Krzysztof Czarnowus	zadanie NUM7	grupa 3

1. Wstęp

Interpolacja wielomianowa jest zagadnieniem dopasowania zależności wielomianowej n-tego stopnia do istniejących n + 1 punktów. Istniejące węzły interpolacji można wpisać do macierzy A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

oraz wektora $y = [y_0, y_1, \ldots, y_n]^T$, aby potem rozwiązać równanie:

$$A\vec{a}=\vec{y} \tag{1}$$

w którym a jest wektorem współczynników przy kolejnych parametrach wielomianu n-tego stopnia, będącego dopasowaną do punktów funkcją.

2. Opracowanie wyników

Napisano program, który dla zadanej funkcji:

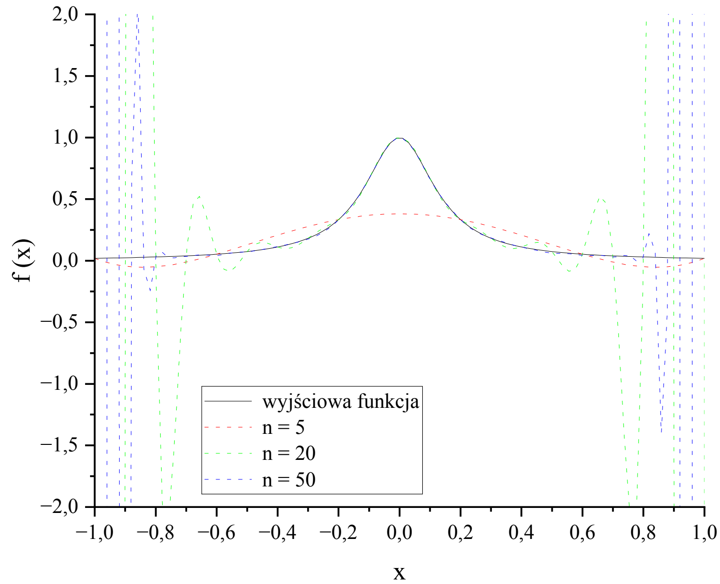
$$f(x)=\frac{1}{1+50x^2} \tag{2}$$

tworzy macierz o zadanym w parametrach wejściowych programu wymiarze n według jednego z dwóch podejść:

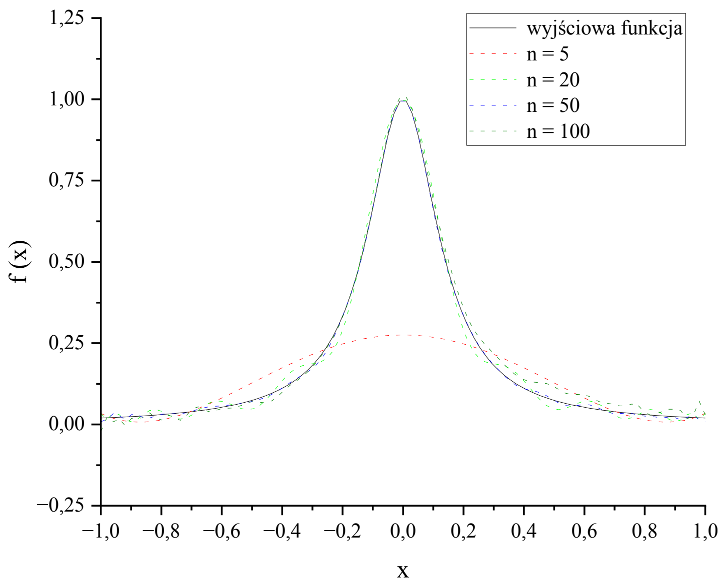
- jednorodnych węzłów interpolacji, gdzie $x_i=2\frac{i}{n}-1$ dla i $\in$ [0, 1, …, n]

- wielomianu Chebysheva, gdzie $x_i=\cos(\frac{(2i+1)\pi}{2n})$ dla i $\in$ [0, 1, …, n]

Wygenerowano wielomiany stopni 5, 20, 50 oraz 100 dla obu podejść do definiowania węzłów interpolacji. Otrzymane funkcje wraz z funkcją wyjściową przedstawiono na rysunkach 1. oraz 2.



Rysunek 1. Wygenerowane dla jednorodnych węzłów interpolacji wielomiany stopni 5, 20 oraz 50 wraz z wyjściową funkcją ze wzoru 2, na podstawie której tworzono węzły.



