На правах рукописи

МАКСИМЕНКО Александр Николаевич

Комбинаторно-геометрические характеристики сложности задач комбинаторной оптимизации

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Ярославль – 2017

Общая характеристика работы

Объект исследования. Сформулируем *задачу комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией* следующим образом. Дано конечное множество E, каждому элементу e которого приписан некоторый вес $c_e \in \mathbb{R}$, и полиномиально вычислимая функция (предикат) $f\colon 2^E \to \{\text{ложь}, \text{истина}\}$. Подмножество $s \subseteq E$ называется *допустимым решением* этой задачи, если $f(s)$ истинно. Множество всех допустимых решений обозначим S, $S = \{s \subseteq E \mid f(s)\}$. Цель задачи состоит в отыскании *оптимального* решения $s \in S$ с максимальным (минимальным) суммарным весом элементов.

Как правило, интерес представляет *общая задача*, когда S фиксировано, а веса c_e выбираются произвольно. Таким образом, общая задача однозначно определяется множеством всех своих допустимых решений S, а веса c_e представляют собой набор входных данных *частной задачи*. Далее для обозначения общей задачи будем пользоваться обозначением множества её решений S.

Например, в задаче о кратчайшем пути множество E есть множество дорог, соединяющих города, веса c_e являются длинами дорог, а предикат f принимает значение «истина» для каждого подмножества дорог, представляющего собой маршрут из города A в город B. Другими классическими примерами являются задача поиска минимального остовного дерева, задача о назначениях, задача коммивояжера, задача о рюкзаке и многие другие.

Чаще всего такие задачи встречаются в экономике при оптимизации использования ресурсов, планировании транспортной инфраструктуры и производства, оптимизации доставки грузов, составлении расписаний и т. п. [27]. Более того, в настоящее время задачи комбинаторной оптимизации встречаются практически везде: секвенирование генома, классификация биологических видов, моделирование молекул, планирование коммуникационных и электрических сетей, позиционирование спутников, производство сверхбольших интегральных схем (VLSI), криптография, машинное обучение и т. д. [45].

Как известно [59], во многих случаях такие задачи полезно переводить на язык геометрии. А именно, для каждого допустимого решения $s \in S$ рассматривается его *характеристический вектор* $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^E$, координаты x_e, $e \in E$, которого полагаются равными единице для $e \in s$ и равны нулю для $e \notin s$. Далее множество всех характеристических векторов допустимых решений обозначаем X, $X \subseteq \{0,1\}^E$. Набор весов представляется в виде вектора $\boldsymbol{c} = (c_e) \in \mathbb{R}^E$. Цель задачи при такой интерпретации заключается в поиске характеристического вектора $\boldsymbol{x} \in X$, на котором целевая функция $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$ достигает свое максимальное (минимальное) значение. Важно то, что экстремальные значения целевой функции не меняются при замене области определения X её выпуклой оболочкой $\operatorname{conv}(X)$. Таким образом, с каждой задачей комбинаторной оптимизации ассоциируется некоторый выпуклый многогранник $\operatorname{conv}(X)$, вершинами которого служит множество X.

Во-первых, такая геометрическая интерпретация дает возможность при решении задачи пользоваться различными геометрическими инструментами, в частности, методами линейного программирования. Как показывает опыт многочисленных исследований в этой области, во многих случаях это позволяет на порядки увеличивать скорость и качество решений [59].

Во-вторых, комбинаторная структура многогранника отражает структуру множества допустимых решений соответствующей задачи. Проиллюстрируем эту мысль с помощью понятия смежных решений. Допустимые решения s_1 и s_2 задачи S называются *смежными*, если для некоторого набора весов c_e оба эти решения являются оптимальными для соответствующей частной задачи и других оптимальных решений у неё нет. Смежность решений s_1 и s_2 означает, что при незначительном изменении входных данных частной задачи её оптимальное решение может меняться с s_1 на s_2 и обратно. То есть в алгоритме, решающем общую задачу, должна быть предусмотрена проверка, чувствительная к таким изменениям. Это, в свою очередь, накладывает ряд ограничений на структуру алгоритма и, в итоге, может использоваться для теоретических оценок сложности соответствующей задачи. При геометрическом подходе смежность решений интерпретируется как наличие ребра между соответствующими вершинами многогранника $\operatorname{conv}(X)$. Таким образом, граф многогранника задачи содержит в себе некоторую информацию о её структурной сложности. Продолжая эту мысль, вполне естественно обратиться к изучению свойств всей решетки граней (множества всех граней, упорядоченных по включению) многогранника задачи.

Исторический обзор и актуальность темы исследований. Широкий интерес к задачам комбинаторной оптимизации появился в 1950-х гг. Его возникновение было обусловлено тремя факторами: создание первых программируемых ЭВМ, создание концепции линейного программирования Канторовичем и Купмансом и разработка симплекс-метода Данцигом, а также накопленный опыт решения алгоритмических задач на графах. Именно в 1950-х гг. был разработан венгерский метод решения задачи о назначениях, алгоритм Форда-Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, несколько алгоритмов для нахождения кратчайших путей, заново открыты старые и предложены новые алгоритмы для нахождения минимального остовного дерева, а также их обобщение для нахождения в матроиде базы минимального веса [60]. В это же время, после разработки Данцигом симплекс-метода, были реализованы первые успешные попытки его применения к различным задачам комбинаторной оптимизации. В частности, с помощью техники линейного программирования был достигнут впечатляющий по тем временам прогресс в решении задачи коммивояжера [39].

Успешное применение симплекс-метода стало источником многочисленных размышлениий о его теоретической эффективности. Так, например, было замечено, что нижней оценкой числа шагов симплекс-метода может служить диаметр графа многогранника. В связи с этим в 1957 году была сформулирована гипотеза Хирша о том, что диаметр графа многогранника не может быть больше разности между числом его гиперграней и размерностью. С тех пор этой гипотезе уделялось значительное внимание, но лишь в 2010 году Сантосу удалось построить пример 43-мерного многогранника с 86 гипергранями, диаметр которого больше, чем 43 [58]. Тем не менее, в общем виде[1] эта гипотеза до сих пор остается открытой и привлекает внимание видных ученых [62].

Одним из основных результатов автора настоящей работы является точное значение диаметра графа многогранника, двойственного к циклическому. В 1964 г. Кли [50] предположил, что этот диаметр равен $\lfloor n/2 \rfloor$, где n — число гиперграней. Но тремя годами позднее им же был найден контрпример [51]. С тех пор задача оставалась открытой.

Вместе с успехами и неудачами в решении отдельных задач в 1950–60-х гг. формировалось понятие эффективного алгоритма, окончательно сформулированное в работах Эдмондса [41] и Кобхэма [35]. В это же время Эдмондс [40] ввел понятие задачи, имеющей «хорошую характеризацию», что, по-сути, является определением того, что позднее было названо классом NP. Всё это послужило предпосылками к открытию в начале 1970-х гг. Куком [38], Карпом [49] и Левиным [25] NP-полных задач. Примечательно то, что каждый из них предложил свой способ сведе́ния задач. В частности, понятие аффинной сводимости, являющееся одним из основных результатов настоящей работы, по своей сути ближе всего к сводимости Левина.

