

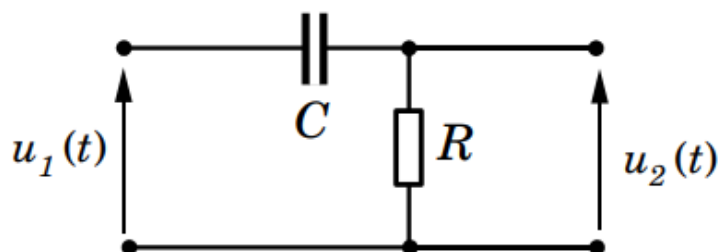
imię i nazwisko	data wykonania	prowadzący ćwiczenia
Krzysztof Czarnowus	20.03.2024 r. grupa 15 (środa, godz. 12.15)	dr Szymon Niedźwiecki
2. Czwórnik. Linia długa.		

1. Wstęp teoretyczny

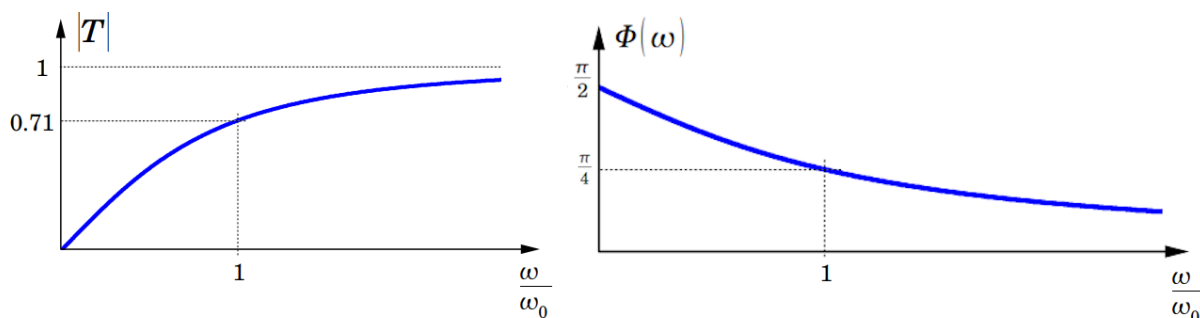
Czwórnikami są elementami obwodu elektrycznego posiadającymi cztery zaciski – dwa odpowiadające za wejście i dwa za wyjście¹. W zależności od rodzaju elementów wchodzących w ich skład oraz od sposobu połączenia potrafią one w różny sposób wpływać na napięcie przepływające przez układ; do opisu tego wpływu służy bezwymiarowy parametr nazwany transmitancją i będący ilorazem napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego:

$$T = \frac{U_{\text{wyjścia}}}{U_{\text{wejścia}}} \quad (1)$$

Przykładem czwornika może być czwórnik CR, znany również jako filtr górnoprzepustowy albo układ różniczkujący. Jego schemat przedstawiono na rysunku 1, podczas gdy charakterystyka amplitudowa oraz fazowa są na rysunku 2.



Rys. 1. Schemat czwornika CR składającego się z kondensatora C oraz rezystora R. U_1 jest napięciem wejściowym układu, natomiast U_2 napięciem na wyjściu¹.

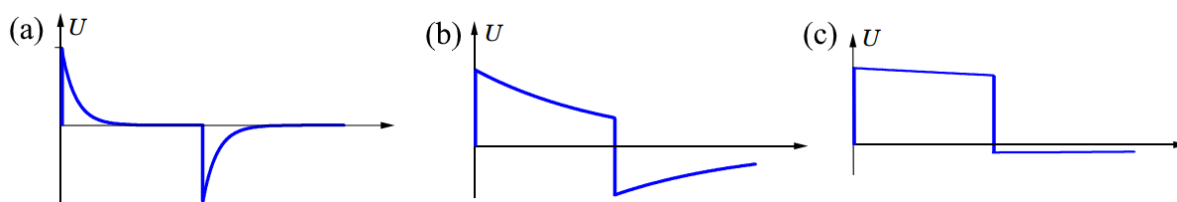


Rys. 2. Charakterystyka amplitudowa (po lewej) oraz fazowa (po prawej) filtra górnoprzepustowego dla podanego na wejściu napięcia sinusoidalnego¹.

Znajdujący się na rysunku 2 parametr ω_0 oznacza częstotliwość rezonansową, a więc umownie przyjętą granicę częstotliwości, powyżej której tłumienie sygnału elektrycznego przez filtr zanika. Znając rezystancję opornika R oraz pojemność kondensatora C możliwe jest wyznaczenie teoretycznej wartości częstotliwości rezonansowej, będącej odwrotnością tzw. stałej czasowej τ :

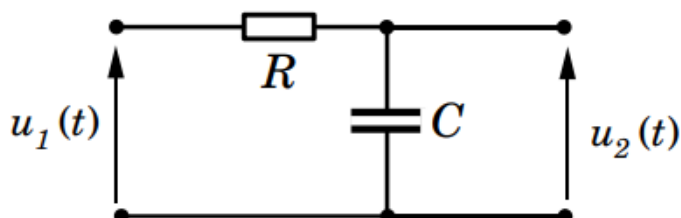
$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi RC} \text{ [1/s]} \quad (2)$$

Nazwa „układ różniczkujący” odnosi się do jego charakterystycznej cechy – napięciowy sygnał na wyjściu przypomina zrózniczkowany sygnał wejściowy; przykładowe przebiegi dla zadanego sygnału prostokątnego przedstawiono na rysunku 3.

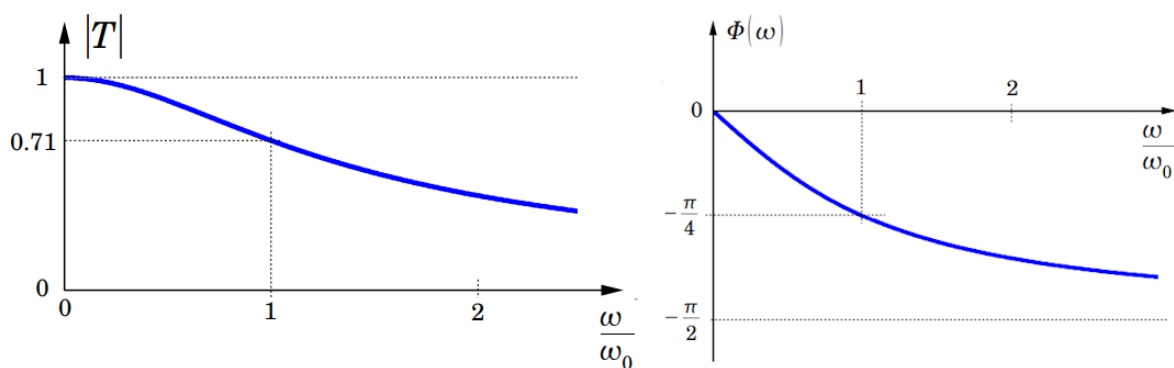


Rys. 3. Przykładowe sygnały wyjściowe dla zadanego sygnału prostokątnego, w którym okres równy jest: (a) dziesięciokrotności stałej czasowej, (b) stałej czasowej oraz (c) 0.1 stałej czasowej¹.

