij}^3. \quad (4.51)$$

С ее использованием оставшиеся уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} x(w_{ij}, v_{ij}^-) &= e_{ij}, & x(w_{ij}, v_{ij}^+) &= x_{ij}^3 - e_{ij}, \\ x(u_{ij}, v_{ij}^-) &= x_{ij}^2 - e_{ij}, & x(u_{ij}, v_{ij}^+) &= e_{ij} + x_{ij}^1 - x_{ij}^3. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Итак, компонента построена таким образом, что присутствие любой ее дуги в гамильтоновом контуре линейно зависит лишь от присутствия дуг 1 и 3, и дополнительной переменной  $e_{ij}$ .

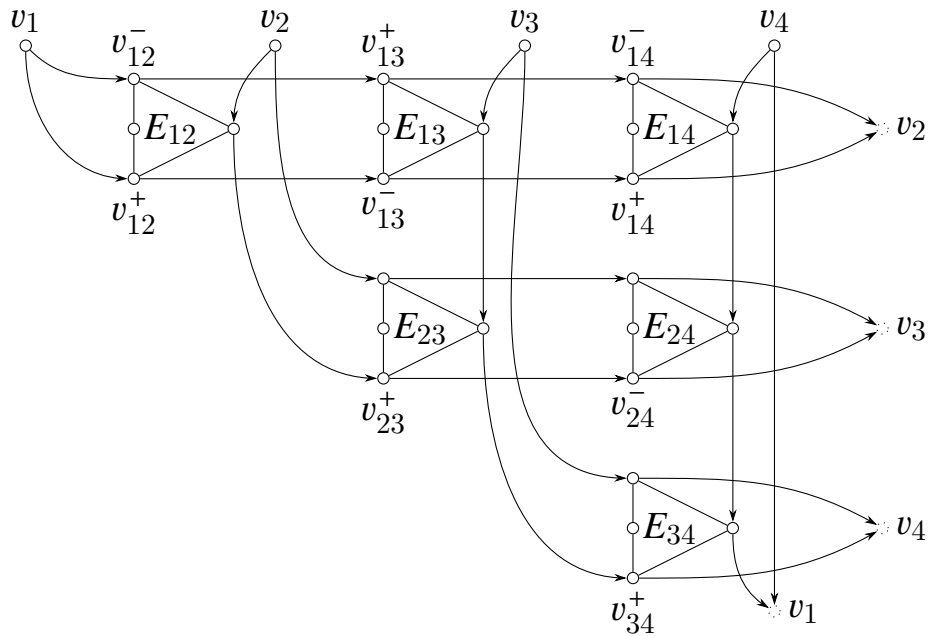


Рис. 4.7. Подграф  $D'$  для  $m = 4$ .

Теперь приступим к описанию всего орграфа  $D'$ . Он будет состоять из компонент  $E_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , и дополнительных вершин  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Каждая компонента соединяется своими внешними дугами с «соседними» по индексам компонентами, а «крайние» компоненты соединяются с дополнительными вершинами так, как это показано на рис. 4.7. Из каждой дополнительной вершины  $v_i$  выходит ровно две дуги. То есть любой гамильтонов контур орграфа  $D'$  должен содержать ровно одну из этих дуг. Орграф сконструирован таким образом, что конфигурация любого его гамильтонова контура однозначно определяется

набором выходящих из дополнительных вершин дуг. Таким образом, число всех гамильтоновых контуров равно  $2^m$  и совпадает с числом вершин многогранника  $P_{\text{BQP}}(m)$ . Остается определить линейные соотношения, связывающие  $P_{\text{BQP}}(m)$  и  $P_{\text{ATSP}}(D')$ .

Согласно определению булева квадратичного многогранника, множество  $P_{\text{BQP}}(m)$  состоит из векторов  $\mathbf{y} = (y_{ij}) \in \{0, 1\}^{m(m+1)/2}$ , удовлетворяющих условиям  $y_{ij} = y_{ii}y_{jj}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ . Положим

$$x(v_1, v_{12}^+) = y_{11}, \quad x(v_1, v_{12}^-) = 1 - y_{11},$$

$$x(v_2, u_{12}) = y_{22}, \quad x(v_2, v_{23}^-) = 1 - y_{22},$$

$$x(v_3, u_{13}) = y_{33}, \quad x(v_3, v_{34}^-) = 1 - y_{33},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x(v_m, u_{1m}) = y_{mm}, \quad x(v_m, v_1) = 1 - y_{mm}.$$

Из уравнений (4.49), с учетом конструкции всего графа  $D'$ , получаем  $x_{ij}^2 = y_{ii}$  и  $x_{ij}^3 = y_{jj}$ . Дополнительную переменную  $e_{ij}$ , ранее определявшуюся уравнением (4.51), положим равной  $y_{ij}$ . Ясно, что это будет эквивалентная замена. Все остальные координаты определяются линейными уравнениями (4.48)–(4.50), (4.52).

Таким образом, указанный орграф  $D'$  на  $n = 4\binom{m}{2} + m$  вершинах определяет многогранник  $P_{\text{ATSP}}(D')$ , аффинно эквивалентный многограннику  $P_{\text{BQP}}(m)$ . ■

#### 4.5.2. Многогранники близких задач

В этом разделе будут рассмотрены еще несколько многогранников, тесно связанных с многогранниками задачи коммивояжера.

*Многогранником гамильтоновых орпутьей* называется выпуклая оболочка множества  $P_{\text{HDP}}(n)$  всех характеристических векторов гамильтоновых орпутьей полного орграфа  $D = ([n], A)$  на  $n$  вершинах. Его гранью является *многогранник гамильтоновых  $s$ - $t$  орпутьей*  $P_{s-t\text{-HDP}}(n)$ , где  $s, t \in [n]$ . Так как свойства последнего не зависят от выбора концов  $s$  и  $t$ , далее полагаем  $s = 1$ ,  $t = n$ .

Нетрудно заметить, что многогранник гамильтоновых контуров  $P_{\text{ATSP}}(n - 1)$  аффинно эквивалентен многограннику гамильтоновых  $s$ - $t$  орпутьей  $P_{s\text{-}t\text{-HDP}}(n)$ . Для этого достаточно положить

$$x_{ij} = \begin{cases} y_{ij}, & \text{при } i, j \in [n - 1], j > 1, i \neq j, \\ y_{in}, & \text{при } j = 1 < i, \end{cases}$$

где  $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in P_{\text{ATSP}}(n - 1)$ ,  $\mathbf{y} = (y_{ij}) \in P_{s\text{-}t\text{-HDP}}(n)$ . Таким образом,

$$P_{\text{ATSP}} \propto_A P_{s\text{-}t\text{-HDP}} \propto_A P_{\text{HDP}}.$$

Также нетрудно показать, что все три семейства эквивалентны относительно аффинной сводимости. А именно, многогранник  $P_{\text{HDP}}(n)$  аффинно эквивалентен  $P_{\text{ATSP}}(n + 1)$ . Чтобы доказать это, заметим, что в любом гамильтоновом контуре в полном орграфе  $D = ([n + 1], A)$  дуги, инцидентные  $(n + 1)$ -й вершине, однозначно определяются всеми остальными дугами этого контура. Таким образом, удаляя дуги, инцидентные  $(n + 1)$ -й вершине, мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между гамильтоновыми контурами в орграфе на  $n + 1$  вершинах и гамильтоновыми орпутями в орграфе на  $n$  вершинах. Остается лишь заметить, что переменные, соответствующие удаляемым дугам, линейно зависят от переменных, связанных с другими дугами:

$$\begin{aligned} x_{i,n+1} &= 1 - \sum_{j \in [n], j \neq i} x_{ij}, \quad i \in [n], \\ x_{n+1,i} &= 1 - \sum_{j \in [n], j \neq i} x_{ji}, \quad i \in [n]. \end{aligned}$$

Аналогичная взаимосвязь между многогранниками гамильтоновых циклов  $P_{\text{TSP}}(n + 1)$  и многогранниками гамильтоновых путей  $P_{\text{HP}}(n)$  в неориентированном графе была установлена в [160]:  $P_{\text{TSP}}(n + 1) =_A P_{\text{HP}}(n)$ . Там же эта взаимосвязь была использована для получения новых семейств неравенств, определяющих гипергрani многогранника симметричной задачи коммивояжера.

Кроме того, многогранник гамильтоновых  $s$ - $t$  орпутьей  $P_{s\text{-}t\text{-HDP}}(n)$ , очевидно, является гранью многогранника  $s$ - $t$  орпутьей  $P_{\text{dipath}}(n)$ , определяемой опор-

ной гиперплоскостью  $H(1, n - 1)$ . Оказывается, семейства  $P_{\text{dipath}}$  и  $P_{\text{s-t-HDP}}$  тоже эквивалентны относительно аффинной сводимости.

**Лемма 4.38.**  $P_{\text{dipath}}(n) \leq_A P_{\text{s-t-HDP}}(k)$  при  $k = 2n - 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим полный орграф  $D = (V, A)$  на  $n$  вершинах  $V = \{s, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, t\}$ . Пусть  $P_{\text{dipath}}(n)$  — множество характеристических векторов  $s$ - $t$  орпутей в  $D$ .

Построим граф  $D'$ , содержащий  $D$  в качестве индуцированного подграфа и, кроме того, имеющий дополнительные вершины  $U = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  и дуги

$$\{u_i, u_{i+1}\}, \{u_i, v_i\}, \{v_i, u_{i+1}\}, \quad i \in [n - 2],$$

а также дугу  $\{u_{n-1}, s\}$  (см. рис. 4.8). Очевидно, множество характеристических

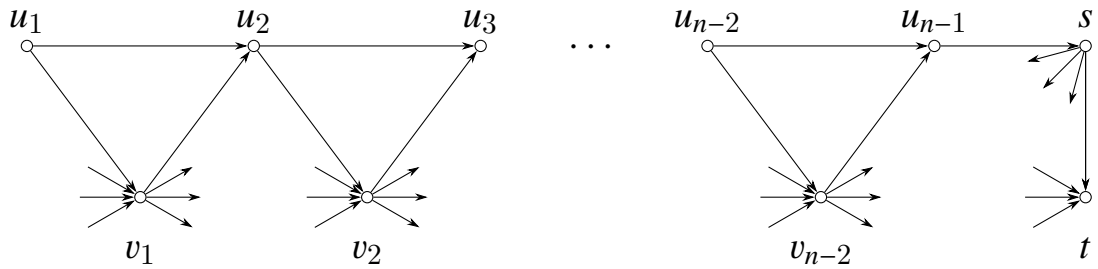


Рис. 4.8. Орграф  $D'$ , определяющий грань многогранника  $P_{\text{s-t-HDP}}(2n - 1)$ , аффинно эквивалентную многограннику  $P_{\text{dipath}}(n)$ .

векторов гамильтоновых орпутей из  $u_1$  в  $t$  в графе  $D'$  образует грань многогранника  $P_{\text{s-t-HDP}}(k)$  при  $k = 2n - 1$ . Покажем, что эта грань аффинно эквивалентна  $P_{\text{dipath}}(n)$ .

Координату характеристического вектора гамильтонова орпути в  $D'$ , соответствующую дуге  $(v, v')$ ,  $v, v' \in V \cup U$ , обозначаем  $x(v, v')$ . Из описания орграфа  $D'$  следует, что для любого гамильтонова орпути в  $D'$  должны выполняться равенства

$$x(u_i, v_i) + x(u_i, u_{i+1}) = 1 = x(v_i, u_{i+1}) + x(u_i, u_{i+1}), \quad i \in [n - 2],$$

и, кроме того,  $x(u_{n-1}, s) = 1$ . Из гамильтоновости орпути также следует справедливость соотношений

$$x(u_i, v_i) = 1 - \sum_{v \in V, v \neq v_i} x(v, v_i) \quad \text{и} \quad x(v_i, u_{i+1}) = 1 - \sum_{v \in V, v \neq v_i} x(v_i, v),$$

при  $i \in [n - 2]$ . Таким образом, все координаты характеристического вектора гамильтонова орпути в  $D'$  линейно выражаются через координаты  $x(v, v')$ ,  $v, v' \in V$ . С другой стороны, легко проверить следующий факт. Если  $H$  — гамильтонов орпуть из  $u_1$  в  $t$  в орграфе  $D'$ , то  $\{(v, v') \in H \mid v, v' \in V\}$  —  $s$ - $t$  орпуть в  $D$ . Причем любой  $s$ - $t$  орпуть в  $D$  однозначно определяет соответствующий гамильтонов орпуть в  $D'$ . ■

Аналогичное утверждение справедливо для многогранников  $s$ - $t$  путей  $P_{\text{path}}(n)$  и гамильтоновых  $s$ - $t$  путей  $P_{s-t-\text{HP}}(n)$  в неориентированном графе.

**Лемма 4.39.**  $P_{s-t-\text{HP}}(n) \leq_A P_{\text{path}}(n) \leq_A P_{s-t-\text{HP}}(k)$  при  $k = 4n - 6$ .

**Доказательство.** Также, как и в случае с орграфом,  $P_{s-t-\text{HP}}(n)$  является гранью многогранника  $P_{\text{path}}(n)$ , определяемой опорной гиперплоскостью  $H(1, n - 1)$ .

Рассмотрим полный граф  $G = (V, E)$  на  $n$  вершинах  $V = \{s, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, t\}$ . Пусть  $P_{\text{path}}(n)$  — множество характеристических векторов  $s$ - $t$  путей в  $G$ . По аналогии с доказательством для орграфа, достаточно указать граф  $G'$ , содержащий  $G$  в качестве индуцированного подграфа и определяющий соответствующую грань многогранника  $P_{s-t-\text{HP}}(4n - 6)$ . Этот граф изображен на рис. 4.9.

В дополнение к уже перечисленным результатам добавим, что  $P_{s-t-\text{HP}}(n)$  является гранью  $P_{\text{TSP}}(n)$ , лежащей в гиперплоскости  $x(s, t) = 1$ , а  $P_{s-t-\text{HDP}}(n)$  является гранью  $P_{s-t-\text{HP}}(2n - 2)$  (доказательство такое же, как и в лемме 4.32).

Для доказательства эквивалентности (в смысле аффинной сводимости) всех восьми семейств  $P_{\text{ATSP}}$ ,  $P_{s-t-\text{HDP}}$ ,  $P_{\text{HDP}}$ ,  $P_{\text{dipath}}$ ,  $P_{\text{TSP}}$ ,  $P_{s-t-\text{HP}}$ ,  $P_{\text{HP}}$ ,  $P_{\text{path}}$  не хватает лишь одного соотношения  $P_{\text{TSP}} \propto_A P_{\text{ATSP}}$ , которое установить не удалось. С другой стороны, для доказательства  $P_{\text{TSP}} \not\propto_A P_{\text{ATSP}}$  используемые ранее методы не

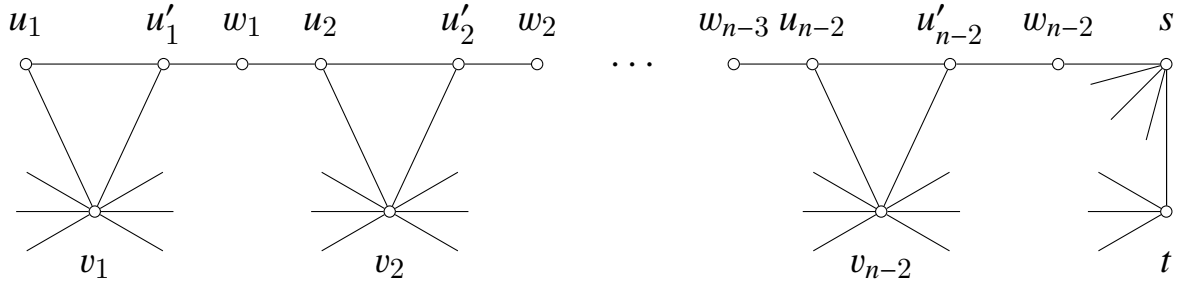


Рис. 4.9. Граф  $G'$ , определяющий грань многогранника  $P_{s-t, \text{HP}}(4n - 6)$ , аффинно эквивалентную многограннику  $P_{\text{path}}(n)$ .

подходят, так как оба семейства содержат в качестве граней все 0/1-многогранники. В целом же складывается картина, изображенная на рис. 4.10.

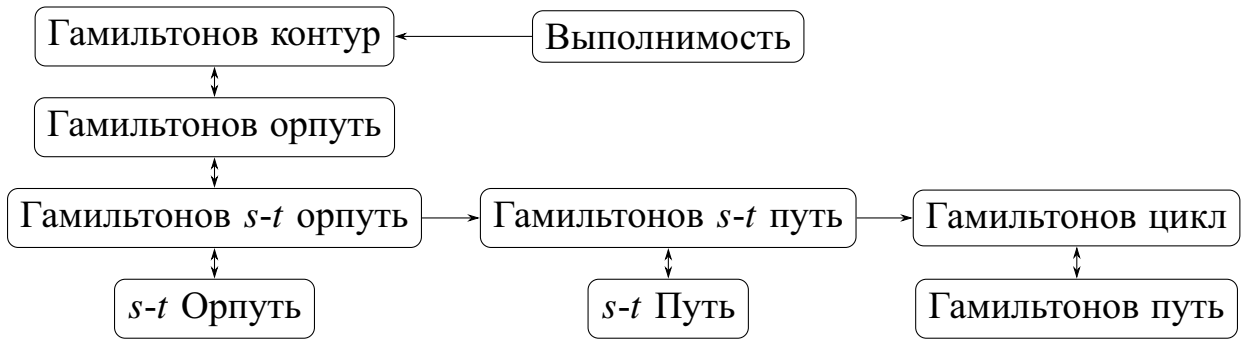


Рис. 4.10. Аффинная сводимость семейств многогранников, связанных с задачей коммивояжера.

В заключение раздела рассмотрим еще одно семейство многогранников. *Многогранником гамильтоновых графов* будем называть выпуклую оболочку множества  $P_{\text{Hgraph}}(n)$  характеристических векторов всех подграфов полного графа на  $n$  вершинах, содержащих гамильтонов цикл. Очевидно,  $P_{\text{TSP}}(n)$  является гранью многогранника  $P_{\text{Hgraph}}(n)$ , образованной опорной гиперплоскостью  $H(1, n)$ . С другой стороны, сведение  $P_{\text{Hgraph}} \propto_A P_{\text{TSP}}$  возможно, только если  $P = \text{NP}$ , так как задача распознавания гамильтоновости графа (и, соответственно, вершины многогранника  $P_{\text{Hgraph}}(n)$ ) NP-полна, тогда как задача идентификации гамильтонова цикла решается просто. Тем не менее, оба семейства содержат в качестве граней все 0/1-многогранники. Таким образом, если  $P \neq \text{NP}$ , то  $P_{\text{Hgraph}}(n)$  аффинно эквивалентен некоторой грани  $P_{\text{TSP}}(k)$ , только если  $k$  сверхполиномиально относительно  $n$ .

## 4.6. Булевы многогранники степени $p$

Как известно, булевы квадратичные многогранники 3-смежностны, но не 4-смежностны [85]. Более того, многие 0/1-многогранники, изучаемые в комбинаторной оптимизации, являются как минимум 2-смежностными [112, р. 366]. Например, Ш. Онн установил следующий факт для многогранников Юнга.

**Теорема 4.40 ([146]).** Пусть  $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ , где  $n, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , и  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq k^2$ . Тогда многогранник Юнга  $P(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  является  $\left\lfloor \frac{k^2}{2} \right\rfloor$ -смежностным.

Известно [2, 146], что многогранники некоторых задач комбинаторной оптимизации (например, коммивояжер, независимое множество, паросочетание максимального веса, изоморфизм графов) являются образами многогранников Юнга при линейном отображении.

Вообще, для достаточно больших значений размерности,  $k$ -смежностные многогранники встречаются чаще, чем какие либо другие. Это подтверждается следующими фактами.

Пусть случайные вектора  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}^d$  распределены независимо и равномерно. Если повторения допустимы, то многогранник  $P_{d,n}$  определяется так:  $P_{d,n} = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  [104]. Для случая, когда повторения невозможны, будем пользоваться обозначением  $Q_{d,n} = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Теорема 4.41 ([11]).** Если  $n = O(2^{d/6})$ , то вероятность  $\Pr(Q_{d,n} \text{ 2-смежностен})$  стремится к 1 при  $d \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.42 ([104]).** Для каждого  $k \geq 2$  существует константа  $c > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$\Pr(P_{d,n} \text{ } k\text{-смежностен}) \geq 1 - 2^{-cd}, \quad \text{при } n \leq 2^{\varepsilon d}.$$

Ниже для каждого  $k \in \mathbb{N}$  будет описано специальное семейство  $k$ -смежностных 0/1-многогранников. Число  $2^{\Theta(d^{2\lceil k/3 \rceil - 1})}$  их вершин сверхполиномиально относительно размерности  $d$  многогранника. Кроме того, мы покажем, что



эти семейства аффинно сводятся к семейству булевых квадратичных многогранников.

Рассмотрим множество

$$P_{\text{tensor}}(n) = \{\mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n\},$$

где  $\mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{n \times n}$  — тензорное произведение. Для координат вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{tensor}}(n)$  будем использовать обозначения  $x(i) = y_i y_i$ ,  $i \in [n]$ , и  $x(j, k) = y_j y_k$ ,  $j, k \in [n]$ ,  $j \neq k$ , то есть

$$x(j, k) = x(k, j) = x(j)x(k). \quad (4.53)$$

Очевидно, множество  $P_{\text{tensor}}(n)$  аффинно изоморфно булеву квадратичному многограннику  $P_{\text{BQR}}(n)$ , вершины которого не содержат координаты  $x(j, k)$  с индексами  $j > k$ . По этой причине в некоторых публикациях булевым квадратичным (корреляционным) многогранником называется выпуклая оболочка  $\text{conv}(P_{\text{tensor}}(n))$  (см., например, [98]).

Увеличивая число множителей в тензорном произведении, введем в рассмотрение множество

$$P_{\text{tensor}}(n, p) = \{\mathbf{y} \otimes \dots \otimes \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{n^p} \mid \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n\}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad n \geq p.$$

Для координат вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{tensor}}(n, p)$  будем использовать обозначения  $x(i) = y_i \dots y_i$ ,  $i \in [n]$ ,  $x(j, k) = y_j \dots y_j y_k \dots y_k$ ,  $j, k \in [n]$ ,  $j \neq k$ , .... Ясно, что среди них будет много совпадающих по значению (см., например, уравнение (4.53)). Избавившись от совпадающих координат, введем в рассмотрение аффинно изоморфный данному булеву многограннику степени  $p$   $P_{\text{BPP}}(n, p)$ . Координаты вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{BPP}}(n, p)$  будем индексировать непустыми подмножествами множества  $[n]$ , состоящими из не более, чем  $p$  элементов.

Так, например,  $P_{\text{ВРР}}(n, 3)$  состоит из векторов  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^d$ ,  $d = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ , координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} x(i, j) &= x(i)x(j), & 1 \leq i < j \leq n, \\ x(i, j, k) &= x(i)x(j)x(k), & 1 \leq i < j < k \leq n. \end{aligned}$$

Перечислим некоторые свойства булева многогранника степени  $p$ . Прежде всего,  $P_{\text{ВРР}}(n, 1)$  является  $n$ -мерным 0/1-кубом,  $P_{\text{ВРР}}(n, 2)$  — булев квадратичный многогранник  $P_{\text{ВQR}}(n)$ ,  $P_{\text{ВРР}}(p, p)$  — симплекс на  $2^p$  вершинах. Размерность многогранника  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$ , при  $n \geq p$ , совпадает с числом координат. Это следует из того, что его вершины, удовлетворяющие условию  $\sum_{i \in [n]} x(i) \leq p$ , аффинно независимы.

**Лемма 4.43.** *Многогранник  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  является  $s$ -смежностным при*

$$s \leq p + \lfloor p/2 \rfloor.$$

**Доказательство.** Заметим, что  $P_{\text{ВРР}}(n, 1)$  1-смежностен, а  $P_{\text{ВРР}}(n, 2)$  3-смежностен [85]. Следовательно, для каждой трех различных вершин  $x^1, x^2, x^3 \in P_{\text{ВРР}}(n, 2)$  существует билинейная функция

$$f_{x^1 x^2 x^3}(x) = b + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x(i)x(j), \quad b, a_{ij} \in \mathbb{R},$$

такая, что  $f_{x^1 x^2 x^3}(x^1) = f_{x^1 x^2 x^3}(x^2) = f_{x^1 x^2 x^3}(x^3) = 0$  и  $f_{x^1 x^2 x^3}(x) > 0$  для любой другой вершины  $x$  этого многогранника.

Прделаем то же самое для  $P_{\text{ВРР}}(n, 4)$ . Для любой шестерки различных вершин  $x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$  можно построить две функции

$$\begin{aligned} f_{x^1 x^2 x^3}(x) &= b + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x(i)x(j), \\ f_{x^4 x^5 x^6}(x) &= d + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} x(i)x(j). \end{aligned}$$

Ясно, что функция

$$F(x) = f_{x^1 x^2 x^3}(x) \cdot f_{x^4 x^5 x^6}(x)$$

равна 0 при  $x^m$ ,  $m = 1, \dots, 6$ , и  $F(x) > 0$  для любой другой вершины  $x$  многогранника  $P_{\text{ВРР}}(n, 4)$ . С другой стороны,  $F(x)$  — полином 4-й степени от переменных  $x(i)$ ,  $i \in [n]$ , но при этом линеен относительно координат вектора  $x \in P_{\text{ВРР}}(n, 4)$ , совпадающих со значениями соответствующих произведений вида  $x(i)x(j)$  или  $x(i)x(j)x(k)x(l)$ . Таким образом,  $F(x)$  определяет опорную гиперплоскость для  $P_{\text{ВРР}}(n, 4)$ , и  $P_{\text{ВРР}}(n, 4)$  является 6-смежностным.

