

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова**
Механико-математический факультет



Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

Определение траектории по показаниям инерциальных датчиков

Компьютерный практикум по прикладной механике

А.В. Козлов,
под ред. А.А. Голована

Москва – 2019

1 Инерциальная навигация

*«Когда человек не знает, к какой пристани он
держит путь, для него ни один ветер не будет
попутным»*

Сенека

Термин «навигация» (от латинского *nāvīgō* — плыву на корабле) может быть переведен как искусство кораблевождения¹. Важность дальних плаваний для человечества когда-то выразил римский полководец Помпей, отправляясь в морской поход в сильную бурю, словами «*Nāvīgāre necesse est, vīvēre nōn est necesse!*», что в переводе значит «Плыть необходимо, а жить — нет!» Навигационные приборы, то есть устройства, которые используются для определения положения движущегося объекта, создавались и совершенствовались вместе с развитием средств передвижения. Долгое время отсутствие точной информации о местоположении было серьёзным препятствием на пути развития авиации. Многие поколения моряков и летчиков мечтали о навигационной системе, которая бы не зависела от видимости звезд и земных ориентиров, от капризов погоды и искусства штурмана, и действительно могла бы быть путеводной звездой, «светящей в тумане».

Становилось все более очевидным, что решение навигационных задач не менее важно для современных подвижных объектов, чем вопросы создания новых конструкций, двигателей, и другие. Создание автономной навигационной аппаратуры стало одним из важнейших направлений в развитии авиационной и космической техники, при создании подводного флота.

В настоящее время, когда стали широко доступны средства спутниковой навигации для определения координат, по прежнему остаются актуальными и инерциальные навигационные системы (ИНС), которые на основе уравнений движения по измерениям механических величин (угловой скорости и силы реакции со стороны других тел) вычисляют ориентацию объекта в пространстве. Они необходимы также в случаях, когда невозможен приём спутниковых навигационных сигналов и когда навигационное решение не должно зависеть от работоспособности навигационных спутников: под водой, в нефтегазопроводах, подземных туннелях, при управлении роботами в помещении, в авиации, космических полётах, и в некоторых других областях.

¹Здесь и далее текст введения частично приведён по статье д.ф.-м.н., профессора Ю.Г. Мартыненко «Инерциальная навигация», Соросовский образовательный журнал, №8, 1998 г.

1 Инерциальная навигация

Автономное счисление траектории возможно благодаря наличию в составе ИНС двух типов инерциальных датчиков:

- 1) *ньютонометров (акселерометров)*, измеряющих проекции удельной (на единицу массы) силы реакции, действующей на объект со стороны других тел, на оси чувствительности датчиков;
- 2) *датчиков угловой скорости (ДУС)*, часто называемых *гирокопами*, измеряющих проекции вектора абсолютной угловой скорости объекта на оси чувствительности датчиков.

Имея указанные измерения, начальные условия, уравнения движения, кажется, остаётся только численно интегрировать их, вычисляя ориентацию, вектор скорости и положение объекта в каждый момент времени. Однако, дело обстоит не совсем так просто.

Во-первых, существенной особенностью ньютонометров (акселерометров) является тот факт, что ими измеряются только силы реакции со стороны других тел. Между тем на движение объекта относительно Земли влияют, например, гравитация и собственное движение Земли. Поэтому в инерциальной навигации приходится дополнительно вводить в уравнения модель движения Земли и модель её гравитационного поля.

Во-вторых, из-за необходимости приведения модельной силы тяжести, вектора угловой скорости Земли и измеряемых сил реакции к одной системе координат, требования к точности определения ориентации оказываются значительно выше, чем это может показаться необходимым на первый взгляд. Даже погрешность измерения угловой скорости порядка $1/1000$ от скорости вращения Земли, т.е. всего лишь сотые доли градуса за час, оказывается существенной для автономной инерциальной навигации из-за накоплении ошибки при интегрировании.

В-третьих, особенностью инерциальной навигации является отсутствие полного набора начальных условий для уравнений движения. Если координаты точки начала движения, как правило, известны, а скорость относительно Земли равна нулю, то начальную ориентацию объекта требуется определять автономно по показаниям всё тех же инерциальных датчиков.

Здесь и далее под решением навигационной задачи мы будем понимать определение координат, вектора скорости и ориентации объекта, движущегося вблизи поверхности Земли, по показаниям ньютонометров и датчиков угловой скорости при известных координатах точки начала движения. Задача компьютерного практикума состоит в получении модельных измерений инерциальных датчиков в процессе имитации полёта воздушного судна и в решении навигационной задачи по ним.