Innym wykorzystywanym w ćwiczeniu układem jest czwórnik RC, nazywany również filtrem dolnoprzepustowym albo układem całkującym, przedstawiony na rysunku 4. Jego charakterystyka fazowa oraz amplitudowa znajdują się natomiast na rysunku 5.

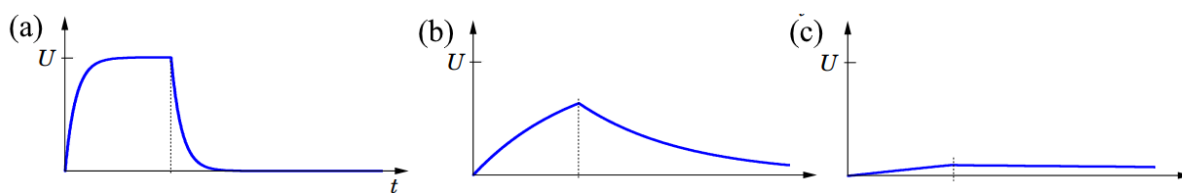


Rys. 4. Schemat czwórnika RC, składającego się z rezystora R oraz kondensatora C . U_1 jest napięciem wejściowym układu, natomiast U_2 napięciem na wyjściu¹.



Rys. 5. Charakterystyka amplitudowa (po lewej) oraz fazowa (po prawej) filtra dolnoprzepustowego dla podanego na wejściu napięcia sinusoidalnego ¹.

Geneza nazwy „układ całkujący” jest analogiczna, jak w przypadku czwórnika CR. Sygnał wyjściowy przypomina kształtem scałkowany sygnał wejściowy. Na rysunku 6. przedstawiono przykładowe przebiegi dla zadanego sygnału prostokątnego.

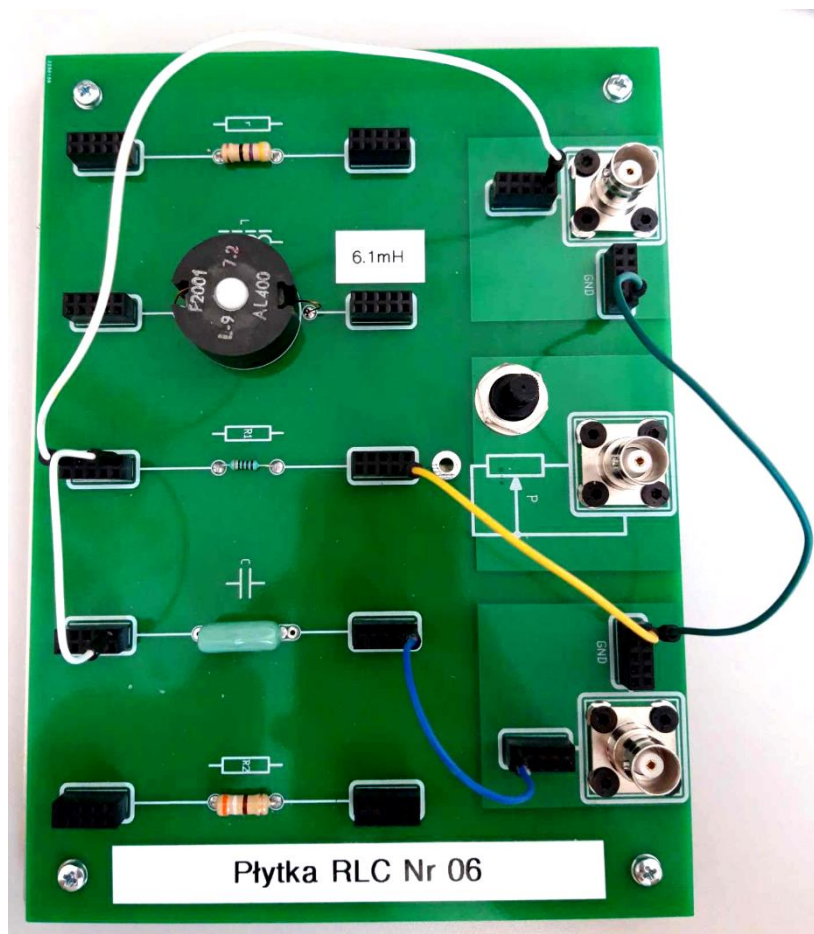


Rys. 6. Przykładowe sygnały wyjściowe dla zadanego sygnału prostokątnego, w którym okres równy jest: (a) dziesięciokrotności stałej czasowej, (b) stałej czasowej oraz (c) 0.1 stałej czasowej¹.

Można zaobserwować, że oba badane układy mają przeciwne działanie – dla czwórnika CR przyłożenie wyższych częstotliwości sprawia, że transmitancja zbliża się do jedności, a przesunięcie fazowe sygnału wyjścia względem sygnału wejścia do zera, podczas gdy w czwórniku RC to bardzo małe częstotliwości prądu sprawiają, że obserwuje się jedynie niewielki wpływ układu na jego przepływ.

2. Opis ćwiczeń oraz omówienie wyników

Na rysunku 7 przedstawiono skonstruowany na płytce nr 06 czwórnik CR. Po wykonaniu za pomocą miernika uniwersalnego nr 8 pomiaru pojemności elektrycznej kondensatora, wynoszącej 64,8 nF, postanowiono wykorzystać opornik R_1 o rezystancji 2985 Ω ; dla takiego układu zgodnie ze wzorem 2 stała czasowa wynosi 0,193 ms, a więc teoretyczna wartość częstotliwości granicznej czwórnika ma wartość 822,84 s^{-1} .



Rys. 7. Płytki RLC połączona w taki sposób, aby spełniała rolę czwórnika CR.

Wykonano pomiary amplitudy oraz przesunięcia fazowego sygnału sinusoidalnego przechodzącego przez skonstruowany układ, jako referencji używając niezaburzony sygnał przesyłany do oscyloskopu prosto z generatora funkcyjnego. Zadaną częstotliwość zmieniano w zakresie 100 Hz – 20 kHz z odpowiednim krokiem. Odpowiednie wartości mierzono za pomocą wbudowanych funkcji oscyloskopu i odczytano ze zdjęć załączonych na końcu sprawozdania. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki pomiarów transmitancji oraz przesunięcia fazowego sygnału elektrycznego przechodzącego przez czwórniki CR.