Действуя тем же способом, нетрудно заметить, что  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  является  $(3p/2)$ -смежностным для четных  $p$ .

Для нечетных  $p$  достаточно заметить, что для каждой вершины  $x^0$  куба  $P_{\text{ВРР}}(n, 1)$  несложно описать линейную функцию

$$f_{x^0}(x) = b + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i x(i), \quad b, a_i \in \mathbb{R},$$

такую, что  $f_{x^0}(x^0) = 0$  и  $f_{x^0}(x) > 0$  для любой другой вершины  $x$  куба  $P_{\text{ВРР}}(n, 1)$ . ■

**Замечание 4.3.** Очевидно, что  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  является гранью многогранника  $P_{\text{ВРР}}(n+1, p)$  с опорной гиперплоскостью  $x(n+1) = 0$ . Следовательно,  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  — грань многогранника  $P_{\text{ВРР}}(k, p)$  для всех  $k > n$ .

**Лемма 4.44.**  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  не является  $2^p$ -смежностным при  $n \geq p + 1$ .

**Доказательство.** Из замечания 4.3 следует, что достаточно доказать утверждение леммы для  $n = p + 1$ .

Покажем, что  $P_{\text{ВРР}}(p + 1, p)$  не  $2^p$ -смежностен.

Пусть

$$S(x) = \sum_{i=1}^{p+1} x(i)$$

есть сумма «основных» координат вектора  $x \in P_{\text{ВРР}}(p + 1, p)$ . Множество  $X$  всех вершин многогранника  $P_{\text{ВРР}}(p + 1, p)$  разобьем на  $p + 2$  подмножеств:

$$X(k) = \{x \in X \mid S(x) = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p + 1.$$

Пусть

$$Y = \bigcup_{k \text{ четно}} X(k), \quad \text{и} \quad Z = X \setminus Y.$$

Очевидно,  $|X(k)| = \binom{p+1}{k}$ ,  $|Y| = |Z| = |X|/2 = 2^p$ .

Покажем, что

$$\sum_{x \in Y} x = \sum_{x \in Z} x. \quad (4.54)$$

Если это верно, то  $Y$  и  $Z$  не образуют грани многогранника  $P_{\text{ВРР}}(p+1, p)$ .

Проверим равенство (4.54) покоординатно. Пусть  $\bar{r}$  — наибольшее четное, не превосходящее  $p+1$ ,  $\bar{s} = 2p+1 - \bar{r}$  — наибольшее нечетное, не превосходящее  $p+1$ . Для  $i \in [p+1]$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x \in Y} x(i) &= \sum_{x \in X(0)} x(i) + \sum_{x \in X(2)} x(i) + \sum_{x \in X(4)} x(i) + \dots + \sum_{x \in X(\bar{r})} x(i) \\ &= 0 + \binom{p}{1} + \binom{p}{3} + \dots + \binom{p}{\bar{r}-1} \end{aligned} \quad (4.55)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{x \in Z} x(i) &= \sum_{x \in X(1)} x(i) + \sum_{x \in X(3)} x(i) + \dots + \sum_{x \in X(\bar{s})} x(i) \\ &= \binom{p}{0} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{\bar{s}-1}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Из бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} = 0$$

следует, что (4.55) и (4.56) равны.

Продолжая тем же способом, рассмотрим координату  $x(i_1, i_2, \dots, i_m)$  с  $m$  различными индексами  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq p+1$ ,  $1 \leq m \leq p$ . Как и выше,

$$\sum_{x \in Y} x(i_1, i_2, \dots, i_m) - \sum_{x \in Z} x(i_1, i_2, \dots, i_m) = (-1)^m \sum_{k=0}^{p+1-m} (-1)^k \binom{p+1-m}{k} = 0. \quad \blacksquare$$

Объединяя леммы 4.43 и 4.44, получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.45.** Пусть  $s$  наибольшее целое, для которого многогранник  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$ ,  $n > p$ , является  $s$ -смежностным. Тогда

$$p + \lfloor p/2 \rfloor \leq s < 2^p.$$

Перечислим несколько очевидных замечаний:

1. Куб  $P_{\text{ВРР}}(k, 1)$ ,  $k \geq 2$ , не является 2-смежностным. Следовательно, для  $k \geq 2$ ,  $P_{\text{ВРР}}(k, 1)$  не может быть гранью многогранника  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  при  $n \geq p \geq 2$ .

2.  $P_{\text{ВРР}}(k, 1)$  не имеет 2-смежностных граней за исключением 1-граней (ребер). Следовательно, для  $n \geq p \geq 2$ ,  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  не может быть гранью куба  $P_{\text{ВРР}}(k, 1)$ .

3. Булев квадратичный многогранник  $P_{\text{ВРР}}(k, 2)$  не является 4-смежностным. Это означает, что  $P_{\text{ВРР}}(k, 2)$  не может быть гранью многогранника  $P_{\text{ВРР}}(n, p)$  для  $n \geq p \geq 3$ .

Покажем теперь, что для четных  $p \geq 4$ ,  $P_{\text{ВРР}}(k, p)$  является гранью многогранника  $P_{\text{ВQR}}(n)$  при некотором  $n = \Theta(k^{\lceil p/2 \rceil})$ .

Для чисел  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2m$ , определим  $H(k, m)$  следующим образом:

$$H(k, m) = \binom{k}{m} + \binom{k}{\lceil m/2 \rceil} + \binom{k}{\lceil \lceil m/2 \rceil / 2 \rceil} + \dots + \binom{k}{1}.$$

Заметим, что  $H(k, m) \geq \binom{k}{m}$ , и, при постоянном  $m$ ,  $H(k, m) \sim \binom{k}{m}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Однако, для малых значений  $k$ ,  $H(k, m)$  может существенно отличаться от  $\binom{k}{m}$ . Вычисления показывают, что максимум для соотношения  $H(k, m)/\binom{k}{m}$  равен  $41/20$  и достигается при  $k = 2m = 6$ .

**Теорема 4.46.**  $P_{\text{ВРР}}(k, 2m) \leq_A P_{\text{ВQR}}(n)$  для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2m$  и  $n \geq H(k, m)$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $P_{\text{ВРР}}(k, 4)$  линейно изоморфен грани булева квадратичного многогранника  $P_{\text{ВQR}}(n)$  при  $n = \binom{k}{2} + \binom{k}{1}$ . Вместо множества  $[n]$  для индексирования координат вектора  $x \in P_{\text{ВQR}}(n)$  будем использовать множество

$$S = [k] \cup \{ij \mid 1 \leq i < j \leq k\},$$

где  $ij$  следует воспринимать как множество  $\{i, j\}$ . Исходя из этого, для координат вектора  $x \in P_{\text{ВQR}}(n)$  будем использовать обозначения  $x(s)$ ,  $s \in S$ , и

$$x(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t, s), \quad s, t \in S, \quad s \neq t.$$

Согласно определению булева квадратичного многогранника,

$$x(s, t) = x(s)x(t).$$

Рассмотрим множество  $F$  векторов  $x \in P_{\text{ВQR}}(n)$ , удовлетворяющих ограничениям

$$x(i, j) = x(ij) = x(i, ij) = x(j, ij), \quad 1 \leq i < j \leq k. \quad (4.57)$$

В частности, для  $x \in F$  выполнено

$$x(ij, lm) = x(ij)x(lm) = x(i)x(j)x(l)x(m), \quad i, j, l, m \in [k], \quad i < j, \quad l < m.$$

Покажем, что  $F$  является гранью  $P_{\text{ВQR}}(n)$ .

Воспользуемся тем, что все вершины  $P_{\text{ВQR}}(n)$  удовлетворяют неравенствам

$$x(s, t) \leq x(s) \quad \text{и} \quad x(s, t) \leq x(t), \quad s, t \in S.$$

Каждое такое неравенство определяет грань многогранника  $P_{\text{ВQR}}(n)$ . Например,

$$F'_{ij} = \{x \in P_{\text{ВQR}}(n) \mid x(i, ij) = x(ij), \quad x(j, ij) = x(ij)\}$$

является гранью многогранника  $P_{\text{ВQR}}(n)$ , при  $1 \leq i < j \leq k$ . Так как  $x(i, ij) \leq x(i)$  и  $x(j, ij) \leq x(j)$ , то

$$x(ij) \leq x(i) \quad \text{и} \quad x(ij) \leq x(j), \quad \forall x \in F'_{ij}.$$

Учитывая, что  $x(i, j) = x(i)x(j)$ , получаем

$$x(ij) \leq x(i, j), \quad \forall x \in F'_{ij}.$$

Следовательно,

$$F_{ij} = \left\{x \in F'_{ij} \mid x(ij) = x(i, j)\right\}$$

является гранью  $F'_{ij}$ , а также гранью  $P_{\text{ВQR}}(n)$ . Более того, (4.57) выполнено для всех  $x \in F_{ij}$ .

Таким образом,

$$F = \bigcap_{1 \leq i < j \leq k} F_{ij}$$

является гранью  $P_{\text{BQR}}(n)$ , и  $F$  линейно изоморфна многограннику  $P_{\text{BPP}}(k, 4)$ . В частности, для  $y \in P_{\text{BPP}}(k, 4)$  можно положить

$$\begin{aligned} y(i) &= x(i), & 1 \leq i \leq k, \\ y(i, j) &= x(ij), & 1 \leq i < j \leq k, \\ y(i, j, l) &= x(i, jl), & 1 \leq i < j < l \leq k, \\ y(i, j, l, m) &= x(ij, lm), & 1 \leq i < j < l < m \leq k. \end{aligned}$$

Действуя тем же способом не трудно проверить, что  $P_{\text{BPP}}(k, 2m)$  линейно изоморфен некоторой грани  $P_{\text{BQR}}(n)$  для  $n = H(k, m)$ ,  $k \geq 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . ■

Объединяя это утверждение с теоремой 4.45 получаем

**Следствие 4.47.** Для любого  $k \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2^{2 \cdot \lceil k/3 \rceil}$  булев квадратичный многогранник  $P_{\text{BQR}}(n)$  имеет  $k$ -смежностную грань со сверхполиномиальным числом  $2^{\Theta(n^{1/\lceil k/3 \rceil})}$  вершин.

## 4.7. Конусное разбиение для задачи о кратчайшем орпути и многогранник задачи о назначениях

В этом разделе мы рассмотрим задачу поиска кратчайшего орпути из вершины  $s$  в вершину  $t$  в полном реберно-взвешенном ориентированном графе  $D = (V, A)$ ,  $s, t \in V = [n]$ . В общем случае эта задача является NP-трудной [16], а гранью её многогранника  $P_{\text{dipath}}(n)$  является многогранник гамильтоновых контуров  $P_{\text{ATSP}}(n - 1)$  (см. раздел 4.5.2). Если же в  $D$  отсутствуют контуры отрицательной длины, то задача становится полиномиально разрешимой. В частности потому, что полиэдр  $P_{\text{shortpath}}(n)$  имеет компактное описание (см. раздел 2.1.1). Чтобы пояснить естественность такого ограничения, рассмотрим следующий пример. Предположим, что на некоторых участках дорог транспортное средство движется под гору. Тогда оно может не только не тратить энергию (топливо), но и накапливать возникающие излишки кинетической энергии. Тогда, с точки

зрения энергетических потерь, эти участки дорог имеют отрицательный вес. Но затраты энергии, необходимые для прохождения замкнутого пути (контура), как гласит закон сохранения энергии, всегда будут положительны.

С целью унификации рассуждений, перейдем к рассмотрению задачи на максимум. Ниже будем изучать свойства задачи о длиннейшем пути в реберно-взвешенном орграфе, все контуры которого имеют отрицательный вес.

**Теорема 4.48.** *Конусное разбиение задачи о длиннейшем пути в орграфе с контурами отрицательного веса аффинно сводится к конусному разбиению задачи о назначениях.*

**Доказательство.** Для каждой задачи о длиннейшем пути в орграфе  $D = (V, A)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , рассмотрим задачу о назначениях в двудольном графе  $G = (W, E)$  с долями  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  и  $U' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ . Таким образом мы фиксируем преобразование кода первой задачи в код второй задачи (см. определение 3.2).

Не уменьшая общности, будем предполагать, что искомый орпуть должен начинаться в вершине  $s = v_1$  и заканчиваться в  $t = v_{n+1}$ . Соответственно, дуг, входящих в  $s$  или исходящих из  $t$ , в орграфе  $D$  нет. Кроме того, введем следующие обозначения. Координата  $c_{i,j}$  целевого вектора  $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^A$  для задачи о длиннейшем пути будет равна весу дуги, ведущей из  $v_i$  в  $v_j$ ,  $i \neq n+1$ ,  $j \neq 1$ . Координата  $b_{i,j}$  целевого вектора  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^E$  для задачи о назначениях будет равна весу ребра  $\{u_i, u'_j\}$ .

Аффинное отображение  $\alpha: \mathbb{Q}^A \rightarrow \mathbb{Q}^E$  определим следующим образом:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \neq 1, \\ c_{i,n+1}, & \text{если } j = 1, \\ c_{i,j}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Точно таким же образом установим взаимно-однозначное соответствие между множеством дуг  $A$  и множеством ребер  $E \setminus \{\{u_2, u'_2\}, \dots, \{u_n, u'_n\}\}$ . Тогда каждо-



му простому орпути в орграфе  $D$  будет поставлено в соответствие некоторое совершенное паросочетание в графе  $G$ , имеющее точно такой же вес. (Если вершина  $v_i$  не принадлежит орпути, то соответствующее паросочетание содержит ребро  $\{u_i, u'_i\}$  нулевого веса.)

Временно нарушая общепринятое определение, *контуром* в двудольном графе  $G$  назовем множество ребер вида

$$\{\{u_{i_1}, u'_{i_2}\}, \{u_{i_2}, u'_{i_3}\}, \dots, \{u_{i_{n-1}}, u'_{i_n}\}, \{u_{i_n}, u'_{i_1}\}\},$$

где  $k \geq 2$ , а  $\{i_1, \dots, i_k\}$  — некоторое упорядоченное подмножество множества  $[n]$ . Очевидно, любое паросочетание в  $G$  представляет собой набор таких контуров и, возможно, ребер вида  $\{u_i, u'_i\}$ . Причем каждый контур, проходящий через вершины  $u_1$  и  $u'_1$ , соответствует некоторому орпути в  $D$ . Контуров в  $G$ , не проходящих через  $u_1$  и  $u'_1$ , соответствуют контурам в  $D$ .

Так как граф  $D$  содержит только отрицательные контуры, то оптимальное паросочетание в графе  $G$  с весами  $\mathbf{b}$  может содержать только один контур, проходящий через  $u_1$  и  $u'_1$ , и соответствующий орпути в  $D$  с тем же суммарным весом дуг. ■

**Следствие 4.49.** *Граф полиэдра  $P_{\text{shortpath}}(n+1)$  является подграфом графа многогранника  $P_{\text{Birk}}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

## Глава 5

## Расширенная аффинная сводимость

А если немного ослабить условия?

## 5.1. Теория

В этой главе рассматриваются следствия смягчения способа сравнения многогранников, используемого в предыдущей главе. А именно, слова «аффинно эквивалентен» в определении 3.4 будут заменены на «является аффинным образом».

**Определение 5.1.** Если некоторая грань многогранника  $Q$  или же весь этот многогранник является расширением многогранника  $P$ , будем использовать обозначение  $P \leqslant_E Q$ .

Ряд следствий, вытекающих из соотношения  $P \leqslant_E Q$ , был описан выше, в разделах 2.4.2 и 2.4.3.

Замена  $\leqslant_A$  на  $\leqslant_E$  значительно расширяет возможности сравнения многогранников. Кроме того, во многих случаях доказательство соотношений вида  $P \leqslant_E Q$  принципиально проще, чем соотношений  $P \leqslant_A Q$ . Минусом такого ослабления ограничений является потеря некоторых полезных свойств. В частности, пользуясь соотношением  $P \leqslant_E Q$ , вообще говоря, нельзя сравнивать числа фасет соответствующих многогранников и кликовые числа их графов.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Ранее (см. с. 30) уже упоминался тот факт, что любой многогранник  $P$ , имеющий  $n$  вершин, является аффинным образом симплекса  $\Delta_{n-1}$ . В частности, если  $P$  —  $d$ -мерный 0/1-многогранник, то

$$P \leqslant_E \Delta_n, \quad \text{при } n \geqslant 2^d - 1.$$

Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a < b$ , и  $[a, b]$  — множество целых чисел соответствующего отрезка. Пусть  $k = \lceil \log_2(b - a + 1) \rceil$ , а функция  $\zeta: [a, b] \rightarrow \{0, 1\}^k$  каждому целому  $x \in [a, b]$  ставит в соответствие двоичную запись числа  $x - a$ . Очевидно, эта функция полиномиально вычислима. С другой стороны, обратное преобразование

$$\zeta^{-1}: \mathbf{y} \mapsto a + y_1 + 2y_2 + \dots + 2^{k-1}y_k \quad (5.1)$$

аффинно и тоже полиномиально вычислимо. Как следствие, получаем следующее

**Утверждение 5.1.** Пусть  $X \subseteq S^n$ , где  $S$  — множество целых чисел некоторого отрезка  $[a, b]$ . Тогда существует  $Y \subseteq \{0, 1\}^d$ ,  $d = n \cdot \lceil \log_2(b - a + 1) \rceil$ , что

$$X \leq_E Y.$$

Иными словами, при некоторых, достаточно мягких ограничениях, многогранник с целочисленными вершинами является проекцией 0/1-многогранника.

По аналогии с аффинной сводимостью (определение 3.5) введем понятие расширенной аффинной сводимости на основе отношения  $\leq_E$ . Предварительно напомним, что под размером многогранника подразумевается сумма длины его кода и размерности пространства.

**Определение 5.2.** Будем говорить, что семейство многогранников  $P$  расширенно аффинно сводится к семейству многогранников  $Q$ , если найдутся полиномиально вычисляемые (относительно размера многогранника  $p \in P$ ):

1. Преобразование  $\tau$  кода  $I$  каждого многогранника  $p = p(I) \in P$  в код  $I'$  многогранника  $q = q(I') \in Q$ .
2. Система линейных уравнений  $D\mathbf{y} = \mathbf{c}$ , задающая грань

$$F = \{\mathbf{y} \in q \mid D\mathbf{y} = \mathbf{c}\}$$

многогранника  $q$ .

### 3. Алгоритм построения для каждого кода $I$ аффинного отображения

$$\beta: \mathbb{R}^{d'} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad d = d(I), \quad d' = d'(\tau(I)),$$

такого, что  $p = \beta(F)$ .

Обозначение:  $P \propto_E Q$ .

**Лемма 5.2.** Для любых двух семейств многогранников  $P$  и  $Q$  из  $P \propto_A Q$  следует  $P \propto_E Q$ .

**Доказательство.** В определении 3.5 требуется наличие биективного аффинного отображения  $\alpha: p \rightarrow F$ , а в определении 5.2 — наличие аффинного отображения  $\beta: F \rightarrow p$  и системы линейных уравнений, определяющих грань  $F$ . Если отображение биективно, то переход от одного способа описания к другому можно осуществить за полиномиальное время (см., например, [181]). ■

По аналогии с теоремой 3.10 может быть доказана следующая связь этого типа сводимости с аффинной сводимостью линейных задач комбинаторной оптимизации.

**Теорема 5.3.** Пусть линейная задача комбинаторной оптимизации  $(d, S, g)$  определяет семейство многогранников  $P = \{p(I)\}$ , а задача  $(d', S', g')$  — семейство многогранников  $Q = \{q(I')\}$ . Предположим, что семейство  $P$  расширенно аффинно сводится к  $Q$  и, кроме того, система уравнений  $Dy = c$ , задающая грань соответствующего многогранника  $q \in Q$ , состоит из уравнений гиперплоскостей, опорных к  $q$ . Тогда задача  $(d, S, g)$  с ограничением  $-1 \leq c \leq 1$  аффинно сводится к задаче  $(d', S', g')$ .

Перечислим некоторые очевидные свойства этого типа сводимости, вытекающие из свойств расширений, описанных в разделах 2.4.2 и 2.4.3.

**Теорема 5.4.** Пусть  $P \propto_E Q$ . Тогда задача линейной оптимизации на многогранниках семейства  $P$  полиномиально сводится к задаче линейной оптимизации на многогранниках семейства  $Q$ .

**Теорема 5.5.** Пусть  $P \propto_E Q$ . Предположим, что в семействе  $P$  есть многогранники, имеющие одно или несколько из следующих свойств:

1. Сверхполиномиальность числа вершин (относительно размера многогранника).
2. Сверхполиномиальное число прямоугольного покрытия.
3. Сверхполиномиальная сложность расширения.

Тогда в  $Q$  имеются многогранники с теми же свойствами.

По аналогии с утверждением 5.1 легко доказать следующую теорему.

**Теорема 5.6 (об универсальности 0/1-многогранников).** Пусть четверка  $(L, d, k, g)$  определяет некоторое семейство комбинаторных многогранников  $P$  (см. определение 2.1). Тогда  $P$  расширенно аффинно сводится к семейству комбинаторных 0/1-многогранников, определяемых четверкой  $(L, d', 1, f)$ , где  $d' = d \cdot \lceil \log_2(k+1) \rceil$ ,  $f = f(\mathbf{y}, I) = g(\gamma(\mathbf{y}), I)$ ,  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{d'}$ , а  $\gamma$  — линейная проекция, определяемая по аналогии с формулой (5.1).

Этот факт хорошо известен, и многие исследователи осознанно ограничиваются изучением семейств 0/1-многогранников [115, 155].

Оказывается, универсальность семейства комбинаторных 0/1-многогранников допускает более широкую трактовку.

**Теорема 5.7.** Пусть четверка  $(L, d, k, g)$  определяет некоторое семейство многогранников  $P$ , а предикат допустимости  $g$  принадлежит классу NP. Тогда это семейство расширенно аффинно сводится к некоторому семейству комбинаторных многогранников  $Q$ .

**Доказательство.** Пусть  $g = g(\mathbf{x}, I)$  принадлежит классу NP. Тогда, согласно определению 1.1, существует полином  $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и полиномиально вычисляемый предикат  $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{\text{ложь}, \text{истина}\}$  такие, что

$$g(\mathbf{x}, I) \iff \text{найдется } \mathbf{u} \in \{0, 1\}^{p(d+\text{size}(I))} \text{ такой, что } f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, I).$$

С помощью предиката  $f$  определим многогранники

$$q(I) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \{0, 1, \dots, k\}^d \times \{0, 1\}^{p(d+\text{size}(I))} \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, I) \right\}$$

некоторого комбинаторного семейства многогранников  $Q = \{q(I)\}$ . Остается заметить, что многогранник

$$p(I) = \left\{ \mathbf{x} \in \{0, 1, \dots, k\}^d \mid g(\mathbf{x}, I) \right\}$$

является ортогональной проекцией многогранника  $q(I)$ . ■

Примером семейства многогранников с NP-полным предикатом допустимости могут служить многогранники гамильтоновых графов  $P_{\text{Hgraph}}(n)$  (см. определение на с. 143).

В заключение этого раздела покажем, что соотношение  $P \leq_E Q$  в некоторых случаях можно использовать для сравнения кликовых чисел графов многогранников  $P$  и  $Q$ .

**Теорема 5.8.** Пусть многогранник  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  является образом многогранника  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  при ортогональном проецировании  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $n > d$ . Пусть, кроме того,  $\pi(\text{ext } Q) = \text{ext } P$ . Тогда граф многогранника  $P$  является подграфом графа многогранника  $Q$ .

**Доказательство.** Для каждой вершины  $\mathbf{v} \in \text{ext } P$  определим множество

$$W(\mathbf{v}) = \{ \mathbf{x} \in \text{ext } Q \mid \pi(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \}.$$

Очевидно,  $\text{conv}(W(\mathbf{v}))$  является гранью многогранника  $Q$ . Более того, если множество  $V \subseteq \text{ext } P$  является множеством вершин некоторой грани многогранника  $P$ , то  $\text{conv}\{W(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  — грань многогранника  $Q$ .

Для удобства полагаем, что  $\mathbb{R}^d$  вложено в  $\mathbb{R}^n$ , а проецирование  $\pi$  преобразует  $(x_1, \dots, x_d, \dots, x_n)$  в  $(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$ . Вспомогательный вектор  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  определим следующим образом. Если  $n = d + 1$ , то  $\mathbf{c} = \mathbf{e}_n$ , иначе  $\mathbf{c} = \lambda_{d+1} \mathbf{e}_{d+1} +$

$\dots + \lambda_n \mathbf{e}_n$  и коэффициенты  $\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n$  подобраны так, что для любого  $\mathbf{v} \in \text{ext } P$  и любых двух вершин  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W(\mathbf{v})$  из неравенства  $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$  следует  $\mathbf{c}^T \mathbf{w} \neq \mathbf{c}^T \mathbf{w}'$ . Ясно, что в силу конечности множества вершин многогранника  $Q$  такой вектор  $\mathbf{c}$  существует. С помощью этого вектора в каждом множестве  $W(\mathbf{v})$  выделим уникальную вершину

$$\mathbf{w}_v = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w} \in W(v)} \{\mathbf{c}^T \mathbf{w}\}.$$

Остается показать, что если вершины  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  многогранника  $P$  смежны, то соответствующие вершины

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_{v_1} \quad \text{и} \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_{v_2}$$

тоже смежны.

