

Krzysztof Czarnowus	zadanie NUM5	grupa 3
---------------------	--------------	---------

1. Wstęp

Wśród wielu znanych sposobów rozwiązywania układów równań oprócz metod dokładnych wyszczególnia się również kategorię metod iteracyjnych, których założeniem jest przyjmowanie pewnego przybliżenia rozwiązania oraz stopniowe poprawianie go za pomocą odpowiednich zabiegów.

Jedną z nich jest metoda Jacobiego, opierająca się na rozkładzie wyjściowej macierzy współczynników na sumę macierzy diagonalnej D, trójkątnej górnej U oraz trójkątnej dolnej L; po odpowiednim przekształceniu powstaje równanie:

$$D x^{(k+1)} = b - (L + U) x^k \quad (1)$$

gdzie x jest wektorem rozwiązań, k numerem iteracji, a b wektorem wyrazów wolnych. W tej metodzie wzór na otrzymanie kolejnych współczynników ma postać:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad (2)$$

gdzie a_{ij} to odpowiednie współczynniki wyjściowej macierzy.

Metoda Gaussa-Seidela opiera się natomiast na innym przekształceniu, w wyniku którego otrzymuje się równanie:

$$(D + L) x^{(k+1)} = b - U x^k \quad (3)$$

po przekształceniu którego otrzymuje się wyrażenie:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)}}{a_{ii}} \quad (4)$$

w wyniku którego można otrzymać kolejne współczynniki wektora rozwiązań pod warunkiem liczenia ich od pierwszego indeksu, ponieważ liczenie każdego kolejnego wymaga znajomości poprzednich.

Układ równań z zadania numerycznego NUM5:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.15 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & 0.15 & & & \\ 0.15 & 1 & 3 & 1 & 0.15 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0.15 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 0.15 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

rozwiązano za pomocą zarówno metody Gaussa, jak i Jacobiego. Jako kryterium zbieżności przyjęto normę z różnicy wektorów w kolejnych iteracjach mniejszą od wartości 10^{-12} :

$$\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \| < 10^{-12}$$

Poprawiany w kolejnych iteracjach początkowy wektor rozwiązań jest generowany losowo przy każdym wywołaniu programu, przy czym do każdego współczynnika przypisywane są wartości z przedziału $[0, 10]$ jako najbardziej prawdopodobnej okolicy właściwego rozwiązania.

2. Opracowanie wyników

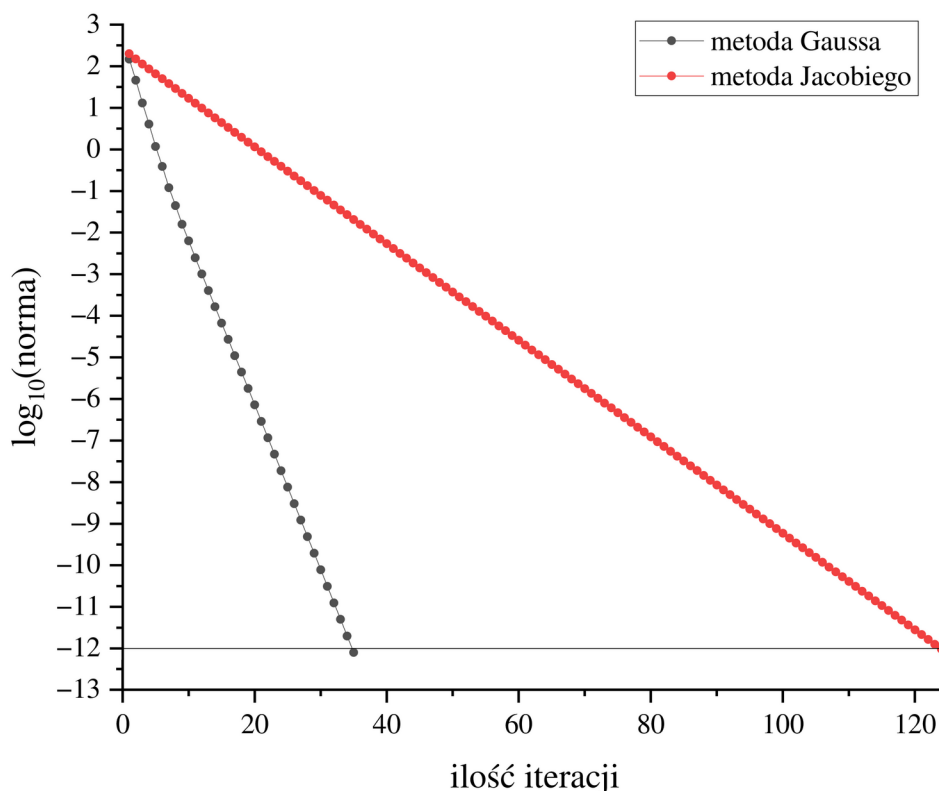
Napisano trzy programy: dwa w języku C++ do przeprowadzania obliczeń iteracyjnych z wykorzystaniem metod Gaussa i Jacobiego, a także jeden w języku Python, wykorzystujący bibliotekę NumPy, aby uzyskać rozwiązanie możliwie dokładne i porównać z nim uzyskane wyniki.

Dla $N = 124$ wszystkie programy zwracają taki sam wektor rozwiązań:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.17801523406350 \\ 0.38116168368748 \\ 0.56528409414693 \\ \vdots \\ 21.061564102655 \\ 33.151168704843 \end{bmatrix}$$

Świadczy to o poprawności wartości otrzymanych z wykorzystaniem metod iteracyjnych.

Zaobserwowano, że dla losowo generowanych wektorów z zadanego przedziału $[0, 10]$ kolejne uruchomienia programu prowadzą do otrzymania wyników po takiej samej ilości iteracji; bardzo rzadko zdarza się, że program potrzebuje wykonać jedną iterację więcej. Notowano kolejne wartości przyjętego kryterium zbieżności dla wszystkich iteracji w obu metodach oraz przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1. Zależność wartości logarytmu dziesiętnego normy z różnicy wektorów w kolejnych iteracjach wraz z zaznaczonym przyjętym kryterium zbieżności, wynoszącym wartość 10^{-12} .

3. Dyskusja

Można zaobserwować, że metoda Gaussa-Seidela skutkuje szybszym osiągnięciem zbieżności dla badanej macierzy, jest więc przydatniejsza w tym szczególnym przypadku. Należy jednak pamiętać, że omawiane metody iteracyjne nie zawsze będą zdolne do osiągnięcia kryterium zbieżności, w szczególności dla macierzy niesymetrycznych oraz niebędących macierzami silnie diagonalnie dominującymi. Do każdego układu równań, który zamierza się rozwiązać za pomocą jednej z metod iteracyjnych, trzeba specyficznie dobrać procedurę, która daje największą szansę na osiągnięcie zadanego kryterium zbieżności. Trzeba również wziąć pod uwagę, że chociaż stosowanie metod iteracyjnych jest znacznie szybsze od wykonywania faktoryzacji, rozwiązania

uzyskane z ich zastosowaniem z reguły będą mniej dokładne; nadają się więc one do sytuacji, kiedy niski koszt obliczeń ważniejszy jest od precyzji wyników.