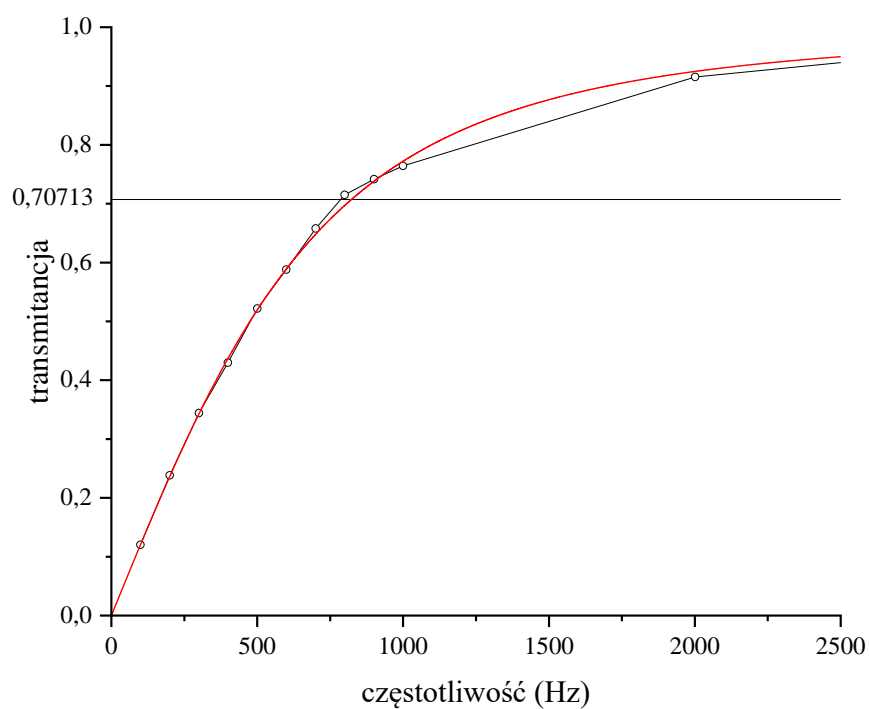
częstotliwość [Hz]	przesunięcie fazowe [°]	napięcie wejścia [V]	napięcie wyjścia [V]	transmitancja
100,0	85,2	0,997	0,120	0,120
200,1	76,6	0,995	0,237	0,238
300,3	70,8	0,991	0,341	0,344
399,7	63,7	0,991	0,426	0,430

500,2	58,1	0,989	0,516	0,522
599,4	54,0	0,988	0,581	0,588
700,8	47,1	0,973	0,640	0,658
799,5	45,2	0,962	0,688	0,715
900,4	40,3	0,975	0,723	0,742
999,8	41,2	0,984	0,752	0,764
2001	23,2	0,981	0,898	0,915
3001	14,3	0,979	0,944	0,964
3999	12,2	0,976	0,955	0,978
4997	9,96	0,980	0,965	0,985
6004	7,51	0,974	0,967	0,993
6999	5,92	0,980	0,968	0,988
7996	6,43	0,981	0,968	0,987
9001	6,02	0,983	0,969	0,986
10 000	5,43	0,982	0,970	0,988
19 980	3,57	0,984	0,976	0,992

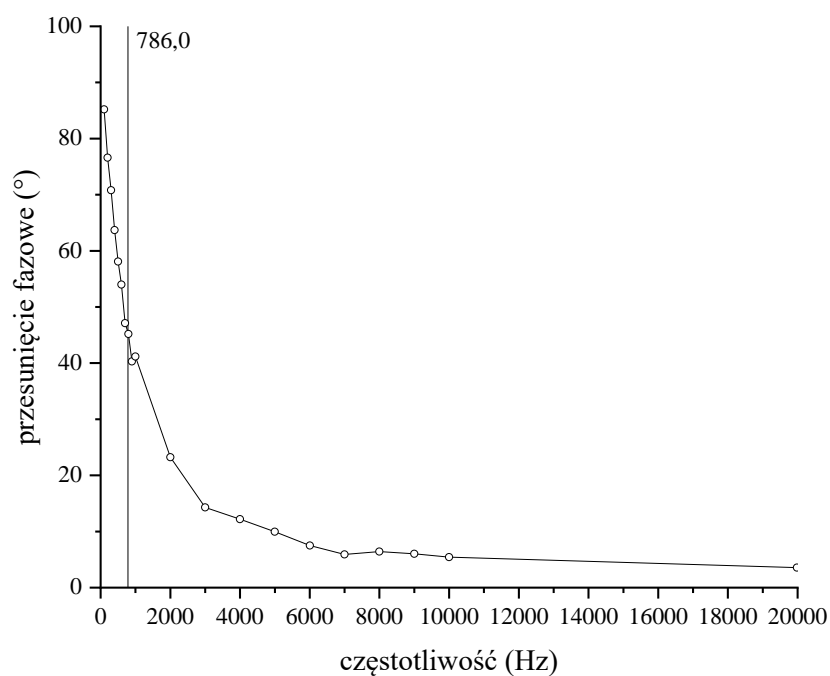
Otrzymane zależności przedstawiono na rysunkach 8 oraz 9. Wiedząc, że dla częstotliwości granicznej transmitancja powinna wynosić wartość 0,7071 na wykresie transmitancji, odczytano ją wprost z tej zależności. Na wykres transmitancji naniesiono również zależność spodziewaną na podstawie teoretycznej częstotliwości granicznej, wyrażającą się wzorem:

$$T = \left(\frac{f}{f_0}\right) \left[1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^{-1/2} \quad (3)$$

gdzie T jest transmitancją, f zadaną częstotliwością, a f_0 teoretyczną częstotliwością graniczną.



