Krzysztof Czarnowus	zadanie NUM1	grupa 3

1. Wstęp teoretyczny

Obliczenia numeryczne często obarczone są błędem wynikającym z niedokładnej reprezentacji niektórych liczb w maszynach cyfrowych, potrafiących zapisać je jedynie ze skończoną dokładnością. W wykonanym ćwiczeniu podjęto się oszacowania błędu numerycznego liczenia pochodnej funkcji za pomocą kalkulowania jej na trzy sposoby – numerycznego według wzoru:

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

numerycznego według wzoru:

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{2}$$

oraz analitycznego, zależnego od zadanej funkcji.

Napisano w języku C++ program badający różnicę otrzymanych wartości pochodnej numerycznej oraz analitycznej w wybranym punkcie dla jednej z dwóch wybranych funkcji: $f(x) = \cos(x^2)$ lub $g(x) = \sin(x^2)$. W dyrektywach preprocesora można zdefiniować wybrany z dwóch podanych wyżej sposobów liczenia pochodnej numerycznej oraz typ zmiennych, na których program będzie operował – float lub double. Problemem takiego rozwiązania jest konieczność ponownej kompilacji programu przy zmianie badanego typu bądź rodzaju pochodnej, jednak ze względu na to, że kod jest krótki, nie jest to uciążliwe.

Program bada błąd oszacowania numerycznego E_h w zależności od wartości parametru h:

$$E_h = \left|D_h f(x) - f'(x)\right| \tag{3}$$

dla zmiennego zakresu wartości h – dla typu float jest on badany w zakresie od epsilona maszynowego do 0.1 z krokiem równym epsilonowi maszynowemu, dla typu double natomiast od epsilona maszynowego do 0.001 z krokiem równym 10^5 epsilona maszynowego – tak duży krok jest wymuszony dużą czasochłonnością obliczeń z użyciem tego typu.

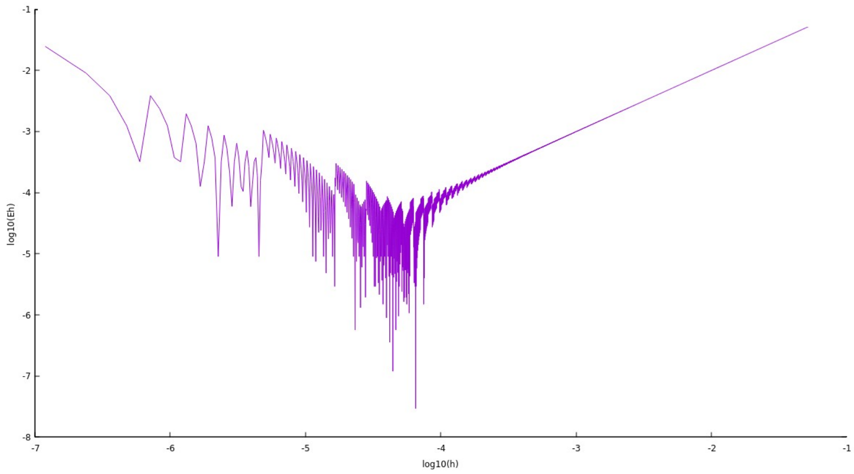
Jako optymalną wartość h przyjęto tą, dla której uzyskano najmniejszy błąd oszacowania numerycznego pochodnej. Zgodnie z analitycznie wyznaczonym na zajęciach wzorem powinien on wynosić:

$$h^* = \sqrt{\frac{4\varepsilon\left|f(x)\right|}{\left|f''(x)\right|}} \tag{4}$$