Предположим, что вершины  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  многогранника  $P$  смежны. Тогда многогранники  $F_1 = \operatorname{conv}(W(\mathbf{v}_1))$  и  $F_2 = \operatorname{conv}(W(\mathbf{v}_2))$ , а также их выпуклая оболочка  $F = \operatorname{conv}(F_1 \cup F_2)$  являются гранями многогранника  $Q$ .

Положим  $\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ . Тогда  $\mathbf{b}^T \mathbf{w} = \mathbf{b}^T \mathbf{w}'$  для любых  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in F_1$ . Аналогично,  $\mathbf{b}^T \mathbf{w} = \mathbf{b}^T \mathbf{w}'$  для любых  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in F_2$ . Кроме того,  $\mathbf{b}^T \mathbf{w}_1 \neq \mathbf{b}^T \mathbf{w}_2$ .

Подберем числа  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ , так, чтобы линейная функция  $f(\mathbf{x}) = \beta \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \gamma \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  принимала одинаковые значения для  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$ . Тогда из определения вектора  $\mathbf{c}$  и вершин  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  следует

$$f(\mathbf{w}_1) = f(\mathbf{w}_2) > f(\mathbf{w}) \quad \text{для всех } \mathbf{w} \in W(\mathbf{v}_1) \cup W(\mathbf{v}_2) \setminus \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}.$$

Следовательно,  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$  — смежные вершины многогранника  $F = \operatorname{conv}(W(\mathbf{v}_1) \cup W(\mathbf{v}_2))$ , являющегося гранью многогранника  $Q$ . ■

**Следствие 5.9.** Пусть многогранник  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  является образом многогранника  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  при аффинном отображении  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Пусть, кроме того,  $\pi(\text{ext } Q) = \text{ext } P$ . Тогда кликовые числа графов этих многогранников связаны соотношением  $\omega(P) \leq \omega(Q)$ .

Особо отметим, что все известные автору настоящей работы естественные примеры расширенной аффинной сводимости (в том числе и перечисленные в этой главе) удовлетворяют условиям этого следствия.

## 5.2. Примеры

По причине существенного ослабления условий, факты расширенной аффинной сводимости встречаются в литературе гораздо чаще, чем факты аффинной сводимости. Перечислим несколько известных примеров:

1. Перестановочный многогранник  $P_{\text{perm}}(n)$  является линейной проекцией многогранника Биркгофа:  $P_{\text{perm}}(n) \leq_E P_{\text{Birk}}(n)$  (см. с. 62).
2. Связь между многогранниками гамильтоновых циклов и многогранниками гамильтоновых контуров упоминалась в разделе 4.5.1:  $P_{\text{TSP}}(n) \leq_E P_{\text{ATSP}}(n)$ .
3. Многогранник совершенных паросочетаний  $P_{\text{match}}(2n)$  является проекцией многогранника гамильтоновых циклов [183]:  $P_{\text{match}}(2n) \leq_E P_{\text{TSP}}(6n)$ .
4. Для любого графа  $G = (V, E)$ ,  $P_{\text{stab}}(G) \leq_E P_{\text{ATSP}}(k)$ , где  $k = 4|E| + |V|$  [183].
5. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует граф  $G = (V, E)$ ,  $|V| = 2n^2$ , такой, что  $P_{\text{BQP}}(n) \leq_E P_{\text{stab}}(G)$  [98] (см. также теорему 3.8).
6. Многогранник задачи о 3-выполнимости  $P_{\text{sat}}(U, C)$  является проекцией грани многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях [48]:  $P_{\text{sat}}(U, C) \leq_E P_{3\text{-A}}(m)$ , где  $m = O(kn)$ ,  $k = |U|$ ,  $n = |C|$ . Причем аффинная сводимость  $P_{\text{sat}} \propto_A P_{3\text{-A}}$  невозможна (см. раздел 4.4.1).
7. Для любого графа  $G = (V, E)$  существует планарный кубический граф  $G' = (V', E')$ ,  $|V'| = O(|E|^2)$ ,  $|E'| = O(|E|^2)$ , что  $P_{\text{stab}}(G) \leq_E P_{\text{stab}}(G')$  [48].



8. Нетрудно заметить, что для любого графа  $G = ([n], E)$  выполнено  $P_{\text{stab}}(G) \leqslant_E P_{\text{BQP}}(n)$ . (Соответствующая грань многогранника  $P_{\text{BQP}}(n)$  лежит в пересечении гиперплоскостей  $x_{ij} = 0$ ,  $\{i, j\} \in E$ .) В то же время, если граф  $G$  неполный, то соотношение  $P_{\text{stab}}(G) \leqslant_A P_{\text{BQP}}(n)$  невозможно ни при каком  $n$  (см. утверждение 3.9).

Ряд следующих утверждений призван продемонстрировать типичные способы доказательства фактов расширенной аффинной сводимости.

Начнем с того, что семейство многогранников задачи о рюкзаке расширенно аффинно сводится к семейству многогранников задачи о рюкзаке с равенством (см. определение на с. 102).

**Лемма 5.10.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  и  $b \in \mathbb{Z}$ . Положим

$$S_{\min} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}, \\ \sum_{i: a_i < 0} a_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$M = \max\{1, b - S_{\min}\}$  и

$$\mathbf{c} = (a_1, \dots, a_n, 1, 2, \dots, 2^k), \quad \text{где } k = \lceil \log_2(M) \rceil.$$

Тогда  $P_{\text{кнп}}(\mathbf{a}, b) \leqslant_E P_{\text{eq}}(\mathbf{c}, b)$ .

**Лемма 5.11.** Для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$  и  $b \in \mathbb{Z}$  выполнено  $P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, b) \leqslant_E P_{\text{BQP}}(n)$ .

**Доказательство.** Уравнение  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  из определения многогранника задачи о рюкзаке с равенством (см. формулу (4.9)) заменим на

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b)^2 = 0,$$

или, что то же самое,

$$\sum_i 2ba_i x_i - \sum_{i,j} a_i a_j x_i x_j = b^2.$$

Очевидно, уравнение

$$\sum_i 2ba_i y_{ii} - \sum_{i,j} a_i a_j y_{ij} = b^2, \quad \text{где } \mathbf{y} = (y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2},$$

определяет опорную гиперплоскость к многограннику  $P_{\text{BQR}}(n)$ . С другой стороны, отображение  $y_{ii} \mapsto x_i$ ,  $i \in [n]$ , проецирует соответствующую грань многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$  на многогранник  $P_{\text{eq}}(\mathbf{a}, b)$ . ■

**Лемма 5.12.**  $P_{\text{ATSP}}(n) \leq_E P_{\text{BQR}}((n-1)^2)$ .

**Доказательство.** Координаты вектора  $\mathbf{y} \in P_{\text{BQR}}((n-1)^2)$  будем обозначать  $y(ij, kl)$ , где  $i, j, k, l \in [n-1]$ ,  $i \leq k$  и если  $i = k$ , то  $j \leq l$ . Согласно определению булева квадратичного многогранника (см. формулу (2.1)),  $y(ij, kl) = y(ij, ij)y(kl, kl)$ .

Очевидно, уравнения

$$y(ij, il) = 0, \quad i, j, l \in [n-1], \quad j < l,$$

задают некоторую грань  $F_1$  этого многогранника. Из этого следует

$$\sum_{j \in [n-1]} y(ij, ij) \leq 1, \quad i \in [n-1], \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in F_1.$$

Положив

$$\sum_{j \in [n-1]} y(ij, ij) = 1, \quad i \in [n-1], \quad (5.2)$$

перейдем к рассмотрению грани  $F_2 \subseteq F_1$ .

Аналогично, уравнения

$$y(ij, kj) = 0, \quad i, j, k \in [n-1], \quad i < k,$$

и

$$\sum_{i \in [n-1]} y(ij, ij) = 1, \quad j \in [n-1], \quad (5.3)$$

задают некоторую грань  $F_3 \subseteq F_2$  многогранника  $P_{\text{BQR}}((n-1)^2)$ .

Таким образом, для каждого  $\mathbf{y} \in F_3$ , согласно уравнениям (5.2) и (5.3), координаты  $y(ij, ij)$ ,  $i, j \in [n-1]$ , образуют квадратную 0/1-матрицу, у которой в

каждой строке и каждом столбце имеется ровно одна единица. В частности, проекция грани  $F_3$  на переменные  $y(ij, ij)$ ,  $i, j \in [n-1]$ , совпадает с многогранником Биркгофа  $P_{\text{Birk}}(n-1)$ .

Для  $x \in P_{\text{ATSP}}(n)$  положим

$$\begin{aligned} x_{n,j} &= y(1j, 1j), & j \in [n-1], \\ x_{j,n} &= y(n-1j, n-1j), & j \in [n-1], \\ x_{j,l} &= \sum_{i \in [n-2]} y(ij, i+1l), & j, l \in [n-1], j \neq l. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что это линейное отображение проецирует  $F_3$  на  $P_{\text{ATSP}}(n)$ . ■

**Лемма 5.13.**  $P_{\text{stab}}(G) \leq_E P_{\text{LO}}(2n)$  для любого графа  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим грань  $F$  многогранника  $P_{\text{LO}}(2n)$ , лежащую в пересечении опорных гиперплоскостей  $x_{i,n+j} = x_{j,n+i} = 0$ ,  $\{i, j\} \in E$ ,  $i < j$ . Тогда из 3-контурных неравенств (см. (4.12))

$$0 \leq x_{i,j} + x_{j,n+i} - x_{i,n+i} \quad \text{и} \quad x_{i,j} + x_{j,n+j} - x_{i,n+j} \leq 1$$

следует  $x_{i,n+i} + x_{j,n+j} \leq 1$ ,  $\{i, j\} \in E$ . То есть отображение  $\alpha: x_{i,n+i} \mapsto y_i$  проецирует грань  $F$  в многогранник  $P_{\text{stab}}(G)$ .

Остается показать, что для каждого  $y \in P_{\text{stab}}(G)$  найдется  $x \in F$  такой, что  $y = \alpha(x)$ .

Выберем произвольно  $y \in P_{\text{stab}}(G)$  и положим

$$I_0 = \{i \in [n] \mid y_i = 0\}, \quad I_1 = \{i \in [n] \mid y_i = 1\}.$$

Далее предполагаем, что элементы множеств  $I_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$  и  $I_1 = \{i'_1, \dots, i'_{n-k}\}$  отсортированы (не важно как). Линейный порядок для соответствующей вершины  $x \in F$  представим перестановкой  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  (см. условие (4.11)). Положим

$$\begin{aligned} \pi(n + i_s) &= s, & \pi(i_s) &= 2n - k + s, & s &\in [k], \\ \pi(n + i'_t) &= n + t, & \pi(i'_t) &= k + t, & t &\in [n - k]. \end{aligned}$$

Из описания перестановки  $\pi$  следует, что  $x_{i_s, n+i_s} = 0$ , при  $s \in [k]$ , а  $x_{i'_t, n+i'_t} = 1$ , при  $t \in [n - k]$ . Причем, если  $x_{i, n+j} = 1$  для некоторых  $i, j \in [n]$ , то  $x_{i, n+i} = x_{j, n+j} = 1$ . То есть из условия  $x_{i, n+i} + x_{j, n+j} \leq 1$  следует  $x_{i, n+j} = x_{j, n+i} = 0$ . ■

Справедливость следующего утверждения очевидна.

**Лемма 5.14.** *Пусть в семействе многогранников  $P$  множество вершин каждого многогранника вычисляется (генерируется) за полиномиальное относительно размера многогранника время. Тогда  $P$  расширенно аффинно сводится к семейству симплексов  $\Delta$ . (Кодом симплекса является множество его вершин.)*

### 5.3. Теорема Кука для многогранников

Пусть  $C$  — булева формула в конъюнктивной нормальной форме (см. определение на с. 34). Обозначим через  $\text{var}(C)$  число переменных, участвующих в этой формуле. Через  $C(\mathbf{x})$  обозначим значение, возвращаемое этой формулой для набора значений переменных  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{\text{var}(C)}$ . Для множества всех таких булевых формул введем обозначение CNF.

Согласно теореме Кука [78], для любого языка  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  из класса NP существует полиномиально вычислимое относительно  $n \in \mathbb{N}$  преобразование  $T = T(n)$ ,  $T(n) \in \text{CNF}$ , такое, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполнено  $\text{var}(T(n)) \geq n$ , а для каждого  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$  справедливо

$$\mathbf{x} \in L \iff \text{найдется } \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{\text{var}(T)-n} \text{ такой, что } T(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — значение, возвращаемое булевой формулой  $T$  при подстановке набора значений переменных  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Доказательство следующей теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 5.7.

**Теорема 5.15.** *Пусть четверка  $(L, d, k, g)$  определяет некоторое семейство многогранников  $P$ , а предикат допустимости  $g$  принадлежит классу NP. Тогда это*

семейство расширенно аффинно сводится к семейству многогранников задачи о выполнимости  $P_{\text{sat}}$ .

В частности, все перечисленные выше семейства многогранников удовлетворяют условиям этой теоремы.

В предыдущей главе было показано, что булевы квадратичные многогранники аффинно сводятся к многим известным семействам многогранников, ассоциированным с NP-трудными задачами. Покажем теперь, что все эти семейства расширенно аффинно сводятся к  $P_{\text{BQR}}$ .

**Теорема 5.16.** Пусть  $U$  — набор булевых переменных,  $C$  — набор дизъюнкций над  $U$ ,  $\text{len}(C)$  — суммарная длина всех дизъюнкций из набора  $C$ , измеряемая в литералах. Тогда

$$P_{\text{sat}}(U, C) \leq_E P_{\text{BQR}}(n), \quad \text{где } n = |U| + \text{len}(C).$$

**Доказательство.** Воспользуемся алгоритмом сведения задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ к задаче КЛИКА из фундаментальной работы Карпа [125].

Вместо множества  $[n]$  для индексации координат  $x_{ij}$  вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{BQR}}(n)$  будем пользоваться множеством

$$R = U \cup \{(a, C_i) \mid C_i \in C, \ a \text{ — литерал, входящий в } C_i\}.$$

Соответственно, координаты вектора  $\mathbf{x} \in P_{\text{BQR}}(n)$  обозначаем  $x(r, r')$ ,  $r, r' \in R$ . В частности,  $x(r, r') = x(r, r)x(r', r')$  для всех  $\mathbf{x} \in P_{\text{BQR}}(n)$ .

Рассмотрим подмножество вершин  $F$  многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$ , удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$x((u, C_i), (u, C_i)) \leq x(u, u), \quad C_i \in C, \quad u \in C_i, \quad (5.4)$$

$$x(u, u) \cdot x((\bar{u}, C_i), (\bar{u}, C_i)) = 0, \quad C_i \in C, \quad \bar{u} \in C_i, \quad (5.5)$$

$$x((u, C_i), (u, C_i)) \cdot x((\bar{u}, C_j), (\bar{u}, C_j)) = 0, \quad C_i, C_j \in C, \quad u \in C_i, \quad \bar{u} \in C_j, \quad (5.6)$$

$$\sum_{a \in C_i} x((a, C_i), (a, C_i)) = 1, \quad C_i \in C. \quad (5.7)$$

Заметим, что  $F$  является гранью многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$  (точнее,  $\text{conv}(F)$  является гранью  $\text{conv}(P_{\text{BQR}}(n))$ ), так как каждое из этих ограничений эквивалентно принадлежности к некоторой опорной гиперплоскости. А именно, неравенство (5.4) соответствует опорной гиперплоскости  $x((u, C_i), (u, C_i)) = x(u, (u, C_i))$ , ограничение (5.5) соответствует опорной гиперплоскости  $x(u, (\bar{u}, C_i)) = 0$ , а (5.6) соответствует  $x((u, C_i), (\bar{u}, C_j)) = 0$ . В свою очередь, уравнение (5.7) определяется гиперплоскостью

$$\sum_{a \in C_i} x((a, C_i), (a, C_i)) - 2 \sum_{\substack{a, b \in C_i, \\ a \neq b}} x((a, C_i), (b, C_i)) = 1.$$

Обозначая координаты вектора  $y \in P_{\text{sat}}(U, C)$  через  $y(u)$ ,  $u \in U$ , рассмотрим аффинное отображение  $\beta: x(u, u) \mapsto y(u)$ , проецирующее грань  $F$  на  $P_{\text{sat}}(U, C)$ . Включение  $\beta(F) \subseteq P_{\text{sat}}(U, C)$  следует из того, что любой  $x \in P_{\text{BQR}}(n)$ , удовлетворяющий ограничениям (5.4)–(5.7), соответствует некоторому набору значений переменных  $U$ , выполняющему каждую дизъюнкцию из  $C$ . Обратное включение следует из того, что для любого набора значений переменных  $U$ , выполняющего  $C$ , несложно построить пример вектора  $x \in F$ , координаты  $x(u, u)$  которого принимают значения соответствующих переменных. ■

## Глава 6

**Циклические многогранники**

Циклические многогранники обладают максимальным числом граней среди всех выпуклых многогранников той же размерности и с таким же числом вершин.

*П. МакМюллен*

**6.1. Определение и свойства**

В этом разделе приводится определение циклических многогранников и перечисляются их некоторые свойства. Более подробную информацию о циклических многогранниках можно найти в [110] и [41].

Пусть  $T = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Зафиксируем  $d \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq d < n$ , и введем обозначение

$$\mathbf{x}(i) := (t_i, t_i^2, \dots, t_i^d) \in \mathbb{R}^d, \quad i \in [n]. \quad (6.1)$$

Сформулируем определение циклического многогранника (см. с. 25) с использованием новых обозначений. *Циклическим многогранником* называется выпуклая оболочка множества

$$C_d(T) := \{\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n)\}.$$

Причем  $C_d(T)$  — множество вершин этого многогранника. Число  $i \in [n]$  будем называть *номером вершины*  $\mathbf{x}(i)$ .

**Теорема 6.1 (условие четности Гейла [101]).** *Многогранник  $C_d(T)$  симплициа-лен, то есть каждая его гипергрань содержит ровно  $d$  вершин. Причем подмножество вершин с номерами из  $S \subset [n]$ ,  $|S| = d$ , образует гипергрань тогда*

и только тогда, когда выполнено «условие четности»:

мощность множества  $[k_1, k_2] \cap S$  четна для всех  $k_1, k_2 \in [n] \setminus S$ ,  $k_1 < k_2$ .

Для  $n = 7$  примерами множеств, удовлетворяющих условию четности, могут служить  $\{1, 5, 6\}$ ,  $\{1, 7\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5\}$  и  $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ . Таким образом, множество  $S \subset [n]$ , удовлетворяющее условию четности, однозначно разбивается на пары вида  $\{i, i + 1\}$  и, быть может, элементы 1 и  $n$ .

Доказательство справедливости условия четности Гейла опирается на следующие факты:

1. Для любого  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$  значения линейной функции  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$  в точках  $\mathbf{x}(i)$ ,  $i \in [n]$ , множества  $C_d(T)$  совпадают со значениями многочлена  $f(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d$  в точках  $t_i$ . То есть уравнение вида  $f(t) = b$  задает гиперплоскость  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ .

2. Многочлен вида

$$f(t) = (t - t_1)(t_n - t) \prod_{i \in I} ((t - t_i)(t - t_{i+1})), \quad I \subset [n], \quad (6.2)$$

принимает нулевые значения в точках  $t_1, t_n, t_i, t_{i+1}$ ,  $i \in I$ , и положительные значения в остальных точках из  $T$ .

Таким образом, для каждого множества, удовлетворяющего условию четности, можно построить многочлен вида (6.2), определяющий гиперплоскость  $f(t) = 0$ , опорную для  $C_d(T)$ .

## 6.2. Компактная расширенная формулировка

Пусть, как и прежде,  $T = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $d \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq d < n$ . В этом разделе мы ограничиваемся рассмотрением только тех случаев, когда  $t_{i+1} = t_i + 1$  для всех  $i \in [n - 1]$ , и будем пользоваться более подходящим обозначением

$$C_{d,n}(t_1) := C_d(T).$$



Заметим, что многогранники  $C_{d,n}(t)$  и  $C_{d,n}(s)$  аффинно изоморфны для любых  $t, s \in \mathbb{R}$ . А именно, из бинома  $(t + (s - t))^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (s - t)^{i-j} t^j$  получаем следующее аффинное отображение, определяющее изоморфизм между  $C_{d,n}(t)$  и  $C_{d,n}(s)$ :

$$y_i := (s - t)^i + \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (s - t)^{i-j} x_j, \quad (6.3)$$

где  $(x_1, \dots, x_d) \in C_{d,n}(t)$ ,  $(y_1, \dots, y_d) \in C_{d,n}(s)$ .

Согласно только что сделанному замечанию, мы будем пользоваться кратким обозначением  $C_{d,n}$  в тех случаях, когда выбор начального значения не влияет на результат рассуждений.

### 6.2.1. Случай $d = 2$

**Лемма 6.2.**  $xc(C_{2,n}(t)) \leq 2\lfloor \log_2(n - 1) \rfloor + 2$ , где  $n \geq 3$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Согласно (6.3), многогранник  $C_{2,n}(t)$  можно аффинно преобразовать в многогранник

$$C_{2,n}(-(n - 1)/2).$$

В свою очередь, для каждого  $k \in \mathbb{N}$  многогранник  $C_{2,2k+1}(-k)$  может быть представлен как выпуклая оболочка двух многогранников  $C_{2,k+1}(-k)$  и  $C_{2,k+1}(0)$ :

$$C_{2,2k+1}(-k) = \text{conv}(C_{2,k+1}(-k) \cup C_{2,k+1}(0)).$$

Аналогичное представление существует и для многогранника  $C_{2,2k}(-k + 1/2)$ :

$$C_{2,2k}(-k + 1/2) = \text{conv}(C_{2,k}(-k + 1/2) \cup C_{2,k}(1/2)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся тем, что многогранник  $C_{2,k+1}(-k)$  является образом многогранника  $C_{2,k+1}(0)$  при зеркальном отражении относительно гиперплоскости  $x_1 = 0$  (отображение определяется сменой знака первой координаты). То же верно и в отношении  $C_{2,k}(-k + 1/2)$  и  $C_{2,k}(1/2)$ .

Этот факт позволяет на основе свойства зеркальной симметрии (см. Theorem 2 в [120]) и (6.3) сделать вывод о том, что каждая расширенная формулировка размера  $h$  для многогранника  $C_{2,\lceil n/2 \rceil}$  определяет расширенную формулировку размера  $(h + 2)$  для  $C_{2,n}$ . В частности, расширенная формулировка для  $C_{2,2k+1}(-k)$  может быть такой:

$$C_{2,2k+1}(-k) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{найдется } z_1, \text{ что } (z_1, x_2) \in C_{2,k+1}(0) \text{ и } -z_1 \leq x_1 \leq z_1\}.$$

Таким образом,  $\text{xc}(C_{2k+1}) \leq \text{xc}(C_{k+1}) + 2$  и  $\text{xc}(C_{2k}) \leq \text{xc}(C_k) + 2$ .

Неравенство  $\text{xc}(C_{2,n}) \leq 2\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 2$  легко проверяется для  $n = 3, 4, 5$ . Следовательно, для завершения доказательства достаточно воспользоваться неравенствами

$$\text{xc}(C_{2,2k}) \leq \text{xc}(C_{2,k}) + 2 \leq 2\lfloor \log_2(k-1) \rfloor + 4 = 2\lfloor \log_2(2k-2) \rfloor + 2$$

и

$$\text{xc}(C_{2,2k-1}) \leq \text{xc}(C_{2,k}) + 2 \leq 2\lfloor \log_2(k-1) \rfloor + 4 = 2\lfloor \log_2((2k-1)-1) \rfloor + 2.$$

Таким образом,

$$\text{xc}(C_{2,n}) \leq 2\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 2$$

для всех  $n \geq 3$ . ■

**Замечание 6.1.** Более аккуратный разбор финальной части доказательства леммы 6.2 позволяет улучшить верхнюю оценку сложности расширения до

$$\text{xc}(C_{2,n}) \leq 2\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 1 + \delta_n,$$

где  $\delta_n = 0$ , если найдется  $k \in \mathbb{N}$  такое, что  $2^k < n \leq 3 \cdot 2^{k-1}$ , и  $\delta_n = 1$  в остальных случаях.

### 6.2.2. Случай $d \geq 3$

К сожалению, при  $d \geq 3$  взаимосвязь между многогранниками  $C_{d,k+1}(-k)$  и  $C_{d,k+1}(0)$  не так проста: многогранник  $C_{d,k+1}(-k)$  является образом  $C_{d,k+1}(0)$

при смене знака координат с нечетным индексом. Это не соответствует симметрии относительно гиперплоскости и, следовательно, мы не можем воспользоваться свойствами зеркальной симметрии.