Открытие NP-полных задач послужило мощным толчком для дальнейших исследований, в том числе свойств многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами. В 1978 году Пападимитриу [55] показал, что задача проверки несмежности двух произвольно взятых вершин многогранника задачи коммивояжера NP-полна, то есть она также сложна, как и сама задача коммивояжера. Позднее аналогичные результаты для многогранников некоторых других NP-трудных задач были получены Чунгом, Гейст и Родин, Мацуи, Бондаренко и Юровым, Альфаки и Мурти, Фиорини (см. ссылки в [14]). С другой стороны, в 1975 г. Хватал показал [34], что для многогранника независимых множеств эта задача полиномиально разрешима. Более того, в 1984 г. Грешнев

[1] Верно ли, что диаметр графа ограничен сверху полиномом от числа гиперграней и размерности многогранника?

показал [23], что граф многогранника задачи об m-вершинной клике полон, т. е. задача проверки смежности вершин для него тривиальна. В 1986 г. аналогичный результат для многогранника задачи о максимальном разрезе был независимо получен Белошевским [19] и Барахона и Маджуб [29].

В 1979 году Хачиян [26] описал полиномиальный алгоритм для решения задачи линейного программирования. Этот факт стал теоретическим подтверждением эффективности геометрического подхода к решению задач комбинаторной оптимизации, что увеличило популярность исследований свойств комбинаторных многогранников. В частности, большое внимание исследованию свойств графов многогранников уделено в монографии Емеличева, Ковалева и Кравцова [24].

В 1980-х гг. Бондаренко [20] при исследовании свойств графов многогранников задач обнаружил, что кликовое число[2] графа многогранника хорошо предсказывает алгоритмическую сложность соответствующей оптимизационной задачи. А именно, им была доказана сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников следующих NP-трудных задач: коммивояжер, максимальная клика, 3-сочетание и некоторых других. С другой стороны, кликовые числа графов многогранников оказались полиномиальны для следующих полиномиально разрешимых задач: сортировка, минимальное остовное дерево, задача о кратчайшем пути. На основании этих фактов была разработана теория алгоритмов прямого типа, утверждающая, что кликовое число является нижней оценкой сложности в некотором «широком классе алгоритмов» [20]. Недавно список оценок кликовых чисел графов многогранников задач пополнился несколькими новыми результатами [18, 21, 22, 31, 32]. На основе понятия аффинной сводимости, введенного автором настоящей работы, сверхполиномиальность кликовых чисел графов объясняется тем, что все исследованные многогранники NP-трудных задач содержат в качестве грани булев квадратичный многогранник, кликовое число графа которого экспоненциально.

[2] В оригинале эта характеристика называется плотностью графа

С другой стороны, открытие Хачияном полиномиального алгоритма для задачи линейного программирования породило волну попыток поиска компактного линейного описания для многогранника задачи коммивояжера. Все эти попытки были направлены на использование идеи расширенной формулировки многогранника (сам термин появился позднее). *Расширенной формулировкой* многогранника P называется набор линейных ограничений, описывающих многогранник Q такой, что P является ортогональной проекцией Q. Сам многогранник Q называется *расширением* многогранника P. К тому времени уже были известны примеры, когда число линейных неравенств, необходимых для описания многогранника, экспоненциально, а для его расширения — полиномиально относительно длины входных данных задачи. Ни одна из попыток поиска компактной расширенной формулировки для многогранника задачи коммивояжера не привела к успеху и в 1988 году Яннакакис [61] показал, что такие попытки в принципе не имеют перспективы, если предлагаемые расширенные формулировки удовлетворяют некоторым естественным условиям симметрии. Там же была высказана гипотеза, что утверждение остается справедливым и без условий симметрии. Кроме того, Яннакакис показал, что число линейных неравенств в расширенной формулировке многогранника не может быть меньше числа прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника. Впоследствии минимальное число линейных неравенств, необходимых для описания расширения многогранника было названо *сложностью расширения многогранника.*

В конце 2000-х гг. расширенные формулировки вновь привлекли внимание исследователей [37, 46], что привело к появлению целого ряда новых интересных результатов в данном направлении [36, 43, 47, 48, 56, 57]. В частности, в 2012 г. Фиорини, Массар, Покутта, Тивари и де Вулф доказали справедливость гипотезы Яннакакиса, показав, что число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней для булева квадратичного многогранника экспоненциально [52].

Целью работы является анализ комбинаторных свойств многогранников, характеризующих вычислительную сложность соответствующих задач комбинаторной оптимизации. Это подразумевает: 1) поиск численных оценок различных комбинаторных характеристик для наиболее востребованных семейств многогранников, 2) разработку методологии, упрощающей такого рода поиски, 3) анализ перспективности использования тех или иных характеристик в качестве оценок сложности соответствующих оптимизационных задач.

Методы исследования. При исследовании семейств комбинаторных многогранников интенсивно используется новое в данной области понятие аффинной сводимости. Также используются методы теории выпуклых многогранников, теории графов, линейного программирования, комбинаторного анализа, теории сложности задач и алгоритмов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и могут быть кратко сформулированы следующим образом:

1. Введено понятие аффинной сводимости семейств комбинаторных многогранников, сохраняющей такие свойства многогранников, как NP-полнота критерия несмежности вершин и сверхполиномиальность следующих числовых характеристик: число вершин, число гиперграней, кликовое число графа, сложность расширения, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней. С помощью этого понятия получены следующие результаты:

    - Показано, что специальное семейство многогранников, рассмотренное Мацуи в 1995 г., аффинно сводится к семействам многогранников следующих задач: рюкзак, коммивояжер, кубический подграф, 3-выполнимость, назначения с линейным ограничением. Одним из следствий этого является то, что все эти семейства наследуют от многогранников Мацуи NP-полноту проверки несмежности вершин.

- Показано, что семейства многогранников независимых множеств, многогранников упаковок и разбиений множества, многогранников задачи об n-назначениях для $n \geqslant 3$ и многогранников раскрасок графа эквивалентны в смысле аффинной сводимости и аффинно сводятся к семейству многогранников Мацуи. Кроме того, установлено, что ни один из многогранников Мацуи (за исключением отрезков) не является гранью (в том числе несобственной) ни для одного из многогранников независимых множеств.

2. Обнаружены особые свойства булевых квадратичных многогранников, указывающие на их особое место среди других известных семейств многогранников NP-трудных задач:

   - Показано, что булевы квадратичные многогранники аффинно сводятся к семействам многогранников, перечисленным в предыдущем пункте (рюкзак, коммивояжер и т. д.), а также к многогранникам линейных упорядочиваний, многогранникам квадратичных назначений и квадратичных линейных упорядочиваний. Из этого следует, в частности, что такие свойства булевых квадратичных многогранников, как сверхполиномиальность кликового числа графа и числа прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней автоматически наследуются всеми этими семействами.
   - Введены в рассмотрение семейства булевых многогранников степени p. Показано, что эти многогранники $\lfloor 3p/2 \rfloor$-смежностны и аффинно сводятся к булевым квадратичным многогранникам. Из этого следует, что для любого натурального k булевы квадратичные многогранники содержат k-смежностные грани со сверхполиномиальным (относительно размерности многогранника) числом вершин.