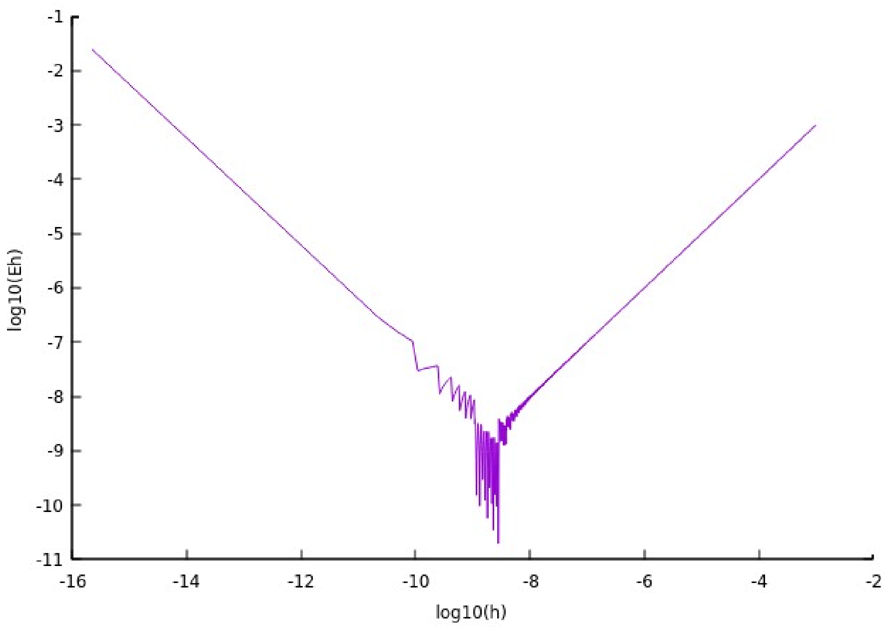
gdzie ε jest epsilonem maszynowym dla danej zmiennej, a x punktem, w którym pochodna jest badana.

2. Opracowanie wyników

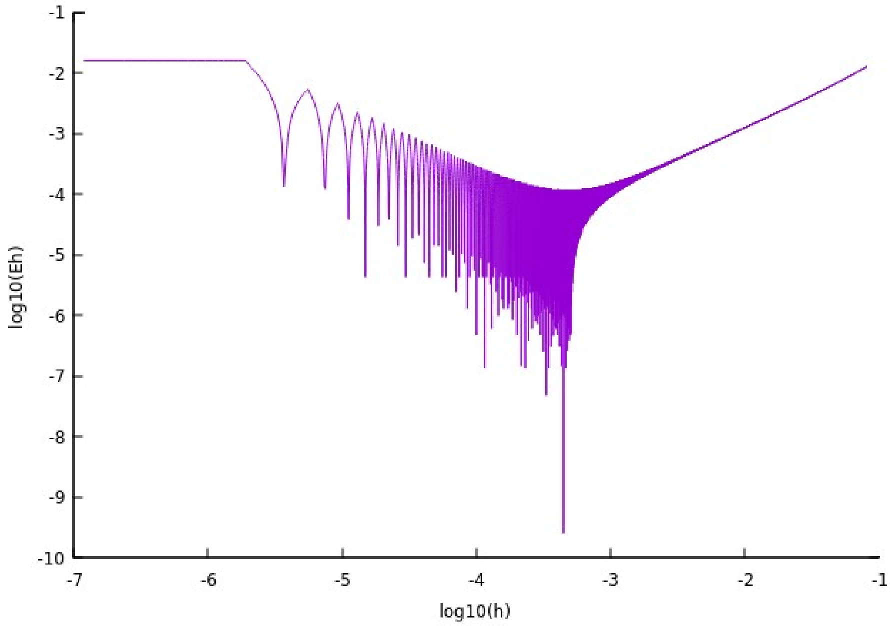
Przeprowadzono obliczenia dla kilku różnych zmiennych parametrów. Otrzymane wartości zapisano w pliku wynikowym, a następnie zwizualizowano za pomocą programu gnuplot. Podane zależności wyrażone są w skali logarytmicznej, co oznacza, że jest to zależność $\log_{10} E_h$ ($\log_{10}$ h).