Однако, мы можем воспользоваться теоремой Яннакакиса (теорема 2.8 на с. 66) и низкоранговой неотрицательной факторизацией матрицы невязок (см. определения 2.2 и 2.3) многогранника  $C_{2,n}$ , гарантируемой Леммой 6.2.

Строки матрицы невязок  $M_{d,n}$  многогранника  $C_{d,n}(t)$  будем индексировать элементами из  $[n]$ , а столбцы — множествами  $S \subset [n]$ ,  $|S| = d$ , удовлетворяющими условию четности Гейла. Согласно приведенным выше рассуждениям (см. формулу (6.2) и комментарии к ней), эта матрица может быть представлена как

$$M_{d,n}(i, S) := \prod_{j \in S} |t_j - t_i|, \quad (6.4)$$

где  $i \in [n]$  и  $S \subseteq [n]$ ,  $|S| = d$ , удовлетворяет условию четности Гейла. В частности, матрица невязок не зависит от начального параметра  $t$  в определении многогранника  $C_{d,n}(t)$ , так как он не меняет разности  $t_j - t_i$ .

Перечислим некоторые очевидные свойства неотрицательного ранга матрицы.

**Свойство 6.3.** *Следующие операции над строками (столбцами) матрицы не увеличивают ее неотрицательный ранг:*

1. *Перестановка строк (столбцов).*
2. *Дублирование строки (столбца).*
3. *Удаление строки (столбца).*
4. *Умножение строки (столбца) на неотрицательное число.*
5. *Добавление в матрицу новой строки (столбца), равной(ого) конической комбинации строк (столбцов).*

**Свойство 6.4.** Пусть  $M \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$  и  $S \subseteq [n]$ . Пусть  $M_1$  — подматрица матрицы  $M$ , составленная из столбцов с номерами из  $S$ , а  $M_2$  — подматрица, составленная из столбцов с номерами из  $[n] \setminus S$ . Тогда

$$\text{rank}_+(M) \leq \text{rank}_+(M_1) + \text{rank}_+(M_2).$$

Для двух матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера, определим поэлементное произведение  $A \circ B$  с помощью уравнения  $(A \circ B)(i, j) := A(i, j)B(i, j)$ . Кроме перечисленных выше свойств нам понадобится следующий факт.

**Лемма 6.5 ([57, 96]).** Для любых двух матриц  $A$  и  $B$  с одинаковым числом строк и столбцов,

$$\text{rank}_+(A \circ B) \leq \text{rank}_+(A) \text{rank}_+(B).$$

Перейдем непосредственно к доказательству основного утверждения этого раздела. Прежде всего рассмотрим четную размерность, положив  $d = 2q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

**Лемма 6.6.**  $\text{xc}(C_{2q,n}) \leq (\text{xc}(C_{2,n}))^q$  при  $q, n \in \mathbb{N}$ ,  $2q < n$ .

**Доказательство.** Мы построим  $q$  матриц  $B_1, \dots, B_q$  таких, что поэлементное произведение  $B_1 \circ \dots \circ B_q$  равно матрице невязок  $M_{2q,n}$ . С этой целью заметим, что каждое множество  $S \subseteq [n]$ ,  $|S| = 2q$ , удовлетворяющее условию четности Гейла, может быть разбито на  $q$  пар  $S_1, \dots, S_q$ , где каждая пара либо равна  $\{1, n\}$ , либо состоит из двух последовательных целых. Каждое множество  $S_r$ ,  $1 \leq r \leq q$ , также удовлетворяет условию четности Гейла и состоит из двух элементов. Следовательно, для каждого  $S_r$  найдется соответствующий столбец в  $M_{2,n}$  такой, что

$$M_{2,n}(i, S_r) = \prod_{j \in S_r} |j - i|.$$

Теперь определим ячейки матриц  $B_1, \dots, B_q$  в столбце, индексированном множеством  $S$ , как  $B_r(i, S) := M_{2,n}(i, S_r)$ . Заметим, что

$$(B_1 \circ \dots \circ B_q)(i, S) = \prod_{r=1}^q \prod_{j \in S_r} |j - i| = \prod_{j \in S} |j - i| = M_{2q,n}(i, S).$$

Несложно проверить, что матрицы  $B_1, \dots, B_q$  получены из  $M_{2,n}$  за счет дублирования, удаления и перестановки столбцов. Следовательно, согласно свойству 6.3, неотрицательный ранг каждой из этих матриц ограничен сверху неотрицательным рангом матрицы  $M_{2,n}$ . Таким образом, согласно лемме 6.5, матрица невязок  $M_{2q,n}$  допускает неотрицательную факторизацию размера  $(\text{xc}(C_{2,n}))^q$ . ■

**Лемма 6.7.**  $\text{xc}(C_{2q+1,n}) \leq 2 \text{xc}(C_{2q,n-1})$  при  $q, n \in \mathbb{N}$ ,  $2q + 1 < n$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $\text{xc}(C_{2q+1,n}(1)) \leq \text{xc}(C_{2q,n-1}(2)) + \text{xc}(C_{2q,n-1}(1)) = 2 \text{xc}(C_{2q,n-1})$ .

Для каждого множества  $S \subseteq [n]$ ,  $|S| = 2q + 1$ , удовлетворяющего условию четности Гейла, выполняется ровно одно из двух условий:

1.  $n \in S$  и множество  $S \setminus \{n\}$  определяет гипергрань многогранника  $C_{2q,n-1}(1)$ .
2.  $1 \in S$  и множество  $S \setminus \{1\}$  определяет гипергрань многогранника  $C_{2q,n-1}(2)$ .

Разобьем матрицу невязок  $M_{2q+1,n}$  на две подматрицы. Подматрица  $M_1$  будет состоять из столбцов, удовлетворяющих условию 1, а подматрица  $M_2$  — из столбцов, удовлетворяющих условию 2. Согласно свойству 6.4,

$$\text{rank}_+(M_{2q+1,n}) \leq \text{rank}_+(M_1) + \text{rank}_+(M_2).$$

Прежде всего заметим, что последняя строка матрицы  $M_1$  и первая строка матрицы  $M_2$  состоят из нулей. Для  $i \in [n - 1]$ ,  $i$ -я строка матрицы  $M_1$  равна  $i$ -ой строке матрицы  $M_{2q,n-1}$ , умноженной на положительное число  $n - i$ . Таким образом,  $\text{rank}_+(M_1) = \text{rank}_+(M_{2q,n-1})$ . Аналогично, при  $i \in [2, n]$ ,  $i$ -я строка матрицы  $M_2$  равна  $(i - 1)$ -ой строке матрицы  $M_{2q,n-1}$ , умноженной на положительное число  $i - 1$ . Следовательно,  $\text{rank}_+(M_2) = \text{rank}_+(M_{2q,n-1})$ . ■

Из лемм 6.2, 6.6 и 6.7 следует

**Теорема 6.8.**  $\text{xc}(C_{d,n}) \leq 2(2\lfloor \log_2(n - 1) \rfloor + 2)^{\lfloor d/2 \rfloor}$  при  $2 \leq d < n$ .

Отметим, что лемма 6.2 существенно использует тот факт, что  $C_{2,n}$  является выпуклой оболочкой точек  $(i, i^2)$  для  $n$  последовательных целых  $i \in [n]$ . В действительности, в [99] доказано, что среди двумерных циклических многогранников вида  $P = \text{conv}\{(i, i^2) \mid i \in X\}$ , где  $X \subseteq [2n]$  и  $|X| = n$ , есть такие, сложность расширенной формулировки которых ограничена снизу величиной  $\Omega(\sqrt{n}/\sqrt{\log n})$ .

### 6.2.3. Алгоритм факторизации матрицы невязок для $d = 2$

В этом разделе для матрицы невязок  $M_{2,n}$  описана явная неотрицательная факторизация размера  $2\lceil \log(n-1) \rceil + 1$ . Эта факторизация похожа на ту, что описана в [99] для матрицы невязок правильного многоугольника.

Согласно определению матрицы невязок циклического многогранника  $C_{2,n}$ ,

$$M_{2,n}(i, j) = \begin{cases} (i-j)(i-j-1), & \text{при } j < n, \\ (i-1)(n-i), & \text{при } j = n. \end{cases}$$

При  $j \in [n-1]$ ,  $j$ -ый столбец этой матрицы соответствует множеству  $\{j, j+1\}$ , а  $n$ -ый столбец — множеству  $\{1, n\}$ .

В частности,

$$M_{2,8} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 10 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 30 & 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вся процедура вычисления факторизации состоит из двух последовательно выполняемых алгоритмов. Прежде всего, с помощью алгоритма 1, инициализи-

руется массив удвоенных осей симметрии  $A$ , длины  $q = \lceil \log(n-1) \rceil$ , и вычисляется левый множитель факторизации  $T \in \mathbb{R}_+^{n \times (2q+1)}$ . Далее, используя массив  $A$ , алгоритм 2 вычисляет правый множитель факторизации  $U \in \mathbb{R}_+^{(2q+1) \times n}$ .

Результат применения этого алгоритма для  $n = 8$  выглядит так:

$$M_{2,8} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Алгоритм 1.** Левый множитель факторизации матрицы  $M_{2,n}$ 


---

**Вход** : число вершин  $n$

**Выход:** левый множитель факторизации  $T$ , массив удвоенных осей симметрии  $A$  и его длина  $q$

// Заполняем массив  $A$

1  $k := n - 1$

2  $q := 0$

3 **делай**

4      $A[q] := k$

5      $k := \lfloor (k + 1)/2 \rfloor$

6      $q := q + 1$

7 **пока**  $k > 1$

// Вычисляем левый множитель  $T$

8 **для**  $i := 0$  **до**  $n - 1$  :

9      $x := i$

10    **для**  $j := 0$  **до**  $q - 1$  :

11        $r := 2x - A[j]$

12       **если**  $r > 0$  **то**

13            $x := x - r$

14            $T[i, 2j] := r$

15            $T[i, 2j + 1] := 0$

16       **иначе**

17            $T[i, 2j] := 0$

18            $T[i, 2j + 1] := -r$

19       **конец если**

20    **конец цикла**

21     $T[i, 2q] := i \cdot (n - 1 - i)$                       // Заполняем последний столбец

22 **конец цикла**

---



---

**Алгоритм 2.** Правый множитель факторизации матрицы  $M_{2,n}$ 


---

**Вход** : число вершин  $n$ , массив осей симметрии  $A$  и его длина  $q$

**Выход:** правый множитель факторизации  $U$

```

1  для  $i := 0$  до  $n - 2$  :
2       $x := i + 1$ 
3      для  $j := 0$  до  $q - 1$  :
4           $r := 2x - A[j] - 1$ 
5          если  $r > 0$  то
6               $x := x - r$ 
7               $U[2j, i] := 0$ 
8               $U[2j+1, i] := r$ 
9          иначе
10              $U[2j, i] := -r$ 
11              $U[2j+1, i] := 0$ 
12         конец если
13     конец цикла
14      $U[2q, i] := 0$                                      // Заполняем последнюю строку
15 конец цикла

    // Заполняем последний столбец
16 для  $j := 0$  до  $2q - 1$  :
17      $U[j, n-1] := 0$ 
18 конец цикла
19  $U[2q, n-1] := 1$ 

```

---

### 6.3. Диаметр ридж-графа циклического многогранника

Ридж-граф  $d$ -мерного многогранника определяется следующим образом (см. с. 24). Его вершины соответствуют гиперграням многогранника, и две вершины соединены ребром ридж-графа, если соответствующие гиперграницы  $((d-1)$ -границы) имеют общий ридж  $((d-2)$ -грань). Таким образом, ридж-граф многогранника является, по-существу, графом двойственного к данному многогранника.

Так как комбинаторная структура циклического многогранника зависит только от его размерности  $d$  и числа вершин  $n$ , в этом разделе мы будем обозначать его  $C(d, n)$ . Из свойств циклического многогранника следует, что двойственный к нему многогранник  $C^*(d, n)$  является простым и обладает максимальным числом вершин среди всех  $d$ -мерных многогранников, имеющих  $n$  гиперграней. Эти обстоятельства вселяли надежду на то, что, кроме всего прочего,  $C^*(d, n)$  окажется примером многогранника с наибольшим диаметром графа. К сожалению, уже для  $d = 4$  и  $n = 9$  их диаметр равен 4, в то время как в работе [131] приводится пример 4-многогранника с тем же числом гиперграней и диаметром графа равным 5 (позднее было показано [45], что это единственный, с точностью до комбинаторной эквивалентности, для данных  $d = 4$  и  $n = 9$  пример многогранника с диаметром 5). Обозначим

$$\Delta_c(d, n) = \text{diam } C^*(d, n).$$

В 1964 году В. Кли показал [129], что гипотеза Хирша справедлива для  $C^*(d, n)$ :

$$\Delta_c(d, n) \leq n - d, \tag{6.5}$$

а при  $d < n \leq 2d$  в (6.5) выполняется равенство. Там же было высказано предположение о том, что для  $n > 2d$  выполнено равенство  $\Delta_c(d, n) = \lfloor n/2 \rfloor$  (чуть позже в [131] было показано, что оно неверно). Но даже эти результаты ввиду недоступности (на момент публикации основного результата этого раздела — теоремы 6.9) работы [129] настолько плохо известны, что по прошествии более

30 лет делаются попытки нахождения величины  $\Delta_c(d, n)$  для  $n = 2d$  с помощью вычислительной техники [93], а в работе [134] при упоминании факта (6.5) приводится ссылка на работу [130], не содержащую этого результата.

**Теорема 6.9.** *Диаметр  $\Delta_c(d, n)$  ридж-графа циклического многогранника  $C(d, n)$  вычисляется по формуле:*

$$\Delta_c(d, n) = \begin{cases} n - d & \text{при } d < n \leq 2d, \\ n - d - \left\lfloor \frac{n-2d}{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} \right\rfloor & \text{при } n > 2d. \end{cases}$$

**Доказательство.** Справедливость теоремы для  $d < n \leq 2d$  доказана В. Кли [129]. Поэтому далее будем предполагать, что

$$n > 2d.$$

Обозначим множество вершин многогранника  $C(d, n)$  через  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ , предполагая, что вершины пронумерованы в порядке возрастания параметра  $t$ :  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .

Проведем доказательство теоремы для случая четной размерности:

$$d = 2k.$$

Покажем, что

$$\Delta_c(d, n) \leq n - d - \frac{n - 2d}{k + 1} \quad (6.6)$$

и приведем пример двух гиперграней циклического многогранника, расстояние между которыми равно целой части от (6.6).

Из критерия Гейла следует, что множество вершин каждой гиперграни всегда можно единственным образом разбить на  $k$  непересекающихся пар вида

$$\{x^i, x^{i+1}\},$$

где  $i \in [n]$  и сложение  $i + 1$  выполняется по модулю  $n$  (если  $i = n$ , то  $i + 1 = 1$ ).

И, наоборот, любое подмножество  $Y \subset X$  вида

$$Y = \{x^{i_1}, x^{i_1+1}, x^{i_2}, x^{i_2+1}, \dots, x^{i_k}, x^{i_k+1}\}$$

есть множество вершин некоторой гиперграницы.

Для наглядности дальнейшего изложения каждой вершине  $x^i$  поставим в соответствие точку  $v_i$  на окружности единичного радиуса:

$$v_i = (\cos(2\pi i/n), \sin(2\pi i/n)).$$

Две точки  $v_i$  и  $v_{i+1}$  будем называть *парой*, и обозначать  $p_i$ . А множество всех таких пар для  $i \in [n]$  обозначим  $\mathcal{P}$ .

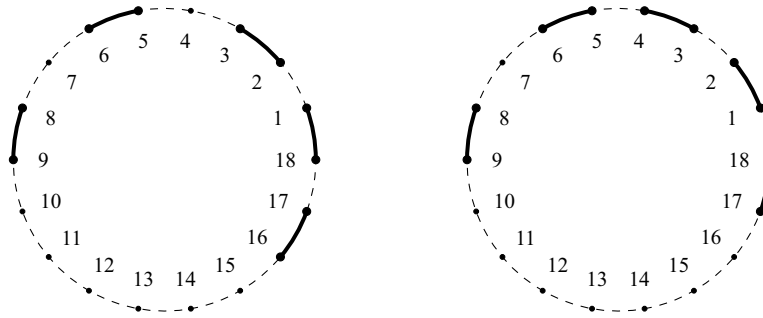


Рис. 6.1. Две смежные гиперграницы многогранника  $C(10, 18)$ .

Предположим, что вершины некоторой гиперграницы заданы набором из  $k$  пар. Тогда переход к смежной гипергранице означает сдвиг одной или нескольких примыкающих друг к другу пар на одну точку вдоль окружности (см. рис. 6.1). (Из симплициальности циклического многогранника следует, что две его гиперграницы смежны, если они имеют ровно  $d - 1$  общих вершин.) Иными словами, чтобы перейти к любой смежной гипергранице, достаточно выбрать одну из  $k$  пар и направление смещения (по часовой или против часовой стрелки), при этом, если на пути смещения пары находится другая пара, то она смещается в том же направлении, что и первая, и т. д. Далее будем пользоваться следующим правилом.

**Правило смещения.** При смещении пара может одновременно продвигать и нескольких примыкающих соседей, лежащих у нее на пути, но не может пересекаться с другой парой.

Итак, задача вычисления расстояния между вершинами в ридж-графе циклического многогранника сводится к следующей. На окружности с  $n$  точками выбраны  $k$  пар точек, определяющих вершины первой гиперграницы, далее называем их *фишками*, и отмечены  $k$  пар, соответствующих вершинам второй гиперграницы, далее называем их *ячейками* (см. рис. 6.2). Требуется найти наименьшее число «правильных» смещений фишек, достаточное для того, чтобы все ячейки были заняты фишками. Обозначим это число  $l(F_1, F_2)$ , здесь  $F_1$  — это множество фишек, а  $F_2$  — множество ячеек,  $F_1, F_2 \subset \mathcal{P}$ .

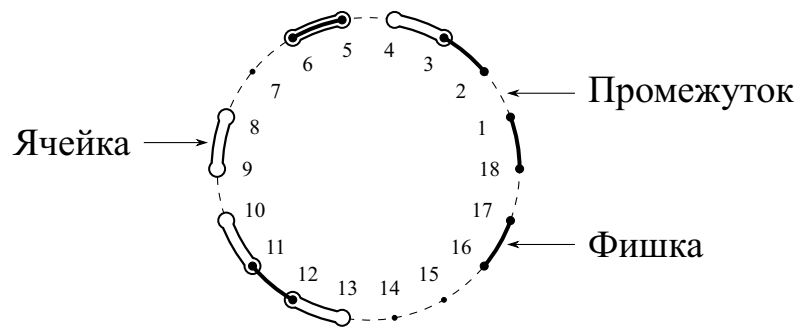


Рис. 6.2. Пример гиперграней  $F_1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 16, 17, 18\}$  (фишки) и  $F_2 = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$  (ячейки) многогранника  $C(10, 18)$ .

Каждой паре из множества  $\mathcal{P} \setminus (F_1 \cup F_2)$  поставим в соответствие дугу окружности между точками  $v_i$  и  $v_{i+1}$ , не содержащую самих этих точек. Назовем такую дугу *промежутком* (см. рис. 6.2) и будем обозначать  $a_i$ . А множество всех промежутков обозначим через  $A$ . Так как на окружности расположено  $k$  фишек и  $k$  ячеек, то  $|A| \geq n - 2k > 0$ . Подмножество  $W \subseteq A$  назовем *свободной дугой*, если найдутся  $i, j \in [n]$  такие, что  $W = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$ , причем  $a_{i-1}$  и  $a_{j+1}$  не входят в  $A$ . Здесь, как и ранее, при вычислении индексов сложение выполняется по модулю  $n$ . Ясно, что  $A$  представимо единственным образом в форме

$$A = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s, \text{ где } 0 < s \leq 2k = d, \quad (6.7)$$

$W_i$  — свободные дуги. Определим длину  $l(W)$  свободной дуги  $W$  как число точек

$v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), содержащихся внутри нее:

$$l(W) = |W| - 1.$$

Тогда суммарная длина свободных дуг равна числу вершин, не принадлежащих ни одной из двух выбранных гиперграней, и

$$\sum_{i=1}^s l(W_i) \geq n - 2d.$$

**Лемма 6.10.** *Предположим, что из окружности вырезана свободная дуга  $W$  вместе с содержащимися внутри нее точками, и фишкам из  $F_1$  запрещено передвигаться через эту брешь. Тогда*

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - l(W).$$

**Доказательство.** При каждом правильном смещении от фишек освобождается ровно одна точка, и ровно одна точка становится занятой. Заметим, что при оптимальном передвижении фишек однажды освободившаяся точка не может быть занята вновь. Чтобы убедиться в этом, предположим противное. Тогда возможны два варианта:

1. Фишка, освободившая точку, заняла ее вновь. Но тогда неоптимальность перемещений очевидна.
2. Фишка, занявшая точку, сместилась в том же направлении, что и фишка, освободившая эту точку. Но тогда эти два смещения (освобождение и занятие данной точки) можно было бы сделать за один шаг.

Таким образом оптимальное число смещений не может превышать числа всех точек не занятых фишками. ■

Непосредственно из леммы 6.10 следует неравенство

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - \max_{1 \leq i \leq s} l(W_i).$$

В частности, с его помощью легко доказать теорему для  $d < n \leq 2d$ . Достаточно привести пример двух гиперграней, имеющих  $2d - n$  общих вершин. Очевидно, что число сближающих смещений для них будет равно  $n - d$ .

Под фразой «между свободными дугами  $W_i$  и  $W_j$ » будем понимать тот участок окружности, который будет пройден при движении против часовой стрелки от  $W_i$  к  $W_j$ . Введем вспомогательную функцию  $f(i, j)$  равную числу фишек, расположенных между  $W_i$  и  $W_j$ , минус число ячеек на этом же участке. Эта функция обладает следующими свойствами.

*Свойство 1.*  $f(i, j) = -f(j, i)$ .

*Свойство 2.*  $f(i, j) = f(i, m) + f(m, j)$ .

*Свойство 3 (непрерывность).* Если  $f(i, j) > 1$ , то между  $W_i$  и  $W_j$  найдется  $W_m$ , что  $f(i, m) = 1$ .

Если для некоторых  $i$  и  $j$  выполнено  $f(i, j) = 0$ , то  $W_i$  и  $W_j$  назовем *смежными*.

*Свойство 4 (транзитивность).* Если  $W_i$  и  $W_j$  смежны, и  $W_j$  и  $W_m$  смежны, то  $W_i$  и  $W_m$  тоже смежны.

Пусть  $W_i$  и  $W_j$  смежны. Тогда, вырезав их из окружности и применив лемму 6.10 для каждой из двух образовавшихся дуг, получаем

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - l(W_i) - l(W_j).$$

Аналогично мы можем поступить и с несколькими попарно смежными свободными дугами.

Пользуясь этим, разобьем множество всех свободных дуг на подмножества  $S_i$  так, чтобы все свободные дуги принадлежащие одному подмножеству были попарно смежны и, в то же время, любые две свободные дуги из разных подмножеств были бы несмежны. Подмножества  $S_i$  будем называть *разрезами* (см. рис. 6.3). Под длиной  $l(S)$  разреза  $S$  будем понимать суммарную длину входящих в него свободных дуг. Тогда, очевидно,

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - \max_{1 \leq i \leq t} l(S_i),$$

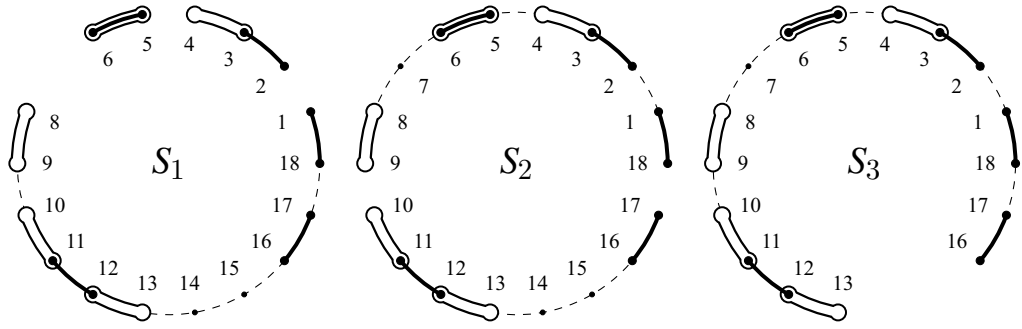


Рис. 6.3. Три разреза для рис. 6.2:  $l(S_1) = 1$ ,  $l(S_2) = 0$ ,  $l(S_3) = 2$ .

где  $t$  — число всех разрезов. И, так как

$$\sum_{j=1}^t l(S_j) = \sum_{i=1}^s l(W_i) \geq n - 2d,$$

то

$$l(F_1, F_2) \leq n - d - \frac{n - 2d}{t}.$$

Остается доказать, что

$$t \leq k + 1, \quad (6.8)$$

где  $k = \frac{d}{2}$ . Из формулы (6.7) известно, что число всех свободных дуг  $s \leq d$ . Поэтому, чтобы установить справедливость неравенства (6.8), достаточно показать, что среди всех разрезов найдется не более двух, содержащих ровно по одной свободной дуге.