2 Навигационная модель Земли и системы координат

Для околоземной навигации в качестве навигационной модели формы Земли используется эллипсоид вращения, малая ось которого совпадает с осью вращения Земли. Наиболее широко распространённый в мире (в том числе в системе спутниковой навигации GPS) модельный эллипсоид WGS-84 имеет следующие параметры:

$a = 6\,378\,137$ м — большая полуось,

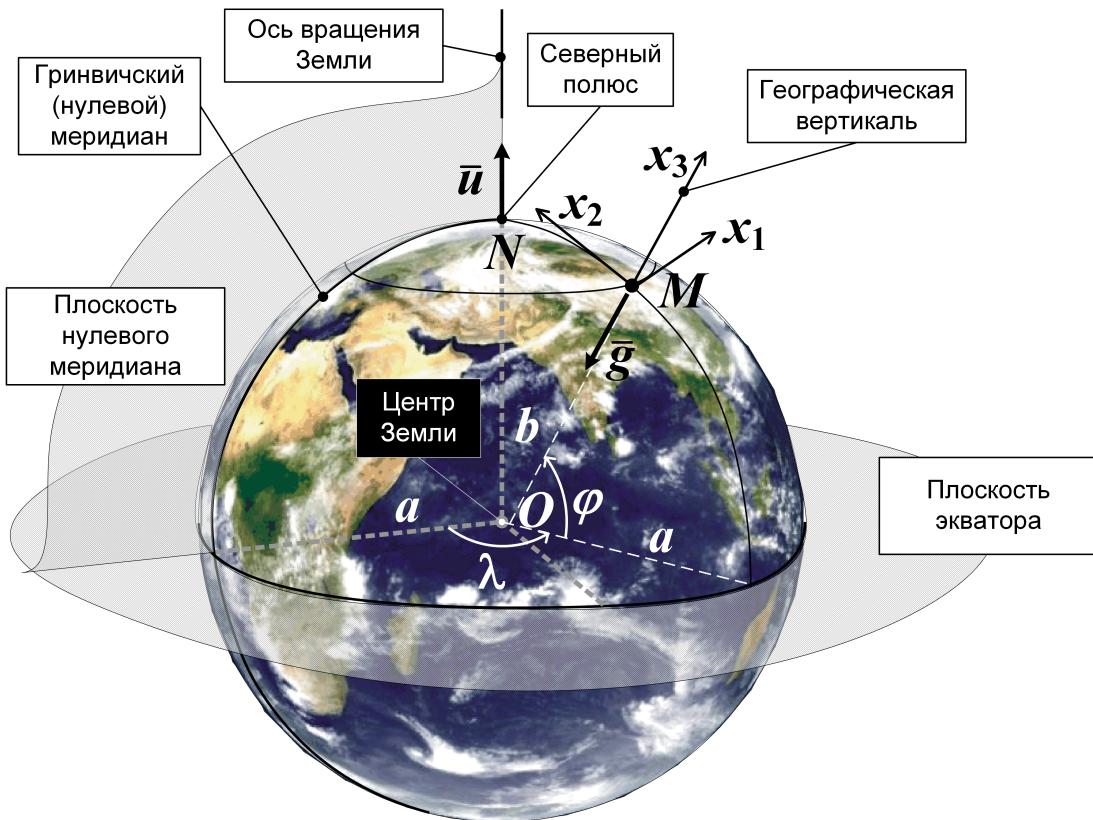
$e^2 [= (a^2 - b^2)/a^2] = 6.6943799901413 \cdot 10^{-3}$ — квадрат эксцентриситета,

b — малая полуось.

Следует отметить, что эксцентриситет эллипса Земли невелик (её форма действительно близка к шару), однако разница в длине полуосей составляет примерно 22 км — величину, которую нельзя не учитывать при решении современных навигационных задач.

Пусть объект, для которого решается навигационная задача, расположен в точке M , а O — центр модельного эллипса Земли (см. рисунок). Кратчайшая нормаль к поверхности эллипса, проходящая через точку M , называется *географической вертикалью*. Ортогональная ей касательная к эллипсу плоскость называется *горизонтальной*. С модельным эллипсом и с объектом, для которого решается навигационная задача, связем географические координаты φ, λ, h , географический трёхгранник Ox и приборную систему координат Mz .

Географические координаты. Исторически для точек вблизи поверхности Земли используются следующие криволинейные координаты: северная широта φ — угол между географической вертикалью и плоскостью экватора, отсчитываемый от плоскости экватора к северу; восточная долгота λ — угол между проекцией географической вертикали на плоскость экватора и плоскостью нулевого меридиана (сечения эллипса, проходящего через ось вращения



и Гринвичскую обсерваторию в Великобритании), отсчитываемый от нулевого меридиана к востоку; географическая высота h — координата вдоль географической вертикали, измеряемая от поверхности эллипсоида. На полюсах Земли географическая долгота не определена.