3. Введено понятие расширенной аффинной сводимости, отличающееся от

аффинной сводимости отсутствием требования биективности соответствующего аффинного отображения. Показано, что семейство многогранников любой задачи комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией расширенно аффинно сводится к семейству булевых квадратичных многогранников. Таким образом, относительно расширенной аффинной сводимости все перечисленные выше семейства многогранников образуют один класс эквивалентности. Найден пример семейства многогранников NP-трудной задачи, к которому не может быть расширенно аффинно сведено ни одно из упомянутых выше семейств многогранников.

4. Сделаны оценки двух характеристик сложности для циклических многогранников[3]:
   - Описана компактная расширенная формулировка размера $O(\log n)^{\lfloor d/2 \rfloor}$ для d-мерных циклических многогранников на n вершинах.
   - Найдено точное значение диаметра графа многогранника, двойственного к циклическому.

5. Проведен критический анализ перспективности использования различных известных характеристик сложности многогранников в качестве оценок сложности соответствующих оптимизационных задач:
   - Показано, что у любого выпуклого многогранника есть расширение, граф которого не содержит треугольников.
   - Доказано, что алгоритм Куна–Манкреса (венгерский метод) для задачи о назначениях не принадлежит классу алгоритмов прямого типа (введенному в работах В. А. Бондаренко). Кроме того, описывается достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, суще-

[3] Циклические многогранники обладают максимальным числом граней среди всех многогранников, имеющих ту же размерность и такое же число вершин.

ственно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из этого класса.

- Приводится пример семейства многогранников NP-трудной задачи, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней которых полиномиально.
- Приводятся примеры двух задач, многогранники которых комбинаторно эквивалентны друг другу, но одна из этих задач полиномиально разрешима, а другая имеет экспоненциальную сложность.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследований сложности задач комбинаторной оптимизации и поиска новых эффективных алгоритмов их решения. Значительная часть результатов может быть также использована в исследованиях комбинаторных свойств выпуклых многогранников.

Значение полученных результатов подтверждается их цитированием как отечественными, так и зарубежными специалистами (список не включает соавторов соискателя): А.В. Николаев, А.В. Селиверстов, Р.Ю. Симанчев, L.B. Beasley, C.P. Davis-Stober, J.P. Doignon, H. Fawzi, Q. Feng, F. Glineur, J. Huchette, A. Huq, H. Klauck, T. Lee, A. Makkeh, S. Massar, P.A. Parrilo, M.K. Patra, V. Pilaud, M. Pourmoradnasseri, K. Qi, M. Regenwetter, J. Saunderson, D.O. Theis, H.R. Tiwary, J.P. Vielma, K. Zhao.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и симпозиумах: Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Алтай, 2010), XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 2011), Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2007, 2011), Международная конференция «Дискретная геометрия» посвященной 100-летию А.Д. Александрова (Ярославль, 2012), Международная топологическая конференция «Александровские чтения» (Москва, 2012), XXI Международный симпозиум по математическому программированию (Берлин, 2012), Международный симпозиум по комбинаторной оптимизации (Оксфорд, 2012), Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013), 26-я конференция Европейского отделения по комбинаторной оптимизации (2013, Париж), семинар Института математической оптимизации университета Отто фон Герике (Магдебург, 2013), семинар по дискретной математике в Свободном университете Берлина (2013), 5-й семинар по комбинаторной оптимизации (Каржез, Франция, 2014), 9-я Международная конференция по теории графов и комбинаторике (Гренобль, Франция, 2014), XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию С.С. Рышкова (Тула, 2015), 5-я Международная конференция по сетевому анализу (Нижний Новгород, 2015), семинар лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Нижегородский семинар по дискретной математике, семинар по теории сложности вычислений ВЦ ФИЦ ИУ РАН, семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. М.В. Ломоносова, семинар «Дискретная и вычислительная геометрия» ИППИ РАН.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы из 188 наименований. В конце каждой библиографической ссылки в списке литературы приводятся страницы диссертации, где эта ссылка используется. Общий объем диссертации — 253 страницы, включая 21 рисунок.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, из них 15 статей — в изданиях, рекомендованных ВАК [3–17] и одна глава в монографии [1]. Одна публикация подготовлена в соавторстве с Ю.В. Богомоловым, К. Пашковичем и С. Фиорини [17], причем вклад диссертанта был определяющим на всех этапах работы. Диссертация продолжает исследования, начатые автором в его кандидатской диссертации [2].

Финансовая поддержка. Исследования, включенные в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 00-01-00662-а, 03-01-00822-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (гос. контракт № 02.740.11.0207), лабораторией «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П. Г. Демидова (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0057), проектами № 477 и № 984 в рамках базовой части гос. задания на НИР ЯрГУ (2014–2016 гг.) и гос. заданием № 1.5768.2017/П220 на НИР ЯрГУ.

Краткое содержание работы

В **первой главе** перечисляются и уточняются базовые математические понятия и факты, используемые далее в основной части диссертации. В разделах 1.1 и 1.2 вводятся необходимые понятия теории графов и теории выпуклых многогранников, соответственно. В разделе 1.3 приводятся используемые далее понятия теории сложности задач и алгоритмов и, в частности, теории NP-полных задач.

Общепринятая формулировка задачи комбинаторной оптимизации уточняется в разделе 1.4. Там же приводится определение *линейной задачи комбинаторной оптимизации*, представляющей собой (с учетом сделанных в тексте диссертации замечаний) тройку функций:

1. *Размерность задачи* $d = d(I) \in \mathbb{N}$, где I — *код задачи*, являющийся частью ее входных данных.

2. Функция $k = k(I) \in \mathbb{N}$, задающая *пространство решений* $U = \{0, \ldots, k\}^d$. Для большинства рассматриваемых в работе задач $k \equiv 1$.

3. *Предикат допустимости* $g = g(\boldsymbol{x}, I) \in \{\text{ложь}, \text{истина}\}$, где $\boldsymbol{x} \in U$.

Для фиксированного кода задачи I эта тройка однозначно определяет *множество допустимых решений* $X = X(I) = \{u \in U \mid g(u, I)\}$. Во входных данных задачи также содержится *целевой вектор* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^d$. Цель задачи — для заданных кода I и целевого вектора $\boldsymbol{c}$ найти среди всех допустимых решений X такое, на котором целевая функция $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$ принимает максимальное значение. Найденное решение $\boldsymbol{x}$ называется *оптимальным.*

Во **второй главе** вводится специфичная для темы диссертационной работы терминология и приводится обзор известных по этой теме фактов.