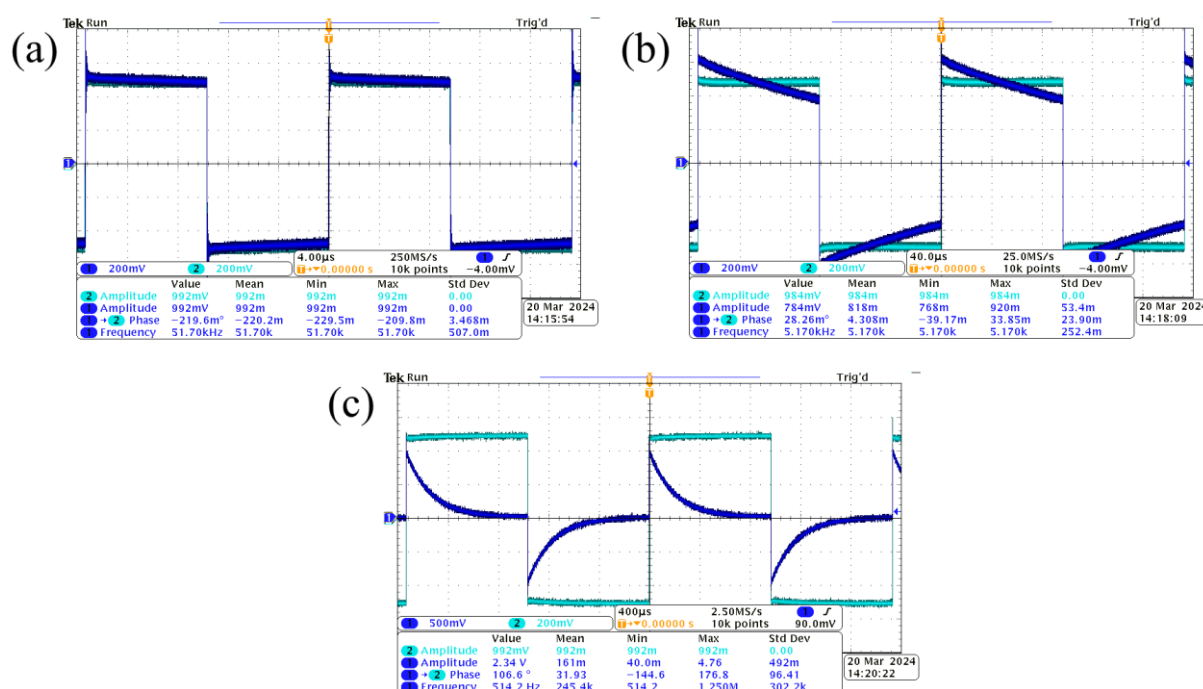
Rys. 8. Zależność transmitancji czwórnika CR od częstotliwości mierzona dla sygnału sinusoidalnego wraz z zaznaczoną na czerwono zależnością teoretyczną.



Rys. 9. Zależność przesunięcia fazowego czwórnika CR od częstotliwości mierzona dla sygnału sinusoidalnego wraz z zaznaczoną pionową linią, wyznaczającą odczytaną częstotliwość graniczną.

Odczytano wartość częstotliwości granicznej wynoszącą 786,0 Hz oraz odpowiadające jej przesunięcie fazowe równe $45,5^\circ$, a więc bardzo blisko spodziewanej wartości, wynoszącej $\pi/4$. Wszystkie zarejestrowane obrazy z oscyloskopu użyte do odczytania odpowiednich wartości załączono na końcu sprawozdania.

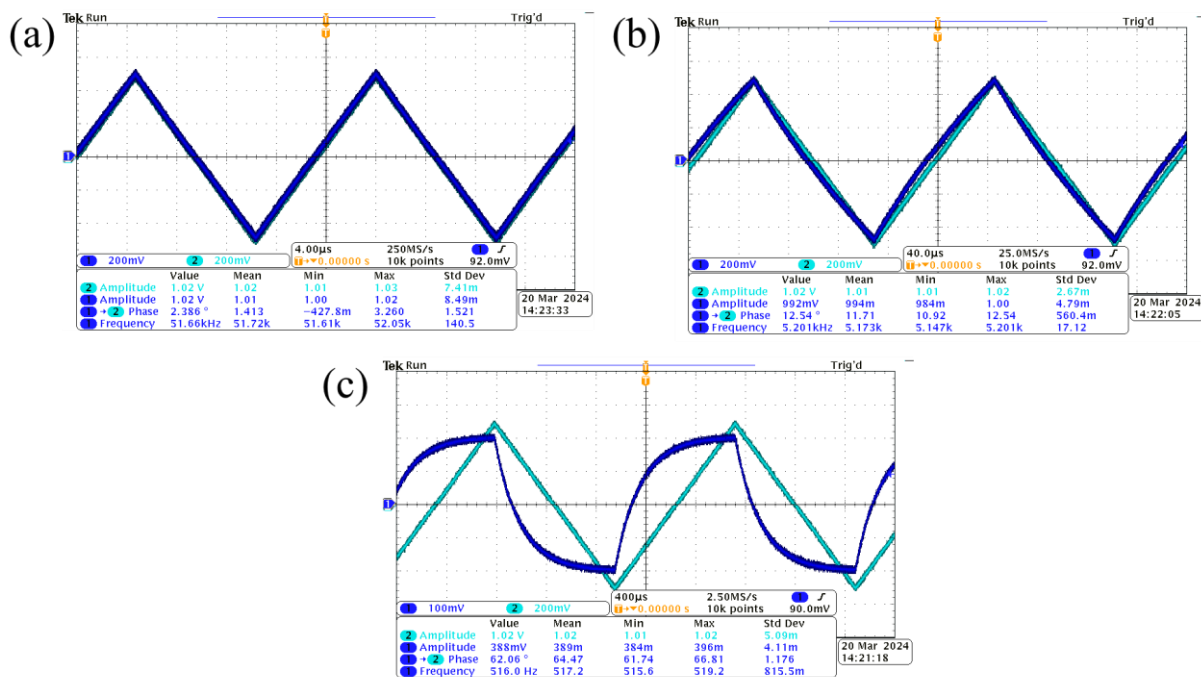
W dalszej części ćwiczenia przystąpiono do badania sygnału prostokątnego o napięciu wynoszącym 1 V oraz trzech różnych okresach: $0,1 \times \tau$, τ oraz $10 \times \tau$, gdzie τ oznacza stałą czasową układu. Zarejestrowane sygnały przedstawiono na rysunku 10.



Rys. 10. Sygnał prostokątny zarejestrowany dla okresu równego: (a) jednej dziesiątej stałej czasowej, (b) stałej czasowej oraz (c) dziesięciokrotności stałej czasowej.

Kształt przedstawionych wykresów pokrywa się z oczekiwanym, przedstawionymi na rysunku 3. Czwórnik CR nazywany jest również układem różniczkującym, ponieważ jego wyjście dla prądu o okresie odpowiednio wyższym od stałej czasowej pokazuje zróżniczkowany sygnał wejściowy. Na rysunku 10a widać sygnał o bardzo wysokiej częstotliwości, a więc praktycznie niezaburzony; sygnał o częstotliwości granicznej przedstawiony na rysunku 10b wykazuje już zauważalne różnice, podczas gdy odpowiednio niska częstotliwość przedstawiona na rysunku 10c pokazuje właściwe działanie układu różniczkującego, zgodnie z oczekiwaniami.

Podobne operacje wykonano dla sygnału trójkątnego; zarejestrowane w ten sposób za pomocą oscyloskopu obrazy przedstawiono na rysunku 11.



Rys. 11. Sygnał trójkątny zarejestrowany dla okresu równego: (a) jednej dziesiątej stałej czasowej, (b) stałej czasowej oraz (c) dziesięciokrotności stałej czasowej.

Można zaobserwować, że sygnał wyjściowy zachowuje się analogicznie, jak w przypadku zadanej funkcji prostokątnej; zależność przedstawiona na rysunku 11c o okresie równym dziesięciokrotności stałej czasowej, a więc częstotliwości wyraźnie wyższej od granicznej, zachowuje się jak zróżniczkowany sygnał wejściowy.