Географический трёхгранник. Введём трёхгранник $Mx_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Mx_3 совпадала с географической вертикалью (в направлении от центра Земли), ось Mx_2 была касательной к поверхности эллипсоида в направлении на север, а Mx_1 — на восток. На полюсах Земли эта система координат не определена.

Одновременно с трёхгранником Mx рассмотрим систему координат Ox с началом в точке O , оси которой параллельны соответствующим осям трёхгранника Mx . Систему Ox назовем системой, связанной с географической вертикалью. Она изменяет свою ориентацию (вращается) относительно Земли при движении точки M .

Декартовы координаты. Положение точки M относительно трёхгранника Ox будем задавать тройкой координат — столбцом $x = [x_1, x_2, x_3]^T$.

Модель силы тяжести Земли. По построению модельный эллипсоид Земли является эквипотенциальной поверхностью модельного поля силы тя-

жести. Таким образом, последняя направлена перпендикулярно поверхности эллипсоида, т.е. вдоль географической вертикали. На поверхности эллипсоида в географическом трёхграннике так называемое *нормальное* (без учёта аномалий) поле удельной силы тяжести (т.е. ускорения силы тяжести) имеет координаты $g_x = [0, 0, -g']^T$. Модельное значение g' ускорения силы тяжести определяется с учётом его зависимости от широты и высоты, например, по формуле, названной в честь немецкого геодезиста Фридриха Роберта Гельмерта с поправкой, введённой Институтом физики Земли РАН:

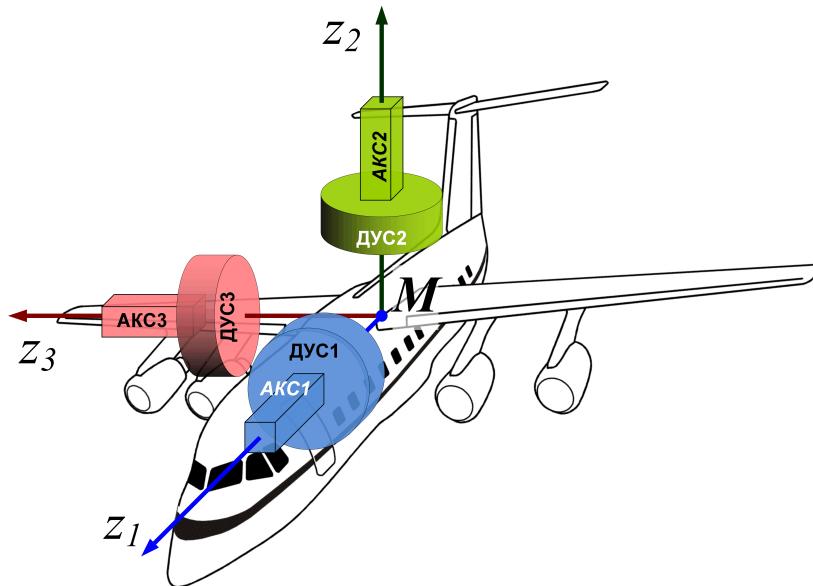
$$g' = g_e \left(1 + \beta_1 \sin^2 \varphi - \beta_2 \sin^2 2\varphi - 2 \frac{h}{a} \right) - \Delta g,$$

где $g_e = 9.78030 \text{ м/с}^2$, $\beta_1 = 5.302 \cdot 10^{-3}$, $\beta_2 = 7 \cdot 10^{-6}$, $\Delta g = 14 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Вращение Земли. За сутки Земля делает полный оборот вокруг своей оси вращения, и ещё около $1/365.25$ части полного круга (дугу орбиты, пройдённую за сутки), поскольку сутки по определению равны интервалу времени между моментами, когда произвольная точка на земной поверхности одинаково расположена по отношению к направлению на Солнце. Таким образом определяется модельная величина угловой скорости Земли.

Приборный трёхгранник. Удельная сила реакции, измеряемая ньютонометрами, и вектор абсолютной угловой скорости, измеряемый датчиками угловой скорости, определяются в проекциях на оси правого ортогонального трёхгранника $Mz_1z_2z_3$, жестко связанного с рассматриваемым объектом и называемого *приборным* (см. рисунок). Традиционно в авиации используются следующие приборные оси. Ось Mz_1 является пересечением плоскости симметрии самолёта и плоскости крыльев и направлена от хвоста к носу. Ось Mz_2 перпендикулярна плоскости крыльев и направлена от шасси. Ось Mz_3 дополняет тройку до правой ортогональной.