В разделе 2.1 вводится определение семейства многогранников линейной задачи комбинаторной оптимизации. С каждым кодом I соответствующей задачи связывается многогранник $\operatorname{conv}(X(I))$, представляющий собой выпуклую оболочку множества допустимых решений. Таким образом, за счет произвольности выбора кода I, образуется семейство многогранников задачи. Семейство многогранников называется *комбинаторным*, если все три функции, определяющие соответствующую задачу, полиномиально вычислимы. Везде далее многогранником, как правило, называется множество его вершин, то есть его V-описание. Для случая, когда на целевой вектор $\boldsymbol{c}$ задачи накладываются дополнительные линейные ограничения вида $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a_i} \rangle \leqslant 0$, $i \in [k]$, соответствующий *полиэдр задачи* определяется как сумма Минковского многогранника $\operatorname{conv}(X(I))$ и конуса $\operatorname{cone}\{\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}\}$. В этом же разделе приводятся определения некоторых, часто встречаемых в литературе комбинаторных многогранников и полиэдров: булева квадратичного многогранника $P_{\mathrm{BQP}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$; многогранника задачи о рюкзаке $P_{\mathrm{knap}}(\boldsymbol{a}, b)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$; многогранников путей $P_{\mathrm{path}}(n)$ и орпутей $P_{\mathrm{dipath}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$; многогранников гамильтоновых циклов $P_{\mathrm{TSP}}(n)$ и гамильтоновых контуров $P_{\mathrm{ATSP}}(n)$; перестановочного многогранника $P_{\mathrm{perm}}(n)$; многогранника задачи о назначениях $P_{\mathrm{Birk}}(n)$; многогранника $P_{\mathrm{stab}}(G)$ независимых множеств в графе $G = (V, E)$; полиэдра задачи о кратчайшем орпути с ограничением неотрицательности длин контуров $P_{\mathrm{shortpath}}(n)$; некоторых других многогранников и полиэдров.

В разделе 2.2 обсуждается задача идентификации граней многогранников задач. Основное внимание уделено задаче идентификации смежности вершин.

Перечислены известные результаты по этой теме.

Раздел 2.3 посвящен краткому обзору известных фактов для таких характеристик графов многогранников задач, как число вершин, диаметр и кликовое число, а также, связанных с последними двумя характеристиками, гипотезы Хирша и теории алгоритмов прямого типа.

В разделе 2.4 вводится понятие расширения многогранника (полиэдра) и приводится краткий обзор известных по этой теме фактов. *Расширением* многогранника (полиэдра) $P \subseteq \mathbb{R}^d$ называется многогранник (полиэдр) $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ вместе с аффинным отображением $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, удовлетворяющим условию $P = \alpha(Q)$. Расширения, в первую очередь, интересны тем, что задача оптимизации на многограннике P сводится к задаче оптимизации на его расширении Q. Число линейных неравенств, необходимых для описания расширения Q, называется *размером расширения.* Известны примеры, когда размер расширения оказывается существенно меньше числа неравенств, необходимых для описания исходного многогранника P. *Сложностью расширения* $\mathrm{xc}(P)$ многогранника P называется минимальный размер среди всех его расширений. Хорошо известно, что сложность расширения ограничена снизу размерностью многогранника, а сверху — числом его вершин и числом гиперграней. Таким образом, сложность расширения можно рассматривать в качестве верхней оценки сложности соответствующей оптимизационной задачи. Кроме того, эта характеристика обладает и другими интересными свойствами. В частности, ее величина ограничена снизу чисто комбинаторной характеристикой многогранника — числом прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника [61].

Пусть $M \in \{0,1\}^{n\times k}$ — матрица инциденций. Множество $I \times J$, где $I \subseteq [n]$, $J \subseteq [k]$, называется *0-прямоугольником* в матрице M, если $M(i,j) = 0$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. *Прямоугольным покрытием* матрицы M называется множество 0-прямоугольников, объединение которых совпадает с множеством нулевых ячеек в M. *Числом прямоугольного покрытия* матрицы называется наименьшее число 0-прямоугольников, необходимое для её прямоугольного покрытия. Число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника P обозначаем $\mathrm{rc}(P)$. Многочисленные известные факты говорят о том, что эта характеристика дает весьма точную нижнюю оценку сложности соответствующей оптимизационной задачи.

В разделе 2.5, на основе фактов, изложенных во второй главе, формулируются общие вопросы, поиску ответов на которые посвящены последующие главы диссертации. А именно, из перечисленных фактов следует, что многогранники NP-трудных задач во многих случаях обладают схожими свойствами. Например: NP-полнота задачи распознавания несмежности вершин, небольшой диаметр графа, сверхполиномиальное кликовое число графа, сверхполиномиальные сложность расширения и число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней. Часто эти сходства обусловлены тесными связями геометрического характера, обнаруживаемыми в разное время разными исследователями, когда многогранники одной задачи аффинно эквивалентны (или являются проекциями) некоторых граней многогранников другой задачи. В связи с этим естественными являются следующие вопросы общего характера. Можно ли систематически использовать такой способ сравнения для различных семейств многогранников? Какие выводы на основе сравнений такого типа можно сделать в отношении различных комбинаторно-геометрических характеристик многогранников? Ответы на эти вопросы содержатся в главах 3–5. Для каждой из рассмотренных во второй главе характеристик также естественно задать следующий вопрос. Есть ли связь между данной характеристикой многогранника и сложностью соответствующей оптимизационной задачи? В связи с этим возникают и вопросы более общего характера. Какие известные в настоящее время комбинаторно-геометрические характеристики многогранника наиболее адекватно отражают сложность соответствующей задачи? Есть ли связь между комбинаторным типом многогранника и сложностью задачи оптимизации на нем? Исследованию этих проблем посвящены главы 7 и 8.

В третьей главе описана теория аффинной сводимости, активно используемая в последующих двух главах.

В первом разделе вводится определение аффинной сводимости задач, служащее основой для различных его модификаций в последующих разделах. Линейная задача комбинаторной оптимизации (d, k, g) *аффинно сводится* к задаче (d', k', g'), если существуют вычислимые за полиномиальное (относительно длины входных данных первой задачи) время:

1. Преобразование τ каждого кода I первой задачи в код I' для второй задачи:
$$\tau \colon I \mapsto I'.$$

2. Алгоритм построения для каждого кода I первой задачи аффинного отображения $\alpha \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, где $d = d(I)$, $d' = d'(\tau(I))$.

3. Функция $\beta \colon Y \to X$, где $X = X(I)$ — множество допустимых решений первой задачи, а Y — это множество всех таких допустимых решений $\boldsymbol{y} \in X' = X'(\tau(I))$ второй задачи, для каждого из которых найдется целевой вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\boldsymbol{y}$ является оптимальным решением второй задачи с входом $(\tau(I), \alpha(\boldsymbol{c}))$.

   Причем для любого $\boldsymbol{y} \in Y$ и любого $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y}$ является оптимальным решением второй задачи с входом $(\tau(I), \alpha(\boldsymbol{c}))$ тогда и только тогда, когда $\beta(\boldsymbol{y})$ является оптимальным решением первой задачи с входом $(I, \boldsymbol{c})$.

Это определение является усовершенствованной версией определения аффинной сводимости из кандидатской диссертации автора [2]. Ключевые отличия: отсутствует требование биективности аффинного отображения α и функции β; учтена зависимость множества допустимых решений от выбора исходного кода задачи.