Rysunek 2. Wygenerowane dla węzłów interpolacji obliczonych za pomocą wielomianu Chebysheva wielomiany stopni 5, 20, 50 oraz 100 wraz z wyjściową funkcją ze wzoru 2, na podstawie której tworzono węzły.

Dla jednorodnych węzłów interpolacji nie udało się otrzymać dobrego oszacowania wyjściowej funkcji za pomocą wielomianu; sześć punktów ($n = 5$) okazało się ilością zbyt małą, aby odpowiednio odwzorować przebieg zmienności funkcji 2, podczas gdy dwadzieścia jeden ($n = 20$) jest ilością zbyt dużą, prowadzącą do pojawienia się efektu Rungego, a więc wystąpienia znacznych oscylacji na krańcach przedziału.

Efekt ten zwiększa się ze zwiększeniem ilości węzłów, w efekcie czego poprawnie odwzorowany zostaje jedynie środek badanego zakresu zmiennej. Najlepsze oszacowanie wyjściowej funkcji występowałoby prawdopodobnie dla wartości z zakresu [5, 20], wystarczająco małej, aby nie wystąpił efekt Rungego, ale jednocześnie takiej, aby udało się odpowiednio odwzorować środek przedziału. Prawdopodobnie powinna być to wartość parzysta, ponieważ przy jednorodnym rozkładzie węzłów oznaczałaby ona, że jednym z węzłów stałoby się maksimum.

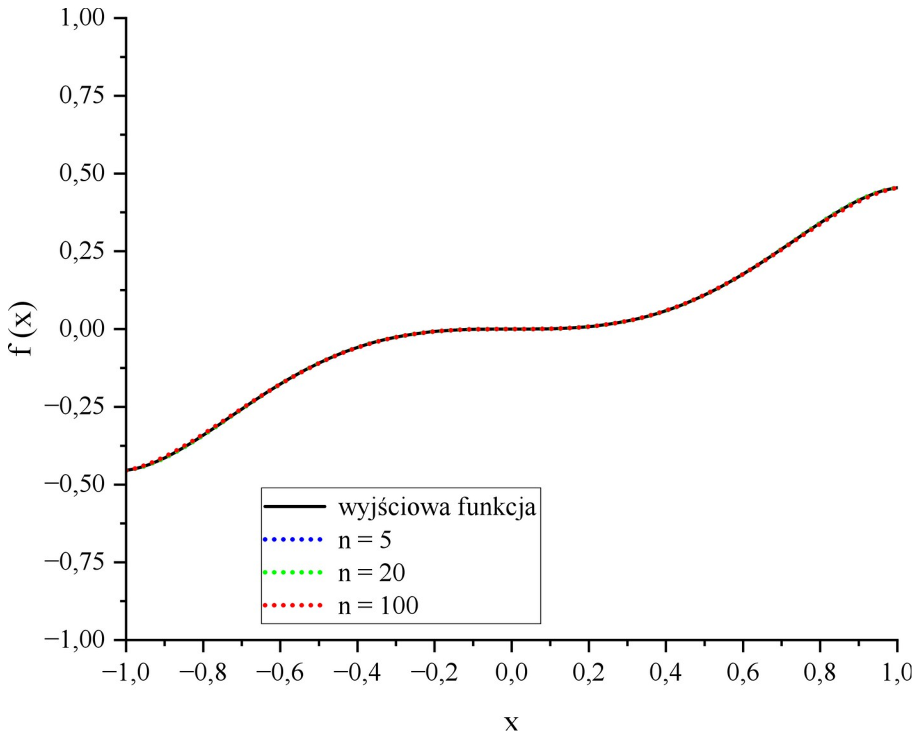
Oscylacje na krańcach przedziału udaje się znacząco zmniejszyć przez dobór węzłów tak, aby zagęszczały się one na krańcach przedziału, zwiększając tam dokładność dopasowania. Na rysunku 2. można zaobserwować, że dla wartości $n = 20$ interpolacja wielomianowa zaczyna odwzorowywać wyjściową funkcję w stopniu zadowalającym, a dalsze zwiększanie ilości węzłów nie wpływa ani na jej poprawienie, ani pogorszenie; obserwowane oscylacje są na podobnym poziomie.

