

Геометрия

Экзаменационные вопросы

25 декабря 2022

1. Понятия вектора, орта, сонаправленных векторов. Теорема о коллинеарности. Линейные операции над векторами (сумма, разность, произведение на число). Восемь свойств.
2. Понятие линейного пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Теорема о линейной зависимости. Теорема о нулевом векторе и линейной зависимости.
3. Геометрический смысл линейной зависимости и независимости векторов. Теоремы о необходимых и достаточных условиях линейной зависимости векторов в V_2 и V_3 . Следствия.
4. Базис линеала. Теорема о единственном представлении вектора по базису. Теорема о формировании координат суммы векторов и произведения вектора на число. Теорема о линейной зависимости $n + 1$ элемента линеала.
5. Размерность линеала. Теорема о размерности. Изоморфизм линеалов. Теорема о изоморфизме линеалов одной размерности. Теорема о размерности изоморфных линеалов.
6. Понятие аффинного пространства. Аффинные системы координат. Прямая в аффинном пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Теорема о геометрическом смысле декартовых координат на прямой.
7. Теорема о геометрическом смысле декартовых координат на плоскости. Теорема об алгебраических проекциях суммы векторов и произведения вектора на число. Теорема об алгебраической проекции через косинус угла.
8. Теорема о геометрическом смысле декартовых координат в трехмерном пространстве. Деление вектора в заданном соотношении.
9. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
10. Понятие скалярного произведения векторов. Четыре свойства скалярного произведения с доказательствами. Теорема о скалярном произведении в аффинной системе координат. Следствия о модуле вектора и угла между векторами через скалярное произведение.
11. Понятие скалярного произведения векторов. Теорема об ортогональности. Теорема о координатах вектора в ДПСК. Теорема о направляющих косинусах.
12. Понятие Евклидова пространства. Теорема о неравенстве Коши-Буняковского. Теорема о нормированном пространстве.

13. Понятие векторного произведения векторов. Лемма о построении. Четыре свойства векторного произведения.
14. Понятие векторного произведения. Теорема о векторном произведении в ДПСК. Теорема о коллинеарности. Теорема о площади параллелограмма.
15. Понятие смешанного произведения векторов. Теорема о смешанном произведении в ДПСК. Теорема о компланарности.
16. Понятие смешанного произведения векторов. Теорема об объеме параллелепипеда. Смешанное произведение в аффинной системе координат.
17. Понятие двойного векторного произведения. Теорема «бац-цаб».
18. Понятия векторных уравнений линии и поверхности. Параметрические уравнения линий и поверхностей. Алгебраические линии и поверхности. Примеры.
19. Шесть уравнений плоскости в пространстве. Теорема о векторном уравнении. Теорема об общем уравнении плоскости.
20. Семь уравнений прямой на плоскости. Теорема о векторном уравнении прямой. Теорема об общем уравнении прямой.
21. Понятие угла между плоскостями. Взаимное расположение плоскостей. Условия определяющие взаимное расположение плоскостей. Теорема о расстоянии от точки до плоскости.
22. Понятие угла между прямыми на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Условия определяющие взаимное расположение прямых. Теорема о расстоянии от точки до прямой на плоскости.
23. Геометрический смысл неравенств. Понятие отклонения точки от плоскости. Теорема о двух полупространствах.
24. Шесть уравнений прямой в пространстве.
25. Понятие пучка плоскостей. Теорема о пучке. Пучок прямых.
26. Угол между прямой и плоскостью. Угол между прямыми в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.
27. Преобразование аффинных координат в $1D$ и $2D$. Преобразование координат при переходе от одной ДПСК в другую ДПСК одинаковой ориентации на плоскости.
28. Преобразование аффинных координат в трехмерном пространстве. Преобразование координат при переходе от одной ДПСК в другую ДПСК одинаковой ориентации в пространстве. Углы Эйлера.
29. Понятие эллипса. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Параметрическое уравнение. Два способа построения эллипса.
30. Понятие эллипса. Понятия эксцентриситета, фокального радиуса, директрисы. Теорема, связывающая фокальный радиус и расстояние до директрисы. Уравнение эллипса в полярных координатах.