В разделе 3.2 приводится определение конусного разбиения пространства исходных данных задачи. *Конусным разбиением пространства исходных дан-*

ных задачи линейной оптимизации на множестве $X \subset \mathbb{R}^d$ называется совокупность конусов вида:

$$K(\boldsymbol{x}) :- \bigl\{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d \bigm| \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \rangle,\ \forall \boldsymbol{y} \in X\bigr\},$$

где $\boldsymbol{x} \in X$, причем в разбиение включаются только те конусы, размерность которых равна размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Конусы $K(\boldsymbol{x})$ и $K(\boldsymbol{y})$ называются *смежными*, если $\dim(K(\boldsymbol{x}) \cap K(\boldsymbol{y})) = d - 1$. Конусное разбиение является двойственной к многограннику $P = \operatorname{conv}(X)$ конструкцией [20]. В частности, каждый конус соответствует вершине многогранника P и две вершины этого многогранника смежны тогда и только тогда, когда соответствующие конусы смежны. По аналогии с конусным разбиением всего пространства определяется разбиение множества исходных данных $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ (предполагается, что Q — полиэдр) задачи линейной оптимизации на $X \subset \mathbb{R}^d$. Оно состоит из полиэдров $K(\boldsymbol{x}, Q) :- K(\boldsymbol{x}) \cap Q$, размерность которых совпадает с размерностью Q. Это определение полезно в тех случаях, когда на целевой вектор накладываются линейные ограничения. Например, в классической задаче о кратчайшем пути — ограничение неотрицательности длин ребер (дуг) графа. В конце раздела вводится определение аффинной сводимости разбиений исходных данных задач, отличающееся от определения аффинной сводимости задач требованиями биективности аффинного отображения α и функции β.

В разделе 3.3 вводится естественный способ сравнения многогранников: если многогранник P аффинно эквивалентен многограннику Q или же его грани, используем обозначение $P \leqslant_A Q$. Если же многогранники P и Q аффинно эквивалентны, пишем $P =_A Q$. Соотношение $P \leqslant_A Q$ позволяет сравнивать различные комбинаторно-геометрические характеристики сложности многогранников P и Q: числа вершин и гиперграней, некоторые свойства графов (например, кликовые числа), числа прямоугольных покрытий матриц инциденций вершин-гиперграней и некоторые другие. Далее в этом разделе приводится несколько простых примеров использования соотношения $\leqslant_A$. В конце раздела даны определения *многогранника упаковок*, представляющего собой выпуклую оболочку множества

$$P_{\text{pack}}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid A\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{1}\}, \quad \text{где } A \in \{0,1\}^{m \times n},$$

и многогранника разбиений

$$P_{\text{part}}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}\}.$$

Непосредственно из определений следует $P_{\text{part}}(A) \leqslant_A P_{\text{pack}}(A)$.

В последнем разделе третьей главы вводится определение аффинной сводимости семейств многогранников, наиболее часто используемое в следующей главе. Сумму длины кода многогранника и размерности пространства, в котором он определен, будем называть *размером* многогранника (не путать с размером расширения). Семейство многогранников P *аффинно сводится* к семейству многогранников Q, если найдутся полиномиально вычислимые (относительно размера многогранника $p \in P$):

1. Преобразование τ кода I каждого многогранника $p = p(I) \in P$ в код I' многогранника $q = q(I') \in Q$.

2. Алгоритм построения для каждого кода I аффинного отображения

   $$\alpha \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}, \qquad d = d(I), \quad d' = d'(\tau(I)),$$

   такого, что многогранник $\alpha(p)$ является гранью (возможно несобственной) многогранника q и аффинно эквивалентен p.

Факт аффинной сводимости P к Q обозначаем так: $P \propto_A Q$.

Непосредственно из определения и перечисленных ранее фактов выводится следующее утверждение. Пусть $P \propto_A Q$ и в семействе P есть многогранники, имеющие одно или несколько из следующих свойств: сверхполиномиальность числа вершин или гиперграней (относительно размера многогранника); сверхполиномиальное кликовое число графа многогранника; NP-полнота критерия несмежности вершин; сверхполиномиальное число прямоугольного покрытия; сверхполиномиальная сложность расширения. Тогда в Q имеются многогранники с теми же свойствами.

Основные результаты раздела 3.4:

1. Семейства многогранников независимых множеств, многогранников упаковок и многогранников разбиений эквивалентны относительно аффинной сводимости [10].

2. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует граф $G = (V, E)$, $|V| = n(n+1)$, $|E| = n(2n-1)$, такой, что $P_{\text{BQP}}(n) \leqslant_A P_{\text{stab}}(G)$ [10, 16]. Если же граф $G = (V, E)$ неполный, то соотношение $P_{\text{stab}}(G) \leqslant_A P_{\text{BQP}}(n)$ невозможно ни при каком n.

В конце раздела устанавливается связь между аффинной сводимостью семейств многогранников и аффинной сводимостью конусных разбиений пространств исходных данных задач.

В **главе 4** представлен ряд результатов, связанных с понятием аффинной сводимости.

По аналогии с многогранниками упаковок и разбиений, в разделе 4.1 вводятся определения многогранников покрытий и двойных покрытий множества. *Многогранником покрытий* называется выпуклая оболочка множества

$$P_{\text{cover}}(M) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid M\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{1}\}, \quad \text{где } M \in \{0,1\}^{m \times n}.$$

Многогранником двойных покрытий называется выпуклая оболочку множества

$$P_{2\text{cover}}(B) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\},$$

где $B \in \{0,1\}^{m \times n}$, причем каждая строка матрицы B содержит ровно четыре единицы и не имеет нулевых столбцов. Впервые это семейство многогранников было рассмотрено Мацуи [53], им же было показано, что $P_{2\text{cover}}(B) \leqslant_A P_{\text{cover}}(M)$, где матрица $M \in \{0,1\}^{4m \times n}$ содержит ровно три единицы в каждой строке. Основое внимание в этом разделе уделяется специальным многогранникам $P_{\mathrm{Matsui}}(A)$, где матрица $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ содержит ровно три единицы в каждой строке. Эти многогранники являются многогранниками двойных покрытий. Известно [53], что задача распознавания несмежности вершин для P_{Matsui} NP-полна. Основными результатами раздела являются два утверждения, опубликованные в [13]:

1. Многогранники независимых множеств P_{stab} аффинно сводятся к семейству многогранников P_{Matsui}.

2. Если многогранник $P_{\mathrm{Matsui}}(A)$ не является отрезком, то $P_{\mathrm{Matsui}}(A) \leqslant_A P_{\mathrm{stab}}(G)$ невозможно ни для какого графа G.

Последнее свойство говорит о безусловном структурном отличии многогранников двойных покрытий от многогранников независимых множеств и аффинно сводящихся к ним семейств.

Далее, в разделе 4.2 рассматриваются семейства многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин: многогранники задачи о рюкзаке $P_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{a}, b)$, многогранники задачи о разбиении чисел $P_{\mathrm{numpart}}(\boldsymbol{a})$, многогранники задачи о назначениях с ограничением $P_{\mathrm{CA}}(\boldsymbol{a}, b)$, многогранники задачи о выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U, C)$, многогранники задачи о частичном упорядочивании $P_{\mathrm{PO}}(n)$, многогранники кубических подграфов $P_{\text{3-factor}}(n)$. Приводится ссылка на результат Фиорини [42] о том, что семейство многогранников задачи о 3-выполнимости эквивалентно семейству многогранников задачи о частичном упорядочивании с точки зрения аффинной сводимости (понятие аффинной сводимости в его работе не используется). В той же работе показано, что многогранники задачи о k-выполнимости не могут быть аффинно сведены к семейству многогранников задачи об m-выполнимости, если $k > m$. Основным результатом этого раздела является серия доказательств того, что многогранники двойных покрытий P_{2cover} аффинно сводятся к этим семействам [7, 14].