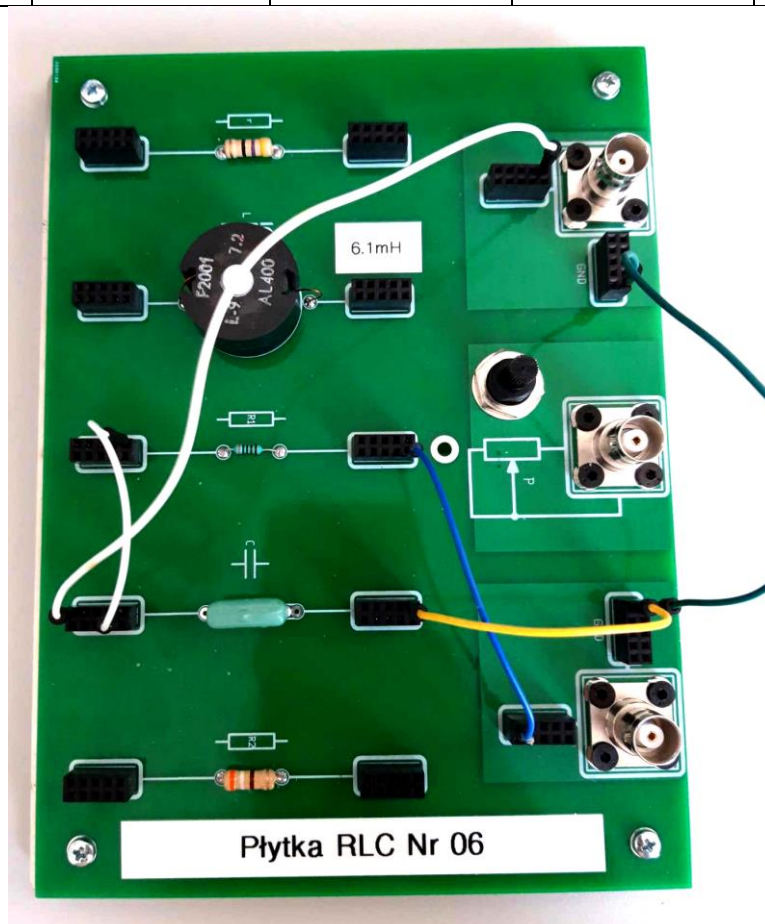
Następnie przekonstruowano układ w ten sposób, aby powstał czwórnik RC, znany też jako układ całkujący oraz filtr dolnoprzepustowy. Na rysunku 12 przedstawiono płytke RLC realizującą to zadanie.

Powtórzono charakterystykę amplitudową oraz fazową nowego układu. Wyniki zestawiono w tabeli 2, a zależności transmitancji oraz przesunięcia fazowego od częstotliwości przedstawiono na rysunkach 13 oraz 14.

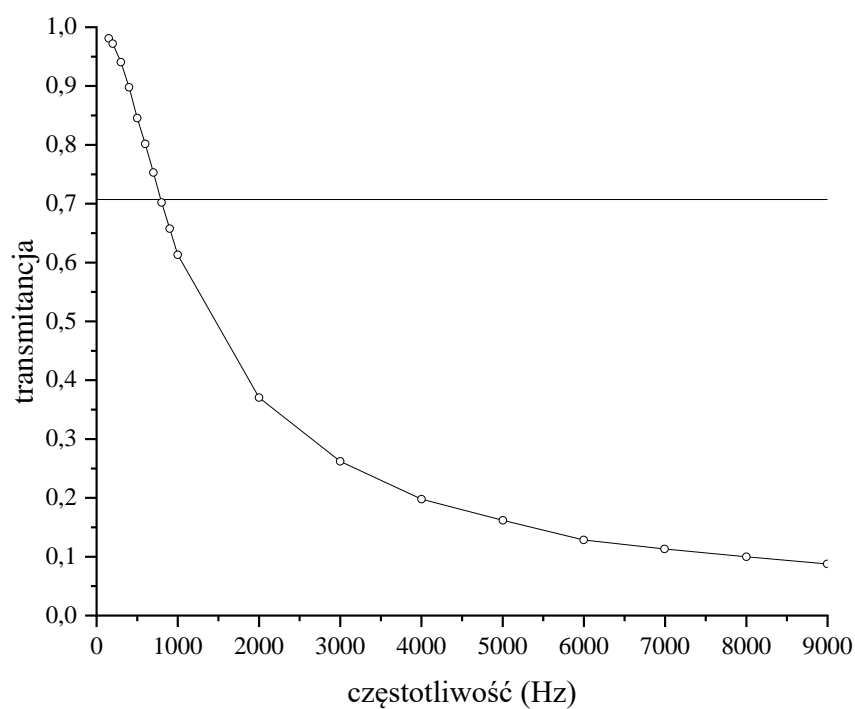
Tabela 2. Wyniki pomiarów transmitancji oraz przesunięcia fazowego sygnału elektrycznego przechodzącego przez czwórnik RC.

częstotliwość [Hz]	przesunięcie fazowe [°]	napięcie wejścia [V]	napięcie wyjścia [V]	transmitancja
150,1	-9,98	0,995	0,976	0,981
200,0	-14,6	0,996	0,968	0,972
300,0	-20,8	0,992	0,933	0,941

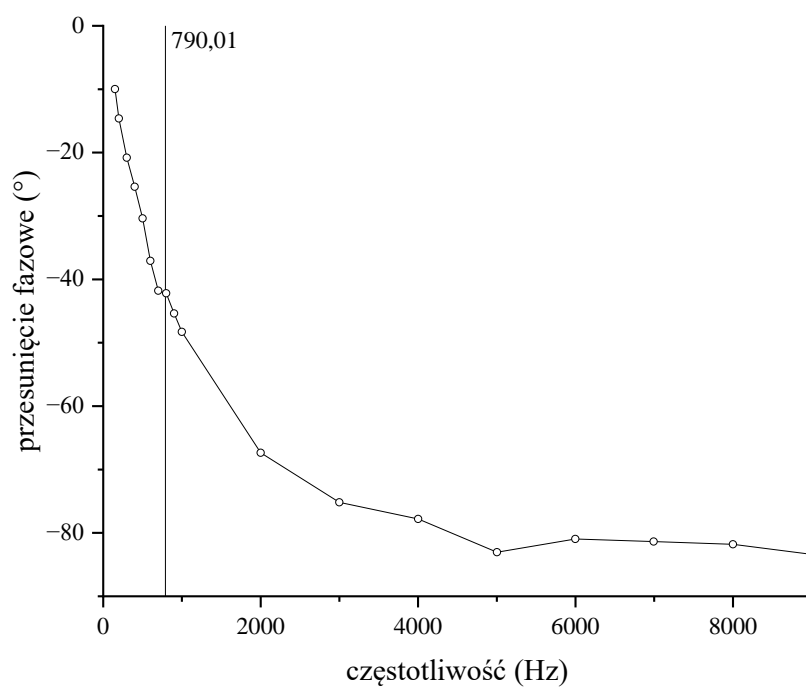
częstotliwość [Hz]	przesunięcie fazowe [°]	napięcie wejścia [V]	napięcie wyjścia [V]	transmitancja
400,1	-25,4	0,989	0,888	0,898
499,8	-30,4	0,991	0,838	0,846
599,8	-37,1	0,988	0,792	0,802
700,6	-41,8	0,988	0,744	0,753
800,4	-42,2	0,987	0,693	0,702
899,8	-45,4	0,984	0,647	0,658
999,2	-48,3	0,985	0,604	0,613
2001	-67,4	0,983	0,364	0,370
2999	-75,2	0,981	0,257	0,262
4001	-77,8	0,981	0,194	0,198
5003	-83,0	0,952	0,154	0,162
5998	-81,0	0,980	0,126	0,129
6994	-81,4	0,980	0,111	0,113
8000	-81,8	0,980	0,098	0,100
8995	-83,4	0,980	0,086	0,088