Пусть разрез  $S'$  содержит одну единственную свободную дугу  $W_{i'}$ . Это означает, что для любого  $j \neq i'$ , выполнено

$$f(i', j) \neq 0. \quad (6.9)$$

И тогда, в силу свойства 3 (непрерывность), для любого  $m \neq i'$

$$f(i', j)f(i', m) > 0.$$

То есть функция  $g(j) = f(i', j)$  для всех  $j$  принимает значения одного знака.



Рассмотрим еще один разрез  $S''$ , содержащий лишь одну свободную дугу  $W_{i''}$ ,  $i'' \neq i'$ . Покажем, что для любых  $j \neq i'$  и  $m \neq i''$  выполнено

$$f(i', j)f(i'', m) < 0.$$

Действуя от противного, предположим, что для некоторых  $j$  и  $m$

$$f(i', j)f(i'', m) > 0.$$

(Равенство здесь исключается в силу формулы (6.9) и аналогичного утверждения для  $i''$ ). Но тогда это неравенство справедливо и при  $j = i''$  и  $m = i'$ , что невозможно в силу свойства 1. Итак, среди всех разрезов найдется не более двух, содержащих ровно по одной свободной дуге, и неравенство (6.8), а вместе с ним и неравенство (6.6), доказаны.

На рисунке 6.4 приводятся примеры гиперграней, расстояние между которыми равно наибольшему целому, не превосходящему правой части (6.6). В работе [131] тоже можно увидеть один пример такого рода для  $d = 6$  и  $n = 23$ . Алгоритм построения таких примеров для произвольных  $d$  и  $n$  ясен из рисунка. Таким образом, для случая четной размерности теорема доказана.

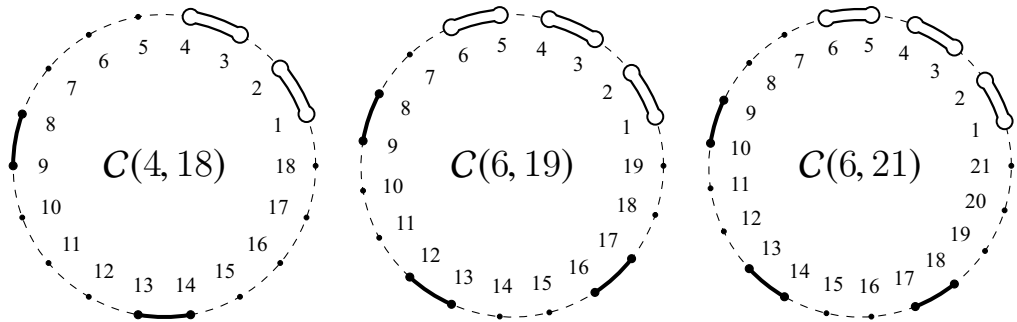


Рис. 6.4. Примеры диаметрально противоположных гиперграней.

Разберем теперь случай, когда  $d = 2k + 1$ .

Из критерия Гейла следует, что в случае нечетной размерности каждая гипергрань должна содержать хотя бы одну из двух точек:  $v_1$  или  $v_n$ .

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — некоторые гиперграни. Возможны два варианта.

1-й вариант. Для  $F_1$  и  $F_2$  хотя бы одна из точек  $v_1$  и  $v_n$  общая. Тогда эту точку можно выбросить из рассмотрения и, тем самым, перейти к случаю четной размерности. Следовательно,

$$l(F_1, F_2) \leq (n - 1) - (d - 1) - \frac{(n - 1) - 2(d - 1)}{k + 1} < n - d - \frac{n - 2d}{k + 1}.$$

2-й вариант.  $F_1$  и  $F_2$  не имеют общих точек в множестве  $\{v_1, v_n\}$ . Не уменьшая общности, предположим, что  $F_1$  содержит  $v_1$ , но не содержит  $v_n$ , а  $F_2$  содержит  $v_n$ , но не содержит  $v_1$ . Из критерия Гейла следует, что если мы при очередном смещении освободим  $v_1$ , то обязательно должны занять  $v_n$ . Т. е. свободная дуга, состоящая из промежутка  $a_n$ , не может входить в какой-бы то ни было разрез. Кроме того, если двигаться против часовой стрелки, то свободная дуга, расположенная правее  $v_1$  будет смежна свободной дуге, расположенной левее  $v_n$ . Таким образом, наибольшее число разрезов, как и в случае четной размерности, будет равно  $k + 1$ .

Пример наиболее удаленных друг от друга гиперграней строится аналогично случаю четной размерности. ■

## Глава 7

**Алгоритмы прямого типа**

Плотность графа многогранника задачи служит нижней оценкой вычислительной сложности в широком классе алгоритмов, основанных на линейных сравнениях.

*В. А. Бондаренко*

**7.1. Теория алгоритмов прямого типа**

В монографии [10] кликовое число (называемое в этой работе плотностью) графа многогранника рассматривается как нижняя оценка сложности соответствующей задачи в «некотором широком» классе так называемых алгоритмов прямого типа. Алгоритмы прямого типа относятся к классу линейных разделяющих алгоритмов, которые удобно представлять в виде линейных разделяющих деревьев.

В этой главе, следуя [10], задачей будет называться множество допустимых решений  $X = X(I) \in \mathbb{R}^m$ , из которого требуется выбрать решение  $x$ , оптимальное относительно подаваемого на вход задачи целевого вектора  $c \in \mathbb{R}^m$ . Обратим внимание читателя на то, что, в отличие от используемых в предыдущих главах определений 1.4 и 2.1, задачей в рамках обсуждаемой теории называется не семейство множеств допустимых решений задачи, а лишь одно из этих множеств.

Так же, как это было сделано в разделе 3.2, для каждого  $x \in X$  определим конус исходных данных

$$K(x) = \{c \in \mathbb{R}^m \mid c^T x \geq c^T y, \forall y \in X\}. \quad (7.1)$$

В случае, если множество исходных данных задачи ограничено полиэдром  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ , используем обозначение  $K(x, Q) = K(x) \cap Q$ .

**Определение 7.1 ([10, с. 33]).** Линейным разделяющим деревом задачи  $X \subset \mathbb{R}^m$  называется ориентированное дерево, обладающее следующими свойствами:

- а) в каждый узел, за исключением одного, называемого корнем, входит ровно одна дуга; дуг, входящих в корень, нет;
- б) для каждого узла либо имеется две выходящих из него дуги, либо таких дуг нет вообще; в первом случае узел называется внутренним, во втором — внешним, или листом;
- в) каждому внутреннему узлу соответствует некоторый вектор  $f \in \mathbb{R}^m$ ;
- г) каждому листу соответствует некоторый элемент множества  $X$ , причем нескольким листьям может соответствовать один и тот же элемент из  $X$ ;
- д) каждой дуге  $d$  соответствует число  $\text{sgn } d$ , равное 1 либо  $-1$ ; две дуги, выходящие из одного узла, имеют различные значения;
- е) для каждой цепи  $W = f_1 d_1 f_2 d_2 \dots f_l d_l x$ , соединяющей корень и лист (в обозначении цепи перечислены соответствующие ее узлам векторы; дуга  $d_i$  выходит из узла  $f_i, i \in [l]$ ), и для любого  $c \in \mathbb{R}^m$  из неравенств  $c^T f_i \text{sgn } d_i \geq 0, i \in [l]$ , следует включение  $c \in K(x)$ .

Сложностью  $C_{LSA}(X)$  задачи  $X$  в классе линейных разделяющих алгоритмов называется высота (глубина) минимального линейного разделяющего дерева этой задачи. Очевидно,  $C_{LSA}(X) \geq \log_2 |X|$  (разумеется, при условии, что  $X$  не содержит решений, не являющихся оптимальными ни при каком входе  $c$ ). В 1982 г. М. Ю. Мошков показал [38], что  $C_{LSA}(X) = O(m^3 \log_2 |X|)$  для любой задачи  $X \in \mathbb{R}^m$ . То есть NP-трудные задачи в рамках этой парадигмы приравниваются к полиномиально разрешимым. Такое положение дел заставляет предположить, что существующие алгоритмы удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, существенно снижающим их эффективность. Одно из таких ограничений было предложено в 1980-х гг. В. А. Бондаренко.

В [10] предложены два формально разных варианта определения алгоритма прямого типа, в основе которых лежит одна и та же идея, основанная на понятии графа решений задачи.

Как и прежде, мы ограничиваемся рассмотрением тех случаев, когда множество исходных данных (допустимых целевых векторов) задачи  $X \subset \mathbb{R}^m$  совпадает с  $\mathbb{R}^m$  или же представляет собой полиэдр  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ .

**Определение 7.2 ([24]).** Вершинами *графа решений* задачи  $X \subset \mathbb{R}^m$  с ограничением  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  являются те решения  $x \in X$ , которые удовлетворяют условию

$$\exists c \in Q \quad \forall z \in X \setminus \{x\} \quad c^T x > c^T z.$$

Две вершины  $x$  и  $y$  графа решений *смежны*, если найдется  $c \in Q$  такой, что

$$\exists c \in Q \quad \forall z \in X \setminus \{x, y\} \quad c^T x = c^T y > c^T z.$$

Заметим, что определение смежных решений эквивалентно определению смежных конусов (на с. 3.2) и определению смежных вершин многогранника  $\text{conv}(X)$  (если множество исходных данных совпадает с  $\mathbb{R}^m$ ).

Подмножество решений  $Y \subseteq X$  называем *кликой*, если соответствующие вершины графа решений попарно смежны. Кликовое число графа решений обозначаем  $\omega(X, Q)$ , если же ограничение  $Q$  отсутствует (то есть  $Q = \mathbb{R}^m$ ), пользуемся коротким  $\omega(X)$ .

Введем, следуя [10], несколько вспомогательных обозначений. Пусть  $T$  — линейное разделяющее дерево задачи  $X$  и пусть  $f$  — его внутренний узел. Обозначим через  $X_f$ ,  $X_f \subseteq X$ , множество пометок всех листьев дерева  $T$ , которым предшествует узел  $f$ , а через  $X_f^+$  и  $X_f^-$  обозначим подмножества  $X_f$ , соответствующие двум выходящим из  $f$  дугам. Обозначим через  $R_f^- = X_f^+ \setminus X_f^-$  множество пометок, отбрасываемых при переходе по «отрицательной» дуге. По аналогии определим множество пометок  $R_f^+ = X_f^- \setminus X_f^+$ , отбрасываемых при переходе по «положительной» дуге.

**Определение 7.3 ([10, с. 39]).** Линейное разделяющее дерево  $T$  задачи  $X$  называется деревом прямого типа, если для любого внутреннего узла  $f$  и для любой клики  $Y \subseteq X$  выполняется неравенство

$$\min\{|R_f^+ \cap Y|, |R_f^- \cap Y|\} \leq 1. \quad (7.2)$$

**Определение 7.4 ([10, с. 40]).** Деревом «прямого типа» задачи  $X$ ,  $X \in R^m$ , называется линейное разделяющее дерево этой задачи, для которого каждая цепь  $w = f_1 d_1 f_2 d_2 \dots f_l d_l x$ , соединяющая корень и лист, удовлетворяет условиям:

(\*) для любого  $y \in X$  смежного с  $x$ , найдется такой номер  $i \in [l]$ , что условия  $c^T f_i \operatorname{sgn} d_i > 0$  и  $c \in K(y)$  несовместны;

(\*\*) для любого  $i \in [l]$  из несовместности условий

$$c^T f_i \operatorname{sgn} d_i > 0 \quad \text{и} \quad c \in K(y)$$

для  $y$ , смежного с  $x$ , и из телесности конуса

$$K(x) \cap \{c \in R^m \mid c^T f_i \operatorname{sgn} d_i \leq 0\}$$

следует, что ветвь, начинающаяся в узле  $f_i$  с дугой  $-d_i$ , имеет хотя бы один лист, помеченный  $x$ .

Оба этих определения объединяет следующий факт.

**Теорема 7.1 ([10]).** Высота дерева прямого типа («прямого типа») задачи  $X$  не меньше  $\omega(X) - 1$ .

Таким образом, мощность максимальной клики является нижней оценкой трудоемкости для такого типа алгоритмов.

Известно (см. обзор в разделе 2.3.3), что для классических полиномиально разрешимых задач (сортировка, минимальное остовное дерево, минимальный разрез) эта характеристика не превосходит размерности многогранника. Ниже,

в разделе 7.2, будет доказано, что задача о кратчайшем пути (с ограничением неотрицательности длин контуров) тоже входит в этот список.

С другой стороны, в главах 3 и 4 показано, что булевы квадратичные многогранники  $P_{\text{BQR}}$  аффинно сводятся к многогранникам таких труднорешаемых задач, как коммивояжер, рюкзак, 3-выполнимость, 3-сочетание, покрытие и упаковка множества, раскраска графа, кубический подграф и многие другие. Учитывая, что кликовое число графа многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$  равно  $2^n$ , кликовые числа графов многогранников указанных задач также сверхполиномиальны по размерности многогранников. Кроме того, в [10] установлено, что некоторые алгоритмы сортировки, жадный алгоритм для минимального остовного дерева, алгоритм Дейкстры для кратчайшего пути, алгоритм Хелда–Карпа и реализация алгоритма ветвей и границ для задачи коммивояжера являются прямыми или «прямыми». (Хотя, в контексте приводимых ниже замечаний, некоторые из этих результатов могут быть подвергнуты сомнению.)

Ниже, в разделе 7.2, будет показано, что кликовое число для задачи о кратчайшем пути в орграфе на  $n$  вершинах с ограничением неотрицательности длин контуров (а также для задачи с классическим ограничением неотрицательности длин дуг) равно  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ . С учетом следствия 4.49, это дает нижнюю оценку  $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$  для кликового числа графа многогранника задачи о назначениях  $P_{\text{Birk}}(n)$ . В этой связи отметим следующие факты. В 1977 г. Бруальди и Гибсон показали (см. [64, Theorem 6.1, Corollary 6.5] и [63, Corollary 3.7]), что любая 2-смежностная грань многогранника  $P_{\text{Birk}}(n)$ , число вершин которой не равно шести, является симплексом, а максимальное число вершин такой грани совпадает с упомянутой выше оценкой  $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ . В [10] приводится кубическая верхняя оценка для  $\omega(P_{\text{Birk}}(n))$ , но доказательство опирается на неверное рассуждение (см. следствие 7.5 ниже). Вычислительный эксперимент дает следующие оценки:  $\omega(P_{\text{Birk}}(4)) = 6$ ,  $\omega(P_{\text{Birk}}(5)) = 13$ ,  $\omega(P_{\text{Birk}}(6)) = 18$ ,  $\omega(P_{\text{Birk}}(7)) = 23$ ,  $\omega(P_{\text{Birk}}(8)) = 29$ ,  $\omega(P_{\text{Birk}}(9)) \geq 39$ .

В разделе 7.3 перечисляется ряд фактов, демонстрирующих ограничен-

ность применимости этого подхода к оценке сложности задач. Приводится доказательство того, что алгоритм Куна–Манкреса для задачи о назначениях не является алгоритмом прямого типа. Кроме того, описывается достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из класса алгоритмов прямого типа.

## 7.2. Кликовое число для задачи о кратчайшем орпути

Пусть  $D = (V, A)$  — полный орграф, в котором выделены две вершины  $s, t \in V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Для определенности будем считать, что  $s = v_1$  и  $t = v_n$ . Каждой дуге  $a_{ij} \in A$  ( $i \neq j$ ,  $i \in [n-1]$ ,  $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ ) в этом графе приписана длина  $c_{ij}$ . Задача о кратчайшем орпути состоит в отыскании в орграфе  $D$  пути, берущего начало в вершине  $s$  и заканчивающегося в  $t$ , суммарный вес дуг которого был бы минимальным.

В разделе 4.7 уже было сказано о том, что гранью многогранника  $s$ - $t$  орпутей  $P_{\text{dipath}}(n)$  является многогранник гамильтоновых контуров  $P_{\text{ATSP}}(n-1)$ . Откуда следует, в частности, что эта задача в общем случае NP-трудна, а кликовое число графа многогранника  $P_{\text{dipath}}(n)$  сверхполиномиально. Если же в орграфе  $D$  отсутствуют контуры отрицательной длины, то соответствующий полиэдр  $P_{\text{shortpath}}(n)$  имеет компактное описание, а задача становится полиномиально разрешимой.

Ниже будет показано, что кликовое число графа конусного разбиения задачи о кратчайшем орпути с ограничением неотрицательности контуров и, вместе с ним, кликовые числа графов полиэдров  $P_{\text{shortpath}}(n)$ ,  $P_{\text{dipath}}^{\uparrow}(n)$  и  $P_{\text{path}}^{\uparrow}(n)$ , равны  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ . Для этого нам понадобится критерий смежности решений, сформулированный ранее в лемме 2.2.

**Доказательство (леммы 2.2).** С целью унификации рассуждений, будем рассматривать задачу на максимум, то есть задачу о длиннейшем орпути с ограничением неположительности длин контуров. Множество целевых векторов (то



есть векторов длин дуг), удовлетворяющих этому ограничению, далее обозначаем  $S$ .

Для каждого решения  $x \in P_{\text{dipath}}(n)$  соответствующий ему орпуть (точнее, множество его дуг) в орграфе  $D$  будем обозначать  $\tilde{x}$ .

Будем говорить, что симметрическая разность  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  является *двойным путем*, если она представляет собой неориентированный цикл, состоящий из двух орпутей, имеющих общее начало и общий конец, и не имеющих других общих вершин.

Покажем что, если  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  не является двойным путем, то соответствующие решения  $x$  и  $y$  несмежны. Согласно определению 7.2 смежных решений, для этого достаточно убедиться в том, что для каждого вектора длин дуг  $c \in S$ , удовлетворяющего равенству  $c^T x = c^T y$ , найдется такой вектор  $z_c \in P_{\text{dipath}}(n)$ , отличный от  $x$  и от  $y$ , что выполнено  $c^T z_c \geq c^T x$ .

Двигаясь по путям  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  от начальной вершины  $s$ , дойдем до первой вершины  $b$ , входящей в  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  (точнее, инцидентной одной из дуг этого множества). Очевидно, что участки этих путей от  $s$  до  $b$  совпадают. Теперь от вершины  $b$  будем двигаться по пути  $\tilde{x}$  до пересечения с путем  $\tilde{y}$ ; обозначим эту вершину  $p$ . Такую же операцию сделаем на пути  $\tilde{y}$ . Будем двигаться по нему, начиная с  $b$ , пока не пересечемся с  $\tilde{x}$ ; вершину пересечения обозначим  $q$ . Если  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  — не двойной путь, тогда, очевидно, часть пути  $\tilde{x}$  от  $p$  до конечной вершины  $t$  не совпадает с частью пути  $\tilde{y}$  от  $q$  до  $t$  (в частности, такая ситуация возникает, когда  $p \neq q$ ).

Построим два новых пути  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{y}_1$  следующим образом. Новый путь  $\tilde{x}_1$  будет состоять из части пути  $\tilde{y}$  от вершины  $s$  до  $q$  и части пути  $\tilde{x}$  от  $q$  до  $t$ . Путь  $\tilde{y}_1$  будет состоять из части пути  $\tilde{x}$  от вершины  $s$  до  $p$  и части пути  $\tilde{y}$  от  $p$  до  $t$ . Очевидно, что это будут простые пути без самопересечений, отличные от  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Далее рассмотрим два случая.

Начнем с простого. Предположим, что вершины  $p$  и  $q$  совпадают. Тогда набор дуг, из которых состоят пути  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , совпадает с набором дуг, образующих

пути  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{y}_1$ . Следовательно,

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}^T \mathbf{y}_1,$$

где  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{y}_1$  — характеристические вектора путей  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{y}_1$ . Очевидно, что в таком случае для каждого  $\mathbf{c} \in S$ , удовлетворяющего равенству  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ , всегда можно будет подобрать такой  $\mathbf{z}_c \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1\}$ , для которого  $\mathbf{c}^T \mathbf{z}_c \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ . И решения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  несмежны.

Теперь рассмотрим случай, когда вершины  $p$  и  $q$  несовпадают. Тогда часть пути  $\tilde{x}$  от вершины  $p$  до вершины  $q$  и часть пути  $\tilde{y}$  от  $q$  до  $p$  образуют некоторое множество дуг  $\tilde{g}$ , не вошедших в пути  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{y}_1$ . То есть для любого  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  выполнено

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{g} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}^T \mathbf{y}_1,$$

где  $\mathbf{g}$  — характеристический вектор множества  $\tilde{g}$ . Очевидно, что  $\tilde{g}$  представляет собой сложный контур (возможно имеющий самопересечения), для каждой вершины которого число входящих дуг равно числу исходящих.

Покажем, что сложный контур всегда можно представить как объединение простых контуров. Будем двигаться по пути  $\tilde{x}$  из вершины  $p$  до тех пор, пока не попадем в вершину  $r$ , инцидентную одной из дуг множества  $\tilde{g} \cap \tilde{y}$  (такой вершиной может оказаться вершина  $q$ ). Построим новый контур  $\tilde{g}_1$  из участка пути  $\tilde{x}$  от вершины  $p$  до  $r$  и из участка пути  $\tilde{y}$  от  $r$  до  $p$ ; очевидно, что это будет простой контур. Удалив из  $\tilde{g}$  все дуги, вошедшие в  $\tilde{g}_1$ , получим новый контур  $\tilde{g}'$ , состоящий из части простого пути  $\tilde{x}$ , ведущей из вершины  $r$  в  $q$ , и части простого пути  $\tilde{y}$ , ведущей из  $q$  в  $r$ . Если контур  $\tilde{g}'$  оказался сложным, то будем повторять процедуру выделения простого контура, пока все дуги не будут исчерпаны.

Итак, сложный контур  $\tilde{g}$  всегда можно представить как объединение простых контуров  $\tilde{g}_k$ ,  $k \in [l]$ :

$$\tilde{g} = \bigcup_{k=1}^l \tilde{g}_k.$$

Учитывая, что в орграфе  $D$  отсутствуют контуры положительной длины, получаем

$$\mathbf{c}^T \mathbf{g} \leq 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}^T \mathbf{y}_1.$$

Таким образом, как и в случае  $p = q$ , решения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  являются несмежными.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что решения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  смежны. Покажем, что в таком случае множество  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  — не является двойным путем. Определим координаты вектора  $\mathbf{c}' \in \mathbb{R}^m$  формулой

$$c'_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i = 1, \text{ или } y_i = 1 \\ -1, & \text{если } x_i = y_i = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что  $\mathbf{c}' \in S$  и  $\mathbf{c}'^T \mathbf{x} = \mathbf{c}'^T \mathbf{y} = 0$ . А из условия смежности следует, что существует  $\mathbf{z} \in P_{\text{dipath}}(n) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , для которого  $\mathbf{c}'^T \mathbf{z} \geq 0$ . Но это возможно, только если  $\mathbf{z} \leq \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , то есть из дуг путей  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  можно составить новый путь  $\tilde{z}$ . Следовательно,  $\tilde{x} \Delta \tilde{y}$  — не двойной путь.

Завершая доказательство, заметим, что замена ограничения  $S$  отрицательным ортантом  $\mathbb{R}_-^d = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{0}\}$  лишь упрощает доказательство, избавляя от необходимости разложения сложного контура на объединение простых. ■

В работе [10] приводится ошибочное утверждение, сходное с только что доказанной леммой 2.2, но для многогранника  $s$ - $t$  путей  $P_{\text{path}}(n)$ . Приведем его дословно:

**ТЕОРЕМА 3.4.1.** *Точки  $x$  и  $y$  из  $X_n$  являются смежными вершинами многогранника  $M(X_n)$  в том и только том случае, когда для соответствующих путей  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}_n$  симметрическая разность*

$$\tilde{x} \Delta \tilde{y} = (\tilde{x} \setminus \tilde{y}) \cup (\tilde{y} \setminus \tilde{x})$$

*множеств образующих их ребер составляет один простой цикл.*

Нетрудно заметить, что это утверждение и лемма 2.2 декларируют один и тот же результат, но для разных структур. Далее в этой же работе [10]:

на основе приведенного критерия смежности вершин многогранника  $M(X_n)$  задачи о кратчайшем пути определяется плотность  $p(X_n)$  его графа.

**ТЕОРЕМА 3.4.2.** *Справедливо равенство*

$$p(X_n) = \begin{cases} k^2 & \text{при } n = 2k, \\ k^2 + k & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Таким образом, утверждается, что кликовое число графа многогранника  $s$ - $t$  путей  $P_{\text{path}}(n)$  полиномиально. С другой стороны, из утверждений раздела 4.5.2 следует  $P_{\text{ATSP}}(n) =_A P_{s-t\text{-HDP}}(n+1) \leq_A P_{s-t\text{-HP}}(2n) \leq_A P_{\text{path}}(2n)$ . То есть кликовое число графа многогранника  $P_{\text{path}}(n)$  сверхполиномиально. Более того, задача проверки несмежности вершин для многогранников  $P_{\text{ATSP}}$  NP-полна. Следовательно, она NP-полна и для  $P_{\text{path}}$ , что противоречит теореме 3.4.1 из [10]. Лемма 2.2 исправляет эту ошибку. Важно то, что других ошибочных утверждений в доказательстве процитированной выше теоремы 3.4.2 не используется. Таким образом, остается только скорректировать формулировку.