31. Понятие гиперболы. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Параметрическое уравнение. Способ построения гиперболы.
32. Понятие гиперболы. Понятия эксцентриситета, фокального радиуса, директрисы. Теорема, связывающая фокальный радиус и расстояние до директрисы. Уравнение гиперболы в полярных координатах.
33. Понятие параболы. Вывод канонического уравнения. Исследование формы.
34. Понятие параболы. Уравнение параболы в полярных координатах. Способ построения параболы.
35. Преобразование коэффициентов общего уравнения линии второго порядка и упрощение вида уравнения при параллельном переносе.
36. Преобразование коэффициентов общего уравнения линии второго порядка и упрощение вида уравнения при повороте системы координат.
37. Приведение к каноническому виду общего уравнения линии второго порядка при помощи параллельного переноса и поворота.
38. Уравнения поверхностей вращения. Эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды.
39. Уравнения поверхностей вращения. Эллиптический и гиперболический параболоиды.
40. Цилиндрические поверхности. Теорема об уравнении цилиндрической поверхности. Цилиндрические поверхности второго порядка.
41. Конические поверхности. Теорема об уравнении конической поверхности. Конические поверхности второго порядка.
42. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.
43. Преобразование коэффициентов общего уравнения поверхности второго порядка и упрощение вида уравнения при параллельном переносе.
44. Преобразование коэффициентов общего уравнения поверхности второго порядка и упрощение вида уравнения при повороте системы координат. Теорема о существовании такого преобразования.
45. Приведение к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка при помощи параллельного переноса и поворота.
46. Классификация поверхностей второго порядка.
47. Инварианты общего уравнения линии второго порядка относительно преобразования координат. Теорема об инвариантах.
48. Инварианты общего уравнения линии второго порядка относительно преобразования координат. Теорема об инварианте \tilde{I}_2 . Теорема об условиях, когда \tilde{I}_2 инвариант.
49. Исследование общего уравнения линии второго порядка с помощью инвариантов.
50. Инварианты общего уравнения поверхности второго порядка относительно преобразования координат. Теорема об инвариантах (без доказательства).

51. Исследование общего уравнения поверхности второго порядка с помощью инвариантов.
52. Перспективное отображение прямой в пучок. Проективная прямая. Порядок точек на проективной прямой.
53. Проективная система координат. Теорема о гомотетичных системах координат.
54. Задание проективных координат при помощи прямых пучка. Теорема о существовании и единственности.
55. Преобразование проективных координат.
56. Однородные и неоднородные системы координат на расширенной евклидовой прямой. Теорема о соответствии координат для соответствующих систем координат.
57. Двойное отношение. Теорема о том, что двойное отношение – инвариант.
58. Двойное отношение четверок, содержащих совпавшие точки. Теорема $\exists!$ точки, находящейся с данными тремя в заданном двойном отношении.
59. Теорема о соответствии координат точки и двойного отношения. Теорема о связи знака двойного отношения и делимости пар точек.
60. Теорема о трех изменениях порядка точек в двойном отношении. Гармонические четверки и их свойства.
61. Простое отношение и его связь с двойным отношением. Теорема о гармонической четверке точек, содержащей одну несобственную точку.
62. Расширенная евклидова плоскости. Инцидентность. Два свойства несобственных элементов расширенной евклидовой плоскости.
63. Две теоремы об инцидентности на расширенной евклидовой плоскости.
64. Проективная плоскость. Теорема об инцидентности на проективной плоскости.
65. Система проективных координат. Теорема о существовании и единственности проективной системы координат. Преобразование координат.
66. Условие коллинеарности трех точек. Уравнение прямой и координаты прямой. Теорема о линейном однородном уравнении и его связи с уравнением прямой. Параметрическое уравнение прямой.
67. Условие принадлежности трех точек одному пучку. Параметрическое уравнение пучка.
68. Однородные аффинные координаты на расширенной евклидовой плоскости. Теорема о связи однородных координат с неоднородными. Следствие.
69. Прямые в однородных аффинных координатах. Кривые второго порядка в однородных аффинных координатах.

Литература

1. Кузютин В. Ф., Зенкевич Н. А., Еремеев В. В. Геометрия: Учебник для вузов. — Издательство «Лань», 2003.
2. Певзнер С. Л. Проективная геометрия. — «Просвещение», 1980.