Rys. 12. Płytki RLC połączona w taki sposób, aby spełniała rolę czwórnika RC.



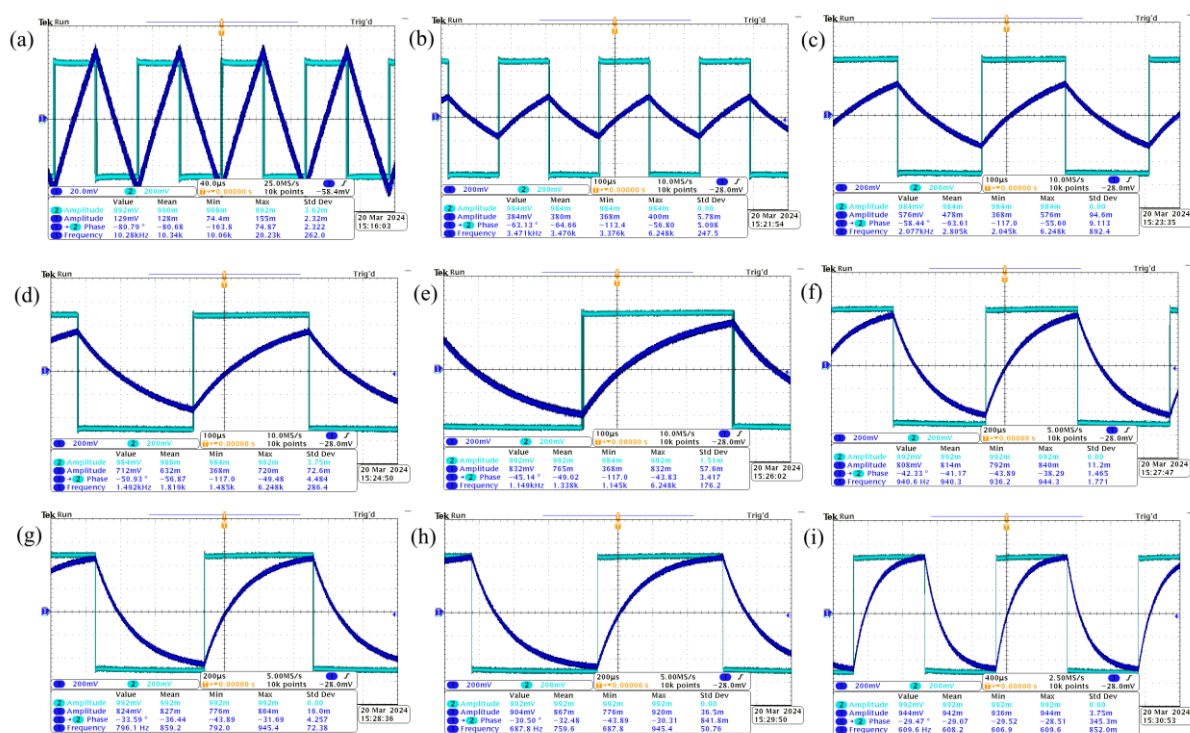
Rys. 13. Zależność transmitancji czwórnika RC od częstotliwości mierzona dla sygnału sinusoidalnego.



Rys. 14. Zależność przesunięcia fazowego czwórnika RC od częstotliwości mierzona dla sygnału sinusoidalnego wraz z zaznaczoną pionową linią, wyznaczającą odczytaną częstotliwość graniczną.

Z rysunku 13 odczytano częstotliwość graniczną układu RC wynoszącą 790,1 Hz, co odpowiada przesunięciu fazowemu $-42,2^\circ$ - zatem wartości zbliżonej do spodziewanej teoretycznej $-\pi/4$. Obrazy z oscyloskopu, z których odczytano odpowiednie wartości, zawarto na końcu sprawozdania.

W następnej części ćwiczenia na wejście układu podano sygnał prostokątny o amplitudzie 1 V oraz różnych częstotliwościach rozpoczynających się od wartości połowy stałej czasowej o kroku 1 τ . Zarejestrowane obrazy przedstawiono na rysunku 15.



Rys. 15. Sygnał prostokątny zarejestrowany dla okresu równego: (a) 0,5 τ , (b) 1,5 τ , (c) 2,5 τ , (d) 3,5 τ , (e) 4,5 τ , (f) 5,5 τ , (g) 6,5 τ , (h) 7,5 τ , (i) 8,5 τ .

Można zaobserwować skracający się czas narastania impulsu dla wydłużających się okresów sygnału, a więc malejących częstotliwości. Dla częstotliwości wyraźnie wyższych od granicznej (np. na rysunku 15a) sygnał wyjściowy przypomina scałkowany sygnał wejściowy, co jest spodziewanym zachowaniem filtra dolnoprzepustowego.

Metodą „na oko” zmierzono długości odpowiednich odcinków, przeskalowano i wyliczono czas narastania sygnału wyjściowego, to znaczy czas, jaki był potrzebny, aby od pojawienia się sygnału wejściowego na wyjściu otrzymać 90% jego końcowej wartości. Wyniki zestawiono w tabeli 3., natomiast skan kartki z odpowiednimi przeliczeniami odcinków załączono na końcu sprawozdania.