Углы ориентации. Ориентацию приборного трёхгранника Mz относительно трёхгранника Mx в авиации исторически принято определять тремя углами — углом истинного курса ψ , тангажа θ и крена γ . Углом истинного курса ψ называется угол между осью Mx_2 (направлением на Север) и проекцией продольной оси Mz_1 летательного аппарата на горизонтальную плоскость Mx_1x_2 , отсчитываемый к Западу. Истинный курс не определён, когда продольная ось совпадает с географической вертикалью и на географических полюсах Земли. Тангаж θ — угол между продольной осью Mz_1 и горизонтальной плоскостью Mx_1x_2 , отсчитываемый от этой плоскости вверх. Крен γ



— угол поворота оси Mz_2 вокруг оси Mz_1 в положительном направлении от вертикальной плоскости Mx_3z_1 . Угол крена также не определён, когда продольная ось самолёта совпадает с географической вертикалью. Таким образом введённые углы определяют следующую последовательность поворотов:

$$Mx \xrightarrow[3]{\pi/2-\psi} \xrightarrow[2]{-\theta} \xrightarrow[1]{\pi/2+\gamma} Mz,$$

где для каждого поворота над стрелкой указан угол, а под стрелкой — ось, вокруг которой происходит поворот. Для определённости примем

$$-\pi < \psi \leq +\pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2, \quad -\pi < \gamma \leq +\pi.$$

Матрица ориентации. Поскольку при параметризации ориентации тремя углами неизбежно вырождение, в реальных навигационных алгоритмах используются кватернионы ориентации или матрицы ориентации². Введем ортогональную матрицу L , определяющую ориентацию трехгранника Mz относительно трехгранника Mx . По определению матрицы ориентации для любого вектора \bar{l} , заданного в географических осях тройкой координат l_x , тройка координат в приборном трёхграннике l_z имеет вид

$$l_z = L l_x.$$

В силу ортогональности L при обратном преобразовании координат используется транспонированная матрица:

$$l_x = L^T l_z.$$

²В бортовых алгоритмах БИНС чаще всего используются кватернионы, однако их рассмотрение выходит за рамки данного пособия.

Матрица перехода может быть выражена через введённые выше углы курса, тангажа и крена:

$$L = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ -\sin \theta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \theta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma & \cos \theta \cos \gamma \\ \sin \theta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma & \sin \theta \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \end{bmatrix}.$$

Обратный переход от матрицы к углам возможен при $|\theta| \neq \pi/2$ на основе следующих соотношений:

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{L_{11}}{L_{12}}, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{L_{13}}{\sqrt{L_{11}^2 + L_{12}^2}} = \frac{L_{13}}{\sqrt{L_{23}^2 + L_{33}^2}}, \quad \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{-L_{33}}{L_{23}}.$$

Значения углов определяются соответствующими арктангенсами с учётом знаков числителя и знаменателя, а также возможного равенства нулю знаменателя. Для этого в большинстве программных пакетов имеется функция `atan2(sin, cos)` с двумя аргументами — числителем и знаменателем дробей в приведённых выше формулах.

3 Решение навигационной задачи

3.1 Приборная основа инерциальной навигации

Как уже было сказано, инерциальная навигационная система состоит из:

- трёх ньютонаометров с взаимно перпендикулярными осями чувствительности; каждый из ньютонаометров измеряет соответствующую проекцию удельной силы реакции, действующей на чувствительную массу ньютонаометра со стороны других тел; например, для неподвижного относительно Земли объекта удельная сила реакции противоположна и равна по норме ускорению силы тяжести; для тела, находящегося в свободном падении, она равна нулю;
- трёх датчиков угловой скорости (ДУС) с взаимно перпендикулярными осями чувствительности; ДУС измеряют проекции абсолютной угловой скорости объекта на свои оси чувствительности; например, ДУС неподвижно стоящего на земле самолёта измеряют угловую скорость вращения Земли;
- бортового вычислителя, решающего навигационную задачу.

В составе ИНС, конечно, имеется и другая вспомогательная аппаратура. Исторически первые инерциальные навигационные системы строились на базе гиростабилизированной горизонтируемой платформы в кардановом подвесе. Современные системы такой платформы не содержат и называются *бескарданными* инерциальными навигационными системами (БИНС). Примем, что оси чувствительности датчиков в точности совпадают с ранее введёнными приборными осями Mz_1 , Mz_2 , Mz_3 .

