Задание 1 (6)

Костеров Максим

Задача. Решить обратную задачу теории погрешностей для

$$z(x) = \frac{\sin(4.5x + 0.6)}{\sqrt{1 + x - 12x^2}}, \qquad x \in [0.1, 0.2]$$

и погрешности $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение. Рассмотрим

$$z(u, v) := uv^{-1} \qquad u(x) := \sin(4.5x + 0.6) \qquad v(x) := \sqrt{1 + x - 12x^2}$$

Тогда

$$\Delta z \leq \Delta_z^* + B_u \Delta u + B_v \Delta v$$

$$B_u := \max_{u,v} \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| = \max_{u,v} \left| v^{-1} \right| \qquad B_v := \max_{u,v} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| = \max_{u,v} \left| uv^{-2} \right|$$

Оценим пределы, в которых изменяются u и v.

$$u \in u([0.1, 0.2]) = \sin([1.05, 1.5]) \subseteq [0.5, 1]$$

Функция $1 + x - 12x^2$ имеет максимум в $x = 1/24 < 0.1$, значит v убывает в интервале изменения x.

$$v(0.1) = \sqrt{0.98} \leq 1 \qquad v(0.2) = \sqrt{0.72} \geq 0.8$$

$$v \in v([0.1, 0.2]) = [v(0.2), v(0.1)] \subseteq [0.8, 1]$$

Тогда

$$B_u \leq \frac{1}{0.8} \qquad B_v \leq \frac{1}{0.8^2} = \frac{1}{0.64}$$

Для простоты возьмём эти верхние оценки как значения.

Примем $\Delta_z^* = 0$ как методическую погрешность арифметической операции. Примем $\Delta u = \Delta_u^*, \Delta v = \Delta_v^*$, предполагая, что арифметические операции имеют достаточно малую погрешность. Тогда, применив метод равных влияний, получим

$$\Delta_u^* = \frac{\varepsilon}{2B_u} = 0.4\varepsilon = 0.4 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta_v^* = \frac{\varepsilon}{2B_v} = 0.32\varepsilon = 0.32 \cdot 10^{-6},$$

где Δ_u^*, Δ_v^* — методические погрешности $\sin(x)$ и $\sqrt{x}$ соответственно.