Tabela 3. Czas narastania sygnału w układzie całkującym przy zadanej fali prostokątnej.

częstotliwość fali	czas narastania [μ s]
0,5 τ	43,5
1,5 τ	50,0
2,5 τ	209,3
3,5 τ	262,2
4,5 τ	318,4
5,5 τ	377,1
6,5 τ	375,8
7,5 τ	445,2
8,5 τ	425,8

3. Podsumowanie

Skonstruowano dwa czwórniki, różniące się sposobem podłączenia kondensatora i rezystora, po czym wykonano ich charakterystykę amplitudową i fazową. Zestawienie teoretycznej wartości częstotliwości granicznej z wartościami odczytanymi z wykresu przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Zestawienie częstotliwości granicznej skonstruowanych układów.

teoretyczna częstotliwość graniczna	822,8 Hz
empiryczna częstotliwość graniczna dla układu CR	786,0 Hz
empiryczna częstotliwość graniczna dla układu RC	790,1 Hz

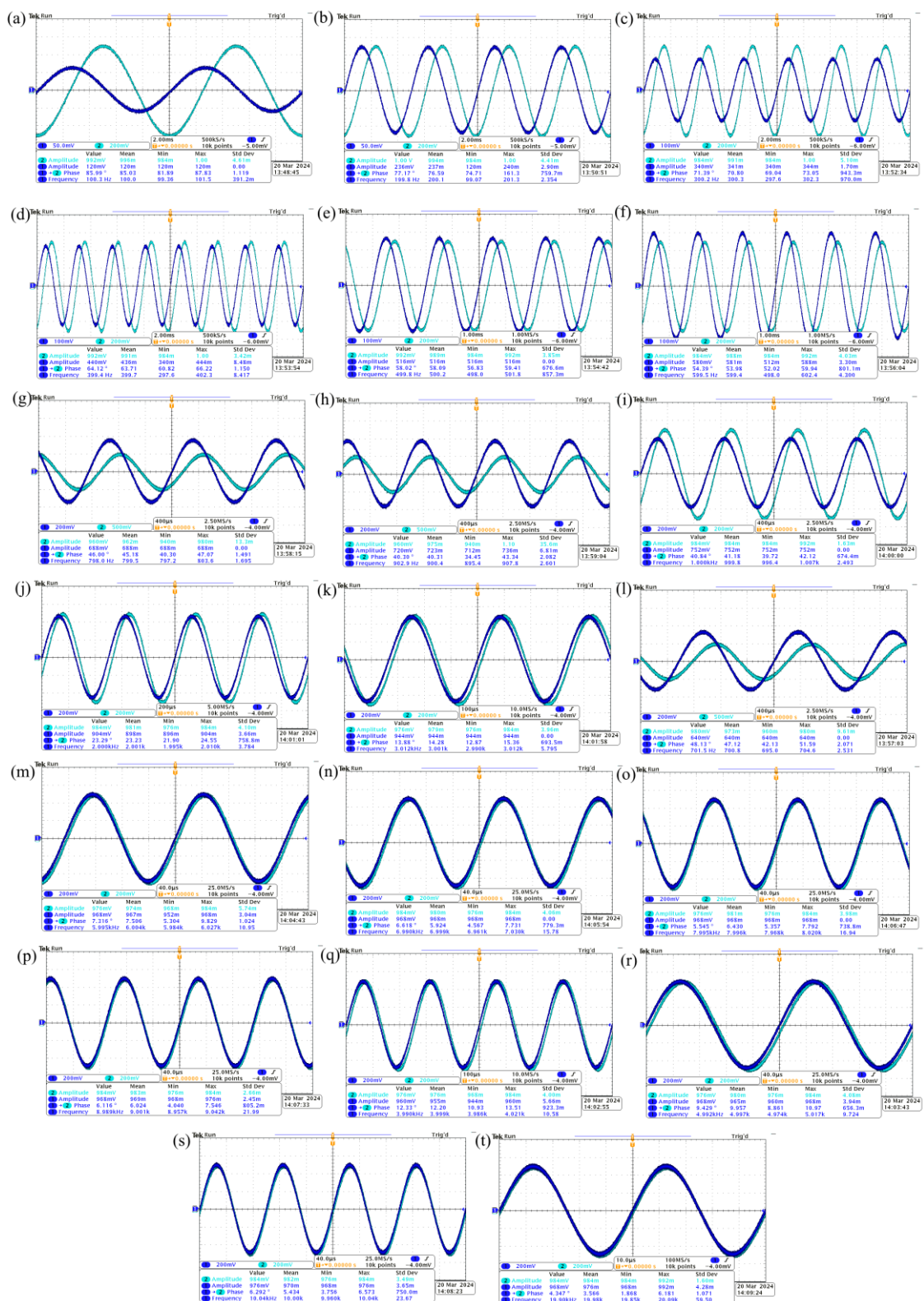
Można zaobserwować, że wyznaczone doświadczalnie częstotliwości graniczne są w pewnym stopniu mniejsze od tej obliczonej na podstawie znajomości stałej czasowej układu – a jednocześnie zbliżone do siebie, co oznacza małe prawdopodobieństwo wystąpienia błędu pomiarowego przy wykonywaniu któregoś z ćwiczeń.

Zbadano również działanie układu różniczkującego oraz całkującego na sygnały inne niż sinusoidalny, obserwując, jak przekształcają je w spodziewany sposób dla częstotliwości odpowiednio mniejszych (dla czwórnika CR) oraz większych (dla czwórnika RC) od częstotliwości granicznej.