**Теорема 7.2 ([25]).** *Кликовое число графа решений задачи о кратчайшем пути  $P_{\text{dipath}}(n)$  с ограничением неотрицательности длин контуров равно  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ . То же верно и для кликовых чисел полиэдров  $P_{\text{path}}^\uparrow(n)$ ,  $P_{\text{dipath}}^\uparrow(n)$  и  $P_{\text{shortpath}}(n)$ .*

### 7.3. Примеры алгоритмов непрямого типа

В монографии [10] приводятся два примера полиномиально разрешимых задач, кликовые числа графов которых экспоненциальны.

Первым примером является задача линейной оптимизации на множестве вершин циклического многогранника

$$C_{d,N} = \{(t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d \mid t \in [N]\},$$

где  $d = 4$ , а  $N$  полагается равным  $2^n$ . Так как при  $d \geq 4$  все вершины этого многогранника попарно смежны, то кликовое число его графа равно  $N = 2^n$ . С другой стороны, эта задача может быть решена за  $O(n + b)$  битовых операций [152, 167], где  $b$  — битовая длина целевого вектора. Более того, это можно сделать с помощью линейного разделяющего дерева высоты  $O(n)$  [10]. В этой связи напомним, что, согласно основному результату раздела 6.2, для  $C_{4,N}$  можно построить расширенную формулировку размера  $O(n^2)$ , где  $n = \log N$ . То есть в этом примере сложность расширения оказывается гораздо ближе к реальной оценке сложности задачи, чем кликовое число графа.

Второй пример основан на следующих фактах. Вместе с многогранником разбиений

$$P_{\text{part}}(A) = \{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{1}\},$$

где  $A \in \{0, 1\}^{k \times m}$ , рассмотрим его релаксацию

$$P_{\text{part}}^r(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{1}\}.$$

Очевидно,  $\text{conv}(P_{\text{part}}(A)) \subseteq P_{\text{part}}^r(A)$ . Также нетрудно показать, что множество  $P_{\text{part}}(A)$  является подмножеством множества вершин  $\text{ext}(P_{\text{part}}^r(A))$ . Более того, как показал В. А. Трубин [39], весь граф многогранника  $\text{conv}(P_{\text{part}}(A))$  является подграфом графа многогранника  $P_{\text{part}}^r(A)$ . То же верно и в отношении булева квадратичного многогранника  $P_{\text{BQP}}(n)$  и его релаксации [9]

$$P_{\text{BQP}}^r(n) = \left\{ \mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n(n+1)} \mid x_{ii} \geq x_{ij}, x_{jj} \geq x_{ij}, x_{ii} + x_{jj} - x_{ij} \leq 1 \right\}, \quad (7.3)$$

так как эти многогранники аффинно эквивалентны  $P_{\text{part}}(A)$  и  $P_{\text{part}}^r(A)$ , при соответствующем выборе матрицы  $A \in \{0, 1\}^{k \times m}$ . (Для этого, например, можно воспользоваться доказательством теоремы 3.8, и тогда  $k = n(3n - 1)/2$ ,  $m = 2n^2$ .) Таким образом, кликовое число  $\omega(P_{\text{BQP}}^r(n)) \geq \omega(P_{\text{BQP}}(n)) = 2^n$ , так как все вершины

многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$  попарно смежны. С другой стороны, описание (7.3) многогранника  $P_{\text{BQR}}(n)$  компактно, следовательно, задача линейной оптимизации на нем полиномиально разрешима. Более того, множество его вершин тоже имеет достаточно простое описание [10].

В связи с этим естественным оказывается следующий вопрос. Насколько широким является класс алгоритмов прямого (или «прямого») типа?

Оказывается, алгоритм Куна–Манкреса [133, 142] (известный также под названием венгерского алгоритма) для решения задачи о назначениях не является алгоритмом прямого (а также «прямого») типа. Кроме того, ниже будет описан достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из указанного класса.

**Теорема 7.3 ([33]).** *Алгоритм Куна–Манкреса для задачи о назначениях не является алгоритмом прямого (а также «прямого») типа.*

**Доказательство.** Далее предполагаем, что в рассматриваемой задаче о назначениях требуется в заданном реберно взвешенном полном двудольном графе найти совершенное паросочетание минимального веса. Набор весов ребер является вектором входных данных задачи. Его удобно представлять в виде матрицы

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $c_{ij}$  — вес ребра, соединяющего  $i$ -ю вершину «нижней» доли графа и  $j$ -ю вершину «верхней» доли. Множеством допустимых решений задачи является множество  $P_{\text{Birk}}(n)$ , состоящее из булевых  $n \times n$ -матриц, каждая строка и каждый столбец которых содержат ровно по одной единице.

Для доказательства нам не потребуется описание всего алгоритма Куна–Манкреса. Достаточно рассмотреть этап предобработки (редуцирования строк и столб-

цов матрицы весов). На этом этапе перебираются сначала вершины одной доли графа (например, «нижней»), затем другой («верхней»). Для каждой вершины среди инцидентных ей ребер выбирается ребро с наименьшим весом. Его вес вычитается из весов всех инцидентных этой вершине ребер. Ребро с наименьшим весом при этом приобретает нулевой вес, все остальные — неотрицательный. Заметим, что после прохождения этого этапа возможна ситуация, когда ребра с нулевым весом образуют паросочетание. Тогда, разумеется, именно оно окажется минимальным, и задача решена.

Особо следует обратить внимание на то, что на этом этапе обычно не оговаривается способ выбора ребра с минимальным весом. Без явного описания этого способа рассуждения о принадлежности к классу алгоритмов прямого типа становятся беспредметными. Обычно предполагается следующий естественный способ. (К тому же являющийся оптимальным по трудоемкости.) На первом шаге сравниваются веса двух произвольно выбранных ребер. Не уменьшая общности, можно считать, что это первое и второе ребро (в данной выборке). Далее, наименьшее из них сравнивается с весом третьего ребра и т. д. В результате последнего  $((n - 1)$ -го, если элементов  $n$ ) сравнения выявляется ребро с наименьшим весом.

### **1. Алгоритм Куна–Манкреса не является алгоритмом прямого типа.**

Согласно определению 7.3, достаточно указать внутренний узел  $f$  (точнее, некоторую операцию сравнения) в дереве алгоритма и клику  $Y$ , состоящую из четырех допустимых решений, так, чтобы при любом результате сравнения два из этих четырех решений оказывались бы отброшенными:

$$|R_f^+ \cap Y| = |R_f^- \cap Y| = 2.$$

Ниже будет приведен пример для  $n = 4$  вершин в каждой доле, который легко масштабируется на произвольные значения  $n > 4$ .

Рассмотрим полный двудольный граф с четырьмя вершинами в каждой до-

ле. Набор весов ребер представляем в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

Предположим, как было сказано ранее, что для каждой строки, начиная с первой, выполняется следующая процедура. Вес  $c_{i1}$  сравнивается с весом  $c_{i2}$ . Затем, наименьший из них сравнивается с  $c_{i3}$ . И, наконец, наименьший из последних двух сравнивается с  $c_{i4}$ .

Обратим внимание на то, что случаи равенства сравниваемых весов для теории алгоритмов прямого типа не информативны. В противном случае ни в одном узле соответствующего линейного разделяющего дерева не отбрасывалось бы ни одно решение. (Это рассуждение носит общий характер и распространяется не только на данный алгоритм.)

Предположим теперь, что мы прошли по ветке линейного разделяющего дерева со следующими дугами (дуга представляет собой результат сравнения пары весов): 1)  $c_{11} < c_{12}$ ; 2)  $c_{11} < c_{13}$ ; 3)  $c_{11} < c_{14}$ ; 4)  $c_{21} > c_{22}$ ; 5)  $c_{22} < c_{23}$ ; 6)  $c_{22} < c_{24}$ .

В настоящий момент мы находимся в узле  $c_{31} \overset{?}{<} c_{32}$ , а матрица приобрела следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} \\ c'_{21} & 0 & c'_{23} & c'_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},$$

где  $c'_{1i} = c_{1i} - c_{11}$ ,  $c'_{2i} = c_{2i} - c_{22}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Заметим, что все «ненулевые» веса в этой матрице могут принимать любые положительные значения, никак не зависящие друг от друга. (Не уменьшая общности, можно считать, что все исходные веса положительны.)



Не трудно проверить, что среди всех 24 паросочетаний данного графа отброшенными по итогам шести сравнений окажутся лишь следующие два (для удобства перечислим обозначения весов соответствующих ребер):  $\{c'_{12}, c'_{21}, c_{33}, c_{44}\}$  и  $\{c'_{12}, c'_{21}, c_{34}, c_{43}\}$ . То есть множество  $X_f$  узла  $c_{31} \stackrel{?}{<} c_{32}$  состоит из 22 паросочетаний.

Рассмотрим теперь результаты сравнения  $c_{31} \stackrel{?}{<} c_{32}$ .

1) Если верно  $c_{31} < c_{32}$ , то отброшены будут паросочетания  $\{c'_{21}, c_{32}, c'_{13}, c_{44}\}$  и  $\{c'_{21}, c_{32}, c'_{14}, c_{43}\}$ .

2) Если верно  $c_{31} > c_{32}$ , то отброшены  $\{c'_{12}, c_{31}, c'_{23}, c_{44}\}$  и  $\{c'_{12}, c_{31}, c'_{24}, c_{43}\}$ .

Причем все четыре указанных паросочетания попарно смежны. Это легко проверяется, например, с помощью известного критерия смежности вершин многогранника Биркгофа (см., например, [18]).

**Лемма 7.4 (критерий смежности).** *Два паросочетания смежны тогда и только тогда, когда объединение их ребер содержит ровно один цикл.*

Следовательно, при любом исходе сравнения  $c_{31} \stackrel{?}{<} c_{32}$  от данной клики из четырех решений отбрасывается ровно два.

## 2. Алгоритм Куна–Манкреса не является алгоритмом «прямого» типа.

Как было сказано ранее, уже после прохождения этапа «предобработки» возможна ситуация, когда ребра с нулевым весом образуют паросочетание. В такой ситуации мы попадаем в лист линейного разделяющего дерева. При этом цепь, соединяющая корень дерева и этот лист, состоит только из узлов вида  $c_{ij} \stackrel{?}{<} c_{il}$ .

Заметим, что для любого паросочетания можно подобрать веса ребер так, что наперед заданное неравенство  $c_{ij} < c_{il}$  будет выполнено, а суммарный вес ребер этого паросочетания окажется меньше веса любого другого паросочетания. Ровно то же самое справедливо и в отношении неравенства  $c_{ij} > c_{il}$ . Другими словами, каждый конус  $K(x)$  имеет общие внутренние точки с каждым из полупространств  $c_{ij} < c_{il}$  и  $c_{ij} > c_{il}$ . Следовательно, условие (\*) из определения 7.4

нарушается для «коротких» цепей, заканчивающихся на этапе предобработки. ■

В [10, с. 77] приводится «доказательство» того, что алгоритм Эдмондса для задачи о паросочетаниях в произвольном реберно взвешенном графе является алгоритмом прямого типа. (Позднее этот факт дублируется в [12].) Слово доказательство здесь намеренно взято в кавычки, так как сам алгоритм Эдмондса представляет собой достаточно непростую модификацию алгоритма Куна–Манкреса, а анализ его принадлежности классу алгоритмов прямого типа в [10] занимает полстраницы, где по существу излагается лишь идея доказательства, оставляющая читателю широкие возможности для самостоятельных исследований. Учитывая, что основой алгоритма Эдмондса является алгоритм Куна–Манкреса, доказательство теоремы 7.3 переносится и на этот случай.

**Следствие 7.5.** *Алгоритм Эдмондса для задачи о паросочетаниях в произвольном графе не является алгоритмом прямого (а также «прямого») типа.*

При внимательном рассмотрении полученный результат говорит о том, что теория алгоритмов прямого типа в форме определений 7.3 и 7.4 чувствительна к этапу предобработки, на котором отсеиваются простые случаи. Развивая эту идею, приведем еще один пример непрямого алгоритма.

Рассмотрим задачу о кратчайшем пути.

ЗАДАН полный реберно взвешенный граф на  $n$  вершинах, в котором выделены две вершины  $s$  и  $t$ .

ТРЕБУЕТСЯ найти в этом графе простой путь минимальной длины (точнее, с минимальным суммарным весом ребер), соединяющий вершины  $s$  и  $t$ .

В предыдущем разделе уже упоминался тот факт, что кликовое число графа многогранника задачи о кратчайшем пути сверхполиномиально. С другой стороны, при ограничении неотрицательности длин ребер задача становится полиномиально разрешимой (ее трудоемкость сопоставима с числом ребер в исходном графе). Воспользуемся этим, чтобы построить пример непрямого алгоритма.

**Пример 7.1.** Рассмотрим какойнибудь алгоритм (прямого типа) для решения задачи о кратчайшем пути в общем виде. Добавим к нему этап предобработки, обслуживающий те частные случаи, когда выполняется условие неотрицательности длин ребер. (Заметим, что эта идея довольно часто реализуется на практике, так как помогает существенно ускорить работу алгоритма для простых случаев.) Соответственно, общая глубина дерева алгоритма увеличится на число операций, необходимых для проверки условия неотрицательности. Особо обратим внимание на то, что в ходе этой проверки *ни одно решение не отбрасывается*. (Хотя бы потому, что длины ребер сравниваются с нулем, а не друг с другом.) В том месте (узле), где вся эта проверка успешно заканчивается, у дерева появляется еще одна ветвь, реализующая решение для случая неотрицательных длин. Причем множество пометок листьев этой ветви совпадает с множеством всех решений. (Так как ни одно решение в ходе проверки условия неотрицательности не было отброшено.) Важно то, что эта ветвь полностью сохраняет множество решений исходной общей задачи, но при этом имеет полиномиальную глубину, так как соответствующий частный случай полиномиально разрешим. С другой стороны, как было замечено ранее, кликовое число для этой задачи сверхполиномиально. Сопоставляя эти факты с теоремой 7.1, приходим к выводу, что рассматриваемая ветвь, а вместе с ней и все дерево, не является ни прямым, ни «прямым».

Все это говорит о том, что ограничения, накладываемые определениями 7.3 и 7.4, не являются естественными. Кроме того, проверка этих ограничений (в том случае, если они действительно выполняются) как правило сложнее непосредственной оценки трудоемкости алгоритма, что существенно снижает ценность теоремы 7.1.

## Глава 8

### Контрпримеры

Теории приходят и уходят,  
а примеры остаются.

*И. М. Гельфанд*

Целью настоящей главы является ответ на следующий вопрос. Можно ли, зная только комбинаторные свойства многогранника, отделить труднорешаемые задачи от полиномиально разрешимых (в рамках современных представлений о сложности задач)? В разное время в качестве таких ключевых характеристик сложности рассматривались: число вершин многогранника, число его гиперграней, диаметр и кликовое число графа, число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней.

В первом и втором разделах данной главы приводятся примеры семейств многогранников, для которых значения упомянутых выше характеристик существенно отличаются от реальной вычислительной сложности соответствующих оптимизационных задач. В третьем разделе приводятся примеры двух задач дискретной оптимизации, многогранники которых комбинаторно эквивалентны и длины двоичной записи координат вершин этих многогранников одинаковы. При этом первая задача разрешима за полиномиальное время, а вторая задача имеет экспоненциальную сложность.

### 8.1. Простые примеры

#### 8.1.1. Число вершин

Предположим, что вершины многогранника  $X$  могут быть эффективно перечислены. Тогда задача линейной оптимизации на  $X$  может быть решена с помощью простого перебора. Откуда следует, что число вершин многогранника

может служить верхней оценкой сложности соответствующей оптимизационной задачи. То, насколько далекой от реальности может быть эта оценка, иллюстрирует следующий, хорошо известный факт. Задача линейной оптимизации на множестве вершин куба  $\{0, 1\}^d$  может быть решена за  $d$  шагов, тогда как число вершин равно  $2^d$ .

### 8.1.2. Число гиперграней

Так как задача линейного программирования полиномиально разрешима [40, 124], то число гиперграней (точнее, полином от него и размерности) многогранника может служить верхней оценкой сложности. Примером, когда эта оценка оказывается слишком грубой, может служить перестановочный многогранник  $P_{\text{perm}}(n)$ , число вершин которого равно  $n!$ , число гиперграней равно  $2^n - 2$ , а задача линейной оптимизации на  $P_{\text{perm}}(n)$  имеет сложность порядка  $\Theta(n \log n)$ . Заметим, что сложность расширения этого многогранника тоже равна  $\Theta(n \log n)$  [106].

### 8.1.3. Диаметр графа

До сих пор популярностью пользуются оценки диаметров графов различных семейств многогранников (см. обзор в разделе 2.3.2). Утверждается, что решение полиномиальной гипотезы Хирша окажет влияние на оценки сложности задач линейного программирования [171]. Несостоятельность этого утверждения иллюстрируется следующим фактом. Предположим, что нам известно  $H$ -описание  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$  некоторого (как угодно сложного) многогранника  $P$ . (Без этого предположения оценки диаметра теряют практический смысл, так как предполагают использование алгоритмов типа симплекс-метода.) Тогда, увеличив размерность пространства на единицу, можно легко построить пирамиду  $Q$  над  $P$ :

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid Ax + by \leq b, y \geq 0\}. \quad (8.1)$$

Тогда задача линейной оптимизации на  $P$  элементарно сводится к оптимизации на  $Q$  (не уменьшая общности, можно предположить, что  $\mathbf{0} \in P$ ). С другой стороны, диаметр графа любой пирамиды не превышает двух, так как вершина (апекс) пирамиды непосредственно соединена ребрами с каждой вершиной основания.

В этой связи заметим также, что за счет небольшого шевеления вектора коэффициентов  $\mathbf{b}$  при переменной  $y$  в формуле (8.1) можно прийти к следующему выводу. Любой простой  $d$ -многогранник с  $n$  гипергранями может быть реализован как гипергрань (или ортогональная проекция) простого  $(d + 1)$ -многогранника  $Q'$  с  $n + 1$  гипергранями такого, что диаметр  $Q'$  не превышает  $2(n - d)$  [135]. Этот вывод также, как и предыдущий пример указывает на бесполезность оценок диаметра графа многогранника с точки зрения практики. Обратим также особое внимание на то, что как пирамида  $Q$ , так и многогранник  $Q'$  являются расширениями многогранника  $P$ .

#### 8.1.4. Кликовое число графа

Оказывается, с помощью расширения многогранника может быть продемонстрирована и несостоятельность использования кликового числа графа для оценок сложности задач. Вспомним, что расширением любого многогранника на  $n + 1$  вершинах является симплекс  $\Delta_n$ .

**Теорема 8.1.** *Для любого симплекса  $\Delta_d \subset \mathbb{R}^d$  существует его расширенная формулировка  $Q_{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ , для которой  $\omega(Q_{d+1}) = 2$ .*

**Доказательство.** Воспользуемся тем фактом, что любые два  $d$ -мерных симплекса аффинно эквивалентны друг другу. Поэтому далее рассматриваем только наиболее удобный симплекс

$$\Delta_{d-1} = \mathbb{R}_+^d \cap H,$$

являющийся пересечением неотрицательного ортанта  $\mathbb{R}_+^d$  и гиперплоскости

$$H = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1\}.$$

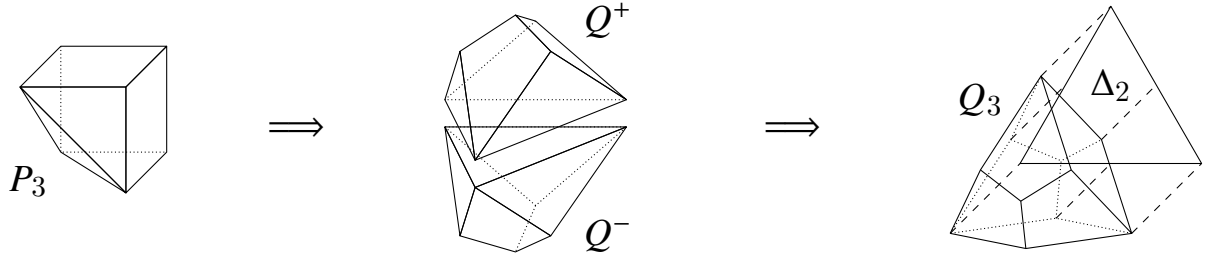


Рис. 8.1. Этапы построения расширения  $Q_3$  для симплекса  $\Delta_2$

Мы построим расширенную формулировку  $Q_d \subset \mathbb{R}^d$  так, что её ортогональная проекция на  $H$  совпадает с  $\Delta_{d-1}$ . Для случая  $d = 3$  этапы построения изображены на рис. 8.1.

Многогранник  $Q_d$  будет симметричным относительно  $H$ . Поэтому далее будет описана лишь одна его половина, расположенная в  $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^T \mathbf{x} \geq 1\}$ . Обозначим эту половину через  $Q^+$ .

Обозначим через  $P_d$  пересечение куба  $C_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$  и полупространства  $H^+$ . По построению,  $P_d$  — это «куб без одной вершины». Теперь определим  $Q^+$  как результат проективного преобразования (не меняющего комбинаторный тип) многогранника  $P_d$ :

$$Q^+ = \left\{ \frac{\mathbf{x} + \mathbf{1} (\mathbf{1}^T \mathbf{x} - 1)}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in P_d \right\}.$$

Заметим, что гиперплоскость  $H$  инвариантна относительно этого преобразования. Гиперплоскости вида  $S_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0\}$  (и вместе с ними соответствующие гиперграни многогранника  $P_d$ ) данное преобразование переводит в гиперплоскости

$$S'_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{1}^T \mathbf{x} - dx_i = 1\}, \quad i \in [d]. \quad (8.2)$$

Заметим также, что вектор нормали гиперплоскости  $S'_i$  ортогонален вектору нормали гиперплоскости  $H$ . Следовательно, ортогональная проекция  $Q^+$  на плоскость  $H$  совпадает с  $\Delta_{d-1}$ . С другой стороны,  $Q^+$  комбинаторно эквивалентен «кубу без одной вершины», то есть у каждого треугольника в графе многогранника  $Q^+$  как минимум одно ребро лежит в  $H$ , точнее, в пересечении  $H$  и одной из гиперплоскостей  $S'_i$ .

В точности те же замечания справедливы и в отношении многогранника  $Q^-$ , являющегося зеркальной копией  $Q^+$  относительно гиперплоскости  $H$ . Таким образом, при склейке  $Q^+$  и  $Q^-$  все ребра, лежащие в  $H$ , оказываются внутри гиперграней многогранника  $Q_d = Q^+ \cup Q^-$ , образованных гиперплоскостями  $S'_i$ . А значит, граф многогранника  $Q_d$  не содержит треугольников. ■

Таким образом, кликовое число графа многогранника можно радикально уменьшать за счет перехода к расширению многогранника (то есть, по сути, к более сложной задаче).

Отметим также, что, согласно следствию 5.9, расширение  $Q$ , кликовое число которого меньше, чем у исходного многогранника  $P$ , обязательно должно иметь так называемые «спрятанные» вершины, которые при проецировании не попадают в вершины многогранника  $P$ . В этой связи упомянем еще один факт, установленный недавно Пашковичем и Вельтге [158]: компактное расширение семиугольника обязательно содержит «спрятанную» вершину. Пример компактного расширения для восьмиугольника изображен на рис. 2.4.

Выше, в разделе 7.3, были описаны еще два примера, когда сложность расширения многогранника дает гораздо более адекватные оценки сложности задач, чем кликовое число графа. В связи с этим естественным является следующий вопрос. Существуют ли примеры линейных задач комбинаторной оптимизации, сложность которых существенно отличается от сложности расширения многогранника задачи?

## 8.2. Сложность расширения и число прямоугольного покрытия

В 2014 году Ротфосс доказал [166], что сложность расширения многогранника  $P_{\text{match}}(n)$  задачи о паросочетаниях в полном графе на  $n$  вершинах равна  $2^{\Omega(n)}$ . С другой стороны, для её решения в настоящее время известно несколько



различных алгоритмов с трудоемкостью  $O(n^3)$  [173]. Таким образом, для задачи о паросочетаниях в полном графе сложность расширения дает слишком завышенную оценку сложности.

Заметим также, что эта характеристика многогранника не является комбинаторной, так как существенно зависит от его геометрических свойств. В частности, для многоугольников на плоскости, имеющих одно и то же число вершин  $n$  (и, соответственно, один и тот же комбинаторный тип), сложность расширенной формулировки может принимать существенно разные значения от  $O(\log n)$  до  $\Omega(\sqrt{n})$  [99].

Комбинаторной характеристикой, заменяющей сложность расширения многогранника, служит число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней. Практически во всех известных примерах (см. обзор в разделе 2.4.3) это число оказывается ближе к вычислительной сложности задачи, чем сложность расширения. Например, в [96] установлено, что  $\text{rc}(P_{\text{match}}(n)) \in [n^2, n^4]$ . Там же показано, что для симплициального многогранника  $P$

$$\text{rc}(P) = O(d^2 \log n), \quad (8.3)$$

где  $d = \dim P$  — размерность, а  $n = |\text{ext } P|$  — число вершин многогранника  $P$ . Заметим, что это хорошо согласуется с вычислительной сложностью задачи линейной оптимизации на вершинах циклического многогранника  $C_{d,N}$  (см. раздел 6.2). Ведь для нахождения корней многочлена степени  $d$  с точностью  $2^{-n}$  (относительно диапазона поиска) требуется порядка  $\Theta(d^2(d+n))$  битовых операций [152].