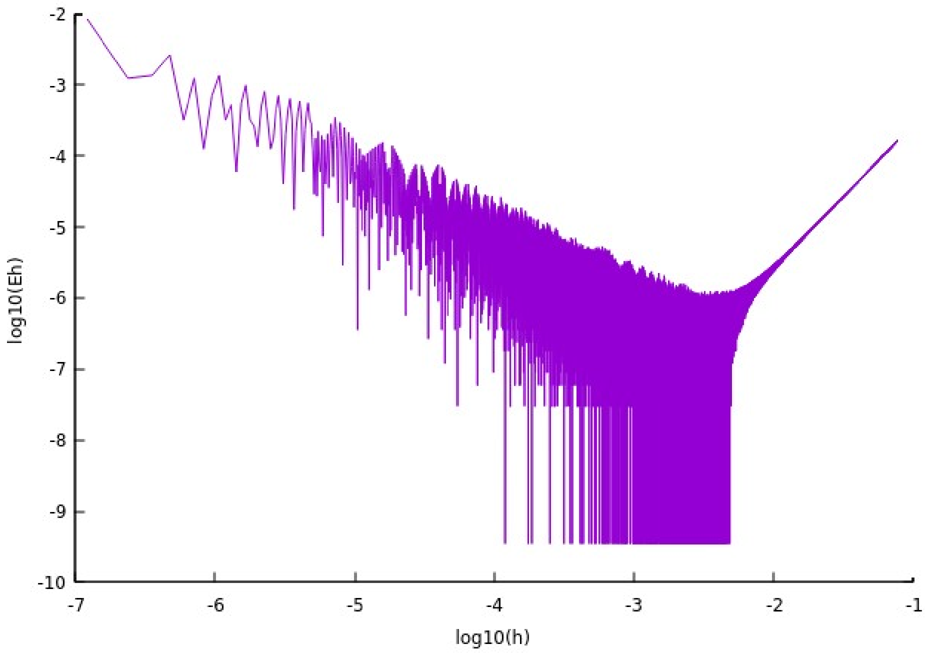
Wykres 1. Funkcja f(x) = sin(x^2) w punkcie x = 0.2; pochodną numeryczną wyznaczano za pomocą wzoru (1) używając zmiennej typu float.



Wykres 2. Funkcja f(x) = sin(x^2) w punkcie x = 0.2; pochodną numeryczną wyznaczano za pomocą wzoru (1) używając zmiennej typu double.



Wykres 3. Funkcja f(x) = cos(x^2) w punkcie x = 0.2; pochodną numeryczną wyznaczano za pomocą wzoru (1) używając zmiennej typu float.



Wykres 4. Funkcja f(x) = sin(x^2) w punkcie x = 0.2; pochodną numeryczną wyznaczano za pomocą wzoru (2) używając zmiennej typu float.

Odczytano wartości h, dla których błąd oszacowania pochodnej był minimalny, przeliczono ze skali logarytmicznej na wykładniczą i porównano z wartościami teoretycznymi uzyskanymi za pomocą wzoru (4) w tabeli 1.

Tablica 1. Zestawienie teoretycznych oraz eksperymentalnych wartości h.

funkcja	**typ zmiennej**	**wzór pochodnej**	$h_{eksperymentalne}$	$h_{teoretyczne}$
$f(x) = \sin(x^2)$	float	(1)	$6{,}54\times10^{-5}$	$1{,}29\times10^{-5}$
$f(x) = \sin(x^2)$	double	(1)	$1{,}97\times10^{-11}$	$5{,}54\times10^{-10}$
$f(x) = \cos(x^2)$	float	(1)	$4{,}49\times10^{-4}$	$2{,}97\times10^{-6}$
$f(x) = \sin(x^2)$	float	(2)	$4{,}88\times10^{-3}$	$1{,}29\times10^{-5}$

3. Dyskusja

Na podstawie otrzymanych wartości można stwierdzić, że zgodnie z oczekiwaniami najlepsze oszacowanie numeryczne pochodnej otrzymuje się dla zastosowania typu double – jego zastosowanie pozwala na użycie parametru h (a więc minimalnego kroku przy numerycznym liczeniu pochodnej) rzędu 10^{-11}, co zmniejsza obserwowany błąd oszacowania do rzędu 10^{-10}.

Ponadto z dwóch zastosowanych wzorów na numeryczne liczenie pochodnej znacznie lepsze wyniki uzyskuje się przy zastosowaniu wzoru (2) – dla nich błąd jest mniejszy o dwa rzędy wielkości. Widać również, że błąd zależy w sporym stopniu od zastosowanej funkcji i najprawdopodobniej punktu, w którym pochodna jest liczona – w punkcie 0.2 dla cosinusa jest on dużo mniejszy niż dla sinusa.