Как упоминалось во введении, с помощью показаний инерциальных датчиков в бортовом вычислителе необходимо решить следующие задачи:

- определение начальных условий для уравнений движения, а именно начальной ориентации объекта относительно Земли — *задача начальной выставки*;
- определение ориентации объекта относительно Земли в процессе движения — *числение ориентации*;
- определение координат и вектора скорости объекта в процессе движения — *интегрирование динамических уравнений движения*.

Рассмотрим перечисленные задачи по очереди. Начальные значения φ_0 , λ_0 , h_0 для широты, долготы и высоты точки M будем считать известными.

3.2 Начальная выставка

Перед началом движения самолёт некоторое время неподвижен. Это значит, в частности, что приборный трехгранник Mz неподвижен относительно вращающейся Земли. При этом ньютонометры измеряют удельную силу реакции опоры, компенсирующую силу тяжести, а ДУС — угловую скорость вращения Земли. Реакция опоры и гравитационное ускорение в сумме обеспечивают круговое движение объекта вместе с Землёй вокруг её оси вращения, что и означает неподвижность относительно Земли. Удельная сила реакции опоры и угловая скорость Земли измеряются в проекциях на приборные оси Mz . Обозначим тройку измерений ньютонометров f'_z , а тройку показаний датчиков угловой скорости ω'_z .

Заметим, что столбцы матрицы ориентации L — это координаты ортов опорной географической системы координат в приборных осях. Первый офт направлен на восток, а значит ортогонален векторам угловой скорости Земли и реакции опоры. Третий офт направлен вверх по географической вертикали, то есть сонаправлен с реакцией опоры. Второй есть их векторное произведение. Все они имеют единичную длину. Таким образом, для неподвижного объекта с идеальными инерциальными датчиками:

$$L = \begin{bmatrix} \omega_z \times f_z & f_z \times [\omega_z \times f_z] & f_z \\ \|\omega_z \times f_z\| & \|f_z \times [\omega_z \times f_z]\| & \|f_z\| \end{bmatrix},$$

где ω_z и f_z — измеряемые инерциальными датчиками величины, не содержащие погрешностей.

Однако для реальной БИНС необходимо учитывать, что сигналы инерциальных датчиков помимо полезных сигналов ω_z , f_z содержат ещё и случайные

3 Решение навигационной задачи

погрешности. Для хорошо откалиброванных датчиков среднее значение погрешности близко к нулю, и тем ближе, чем больше измерений используется при осреднении. Обычная длительность начальной выставки составляет 3–5 минут.

Пусть $\tilde{\omega}_z$ и \tilde{f}_z — результат осреднения измерений ω'_z и f'_z за время начальной выставки. Тогда для модельного значения $L'(0)$ матрицы ориентации $L(0)$ в начальный момент времени имеем:

$$L'(0) = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z & \tilde{f}_z \times [\tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z] & \tilde{f}_z \\ \|\tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z\| & \|\tilde{f}_z \times [\tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z]\| & \|\tilde{f}_z\| \end{bmatrix}.$$

Итак, начальная матрица ориентации получена.

3.3 Счисление ориентации

Изменение матрицы A ориентации любого трёхгранника относительно некоторой системы отсчёта подчиняется так называемому кинематическому уравнению Пуассона:

$$\dot{A} = \hat{\omega} A, \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & +\omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & +\omega_1 \\ +\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты вектора относительной угловой скорости трёхгранника в собственных осях. Это уравнение представляет из себя формулу для поля относительных скоростей точек вращающегося твёрдого тела, записанную для трёх координатных ортов. Умножение матрицы $\hat{\omega}$ на координатный орт есть векторное произведение угловой скорости на него с обратным знаком.

Таким образом, для матрицы ориентации A_z приборного трёхгранника и для матрицы ориентации A_x географического трёхгранника относительно некоторого инерциального, учитывая сложение угловых скоростей для географического трёхгранника, выполнено:

$$\dot{A}_z = \hat{\omega}_z A_z, \quad \dot{A}_x = (\hat{\Omega}_x + \hat{u}_x) A_x,$$

где u_x — вектор угловой скорости Земли, а Ω_x — вектор угловой скорости географического трёхгранника относительно Земли, имеющие в географическом трёхграннике компоненты:

$$u_x = [0 \quad u \cos \varphi \quad u \sin \varphi]^T, \quad \Omega_x = \left[\frac{-V_2}{R_N + h} \quad \frac{V_1}{R_E + h} \quad \frac{V_1 \operatorname{tg} \varphi}{R_E + h} \right]^T.$$

Здесь V_1, V_2 — горизонтальные компоненты вектора скорости самолёта относительно Земли в географических осях, а радиусы кривизны R_N и R_E соответствующих сечений модельного эллипсоида Земли равны

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad R_N = \frac{a(1 - e^2)}{\left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\right)^3}.$$

Очевидно, что при любом выборе инерциального трёхгранника выполнено $L = A_z A_x^T$. В качестве инерциальной системы отсчёта при решении навигационной задачи можно принять начальное положение географического трёхгранника. В этом случае $A_x(0) = E$, $A_z(0) = L(0)$. Далее, имея показания ДУС, необходимо численно интегрировать дифференциальные уравнения для матриц ориентации, приведённые выше, с этими начальными условиями, подставляя вместо истинных величин имеющуюся информацию о них. При этом имеется особенность, делающая невозможным применение стандартных численных методов интегрирования.