В разделе 4.3 рассматриваются многогранники линейных порядков и многогранники деревьев Штейнера в графе. Показано, что булевы квадратичные многогранники $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ аффинно сводятся к первому семейству [12], а многогранники независимых множеств — ко второму.

В разделе 4.4 рассматриваются семейства многогранников, имеющих простой критерий смежности вершин. С точки зрения аффинной сводимости они разбиваются на два класса эквивалентности. Многогранники трехиндексной задачи о назначениях $P_{\text{3-A}}(n)$ и несколько семейств многогранников раскрасок графа ($P_{\mathrm{color1}}(G,k)$, $P_{\mathrm{color2}}(G)$ и $P_{\mathrm{color3}}(G)$) лежат в одном классе эквивалентности с многогранниками независимых множеств. А семейства многогранников квадратичной задачи линейных упорядочиваний $P_{\mathrm{QLO}}(n)$ и квадратичной задачи о назначениях $P_{\mathrm{QA}}(n)$ оказываются эквивалентны семейству булевых квадратичных многогранников $P_{\mathrm{BQP}}(n)$. Результаты этого раздела опубликованы в [16].

В разделе 4.5 рассматриваются семейства многогранников задач, тесно связанных с задачей коммивояжера. Показано, что многогранники задачи о выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U,C)$ аффинно сводятся к многогранникам гамильтоновых контуров $P_{\mathrm{ATSP}}(n)$ [5]. Одним из следствий этого утверждения является то, что любой d-мерный 0/1-многогранник на $2^d - k$ вершинах ($0 \leqslant k \leqslant 2^d - 1$) аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника $P_{\mathrm{ATSP}}(n)$ при $n = (2k+1)d$. Ранее Биллера и Сарангараджан [30] доказали это утверждение для $n = (4k+1)d$ иными средствами. Второй результат раздела, опубликованный в [8], устанавливает следующую связь между семействами P_{BQP} и P_{ATSP}: $P_{\mathrm{BQP}}(m) \leqslant_A P_{\mathrm{ATSP}}(n)$, где $n = 2m^2 - m$. В подразделе 4.5.2 рассматриваются семейства многогранников следующих задач: гамильтонов цикл, гамильтонов (ор)путь, s-t (ор)путь, гамильтонов s-t (ор)путь. Показано, что многогранники гамильтоновых контуров аффинно сводятся ко всем этим семействам. Из этого следует, в частности, что графы многогранников этих семейств обладают сверхполиномиальным кликовым числом и задача распознавания несмежности вершин для них NP-полна.

По аналогии с булевыми квадратичными многогранниками в разделе 4.6 вводятся в рассмотрение булевы многогранники $P_{\mathrm{BQP}}(n,p)$ степени p. Для $p = 2$, $P_{\mathrm{BQP}}(n,p)$ совпадает с $P_{\mathrm{BQP}}(n)$, а для $p = 1$, $P_{\mathrm{BQP}}(n,p)$ — n-мерный 0/1-куб. Показано, что $P_{\mathrm{BQP}}(n,p)$ s-смежностен при $s \leqslant p + \lfloor p/2 \rfloor$. Для $m \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 2m$ доказано, что $P_{\mathrm{BQP}}(k, 2m) \leqslant_A P_{\mathrm{BQP}}(n)$ при $n = \Theta(\binom{k}{m})$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2^{2\cdot\lceil k/3 \rceil}$, $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ имеет k-смежностную грань со сверхполиномиальным числом $2^{\Theta\left(n^{1/\lceil k/3 \rceil}\right)}$ вершин. Из этого и из перечисленных ранее аффинных сведéний следует, что во всех упоминаемых выше семействах многогранников NP-трудных задач имеются многогранники, содержащие k-смежностные грани со сверхполиномиальным (относительно размерности многогранника) числом вершин. Результаты раздела опубликованы в [15].

В последнем разделе главы 4 рассматриваются задача о назначениях и задача о кратчайшем орпути с ограничением неотрицательности длин контуров. Показано, что конусное разбиение множества исходных данных последней аффинно сводится к конусному разбиению пространства исходных данных первой [2]. Как следствие, граф полиэдра кратчайших орпутей $P_{\mathrm{shortpath}}(n+1)$ является подграфом графа многогранника Биркгофа $P_{\mathrm{Birk}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

В первом разделе **главы 5** вводится понятие расширенной аффинной сводимости, отличающееся от аффинной сводимости отсутствием ограничения биективности аффинного отображения. Название связано с понятием расширения многогранника. Если некоторая грань многогранника Q или же весь этот многогранник является расширением многогранника P, будем использовать обозначение $P \leqslant_E Q$. Семейство многогранников P *расширенно аффинно сводится* к семейству многогранников Q, если найдутся полиномиально вычислимые (относительно размера многогранника $p \in P$):

1. Преобразование τ кода I каждого многогранника $p = p(I) \in P$ в код I' многогранника $q = q(I') \in Q$.

2. Система линейных уравнений $D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, задающая грань
$$F = \{\boldsymbol{y} \in q \mid D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\}$$
многогранника q.

3. Алгоритм построения для каждого кода I аффинного отображения
$$\beta\colon \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^{d}, \qquad d = d(I), \quad d' = d'(\tau(I)),$$
такого, что $p = \beta(F)$.

Обозначение: $P \propto_E Q$. Во многих случаях доказательство соотношений вида $P \propto_E Q$ принципиально проще, чем соотношений $P \propto_A Q$. Минусом такого ослабления ограничений является потеря некоторых полезных свойств. В частности, такие свойства, как NP-полнота проверки несмежности вершин, сверхполиномиальность числа фасет и сверхполиномиальность кликового числа графа, вообще говоря, не наследуются при расширенном аффинном сведéнии. Далее в этом же разделе приводятся некоторые свойства общего характера для этого типа сводимости. Например, показано, что если многогранник $P \subseteq \mathbb{R}^d$ является образом многогранника $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ при аффинном отображении $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ и, кроме того, $\pi(\operatorname{ext} Q) = \operatorname{ext} P$, то граф многогранника P является подграфом графа многогранника Q.

В разделе 5.2 приводится несколько примеров расширенной аффинной сводимости. В целом, благодаря ослаблению условий, доказательства соответствующих утверждений оказываются значительно более простыми, чем для (обычной) аффинной сводимости.

В разделе 5.3 показано, что любое семейство многогранников, предикат допустимости которого принадлежит классу NP, расширенно аффинно сводится к булевым квадратичным многогранникам [6]. Тем самым, все упоминаемые выше в настоящей работе семейства многогранников оказываются эквивалентны друг другу относительно расширенной аффинной сводимости.