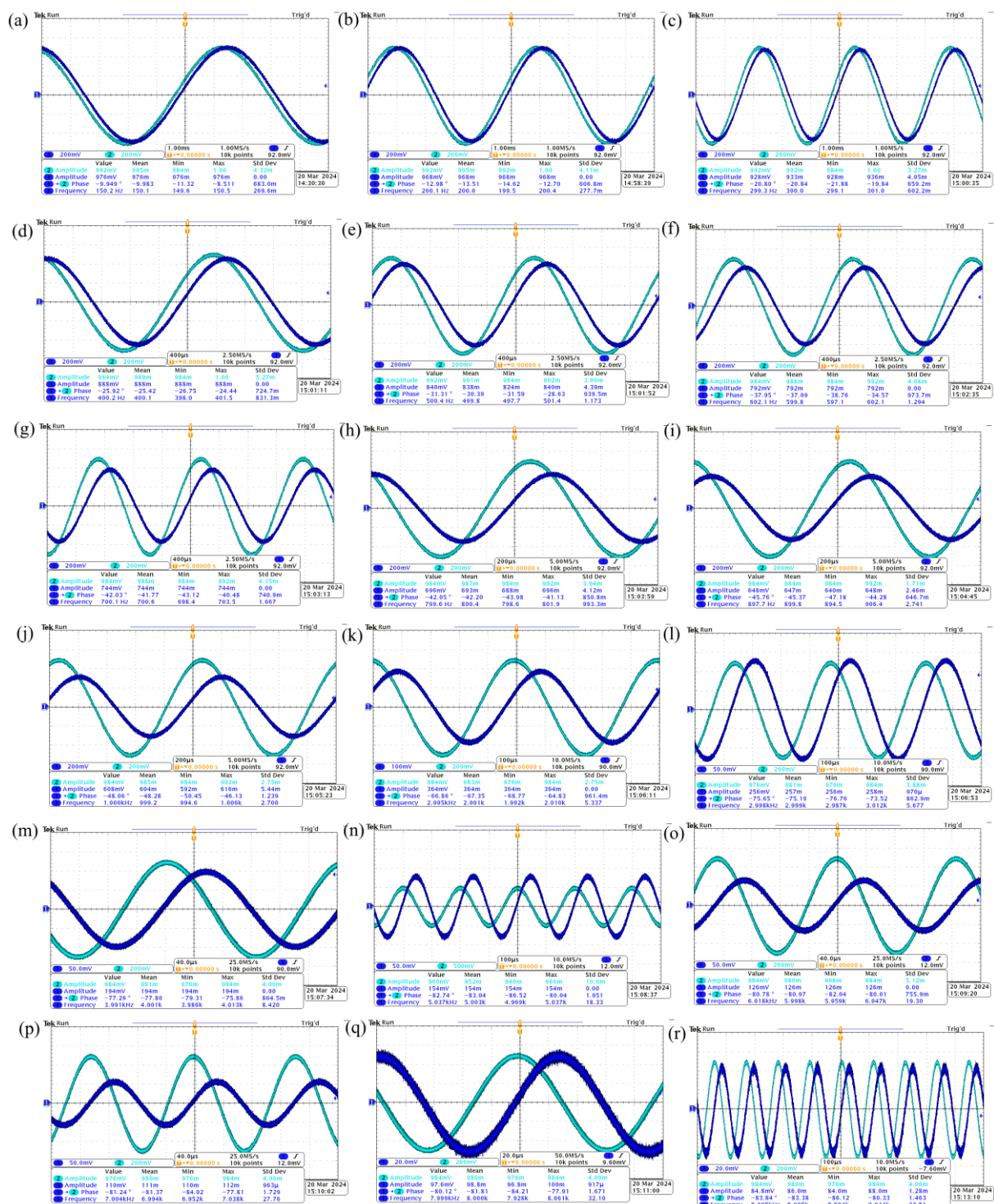
4. Źródła

[1] http://zefir24.if.uj.edu.pl/pracownia_el/jb_w4.pdf (data dostępu: 30.03.2024 r.)

4. Skan notatek oraz niewykorzystane obrazy

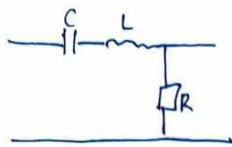


Rys. S1. Obrazy służące odczytaniu odpowiednich wartości podczas wykonywania charakterystyki fazowej i amplitudowej czwornika CR. Zestawienie sygnału wejściowego i wyjściowego o zadanych częstotliwościach: (a) 100, (b) 200, (c) 300, (d) 400, (e) 500, (f) 600, (g) 700, (h) 800, (i) 900, (j) 1000, (k) 2000, (l) 3000, (m) 4000, (n) 5000 (o) 6000, (p) 7000, (q) 8000, (r) 9000, (s) 10 000 i (t) 20 000 Hz



Rys. S2. Obrazy służące odczytaniu odpowiednich wartości podczas wykonywania charakterystyki fazowej i amplitudowej czwornika RC. Zestawienie sygnału wejściowego i wyjściowego o zadanych częstotliwościach: (a) 150, (b) 200, (c) 300, (d) 400, (e) 500, (f) 600, (g) 700, (h) 800, (i) 900, (j) 1000, (k) 2000, (l) 3000, (m) 4000, (n) 5000 (o) 6000, (p) 7000, (q) 8000, (r) 9000 Hz.

EC-cw.2



$$Z_{\text{wej}} = Z_x = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

$$Z_2 = R$$

- 5-6 punktów plusowych z reszty - przekazywać
- podać: ułamek od ω $\approx 10\omega_0$
mniejszy $= \frac{1}{10}\omega_0$
- uwzględnić na skali

$$T(\omega) = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{R}{\frac{j^2\omega^2 LC + 1}{j\omega C}} = \frac{RC j\omega}{j^2\omega^2 LC + 1} = \frac{j\omega RC}{1 - LC\omega^2} = \frac{j\omega R^2 C}{R - LRC\omega^2} = \dots ?$$

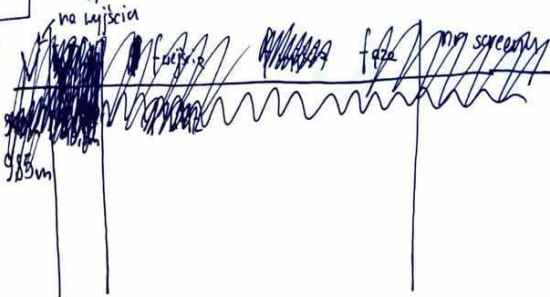
STACJA 3

PEŁTKARŁC OG
MIERNIK 8

używamy R_{A1}

$$\tau = R \cdot C = 64,8 \text{ nF} \cdot 2985 \Omega = 0,000193428 \text{ s} = 0,193 \text{ ms}$$

$C = 64,8 \text{ nF}$
 $R_1 = 2985 \Omega$
 $R_2 = 385 \Omega$
 $r = 46,8 \Omega$



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{64,8 \cdot 10^{-9} \cdot 2985}} = 822,84 \frac{1}{s}$$

$$\omega_0 = 5140,2 \text{ rad/s}$$

f	V _{wejście}	V _{wyjście}	faza	nr szeregu	freq. wyjście
1 kHz	0,985	0,752	41,2	01	
200 Hz	0,995	0,237	76,6	03	
100 Hz	0,996	0,120	85,1	02	
300 Hz	0,993	0,341	70,8	04	
400 Hz	0,990	0,436	63,7	05	
...

2.1

01 - $0,1 \cdot \tau = 0,0193428 \text{ ms}$ - 10 razy mniejsze od τ
02 - okres równy τ
03 - $10 \times \tau$

04 - $0,1 \times \tau$
05 - τ
06 - $10 \times \tau$

ma sens czy nie?
liczy się dyskusja.
porównaj z wykresami.

3

od 20 - ciekawie

20	0,85 V
21	1,5 V
22	2,5 V
23	3,5 V
24	4,5 V
25	5,5 V
26	6,5 V
27	7,5 V
28	8,5 V
29	9,5 V

Rys. S3. Skan notatek z zeszytu laboratoryjnego.

②	0,5	0,25/0,23 · 40 μs
②	1,5	1/0,8 · 40 μs
②②	2,5	1,13/0,54 · 100 μs
②③	3,5	1,18/0,45 · 100 μs
②④	4,5	1,21/0,38 · 100 μs
②⑤	5,5	0,66/0,35 · 200 μs
②⑥	6,5	0,62/0,33 · 200 μs
②⑦	7,5	0,69/0,31 · 200 μs
②⑧	8,5	0,33/0,31 · 400 μs

Rys. S4. Skan kartki z przeliczeniami czasu narastania sygnału dla układu całkującego metodą „na oko”.