Дело в том, что матрицы ориентации в процессе вычислений должны оставаться ортогональными. Однако стандартные методы численного интегрирования не гарантируют этого. Поэтому в инерциальных навигационных системах при счислении ориентации следует пользоваться тем, что дифференциальные уравнения имеют специальный вид, а именно:

$$\dot{A} = \hat{\omega} A, \quad A(0) = A_0.$$

При численном интегрировании в произвольный момент времени t_i матрица ориентации $A_i = A(t_i)$ уже известна и требуется найти матрицу $A_{i+1} = A(t_{i+1})$. Допустим, что при этом координаты вектора угловой скорости ω в подвижной системе координат на интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ не изменяются и известны. Обычно в инерциальных навигационных системах показания датчиков считаются с частотой 100–500 Гц, т.е. достаточно часто, и предположение о постоянстве вектора угловой скорости на столь коротком интервале времени достаточно близко к истине. В этом случае приведённое выше уравнение является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, и его решение может быть записано через матричную экспоненту, которую мы сразу представим в виде бесконечного ряда Тейлора:

$$A_{i+1} = e^{\hat{\omega} \Delta t} A_i = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{\omega}^k \Delta t^k \right) A_i.$$

Данная формула бесполезна для практического вычисления, так как содержит бесконечную сумму. Однако можно заметить, что для степеней матрицы

3 Решение навигационной задачи

$\hat{\omega}$ выполнено следующее:

$$\forall k \geq 3 \quad \hat{\omega}^k = -\|\omega\|^2 \hat{\omega}^{k-2}.$$

Сгруппировав слагаемые с чётными и нечётными степенями $\hat{\omega}$, получим:

$$A_{i+1} = \left(E + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\|\omega\| \Delta t)^{2m+1}}{(2m+1)!} - \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\|\omega\| \Delta t)^{2m}}{(2m)!} \right) A_i.$$

Бесконечные суммы в скобках есть ряды Тейлора для функций $\sin(\|\omega\| \Delta t)$ и $\cos(\|\omega\| \Delta t) - 1$. После замены рядов на тригонометрические функции, получается окончательная формула (формула Родрига для конечного поворота):

$$A_{i+1} = \left(E + \frac{\sin(\|\omega\| \Delta t)}{\|\omega\|} \hat{\omega} + \frac{1 - \cos(\|\omega\| \Delta t)}{\|\omega\|^2} \hat{\omega}^2 \right) A_i.$$

Нетрудно проверить, что множитель в скобках является ортогональной матрицей, что обеспечивает сохранение ортогональности матрицы ориентации на каждом шаге численного интегрирования. Таким образом, необходимо при помощи полученной формулы численно интегрировать соответствующие дифференциальные уравнения для A_z , A_x с указанными выше начальными условиями, а затем вычислять искомую матрицу $L = A_z A_x^T$. Такой способ гарантирует её ортогональность, и кроме того будет аналитически точным при постоянной угловой скорости.

Примечание. При $\|\omega \Delta t\| \approx 0$ следует умножать матрицу ориентации на три матрицы поворота на малые углы $\omega_1 \Delta t$, $\omega_2 \Delta t$, $\omega_3 \Delta t$ вокруг соответствующих осей. Ошибка, возникающая из-за некоммутативности таких поворотов, будет иметь порядок $\|\omega \Delta t\|^2 \ll 1$, а ортогональность матрицы гарантируется ортогональностью сомножителей. Второй вариант состоит в использовании предельных переходов для слагаемых, содержащих тригонометрические функции:

$$A_{i+1} \approx \left(E + \hat{\omega} \Delta t + \frac{1}{2} \hat{\omega}^2 \Delta t^2 \right) A_i,$$

и последующей ортогонализацией матрицы ориентации. В этом случае погрешность предельных переходов будет иметь порядок $\|\omega \Delta t\|^3$, а погрешность ортогонализации — $\|\omega \Delta t\|^4$.