В **главе 6** рассматриваются циклические многогранники. Как известно [54], они обладают максимальным числом граней (любой размерности) среди всех выпуклых многогранников той же размерности и с таким же числом вершин. Благодаря этому обстоятельству циклические многогранники являются хорошей экспериментальной базой для проверки разного рода теоретических утверждений. В первом разделе главы вводится определение циклического многогранника и условие четности Гейла [44], идентифицирующее подмножества вершин, образующих гиперграни этого многогранника. В разделе 6.2 для многогранника $\mathcal{C}_d([n])$ приводится описание расширенной формулировки размера $2\big(2\lfloor\log_2(n-1)\rfloor+2\big)^{\lfloor d/2\rfloor}$ при $2 \leqslant d < n$ (результат опубликован в совместной работе [17]). В разделе 6.3 вычисляется точное значение для диаметра $\Delta_c(d,n)$ ридж-графа циклического многогранника $\mathcal{C}(d,n)$: $\Delta_c(d,n) = n - d - \left\lceil \frac{n-2d}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1} \right\rceil$ при $n > 2d$ [4]. Равенство $\Delta_c(d,n) = n - d$ при $d < n \leqslant 2d$ было доказано Кли в 1964 году [50].

Глава 7 посвящена теории алгоритмов прямого типа для решения линейных задач комбинаторной оптимизации. В первом разделе приводится описание этой теории, заимствованное из [20] (см. также [1]). Ключевой особенностью алгоритма прямого типа является то, что его сложность ограничена снизу кликовым числом графа многогранника (конусного разбиения множества исходных данных) решаемой задачи. Известно (см. обзор в разделе 2.3.3), что для классических полиномиально разрешимых задач (сортировка, минимальное остовное дерево, минимальный разрез) эта характеристика не превосходит размерности многогранника. (В разделе 7.2 доказано, что задача о кратчайшем пути с ограничением неотрицательности длин контуров тоже входит в этот список.) С другой стороны, в главах 3 и 4 показано, что булевы квадратичные многогранники P_{BQP} аффинно сводятся к многогранникам таких NP-трудных задач, как коммивояжер, рюкзак, 3-выполнимость, 3-сочетание, покрытие и упаковка множества, раскраска графа, кубический подграф и многие другие. Учитывая, что кликовое число графа многогранника $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ равно 2^n, кликовые числа графов многогранников указанных задач также сверхполиномиальны по размерности многогранников. Кроме того, в [20] установлено, что некоторые алгоритмы сортировки, жадный алгоритм для минимального остовного дерева, алгоритм Дейкстры для кратчайшего пути, алгоритм Хелда–Карпа и реализация алгоритма ветвей и границ для задачи коммивояжера являются прямыми или «прямыми».

В разделе 7.2 показано, что кликовое число для задачи о кратчайшем пути в орграфе на n вершинах с ограничением неотрицательности длин контуров (а также для задачи с классическим ограничением неотрицательности длин дуг) равно $\lfloor n^2/4 \rfloor$ [3]. С учетом основного результата раздела 4.7, это дает нижнюю оценку $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ для кликового числа графа многогранника задачи о назначениях $P_{\text{Birk}}(n)$. В этой связи отметим следующий факт. В 1977 г. Бруальди и Гибсон показали [33, Theorem 6.1, Corollary 6.5], что любая 2-смежностная грань многогранника $P_{\text{Birk}}(n)$, число вершин которой не равно шести, является симплексом, а максимальное число вершин такой грани совпадает с упомянутой выше оценкой $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$.

В разделе 7.3 перечисляется ряд фактов, демонстрирующих ограниченность применимости этого подхода к оценке сложности задач. Приводится доказательство того, что алгоритм Куна–Манкреса (венгерский метод) для задачи о назначениях не является алгоритмом прямого типа. Кроме того, описывается достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из класса алгоритмов прямого типа. Результаты этого раздела опубликованы в [9].

В **главе 8** изучается следующий вопрос. Можно ли, зная только комбинаторные свойства многогранника, отделить труднорешаемые задачи от полиномиально разрешимых (в рамках современных представлений о сложности задач)? В разное время в качестве таких ключевых характеристик сложности рассматривались: число вершин многогранника, число его гиперграней, диаметр и кликовое число графа, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней.

В разделе 8.1 приводятся примеры семейств многогранников, для которых значения упомянутых выше характеристик (за исключением числа прямоугольного покрытия) существенно отличаются от реальной вычислительной сложности соответствующих оптимизационных задач.

В разделе 8.2 приводится описание NP-трудной задачи оптимизации, многогранники $P_{\mathrm{CBQP}}(n)$ которой получены в результате небольшого шевеления (пертурбации) вершин булева квадратичного многогранника $P_{\mathrm{BQP}}(n)$. Доказано, что многогранник $P_{\mathrm{CBQP}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, симплициален. Следовательно, согласно [36], число прямоугольного покрытия его матрицы инциденций вершин-гиперграней равно $O(n^5)$. Таким образом, это первый известный пример семейства многогранников NP-трудной задачи, число прямоугольного покрытия для которых полиномиально. Это означает, что ни одно из семейств многогранников NP-трудных задач, рассмотренных ранее в главах 3–5 не может быть расширенно аффинно сведено к семейству P_{CBQP}. С другой стороны, в [28, Theorem 4] установлено, что любой многогранник, аппроксимирующий $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ с точностью $O(1/n)$, имеет сложность расширения порядка $2^{\Omega(n)}$. Следовательно, сложность расширения для $P_{\mathrm{CBQP}}(n)$ экспоненциальна: $\mathrm{xc}(P_{\mathrm{CBQP}}(n)) = 2^{\Omega(n)}$.

В разделе 8.3 приводятся примеры двух задач дискретной оптимизации, многогранники которых комбинаторно эквивалентны и длины двоичной записи координат вершин этих многогранников одинаковы. При этом первая задача разрешима за полиномиальное время, а вторая задача имеет экспоненциальную сложность. (Этого удается достигнуть за счет экспоненциальной сложности распознавания вершины многогранника последней задачи.) Этот результат говорит о том, что ни одна чисто комбинаторная характеристика многогранника не дает возможности отделить полиномиально разрешимые задачи от задач с экспоненциальной сложностью.

Результаты последней главы опубликованы в [11].

В **заключении** подводятся итоги диссертационного исследования.

Список публикаций

1. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — URSS M., 2008.
2. Максименко А. Н. Графы многогранников и сводимость задач комбинаторной оптимизации : дис. … канд. наук / А Н Максименко ; Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова. — 2004.
3. Максименко А. Н. Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1693–1696.
4. Максименко А. Н. Диаметр ридж-графа циклического многогранника // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 146–152.
5. Максименко А. Н. Многогранники задачи о выполнимости являются гранями многогранника задачи коммивояжёра // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 76–83.
6. Максименко А. Н. Аналог теоремы кука для многогранников // Изв. вузов. Математика. — 2012. — Т. 56, № 8. — С. 34–42.
7. Максименко А. Н. Об аффинной сводимости комбинаторных многогранников // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 443, № 6. — С. 661–663.
8. Максименко А. Н. Многогранники коммивояжера и разрезов. аффинная сводимость // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 31–38.
9. Максименко А. Н. Характеристики сложности: кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21, № 5. — С. 116–130.
10. Максименко А. Н. Наиболее простые семейства многогранников, ассоциированных с np-трудными задачами // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 3. — С. 272–274.
11. Максименко А. Н. Сложность задач комбинаторной оптимизации в терминах решёток граней ассоциированных многогранников // Дискретный анализ

и исследование операций. — 2016. — Т. 23, № 3. — С. 61–80.