Ниже будет описан пример NP-трудной задачи такой, что число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий для ее многогранника полиномиально и сложность задачи распознавания вершины также полиномиальна. Основная идея заключается в небольших смещениях вершин 0/1-многогранника (ассоциированного с NP-трудной задачей), делающих его симплициальным.

Для каждого  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^d$  определим его номер

$$n(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^d 2^{i-1} x_i.$$

Рассмотрим отображение  $\varepsilon: \{0, 1\}^d \rightarrow \mathbb{N}^d$ , преобразующее  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^d$  в  $\varepsilon \in \mathbb{N}^d$ :

$$\varepsilon_i := (n(\mathbf{x}))^i, \quad i \in [d].$$

Введем в рассмотрение некоторую «достаточно большую» константу

$$K := 2^{d^3}.$$

Заметим, что для любого  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^d$  величина  $\|\varepsilon(\mathbf{x})\|$  «очень мала» по сравнению с  $K$ :

$$\frac{\|\varepsilon(\mathbf{x})\|}{K} \leq \frac{\|\varepsilon(\mathbf{x})\|_1}{K} \leq \frac{1}{K} \sum_{i=1}^d (2^d - 1)^i \leq \frac{2^{d^2}}{2^{d^3}} = 2^{-d^2(d-1)}. \quad (8.4)$$

Пусть  $X \subseteq \{0, 1\}^d$ . Множество

$$Y = \text{CP}(X) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathbf{y} = K\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$$

назовем *циклической пертурбацией*  $X$ . Ясно, что после такой пертурбации размер чисел в описании  $X$  увеличивается в  $\log_2 K = d^3$  раз. Кроме того,  $Y = \text{ext conv } Y$ , так как значение  $\|\varepsilon(\mathbf{x})\|$  «очень мало». Еще одно важное свойство циклической пертурбации состоит в том, что если задача распознавания вершины для  $X$  полиномиальна, то и для  $\text{CP}(X)$  она будет полиномиальной. Это следует из того, что  $\mathbf{x} = \lfloor \text{CP}(\mathbf{x})/K \rfloor$  (здесь целая часть вычисляется отдельно для каждой компоненты вектора), а отображение  $\varepsilon$  вычисляется за полиномиальное время.

Покажем теперь, что точки множества  $Y$  находятся в общем положении.

**Лемма 8.2.** *Выпуклая оболочка циклической пертурбации  $X \subseteq \{0, 1\}^d$  является симплицальным многогранником.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что любые  $d + 1$  точек (мы рассматриваем только «интересные» случаи  $|X| \geq d + 1$ ) в циклической пертурбации

$$Y = \text{CP}(X)$$

аффинно независимы.

Итак, для каждого подмножества  $\{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^{d+1}\} \subseteq Y$  нам нужно убедиться в справедливости

$$\det \begin{vmatrix} 1 & y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_d^1 \\ 1 & y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_d^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_1^{d+1} & y_2^{d+1} & \dots & y_d^{d+1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8.5)$$

Поскольку  $\mathbf{y}^i = K\mathbf{x}^i + \varepsilon(\mathbf{x}^i)$  для некоторого  $\mathbf{x}^i \in X, i \in [d + 1]$ , мы можем разбить матрицу (8.5) на сумму двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Kx_1^1 & Kx_2^1 & \dots & Kx_d^1 \\ 0 & Kx_1^2 & Kx_2^2 & \dots & Kx_d^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Kx_1^{d+1} & Kx_2^{d+1} & \dots & Kx_d^{d+1} \end{pmatrix} \in \{0, K\}^{(d+1) \times (d+1)},$$

и

$$B = \begin{pmatrix} 1 & n(\mathbf{x}^1) & (n(\mathbf{x}^1))^2 & \dots & (n(\mathbf{x}^1))^d \\ 1 & n(\mathbf{x}^2) & (n(\mathbf{x}^2))^2 & \dots & (n(\mathbf{x}^2))^d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n(\mathbf{x}^{d+1}) & (n(\mathbf{x}^{d+1}))^2 & \dots & (n(\mathbf{x}^{d+1}))^d \end{pmatrix} \in \{0, \dots, 2^{d^2}\}^{(d+1) \times (d+1)}.$$

Для каждого подмножества  $S \subseteq [d + 1]$  определим  $(d + 1) \times (d + 1)$ -матрицу  $D^S$ :

$$D_{ij}^S = \begin{cases} A_{ij}, & \text{if } i \in S, \\ B_{ij}, & \text{if } i \notin S. \end{cases}$$

В частности,  $D^{[d+1]} = A$ ,  $D^\emptyset = B$ . Как известно, определитель суммы двух  $n \times n$ -матриц может быть записан в виде суммы определителей  $2^n$  матриц:

$$\det(A + B) = \sum_{S \subseteq [d+1]} \det D^S. \quad (8.6)$$

Для каждого непустого  $S \subseteq [d + 1]$  матрица  $D^S$  имеет как минимум одну строку из  $A$ . А значит,  $\det D^S$  делится на  $K$ . С другой стороны,  $\det D^\emptyset = \det B$  есть определитель Вандермонда:

$$\det B = \prod_{1 \leq j < k \leq d+1} (n(\mathbf{x}^k) - n(\mathbf{x}^j)) > 0.$$

Заметим, что

$$\det B = \prod_{1 \leq j < k \leq d+1} (n(\mathbf{x}^k) - n(\mathbf{x}^j)) \leq (2^d - 1)^{d(d+1)/2} < K.$$

Следовательно, сумма (8.6) не может быть равна 0. ■

Опираясь на формулу (8.3), получаем

**Следствие 8.3.** *Число прямоугольного покрытия*

$$\text{rc}(\text{conv CP}(X)) = O(d^2 \log |X|) = O(d^3) \quad \text{для любого } X \subseteq \{0, 1\}^d.$$

Теперь мы готовы к построению примера NP-трудной задачи, число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней многогранника которой полиномиально.

Рассмотрим циклическую пертурбацию  $P_{\text{CBQR}}(n) := \text{CP}(P_{\text{BQR}}(n)) \subset \mathbb{Z}^d$ ,  $d = n(n+1)/2$ , вершин булева квадратичного многогранника. Согласно следствию 8.3,  $\text{rc}(\text{conv } P_{\text{CBQR}}(n)) = O(n^5)$ , то есть полиномиально. С другой стороны, справедливо

**Утверждение 8.4.** *Задача оптимизации на  $P_{\text{CBQR}}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с целевым вектором  $\mathbf{c} \in \{-1, 0, 1\}^d$ ,  $d = n(n+1)/2$ , NP-трудна.*

**Доказательство.** Рассмотрим NP-трудную задачу нахождения кликового числа графа  $G = (V, E)$ , где  $V = [n]$  — множество вершин. Входной вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(G)$  определим следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \in E, \\ -1, & \text{если } \{i, j\} \notin E. \end{cases}$$

Легко видеть, что  $\max_{\mathbf{x} \in P_{\text{BQR}}(n)} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  равен кликовому числу графа  $G$ . Но для любого  $\mathbf{x} \in P_{\text{BQR}}(n)$  и  $\mathbf{y} = \text{CR}(\mathbf{x})$ , согласно неравенству (8.4),

$$|\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{y}/K| = |\mathbf{c}^T \varepsilon(\mathbf{x})/K| \leq \frac{1}{2^{d^2(d-1)}} \leq \frac{1}{2^{18}},$$

где  $d = n(n+1)/2$ ,  $n \geq 2$ . То есть решение задачи  $P_{\text{CBQR}}(n)$  для указанного входного вектора  $\mathbf{c}$  равно кликовому числу графа  $G$  с точностью до  $2^{-18}$ . Следовательно, задача  $P_{\text{CBQR}}(n)$  не проще задачи нахождения кликового числа графа. ■

Обратим теперь внимание еще на две особенности только что рассмотренного примера.

Во-первых, заметим, что сверхполиномиальность числа прямоугольного покрытия сохраняется при расширенном аффинном сведении (теорема 5.5). Следовательно, оптимизация на  $P_{\text{CBQR}}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , является примером NP-трудной задачи, к многогранникам которой нельзя расширенно аффинно свести ни одно из семейств многогранников NP-трудных задач, рассмотренных ранее в главах 3–5.

Во-вторых, Браун, Фиорини, Покутта и Штеурер недавно установили [62, Theorem 4], что любой многогранник, аппроксимирующий  $P_{\text{BQR}}(n)$  с точностью  $O(1/n)$ , имеет сложность расширения порядка  $2^{\Omega(n)}$ . Следовательно, сложность расширения для  $P_{\text{CBQR}}(n)$  экспоненциальна:  $\text{xc}(P_{\text{CBQR}}(n)) = 2^{\Omega(n)}$ . Для сравнения напомним, что многогранники задачи о паросочетаниях в полном графе обладают аналогичными свойствами: их сложность расширения экспоненциальна, а число прямоугольного покрытия полиномиально.

### 8.3. Другие комбинаторные характеристики

Выше было показано, что кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней, вообще говоря, не всегда отражают реальную вычислительную сложность соответствующей оптимизационной задачи. Тем не менее, вопрос о существовании «адекватной» комбинаторной характеристики остается открытым. Чтобы попытаться ответить на него, сделаем ряд уточнений. Прежде всего, под адекватной характеристикой будем понимать ту, которая отделяет полиномиально разрешимые задачи от задач со сверхполиномиальной сложностью.

Ниже мы ограничимся рассмотрением тех задач, семейство многогранников которых представляет собой последовательность  $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , то есть все многогранники семейства кодируются натуральными числами. Сложность задачи линейной оптимизации вдоль вектора  $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d$  на множестве  $X_n \subset \mathbb{Z}^d$  будем оценивать относительно кода  $n$  и длины двоичной записи  $\text{size}(\mathbf{c})$  вектора  $\mathbf{c}$ .

Итак, основная цель данного раздела — привести примеры двух задач, многогранники которых комбинаторно эквивалентны друг другу, но одна из этих задач полиномиально разрешима, а другая имеет экспоненциальную сложность.

По аналогии с формулой (6.1), для вектора-столбца  $(t, t^2, \dots, t^d)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , введем обозначение  $\mathbf{x}(t)$ , и рассмотрим множество

$$C(d, K, g) := \{\mathbf{x}(g(i)) \mid i \in [K]\},$$

где  $d, K \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq d < K$ ,  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , причем  $g(i) < g(i+1)$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ . Выпуклая оболочка множества  $C(d, K, g)$  является  $d$ -мерным циклическим многогранником на  $K$  вершинах, причем комбинаторный тип этого многогранника не зависит от функции  $g$  (см. главу 6).

Обе искомые задачи будут иметь вид  $\{C(d, 2^n, g)\}$ , но отличаться описанием функции  $g$ . Тем самым, условие комбинаторной эквивалентности выполняется автоматически.

Положим

$$X_n^d := C(d, 2^n, g), \quad \text{где } g(i) = 2i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Тогда задача линейной оптимизации вдоль  $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d$  на  $X_n^d$  полиномиально разрешима относительно  $n$  и  $\text{size}(\mathbf{c})$ , так как сводится к локализации корней многочлена  $(\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t))'_t = \sum_{k=1}^d c_k k t^{k-1}$ , где  $t = 2i, i \in [2^n]$  (см. комментарий к формуле (8.3) выше). То есть полиномиально разрешимыми являются как задача  $\{X_n^d\}$ , при фиксированном  $d$ , так и задача  $\{X_n^n\}$ .

Немного изменим теперь описание функции  $g$  так, чтобы задача стала экспоненциально сложной. С этой целью рассмотрим функцию  $b_n: [2^n] \rightarrow \{0, 1\}^n$ , которая для каждого целого  $i \in [2^n]$  возвращает двоичную запись числа  $i - 1$ . Кроме того, воспользуемся результатом Шэннона [175] о том, что почти все булевы функции от  $n$  переменных имеют вычислительную сложность порядка  $2^n/n$ . Пусть  $h_n: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , — примеры таких сложных функций. Положим теперь

$$g_n(i) := 2i - h_n(b_n(i)), \quad i \in [2^n], \quad (8.7)$$

и введем обозначение

$$Y_n^d := C(d, 2^n, g_n).$$

**Утверждение 8.5.** *Массовая задача оптимизации вдоль вектора  $\mathbf{c}$  на множестве  $Y_n^2$  имеет экспоненциальную сложность по  $n$  при условии  $\text{size}(\mathbf{c}) = \Omega(n)$ .*

**Доказательство.** Для каждого  $k = 2i, i \in [2^n]$ , рассмотрим вектор

$$\mathbf{c}_n(k) = (2k, -1) \in \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом,  $(\mathbf{x}(t))^T \mathbf{c}_n(k) = 2kt - t^2$ , где  $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$ .

Заметим, что максимум для  $2kt - t^2$  достигается при  $t = k$ . Следовательно, при фиксированном  $k = 2i, i \in [2^n]$ , имеем

$$\max_{\mathbf{y} \in Y_n^2} (\mathbf{y}^T \mathbf{c}_n(k)) = \max_{i \in [2^n]} (2kg_n(i) - (g_n(i))^2) = k^2 - h_n(b_n(k/2)).$$

То есть по четности-нечетности максимума восстанавливается значение функции  $h_n$  для каждого  $\mathbf{z} = (z_i) = b_n(k/2) \in \{0, 1\}^n$ , где  $k = 2 + \sum_{i=1}^n 2^i z_i$ . Иными словами, оптимизация вдоль  $\mathbf{c}_n(k)$  на  $Y_n^2$  не проще нахождения значения функции  $h_n$ , имеющей экспоненциальную вычислительную сложность. ■

Так как  $Y_n^d$  является расширением  $Y_n^2$ , получаем

**Следствие 8.6.** *Массовая задача оптимизации вдоль вектора  $\mathbf{c}$  на множестве  $Y_n^d$  имеет экспоненциальную сложность по  $n$  при условии  $\text{size}(\mathbf{c}) = \Omega(n)$ .*

Итак, построены два примера массовых задач дискретной оптимизации с абсолютно одинаковыми комбинаторными свойствами и одинаковыми размерами координат вершин многогранников. При этом задача  $\{X_n^d\}$  полиномиально разрешима, а задача  $\{Y_n^d\}$  имеет экспоненциальную сложность. Существование такого рода примеров означает, что знания комбинаторных свойств многогранников задачи недостаточно для качественной оценки её вычислительной сложности.

Отметим также, что число прямоугольного покрытия как для  $\text{conv}(X_n^d)$ , так и для  $\text{conv}(Y_n^d)$  оценивается снизу величиной  $O(d^2 n)$ , так как эти многогранники симплициальны [96]. С другой стороны, в главе 6 для  $\text{conv}(X_n^d)$  описана расширенная формулировка размера  $O((2n)^{d/2})$ , а в [99] доказано, что, при надлежащем выборе последовательности функций  $h_n$ , сложность расширенной формулировки многоугольника  $\text{conv}(Y_n^2)$  оказывается ограниченной снизу величиной  $\Omega(2^{n/2}/\sqrt{n})$ .

В заключение заметим, что задача распознавания вершины для  $Y_n^d$  имеет экспоненциальную сложность. Строго говоря, это не соответствует замечанию к определению задачи комбинаторной оптимизации и условиям определения семейства многогранников. Вопрос о существовании аналогичных примеров при условии полиномиальности распознавания вершин остается открытым.



## Глава 9

### Заключение

В диссертационной работе рассматривается проблема оценок сложности линейных задач комбинаторной оптимизации с помощью различных комбинаторно-геометрических характеристик соответствующих геометрических конструкций (многогранников и полиэдров задач, конусных разбиений пространства исходных данных). В качестве таких характеристик рассматриваются: размерность многогранника, число его вершин, число гиперграней, диаметр графа многогранника, кликовое число графа, сложность задачи идентификации грани, сложность расширения многогранника и число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней.

Большая часть результатов связана с новым понятием аффинной сводимости. Этот тип сводимости позволяет сравнивать указанные выше характеристики многогранников (за исключением диаметра графа), ассоциированных с линейными задачами комбинаторной оптимизации. В работе сравниваются семейства многогранников следующих NP-трудных задач: коммивояжер, длиннейший путь, 3-выполнимость, рюкзак, разрез в графе, независимое множество вершин графа, покрытия и упаковки множества, булево квадратичное программирование, раскраска графа, кубический подграф, линейное упорядочивание, дерево Штейнера в графе, различные варианты задачи о назначениях (квадратичные назначения, назначения с ограничением, 3-сочетания) и некоторые другие. Во многом этот список совпадает со списком задач из фундаментальной работы Карпа [125]. Из серии доказательств, представленных в главе 4, следует, что семейство булевых квадратичных многогранников аффинно сводится к семействам многогранников перечисленных выше задач. Таким образом, все эти семейства многогранников наследуют от  $P_{\text{BQR}}$  высокие (сверхполиномиальные) значения указанных выше комбинаторно-геометрических характеристик. В первую очередь: сверхполи-

номиальность сложности расширения, числа прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней, кликового числа графа. Дополнительно, в разделе 4.6 доказано, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2^{2 \cdot \lceil k/3 \rceil}$  булев квадратичный многогранник  $P_{\text{BQR}}(n)$  имеет  $k$ -смежностную грань со сверхполиномиальным числом  $2^{\Theta(n^{1/\lceil k/3 \rceil})}$  вершин. Благодаря доказанной аффинной сводимости, каждое из перечисленных семейств многогранников тоже содержит многогранники, имеющие  $k$ -смежностные грани со сверхполиномиальным (относительно размерности многогранника) числом вершин.

Отдельно рассматриваются семейства многогранников, для которых задача распознавания несмежности вершин является NP-полной. Речь идет о многогранниках следующих задач: покрытия множества, 3-выполнимость, коммивояжер, длиннейший путь, кубический подграф, рюкзак, разбиение чисел на две равные суммы, назначения с ограничением, частичное упорядочивание. Показано, что NP-полнота проверки несмежности вершин наследуется этими многогранниками от специального семейства многогранников  $P_{\text{Matsui}}$ , впервые описанного в 1995 г. Т. Мацуи [138]. С другой стороны, известно, что смежность вершин проверяется за полиномиальное время для многогранников следующих NP-трудных задач: разрез в графе, квадратичные задачи о назначениях и о линейном упорядочивании, упаковки и разбиения множества, 3-сочетания, раскраска графа, независимое множество вершин графа. В разделе 4.1 показано, что ни один из многогранников семейства  $P_{\text{Matsui}}$  (за исключением одномерных) не может быть гранью ни для одного многогранника из перечисленных семейств с простым критерием смежности.

Теория аффинной сводимости может быть применима и для сравнения комбинаторно-геометрических характеристик линейных задач комбинаторной оптимизации, имеющих дополнительные ограничения на множество исходных данных (целевых векторов). Наиболее ярким примером здесь служит задача о кратчайшем орпути, полиномиально разрешимая при отсутствии в орграфе контуров отрицательной длины. В разделе 4.7 показано, что конусное разбиение множе-

ства исходных данных этой задачи аффинно сводится к конусному разбиению множества исходных данных задачи о назначениях.

В главе 5 вводится понятие расширенной аффинной сводимости, отличающееся от аффинной сводимости отсутствием требования аффинной эквивалентности. Ослабление условий существенно упрощает доказательство фактов расширенной аффинной сводимости (в разделе 5.2 представлены соответствующие примеры). Вместе с тем, такой тип сводимости, вообще говоря, не позволяет сравнивать некоторые характеристики многогранников (например, число гиперграней, кликовые числа графов многогранников, NP-полноту проверки несмежности вершин). В разделе 5.3 доказано, что любое семейство многогранников, задача тестирования вершины которых принадлежит классу NP, расширенно аффинно сводится к семейству булевых квадратичных многогранников. Таким образом, все перечисленные семейства многогранников оказываются эквивалентны друг другу относительно расширенной аффинной сводимости.

В главе 6 обсуждаются свойства циклических многогранников, играющих важную роль в комбинаторной теории многогранников. В разделе 6.2 для многогранника  $C_{d,n}(t)$  описана расширенная формулировка размера  $O(\log n)^{\lfloor d/2 \rfloor}$ . В разделе 6.3 решена задача, сформулированная В. Кли в 1964 году [129], — найдено точное значение диаметра ридж-графа циклического многогранника  $C(d, n)$  при  $n > 2d$ .

В главе 7 рассматривается теория алгоритмов прямого типа, в рамках которой утверждается, что кликовое число графа (многогранника, конусного разбиения множества исходных данных) задачи является нижней оценкой сложности соответствующей оптимизационной задачи в некотором широком классе алгоритмов. В разделе 7.2 показано, что кликовое число графа задачи о кратчайшем орпути в орграфе на  $n$  вершинах с ограничением неотрицательности длин контуров равно  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ . В разделе 7.3 приводится доказательство того, что алгоритм Куна–Манкреса для задачи о назначениях (а также алгоритм Эдмондса для задачи о паросочетаниях) не является алгоритмом прямого типа. Кроме того,

описывается достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из класса алгоритмов прямого типа.

В главе 8 представлена коллекция примеров семейств многогранников, различные характеристики которых значительно отличаются от вычислительной сложности соответствующих оптимизационных задач. В разделе 8.2 описан пример семейства многогранников, число прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней для которых полиномиально относительно размерности, а задача линейной оптимизации NP-трудна. В разделе 8.3 приводятся примеры двух задач, многогранники которых комбинаторно эквивалентны друг другу, но одна из этих задач полиномиально разрешима, а другая имеет экспоненциальную сложность. Такого эффекта удастся достигнуть за счет экспоненциальной сложности распознавания вершины многогранника последней задачи. Этот результат говорит о том, что ни одна чисто комбинаторная характеристика многогранника не дает возможности отделить полиномиально разрешимые задачи от задач с экспоненциальной сложностью. С другой стороны, все рассмотренные в диссертации примеры позволяют сделать предположение о том, что реальная вычислительная сложность задачи оценивается сверху сложностью расширения многогранника, а снизу — числом прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней.

## 9.1. Открытые вопросы

1. До сих пор остается открытым следующий вопрос. Существуют ли примеры задач, сложность которых была бы существенно меньше числа прямоугольного покрытия матрицы инцидентий вершин-гиперграней соответствующего многогранника? Во всех известных примерах сложность задачи оказывается больше этой величины. В частности, можно предположить, что сложность задачи всегда ограничена снизу числом прямоугольного покрытия, а сверху —

сложностью расширенной формулировки.

2. В последнем разделе последней главы были построены два примера задач, многогранники которых комбинаторно эквивалентны, но одна из задач полиномиально разрешима, а другая имеет экспоненциальную сложность. Этот результат достигнут во многом за счет того, что распознавание вершины многогранника второй задачи имеет экспоненциальную сложность, что противоречит определению семейства многогранников и замечанию к определению задачи комбинаторной оптимизации.

3. В настоящее время неизвестны нижние оценки сложности расширения  $C_{d,n}$ , которые соответствовали бы верхней оценке из теоремы 6.8. Например, из [96] следует, что  $O(d^2 \log n)$  является лучшей нижней оценкой, опирающейся на комбинаторные свойства многогранника.

4. Статус задачи об идентификации смежности вершин многогранника деревьев Штейнера напрямую связан с положением этого семейства в иерархии задач относительно аффинной сводимости.

5. Является ли многогранник гамильтоновых циклов многогранником задачи выполнимости? Или, иными словами, можно ли утверждение «подграф является гамильтоновым циклом» (или даже «подграф является связным») выразить булевой формулой (полиномиальной длины) в КНФ с использованием только переменных-ребер.

## 9.2. Комментарии

1. Пример задачи с ограничением, сложность расширенной формулировки полиэдра которой как угодно больше сложности расширенной формулировки многогранника (общей) задачи. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  правильный  $n$ -угольник с вершинами на окружности  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$ . Множество его вершин обозначим  $Y_n$ . Сложность расширенной формулировки конуса  $\text{cone}(Y_n)$  равна  $\Theta(\log n)$ . Таким образом, за счет выбора  $n$  мы можем сделать эту сложность как угодно большой.

Рассмотрим тривиальную задачу оптимизации на отрезке  $z \in [0, 1]$ ,  $x = y = 0$ . Сумма этого отрезка и конуса  $\text{cone}(Y_n)$  совпадает с конусом.

## Список литературы

1. Антонов А. И., Бондаренко В. А. Полиэдральные графы задач РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ и ПОЛНЫЙ ДВУДОЛЬНЫЙ ПОДГРАФ // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 6. С. 101–106.
2. Барвинок А. И., Вершик А. М. Выпуклые оболочки орбит представлений конечных групп и комбинаторная оптимизация // Функциональный анализ и его приложения. 1988. Т. 22, № 3. С. 66–67.
3. Бастраков С. И. Алгоритмические вопросы построения двойственного описания выпуклого полиэдра: Кандидатская диссертация / Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского. 2016.
4. Бастраков С. И., Золотых Н. Ю. Использование идей алгоритма QUICKHULL в методе двойного описания // Выч. мет. программирование. 2011. Т. 12, № 2. С. 232–237.
5. Белов Ю. А. О плотности графа матроида // Модели исследования операций в вычислительных системах. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 95–100.
6. Белов Ю. А., Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические вопросы сложности дискретных задач. ЯрГУ Ярославль, 2006.
7. Белошевский М. И. Многогранник задачи о максимальном разрезе // Модели и алгоритмы математического обеспечения ЭВМ. Ярославль: ЯрГУ, 1986. С. 12–20.
8. Бондаренко В. А. Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 45–50.
9. Бондаренко В. А. Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ вычислительных систем. 1987. Т. 1987. С. 133–134.
10. Бондаренко В. А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. Ярославль, 1995.
11. Бондаренко В. А., Бродский А. Г. О случайных 2-смежностных 0/1-много-

- гранниках // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 1. С. 64–69.
12. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. URSS M., 2008.
  13. Бондаренко В. А., Николаев А. В. Комбинаторно-геометрические свойства задачи о разрезе // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 2. С. 127–129.
  14. Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 4. С. 453–463.
  15. Грешнев С. Н. Многогранник задачи о  $m$ -вершинном подграфе полного графа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 5. С. 790–793.
  16. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
  17. Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик: Пер. с англ. / Под ред. В. П. Гришукина. М.: МЦНМО, 2001.
  18. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
  19. Золотых Н. Ю. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 1. С. 153–163.
  20. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). Мн: БГУ, 1977.
  21. Ковалев М. М., Болоташвили Г. Г. Расширение специального класса фасет многогранника задачи линейных порядков // Доклады национальной академии наук Беларуси. 2012. Т. 56, № 5. С. 20–24.
  22. Кравцов В. М. О характеристике типов максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1908–1912.



23. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9, № 3. С. 115–116.
24. Максименко А. Н. Графы многогранников и сводимость задач комбинаторной оптимизации: Кандидатская диссертация / Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова. 2004.
25. Максименко А. Н. Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1693–1696.
26. Максименко А. Н. Диаметр ридж-графа циклического многогранника // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 2. С. 146–152.
27. Максименко А. Н. Многогранники задачи о выполнимости являются гранями многогранника задачи коммивояжёра // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 76–83.
28. Максименко А. Н. Аналог теоремы Кука для многогранников // Изв. вузов. Математика. 2012. Т. 56, № 8. С. 34–42.
29. Максименко А. Н. Об аффинной сводимости комбинаторных многогранников // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, № 6. С. 661–663.
30. Максименко А. Н. Многогранники коммивояжера и разрезов. Аффинная сводимость // Дискретная математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 31–38.
31. Максименко А. Н. Общая грань некоторых 0/1-многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–118.
32. Максименко А. Н.  $k$ -Смежностные грани булева квадратичного многогранника // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 2. С. 95–103.
33. Максименко А. Н. Характеристики сложности: кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 5. С. 116–130.
34. Максименко А. Н. Наиболее простые семейства многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами // Доклады Академии наук. 2015. Т.

- 460, № 3. С. 272–274.
35. Максименко А. Н. Сложность задач комбинаторной оптимизации в терминах решёток граней ассоциированных многогранников // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23, № 3. С. 61–80.
  36. Максименко А. Н. Булев квадратичный многогранник является гранью многогранника линейных порядков // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 640–646.
  37. Максименко А. Н. Об одном семействе 0/1-многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин // Дискретная математика. 2017. Т. 29, № 2. С. 29–39.
  38. Мошков М. Ю. Об условных тестах // Доклады АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 550–552.
  39. Трубин В. А. О методе решения задач целочисленного линейного программирования специального вида // Доклады АН СССР. 1969. Т. 189, № 5. С. 952–954.
  40. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады АН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1093–1096.
  41. Циглер Г. М. Теория многогранников: Пер. с англ. / Под ред. Н. П. Долбина. М.: МЦНМО, 2014.
  42. Aaronson S. The limits of quantum computers // Scientific American. 2008. Vol. 298, no. 3. P. 62–69.
  43. Aichholzer O. Extremal properties of 0/1-polytopes of dimension 5 // Polytopes — Combinatorics and Computation / Ed. by G. Kalai, G. M. Ziegler; Basel: Birkhäuser. 2000. P. 111–130.
  44. Alfakih A. Y., Murty K. G. Adjacency on the constrained assignment problem // Discrete applied mathematics. 1998. Vol. 87, no. 1. P. 269–274.
  45. Altshuler A., Bokowski J., Steinberg L. The classification of simplicial 3-spheres with nine vertices into polytopes and nonpolytopes // Discrete Mathematics. 1980. Vol. 31, no. 2. P. 115–124.

46. Applications of combinatorial optimization / Ed. by V. T. Paschos. Wiley-ISTE, 2014.
47. Arora S., Barak B. Computational complexity: a modern approach. Cambridge University Press, 2009.
48. Avis D., Tiwary H. R. On the extension complexity of combinatorial polytopes // Mathematical Programming. 2015. Vol. 153, no. 1. P. 95–115.
49. Balas E., Padberg M. W. Set partitioning: A survey // SIAM review. 1976. Vol. 18, no. 4. P. 710–760.
50. Balas E., Saltzman M. J. Facets of the three-index assignment polytope // Discrete Applied Mathematics. 1989. Vol. 23, no. 3. P. 201–229.
51. Balinski M. L., Russakoff A. On the assignment polytope // Siam Review. 1974. Vol. 16, no. 4. P. 516–525.
52. Barahona F. On cuts and matchings in planar graphs // Mathematical Programming. 1993. Vol. 60, no. 1-3. P. 53–68.
53. Barahona F., Mahjoub A. R. On the cut polytope // Mathematical programming. 1986. Vol. 36, no. 2. P. 157–173.
54. Ben-Tal A., Nemirovski A. On polyhedral approximations of the second-order cone // Mathematics of Operations Research. 2001. Vol. 26, no. 2. P. 193–205.
55. Billera L. J., Sarangarajan A. All 0-1 polytopes are traveling salesman polytopes // Combinatorica. 1996. Vol. 16, no. 2. P. 175–188.
56. Birkhoff G. Three observations on linear algebra // Univ. Nac. Tucumán. Revista A. 1946. Vol. 5. P. 147–151.
57. Bogomolov Y., Fiorini S., Maksimenko A., Pashkovich K. Small Extended Formulations for Cyclic Polytopes // Discrete & Computational Geometry. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 809–816.
58. Bondarenko V., Nikolaev A. On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 2016.
59. Bondarenko V. A., Yurov S. V. About a polyhedron of cubic graphs // Funda-

- menta Informaticae. 1996. Vol. 25, no. 1. P. 35–38.
60. Borgwardt S. On the diameter of partition polytopes and vertex-disjoint cycle cover // *Mathematical Programming*. 2013. Vol. 141, no. 1-2. P. 1–20.
  61. Borgwardt S., De Loera J. A., Finhold E., Miller J. The hierarchy of circuit diameters and transportation polytopes // *Discrete Applied Mathematics*. 2015.
  62. Braun G., Fiorini S., Pokutta S., Steurer D. Approximation limits of linear programs (beyond hierarchies) // *Mathematics of Operations Research*. 2015. Vol. 40, no. 3. P. 756–772.
  63. Brualdi R. A., Gibson P. M. Convex polyhedra of doubly stochastic matrices. I. Applications of the permanent function // *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. 1977. Vol. 22, no. 2. P. 194–230.
  64. Brualdi R. A., Gibson P. M. Convex polyhedra of doubly stochastic matrices: II. Graph of  $\Omega_n$  // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 1977. Vol. 22, no. 2. P. 175–198.
  65. Buchheim C., Wiegele A., Zheng L. Exact algorithms for the quadratic linear ordering problem // *INFORMS Journal on Computing*. 2010. Vol. 22, no. 1. P. 168–177.
  66. Burke E. K., Mareček J., Parkes A. J., Rudová H. A supernodal formulation of vertex colouring with applications in course timetabling // *Annals of Operations Research*. 2010. Vol. 179, no. 1. P. 105–130.
  67. Campêlo M., Campos V. A., Corrêa R. C. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem // *Discrete Applied Mathematics*. 2008. Vol. 156, no. 7. P. 1097–1111.
  68. Carr R. D., Konjevod G., Little G. et al. Compacting cuts: a new linear formulation for minimum cut // *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*. 2009. Vol. 5, no. 3. P. 27.
  69. Ceballos C., Manneville T., Pilaud V., Pournin L. Diameters and geodesic properties of generalizations of the associahedron // *DMTCS Proc., 27th International Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*. 2015.

70. Ceballos C., Pilaud V. The diameter of type D associahedra and the non-leaving-face property // *European Journal of Combinatorics*. 2016. Vol. 51. P. 109–124.
71. Chopra S., Rao M. R. The Steiner tree problem I: Formulations, compositions and extension of facets // *Mathematical Programming*. 1994. Vol. 64, no. 1. P. 209–229.
72. Chung S. J. Structural complexity of adjacency on 0-1 convex polytopes: Ph. D. thesis / University of Michigan. 1980.
73. Chvátal V. On certain polytopes associated with graphs // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 1975. Vol. 18, no. 2. P. 138–154.
74. Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // *Proc. 1964 Internat. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science*. 1964. P. 24–30.
75. Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G. Extended formulations in combinatorial optimization // *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 1–48.
76. Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G. Extended formulations in combinatorial optimization // *Annals of Operations Research*. 2013. Vol. 204, no. 1. P. 97–143.
77. Conforti M., Rinaldi G., Wolsey L. On the cut polyhedron // *Discrete Mathematics*. 2004. Vol. 277, no. 1. P. 279–285.
78. Cook S. A. The complexity of theorem proving procedures // *Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*. 1971. P. 151–158.
79. Cornaz D., Jost V. A one-to-one correspondence between colorings and stable sets // *Operations Research Letters*. 2008. Vol. 36, no. 6. P. 673–676.
80. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem // *Journal of the Operations Research Society of America*. 1954. Vol. 2, no. 4. P. 393–410.
81. Dantzig G. B. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities // *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, 1951. P. 339–347.

82. Dantzig G. B. Linear programming and extensions. Princeton university press, 1963.
83. De Loera J. A., Kim E. D. Combinatorics and geometry of transportation polytopes: an update // Discrete geometry and algebraic combinatorics. 2014. Vol. 625. P. 37–76.
84. Delle Donne D., Marenco J. Polyhedral studies of vertex coloring problems: The standard formulation // Discrete Optimization. 2016. Vol. 21. P. 1–13.
85. Deza M., Laurent M., Poljak S. The cut cone III: on the role of triangle facets // Graphs and Combinatorics. 1992. Vol. 8, no. 2. P. 125–142.
86. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische mathematik. 1959. Vol. 1, no. 1. P. 269–271.
87. Doignon J.-P., Fiorini S., Joret G. Weighted graphs defining facets: a connection between stable set and linear ordering polytopes // Discrete Optimization. 2009. Vol. 6, no. 1. P. 1–9.
88. Dukes W. Bounds on the number of generalized partitions and some applications // Australasian Journal of Combinatorics. 2003. Vol. 28. P. 257–262.
89. Edmonds J. Minimum partition of a matroid into independent subsets // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. 1965. Vol. 69. P. 67–72.
90. Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of mathematics. 1965. Vol. 17, no. 3. P. 449–467.
91. Euler R. Odd cycles and a class of facets of the axial 3-index assignment polytope // Applicationes Mathematicae. 1987. Vol. 3, no. 19. P. 375–386.
92. Feichtner E. M., Sturmfels B. Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans // Portugaliae Mathematica. 2005. Vol. 62, no. 4. P. 437–468.
93. Ferrez J.-A., Fukuda K., Liebling T. M. Parallel implementation of graph diameter algorithms // EPFL Supercomputing Review. 1998. no. 10. P. 3–6.
94. Fiorini S. A combinatorial study of partial order polytopes // European Journal of Combinatorics. 2003. Vol. 24, no. 2. P. 149–159.
95. Fiorini S. How to recycle your facets // Discrete Optimization. 2006. Vol. 3,

- no. 2. P. 136–153.
96. Fiorini S., Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations // *Discrete Mathematics*. 2013. Vol. 313, no. 1. P. 67–83.
  97. Fiorini S., Massar S., Pokutta S. et al. Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds // *Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM*. 2012. P. 95–106.
  98. Fiorini S., Massar S., Pokutta S. et al. Exponential lower bounds for polytopes in combinatorial optimization // *Journal of the ACM (JACM)*. 2015. Vol. 62, no. 2. P. 17.
  99. Fiorini S., Rothvoß T., Tiwary H. R. Extended formulations for polygons // *Discrete & computational geometry*. 2012. Vol. 48, no. 3. P. 658–668.
  100. Gaiha P., Gupta S. Adjacent vertices on a permutohedron // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1977. Vol. 32, no. 2. P. 323–327.
  101. Gale D. Neighborly and cyclic polytopes // *Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. 7. 1963. P. 225–232.
  102. Garg N., Vazirani V. V. A polyhedron with all s-t cuts as vertices, and adjacency of cuts // *Mathematical programming*. 1995. Vol. 70, no. 1-3. P. 17–25.
  103. Geist D., Rodin E. Y. Adjacency of the 0-1 knapsack problem // *Computers and operations research*. 1992. Vol. 19, no. 8. P. 797–800.
  104. Gillmann R. 0/1-polytopes: typical and extremal properties: Ph.D. thesis / TU Berlin. 2006.
  105. Girlich E., Höding M., Horbach A., Kovalev M. On the facets and diameter of the k-cycle polytope // *Optimization*. 2006. Vol. 55, no. 4. P. 311–339.
  106. Goemans M. X. Smallest compact formulation for the permutahedron // *Mathematical Programming*. 2015. Vol. 153, no. 1. P. 5–11.
  107. Goldreich O. Computational complexity: a conceptual perspective. Cambridge University Press, 2008.

108. Grötschel M., Jünger M., Reinelt G. Facets of the linear ordering polytope // Mathematical Programming. 1985. Vol. 33, no. 1. P. 43–60.
109. Grötschel M., Lovász L. Combinatorial Optimization // Handbook of Combinatorics (Vol. 2) / Ed. by R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1995. P. 1541–1597.
110. Grünbaum B. Convex Polytopes / Ed. by V. Kaibel, V. Klee, G. Ziegler. Springer, 2003. 471 p.
111. Hartvigsen D., Zemel E. The complexity of lifted inequalities for the knapsack problem // Discrete Applied Mathematics. 1992. Vol. 39, no. 2. P. 113–123.
112. Henk M., Richter-Gebert J., Ziegler G. M. Basic properties of convex polytopes // Handbook of discrete and computational geometry. CRC Press, 2004. P. 355–382.
113. Ikura Y., Nemhauser G. L. Simplex pivots on the set packing polytope // Mathematical programming. 1985. Vol. 33, no. 2. P. 123–138.
114. Jünger M., Reinelt G., Rinaldi G. The traveling salesman problem // Handbooks in operations research and management science, Vol. 7 / Ed. by M. Ball, T. Magnanti, C. Monma, G. Nemhauser. IWR, 1995. P. 225–330.
115. Jünger M., Reinelt G., Thienel S. Practical problem solving with cutting plane algorithms in combinatorial optimization // Combinatorial Optimization, DIMACS. 1995. Vol. 20. P. 111–152.
116. Kaibel V. Polyhedral combinatorics of the quadratic assignment problem: Ph. D. thesis / Universität zu Köln. 1997.
117. Kaibel V. Extended Formulations in Combinatorial Optimization // Optima 85. 2011. P. 2–7.
118. Kaibel V., Lee J., Walter M., Weltge S. Extended Formulations for Independence Polytopes of Regular Matroids // Graphs and Combinatorics. 2016. Vol. 32, no. 5. P. 1931–1944.
119. Kaibel V., Loos A. Branched polyhedral systems // International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization / Springer. 2010.



- P. 177–190.
120. Kaibel V., Pashkovich K. Constructing extended formulations from reflection relations // *Facets of Combinatorial Optimization*. Springer, 2013. P. 77–100.
  121. Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Symmetry Matters for Sizes of Extended Formulations // *SIAM J. Discrete Math.* 2012. Vol. 26, no. 3. P. 1361–1382.
  122. Kaibel V., Pfetsch M. E. Computing the face lattice of a polytope from its vertex-facet incidences // *Comput. Geom.* 2002. Vol. 23, no. 3. P. 281–290.
  123. Kaibel V., Weltge S. A Short Proof that the Extension Complexity of the Correlation Polytope Grows Exponentially // *Discrete & Computational Geometry*. 2015. Vol. 53, no. 2. P. 397–401.
  124. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM*. 1984. P. 302–311.
  125. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // *Complexity of computer computations*. Plenum Press, 1972. P. 85–103.
  126. Karp R. M., Papadimitriou C. H. On linear characterizations of combinatorial optimization problems // *SIAM Journal on Computing*. 1982. Vol. 11, no. 4. P. 620–632.
  127. Khachiyan L., Boros E., Borys K. et al. Generating all vertices of a polyhedron is hard // *Discrete & Computational Geometry*. 2008. Vol. 39, no. 1. P. 174–190.
  128. Kim E. D. Structural complexity of adjacency on 0-1 convex polytopes: Ph.D. thesis / University of California. 2010.
  129. Klee V. Diameters of polyhedral graphs // *Canad. J. Math.* 1964. Vol. 16. P. 602–614.
  130. Klee V. Paths on polyhedra. II // *Pacific Journal of Mathematics*. 1966. Vol. 17, no. 2. P. 249–262.
  131. Klee V., Walkup D. W. The  $d$ -step conjecture for polyhedra of dimension  $d < 6$  // *Acta Mathematica*. 1967. Vol. 117, no. 1. P. 53–78.
  132. Kleinschmidt P., Onn S. On the diameter of convex polytopes // *Discrete math-*

- ematics. 1992. Vol. 102, no. 1. P. 75–77.
133. Kuhn H. W. The Hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics. 1955. Vol. 2. P. 83–97.
  134. Lagarias J. C., Prabhu N. Counting  $d$ -step paths in extremal Dantzig figures // Discrete & Computational Geometry. 1998. Vol. 19, no. 1. P. 19–31.
  135. Lee C. W. Regular triangulations of convex polytopes // Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift / Ed. by P. Gritzmann, B. Sturmfels. American Mathematical Society, 1991. P. 443–456.
  136. Maksimenko A. N. A special role of Boolean quadratic polytopes among other combinatorial polytopes // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Vol. 23, no. 1. P. 23–40.
  137. Martin R. K. Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations // Operations Research Letters. 1991. Vol. 10, no. 3. P. 119–128.
  138. Matsui T. NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes // Lecture Notes in Operations Research. 1995. Vol. 1. P. 249–258.
  139. Matsuia T., Tamura S. Adjacency on combinatorial polyhedra // Discrete applied mathematics. 1995. Vol. 56, no. 2. P. 311–321.
  140. Mehrotra A., Trick M. A. A column generation approach for graph coloring // informs Journal on Computing. 1996. Vol. 8, no. 4. P. 344–354.
  141. Méndez-Díaz I., Zabala P. A cutting plane algorithm for graph coloring // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156, no. 2. P. 159–179.
  142. Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems // Journal of the society for industrial and applied mathematics. 1957. Vol. 5, no. 1. P. 32–38.
  143. Naddef D. The Hirsch conjecture is true for  $(0, 1)$ -polytopes // Mathematical Programming. 1989. Vol. 45, no. 1. P. 109–110.
  144. Naddef D., Pulleyblank W. R. Hamiltonicity and combinatorial polyhedra // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1981. Vol. 31, no. 3. P. 297–312.
  145. Nemhauser G. L., Trotter L. E. Vertex packings: structural properties and algo-

- rithms // Mathematical Programming. 1975. Vol. 8, no. 1. P. 232–248.
146. Onn S. Geometry, complexity, and combinatorics of permutation polytopes // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 1993. Vol. 64, no. 1. P. 31–49.
  147. Onn S., Rothblum U. G. Convex combinatorial optimization // Discrete & Computational Geometry. 2004. Vol. 32, no. 4. P. 549–566.
  148. Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. 1989. Vol. 45, no. 1-3. P. 139–172.
  149. Padberg M. W. Equivalent knapsack-type formulations of bounded integer linear programs: An alternative approach // Naval Research Logistics Quarterly. 1972. Vol. 19, no. 4. P. 699–708.
  150. Padberg M. W., Rao M. R. The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two // Mathematical Programming. 1974. Vol. 7, no. 1. P. 32–45.
  151. Palubeckis G. On the recursive largest first algorithm for graph colouring // International Journal of Computer Mathematics. 2008. Vol. 85, no. 2. P. 191–200.
  152. Pan V. Y. Optimal and nearly optimal algorithms for approximating polynomial zeros // Computers & Mathematics with Applications. 1996. Vol. 31, no. 12. P. 97–138.
  153. Pan V. Y. Univariate Polynomials: Nearly Optimal Algorithms for Numerical Factorization and Root-finding // Journal of Symbolic Computation. 2002. Vol. 33, no. 5. P. 701–733.
  154. Papadimitriou C. H. The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Mathematical Programming. 1978. Vol. 14, no. 1. P. 312–324.
  155. Papadimitriou C. H. Polytopes and complexity // Progress in Combinatorial Optimization. 1984. P. 295–305.
  156. Papadimitriou C. H., Wolfe D. The complexity of facets resolved // Journal of Computer and System Sciences. 1988. Vol. 37, no. 1. P. 2–13.
  157. Papadimitriou C. H., Yannakakis M. The complexity of facets (and some facets of complexity) // Journal of Computer and System Sciences. 1984. Vol. 28,

- no. 2. P. 244–259.
158. Pashkovich K., Weltge S. Hidden vertices in extensions of polytopes // *Operations Research Letters*. 2015. Vol. 43, no. 2. P. 161–164.
  159. Qi L., Sun D. Polyhedral methods for solving three index assignment problems // *Nonlinear Assignment Problems* / Ed. by P. M. Pardalos, L. S. Pitsoulis. Springer, 2000. P. 91–107.
  160. Queyranne M., Wang Y. Hamiltonian path and symmetric travelling salesman polytopes // *Mathematical Programming*. 1993. Vol. 58, no. 1-3. P. 89–110.
  161. Rado R. An inequality // *Journal of the London Mathematical Society*. 1952. Vol. 27. P. 1–6.
  162. Rijal M. P. Scheduling, design and assignment problems with quadratic costs: Ph.D. thesis / New York University. 1995.
  163. Rispoli F. J. The monotonic diameter of the perfect matching and shortest path polytopes // *Operations research letters*. 1992. Vol. 12, no. 1. P. 23–27.
  164. Rispoli F. J., Cosares S. A bound of 4 for the diameter of the symmetric traveling salesman polytope // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 1998. Vol. 11, no. 3. P. 373–380.
  165. Rothvoß T. Some 0/1 polytopes need exponential size extended formulations // *Mathematical Programming*. 2013. Vol. 142, no. 1-2. P. 255–268.
  166. Rothvoß T. The matching polytope has exponential extension complexity // *Proceedings of the 46th annual ACM symposium on theory of computing* / ACM. 2014. P. 263–272.
  167. Sagraloff M., Mehlhorn K. Computing real roots of real polynomials // *Journal of Symbolic Computation*. 2016. Vol. 73. P. 46–86.
  168. Saigal R. A proof of the Hirsch conjecture on the polyhedron of the shortest route problem // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1969. Vol. 17, no. 6. P. 1232–1238.
  169. Saito H., Fujie T., Matsui T., Matuura S. A study of the quadratic semi-assignment polytope // *Discrete Optimization*. 2009. Vol. 6, no. 1. P. 37–50.

170. Santos F. A counterexample to the Hirsch Conjecture // *Annals of Mathematics*. 2012. Vol. 176, no. 1. P. 383–412.
171. Santos F. Recent progress on the combinatorial diameter of polytopes and simplicial complexes // *TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*. 2013. Vol. 21, no. 3. P. 426–460.
172. Schrijver A. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, 1998.
173. Schrijver A. *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*. Springer, 2003.
174. Schrijver A. On the history of combinatorial optimization (till 1960) // *Discrete Optimization* / Ed. by K. Aardal, G. Nemhauser, R. Weismantel. Elsevier, 2005. P. 1–68.
175. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // *Bell Labs Technical Journal*. 1949. Vol. 28, no. 1. P. 59–98.
176. Skutella M., Weber A. On the dominant of the s-t-cut polytope: Vertices, facets, and adjacency // *Mathematical Programming*. 2010. Vol. 124, no. 1. P. 441–454.
177. Smale S. Mathematical problems for the next century // *The Mathematical Intelligencer*. 1998. Vol. 20, no. 2. P. 7–15.
178. Toktas B., Yen J. W., Zabinsky Z. B. Addressing capacity uncertainty in resource-constrained assignment problems // *Computers & operations research*. 2006. Vol. 33, no. 3. P. 724–745.
179. Vanderbeck F., Wolsey L. A. Reformulation and decomposition of integer programs // *50 Years of Integer Programming 1958-2008*. Springer, 2010. P. 431–502.
180. Vohra R. V. *Mechanism design: a linear programming approach*. Cambridge University Press, 2011. Vol. 47.
181. Winkler F. *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*. Springer, 1996.
182. Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // *Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of*

- computing / ACM. 1988. P. 223–228.
183. Yannakakis M. Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Programs // Journal of computer and system sciences. 1991. Vol. 43. P. 441–466.
184. Young H. P. On permutations and permutation polytopes // Polyhedral combinatorics. Springer, 1978. P. 128–140.
185. Ziegler G. M. Lectures on 0/1-polytopes // Polytopes — Combinatorics and Computation / Ed. by G. Kalai, G. M. Ziegler; Basel: Birkhäuser. 2000. P. 1–41.
186. Ziegler G. M. Who Solved the Hirsch Conjecture? // Documenta Mathematica Extra Volume: Optimization Stories. 2012. P. 75–85.