3.4 Динамические уравнения движения

В произвольной инерциальной системе отсчёта уравнения движения точки M , имеющей декартовы координаты ξ и абсолютную скорость v_ξ , определяются вторым законом Ньютона:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= v_\xi, & \xi(0) &= \xi_0, \\ \dot{v}_\xi &= g_\xi^0 + f_\xi, & v_\xi(0) &= v_0,\end{aligned}$$

где в правой части второго уравнения специально выделены два слагаемых — вектор g_ξ^0 гравитационного ускорения (не следует путать его с ускорением силы тяжести³), *не измеряемого* ньютонометрами, и вектор f_ξ удельной силы реакции, действующей на объект со стороны других тел и *измеряемой* ньютонометрами.

Так как при решении навигационной задачи требуется описать движение объекта *относительно Земли*, то уравнения необходимо записать в подвижных географических осях с учётом формулы сложения скоростей и теоремы Кориолиса. Для координат x и вектора скорости V_x самолёта относительно Земли⁴, записанного в проекциях на оси географического трёхгранника, а также учитывая, что удельная сила реакции измеряется ньютонометрами в приборных осях и в начале движения самолёт неподвижен (для проведения начальной выставки), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_x + \hat{\Omega}_x x, & x(0) &= x_0, \\ \dot{V}_x &= (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)V_x + g_x + L^T f_z, & V(0) &= 0.\end{aligned}$$

Теперь, чтобы не приходилось вычислять достаточно абстрактные декартовы координаты точки M в системе координат Ox , будет удобнее заменить первое уравнение в системе на уравнения для географических координат:

$$\dot{\varphi} = \frac{V_2}{R_N + h}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_1}{(R_E + h) \cos \varphi}, \quad \dot{h} = V_3, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad h(0) = h_0.$$

Поскольку правая часть уравнений движения может быть вычислена только в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots , в которые поступает информация от инерциальных датчиков, а вычисления необходимо производить в реальном времени, не дожидаясь поступления следующих показаний датчиков, то здесь приходится использовать самые простые одношаговые методы.

³Ускорение силы тяжести отличается от гравитационного ускорения центростремительным слагаемым.

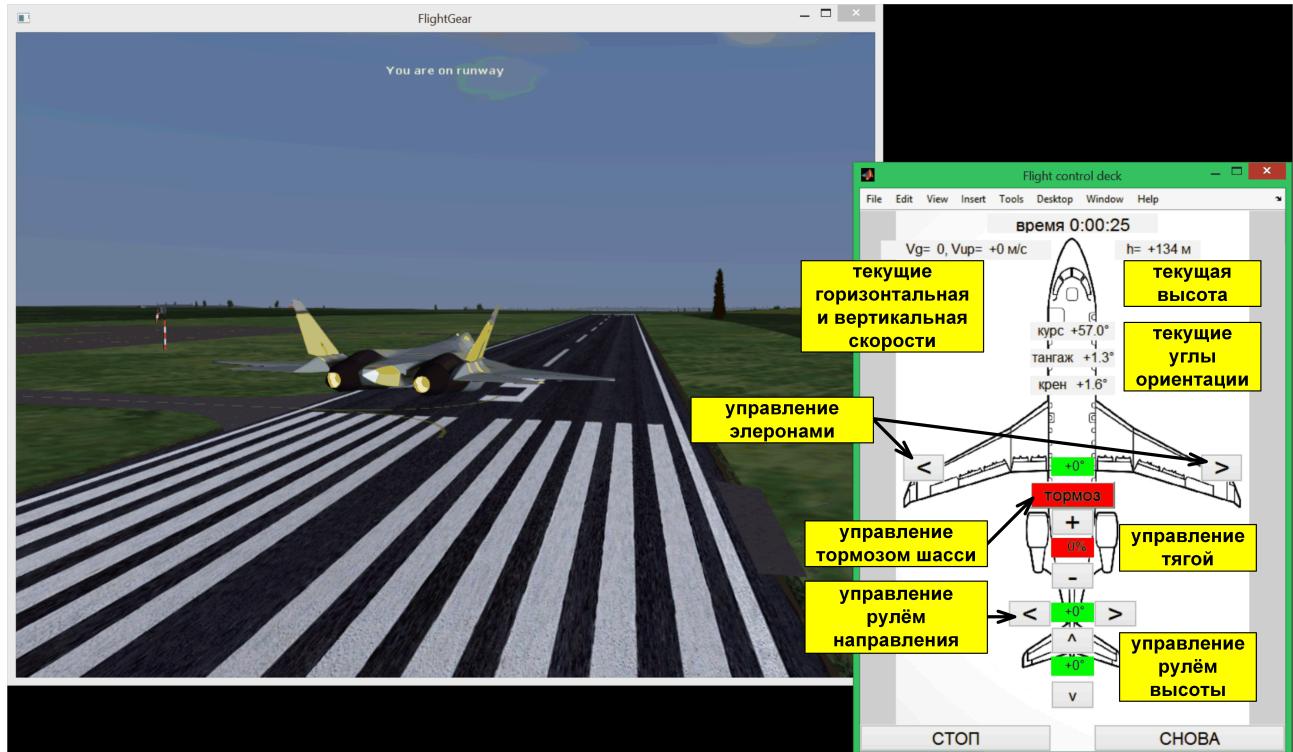
⁴Не следует путать скорость относительно Земли со скоростью относительно географической системы координат, которая сама по себе является подвижной относительно Земли.