Identyczne operacje wykonano dla wybranej funkcji:

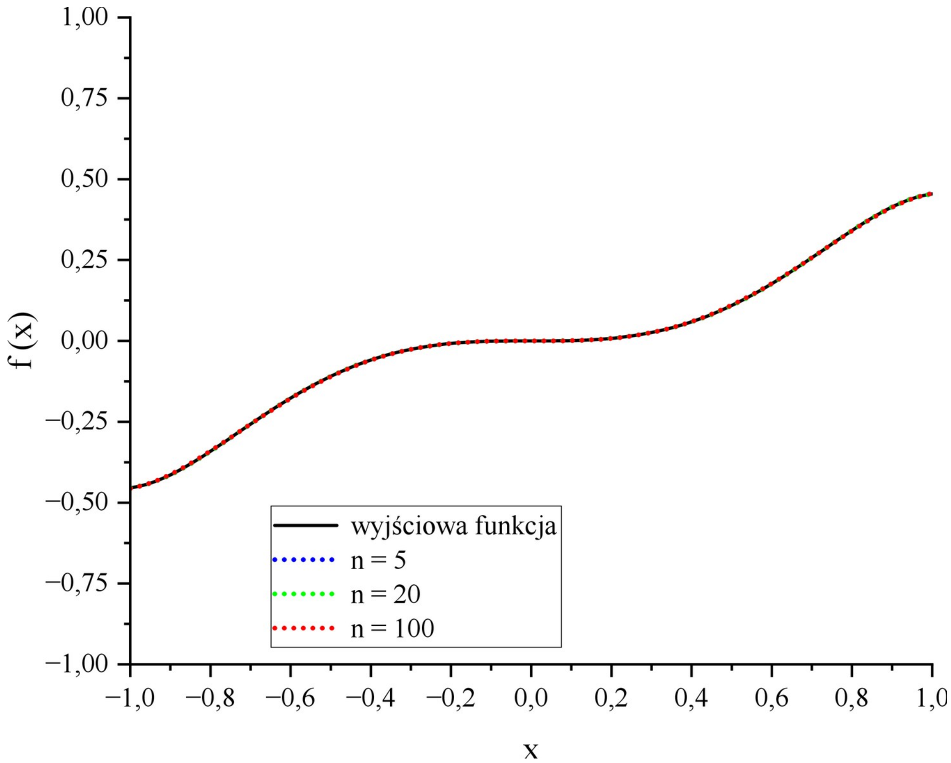
$$g(x) = \sin(x^3)\cos(x) \qquad (3)$$

otrzymane w ten sposób wielomiany przedstawiono na rysunkach 3. oraz 4.

Można zaobserwować, że dla iloczynu funkcji okresowych, jakimi są sinus oraz cosinus, interpolacja pozwala bardzo dokładnie odwzorować przebieg funkcji wyjściowej nawet dla bardzo małych ilości węzłów, a przy ich dużych wartościach nie obserwuje się efektu Rungego. Bierze się to prawdopodobnie ze specyfiki badanej zależności. W tym przypadku ani ilość węzłów, ani wybrany sposób ich doboru nie ma większego znaczenia dla odpowiedniej interpolacji.



Rysunek 3. Wygenerowane dla jednorodnych węzłów interpolacji wielomiany stopni 5, 20 oraz 100 wraz z wyjściową funkcją ze wzoru 3, na podstawie której tworzono węzły.



Rysunek 4. Wygenerowane dla węzłów interpolacji obliczonych za pomocą wielomianu Chebysheva wielomiany stopni 5, 20 oraz 100 wraz z wyjściową funkcją ze wzoru 3, na podstawie której tworzono węzły.

3. Wnioski

Odpowiednie przeprowadzenie interpolacji wielomianowej wymaga indywidualnego podejścia do badanych funkcji. Jak zaobserwowano dla funkcji ze wzoru 2, otrzymany wielomian potrafi być bardzo czuły na zarówno ilość węzłów interpolacji, jak i sposób ich doboru; w takich przypadkach dobrze jest rozważyć wybór inny niż ich jednorodny rozkład na zadanym przedziale, np. zastosowanie wielomianu Chebysheva, aby więcej węzłów znajdowało się na krańcach przedziału. Sprawi to również, że większa ilość węzłów nie będzie pogarszała otrzymanej zależności.

Zauważono jednak również, że odpowiednia interpolacja funkcji ze wzoru 3 nie zależy w badanych granicach ani od liczby węzłów, ani od ich doboru. Może być to związane z okresowością funkcji, których iloczyn jest badany. Pokazuje to, że dobór odpowiedniej procedury jest bardzo specyficzny dla badanych zależności i za każdym razem przeprowadzając interpolację trzeba brać pod uwagę charakter konkretnej zależności.