12. Максименко А. Н. Булев квадратичный многогранник является гранью многогранника линейных порядков // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 640–646.
13. Максименко А. Н. Об одном семействе 0/1-многогранников с np-полным критерием несмежности вершин // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 29–39.
14. Maksimenko A. The common face of some 0/1-polytopes with np-complete nonadjacency relation // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 203, no. 6. — P. 823–832.
15. Maksimenko A. k-neighborly faces of the boolean quadric polytopes // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 203, no. 6. — P. 816–822.
16. Maksimenko A. N. A special role of boolean quadratic polytopes among other combinatorial polytopes // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 1. — С. 23–40.
17. Small extended formulations for cyclic polytopes / Yu. Bogomolov, S. Fiorini, A. Maksimenko, K. Pashkovich // Discrete & Computational Geometry. — 2015. — Vol. 53, no. 4. — P. 809–816.

Цитированная литература

18. Антонов А. И., Бондаренко В. А. Полиэдральные графы задач разбиение на треугольники и полный двудольный подграф // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 6. — С. 101–106.
19. Белошевский М. И. Многогранник задачи о максимальном разрезе // Модели и алгоритмы математического обеспечения ЭВМ. — Ярославль: ЯрГУ, 1986. — С. 12–20.
20. Бондаренко В. А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. — Ярославль, 1995.

21. Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях // Моделирование и анализ информационных систем. — 2015. — Т. 22, № 4. — С. 453–463.

22. Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные характеристики задач о сбалансированном и несбалансированном двудольных подграфах // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 2. — С. 141–154.

23. Грешнев С. Н. Многогранник задачи о m-вершинном подграфе полного графа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т. 24, № 5. — С. 790–793.

24. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.

25. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. — 1973. — Т. 9, № 3. — С. 115–116.

26. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 244, № 5. — С. 1093–1096.

27. Applications of combinatorial optimization / Ed. by V. Th. Paschos. — Wiley-ISTE, 2014.

28. Approximation limits of linear programs (beyond hierarchies) / G. Braun, S. Fiorini, S. Pokutta, D. Steurer // Mathematics of Operations Research. — 2015. — Vol. 40, no. 3. — P. 756–772.

29. Barahona F., Mahjoub A. R. On the cut polytope // Mathematical programming. — 1986. — Vol. 36, no. 2. — P. 157–173.

30. Billera L. J., Sarangarajan A. All 0-1 polytopes are traveling salesman polytopes // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16, no. 2. — P. 175–188.

31. Bondarenko V., Nikolaev A. On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 2016.

32. Bondarenko V., Nikolaev A. Some properties of the skeleton of the pyra-

midal tours polytope // Electronic Notes in Discrete Mathematics. — 2017. — Vol. 61. — P. 95–100.

33. Brualdi R. A., Gibson P. M. Convex polyhedra of doubly stochastic matrices: Ii. graph of ω_n // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1977. — Vol. 22, no. 2. — P. 175–198.
34. Chvátal V. On certain polytopes associated with graphs // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1975. — Vol. 18, no. 2. — P. 138–154.
35. Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Proc. 1964 Internat. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. — 1964. — P. 24–30.
36. Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations / S. Fiorini, V. Kaibel, K. Pashkovich, D. O. Theis // Discrete Mathematics. — 2013. — Vol. 313, no. 1. — P. 67–83.
37. Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G. Extended formulations in combinatorial optimization // 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research. — 2010. — Vol. 8, no. 1. — P. 1–48.
38. Cook S. A. The complexity of theorem proving procedures // Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing. — 1971. — P. 151–158.
39. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large-scale traveling-salesman problem // Journal of the Operations Research Society of America. — 1954. — Vol. 2, no. 4. — P. 393–410.
40. Edmonds J. Minimum partition of a matroid into independent subsets // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. — 1965. — Vol. 69. — P. 67–72.
41. Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of mathematics. — 1965. — Vol. 17, no. 3. — P. 449–467.
42. Fiorini S. A combinatorial study of partial order polytopes // European Journal of Combinatorics. — 2003. — Vol. 24, no. 2. — P. 149–159.
43. Fiorini S., Rothvoß T., Tiwary H. R. Extended formulations for polygons // Discrete & computational geometry. — 2012. — Vol. 48, no. 3. — P. 658–668.

44. Gale D. Neighborly and cyclic polytopes // Proc. Sympos. Pure Math. — Vol. 7. — 1963. — P. 225–232.

45. Grötschel M., Lovász L. Combinatorial optimization // Handbook of Combinatorics (Vol. 2) / Ed. by R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. — Cambridge, MA, USA : MIT Press, 1995. — P. 1541–1597.

46. Kaibel V. Extended formulations in combinatorial optimization // Optima 85. — 2011. — P. 2–7.

47. Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Symmetry matters for sizes of extended formulations // SIAM J. Discrete Math. — 2012. — Vol. 26, no. 3. — P. 1361–1382.

48. Kaibel V., Weltge S. A short proof that the extension complexity of the correlation polytope grows exponentially // Discrete & Computational Geometry. — 2015. — Vol. 53, no. 2. — P. 397–401.

49. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. — Plenum Press, 1972. — P. 85–103.

50. Klee V. Diameters of polyhedral graphs // Canad. J. Math. — 1964. — Vol. 16. — P. 602–614.

51. Klee V., Walkup D. W. The d-step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$ // Acta Mathematica. — 1967. — Vol. 117, no. 1. — P. 53–78.

52. Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds / S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta et al. // Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM. — 2012. — P. 95–106.

53. Matsui T. Np-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes // Lecture Notes in Operations Research. — 1995. — Vol. 1. — P. 249–258.

54. McMullen P. The maximum numbers of faces of a convex polytope // Mathematika. — 1970. — Vol. 17, no. 2. — P. 179–184.

55. Papadimitriou C. H. The adjacency relation on the traveling salesman poly-

tope is np-complete // Mathematical Programming. — 1978. — Vol. 14, no. 1. — P. 312–324.

56. Rothvoß T. Some 0/1 polytopes need exponential size extended formulations // Mathematical Programming. — 2013. — Vol. 142, no. 1-2. — P. 255–268.
57. Rothvoß T. The matching polytope has exponential extension complexity // Proceedings of the 46th annual ACM symposium on theory of computing / ACM. — 2014. — P. 263–272.
58. Santos F. A counterexample to the hirsch conjecture // Annals of Mathematics. — 2012. — Vol. 176, no. 1. — P. 383–412.
59. Schrijver A. Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. — Springer, 2003.
60. Schrijver A. On the history of combinatorial optimization (till 1960) // Discrete Optimization / Ed. by K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel. — Elsevier, 2005. — P. 1–68.
61. Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing / ACM. — 1988. — P. 223–228.
62. Ziegler G. M. Who solved the hirsch conjecture? // Documenta Mathematica Extra Volume: Optimization Stories. — 2012. — P. 75–85.