4 Выполнение практикума

Выполнение практикума состоит из нескольких этапов: имитация полёта самолёта с записью показаний инерциальных датчиков, построение траектории самолёта по записям показаний инерциальных датчиков, сравнение их с исходной траекторией и зачёт, включающий устные вопросы, моделирование реальных погрешностей в исходных данных навигационного алгоритма (начальных условиях и показаниях инерциальных датчиков) и, при необходимости, модификацию алгоритма обработки навигационных измерений.

4.1 Имитация полёта самолёта

После запуска имитатора на экране появляются панель управления самолётом и окно трёхмерной анимации FlightGear. После завершения полёта



в папке с программой компьютерного практикума появляются файлы траектории и показаний инерциальных датчиков, а на экране — изображение траектории.

Управление обзором

1. Переключение камер в окне FlightGear — клавиша «V».
2. Изменение направления обзора в окне FlightGear:
 - нажимать клавишу «TAB» до появления надписи «Now mouse is controlling view direction»
 - мышью отрегулировать направление,
 - нажать снова «TAB»

Взлёт

Последовательность действий при взлёте следующая:

- 1) начальная выставка — 2–3 минуты неподвижности;
- 2) увеличить тягу до 95%;
- 3) установить руль высоты на +3 градуса;
- 4) выключить тормоз на шасси;
- 5) после отрыва и увеличения тангажа до 5–10° установить руль высоты в 0;
- 6) после взлёта уменьшить тягу до 40–60%, контролируя скорость и углы.

Назначение элементов управления и рекомендации

1. **Элероны** управляют моментом вокруг продольной оси самолёта.
2. **Руль высоты** управляет моментом вокруг оси крыльев.
3. **Руль направления** изменяет момент главным образом вокруг оси, перпендикулярной плоскости крыльев, но в силу своего расположения также создаёт моменты и по другим осям.
4. **Тяга** всегда направлена по продольной оси самолёта вперёд:
 - тяги недостаточно, чтобы компенсировать вес самолёта, а значит когда нос самолёта направлен вертикально вверх, он будет ускоряться вниз; вес самолёта компенсируется главным образом подъёмной силой;
 - подъёмная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев;
 - подъёмная сила может быть недостаточна на малой скорости.

4.2 Показания инерциальных датчиков

Файл `iimu.txt` содержит записи инерциальных датчиков БИНС. Формат файла текстовый, в первой строке — заголовок, содержащий описание содержимого столбцов, вторая и последующие строки содержат время и показания инерциальных датчиков в каждый момент времени.

4.3 Траектория

Файл `trj.txt` содержит запись истинной траектории самолёта для сравнения с ней полученного решения. Формат файла текстовый, в первой строке — заголовок, содержащий описание содержимого столбцов, вторая и последующие строки содержат время, координаты, компоненты скорости и углы ориентации самолёта. Кроме того, создаётся файл `trj.kml` в формате *Keyhole Markup Language*, позволяющий визуализировать траекторию в геоинформационных системах типа *Google Earth* или онлайн, например nakarte.me.

4.4 Дополнительные задания для подготовки к зачёту

1. Предложить и реализовать алгоритм автономного определения широты во время начальной выставки.
2. Вывести в линейном приближении дифференциальное уравнение для ошибки счисления ориентации (кинематической ошибки) — тройки углов малого поворота β такой, что $L' \approx (E + \hat{\beta})L$, где L' — модельная (вычисленная) матрица ориентации.
3. Объяснить неустойчивость вертикального канала БИНС, выведя приближённые дифференциальные уравнения для ошибок высоты и вертикальной скорости (под приближением понимается наличие в правых частях по одному, самому большому по величине, члену).
4. Внести систематические и/или случайные шумовые погрешности в показания каждого из инерциальных датчиков во время или после начальной выставки. Установить характер зависимостей от их величины ошибок углов ориентации. Объяснить эти зависимости аналитически в линейном приближении.

Удачных полётов!