

Krzysztof Czarnowus	zadanie NUM8	grupa 3
---------------------	--------------	---------

## 1. Wstęp

Aproksymacja liniowa jest zagadnieniem, które pozwala znaleźć współczynniki w zadanym funkcyjale na podstawie punktów doświadczalnych w ten sposób, aby kwadraty odchyleń miały najmniejszą możliwą wartość, a więc aby funkcja została jak najlepiej dopasowana.

Znając kształt dopasowywanej funkcji:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x) \quad (1)$$

możliwe jest odpowiednie skonstruowanie macierzy  $n \times m$ , gdzie  $n$  jest liczbą punktów doświadczalnych, a  $m$  ilością funkcji  $\varphi_i$  w analizowanym funkcyjale. Każdy wiersz odpowiada jednemu punktowi doświadczalnemu i w kolejnych kolumnach zawiera wynik działania kolejnych funkcji  $\varphi$  na argument danego punktu. Po takim zdefiniowaniu macierzy  $A$  można otrzymać układ równań liniowych:

$$A^T A \vec{a} = A^T \vec{y} \quad (2)$$

gdzie  $\vec{a}$  jest wektorem współczynników, a  $\vec{y}$  wektorem wartości punktów doświadczalnych.

Aby uprościć rachunki, w następnym kroku należy zastosować metodę rozkładu SVD na macierzy  $A$ , w wyniku której otrzyma się iloczyn trzech macierzy: ortogonalnej  $U$  (o wymiarach  $n \times n$ ), diagonalnej  $\Sigma$  (o wymiarach  $n \times m$ ) oraz ortogonalnej  $V^T$  (o wymiarach  $m \times m$ ). Po zastosowaniu odpowiednich przekształceń można otrzymać wyrażenie na wektor współczynników rozwinięcia liniowego:

$$\vec{a} = V(\Sigma^T \Sigma)^{-1} \Sigma^T U^T \vec{y} \quad (3)$$

Napisano w języku Python program, który dokonuje rozkładu SVD macierzy otrzymanej dla stu podanych punktów oraz dopasowuje je do zależności:

$$F(x) = a x^2 + b \sin(x) + c \cos(5x) + d \exp(-x) \quad (4)$$

Stworzono również program, który wykonuje analogiczne obliczenia dla zadanej przy wywołaniu ilości punktów wygenerowanych za pomocą funkcji:

$$G(x) = 2 \cos(x^3) + 0.1 x^2 - 2.3 \quad (5)$$

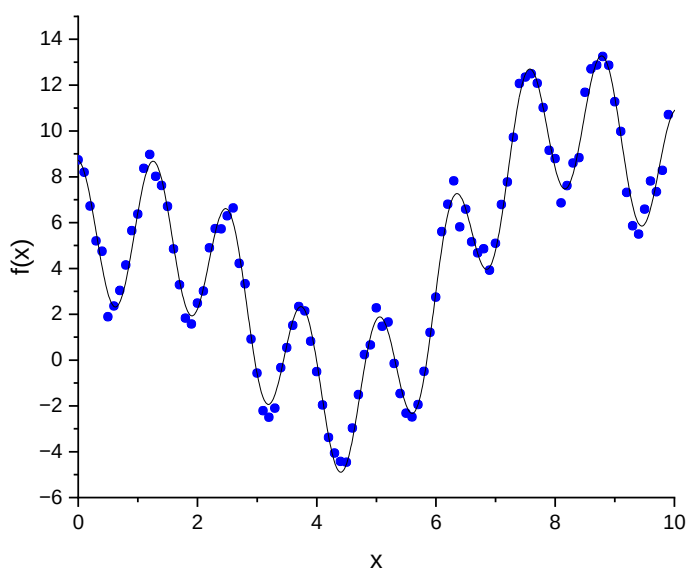
oraz wprowadzeniu do wartości punktów doświadczalnych niewielkich losowych zaburzeń o rozmiarach podanych programowi, po czym obliczający na ich podstawie współczynniki wyjściowej funkcji  $G(x)$ .

## 2. Opracowanie wyników

W wyniku ręcznego wykonania aproksymacji dla funkcji ze wzoru 4 otrzymano wartości współczynników przedstawione w tabeli 1. Porównano je z wynikami uzyskanymi za pomocą zastosowania procedur z biblioteki SciPy, uzyskując zgodność wartości. Otrzymane punkty doświadczalne wraz z dopasowaną do nich funkcją zilustrowano na rysunku 1.

**Tabela 1.** Wartości współczynników otrzymane dla funkcji 4. w wyniku przeprowadzonej aproksymacji.

metoda	współczynnik a	współczynnik b	współczynnik c	współczynnik d
ręczna aproksymacja	0.10093369	4.02305946	3.08874327	5.63283974
biblioteka SciPy	0.10093369	4.02305945	3.08874327	5.63283974



**Rysunek 1.** Otrzymane punkty doświadczalne wraz z dopasowaną do nich funkcją  $F(x)$  ze wzoru 4 o parametrach przedstawionych w tabeli 1.

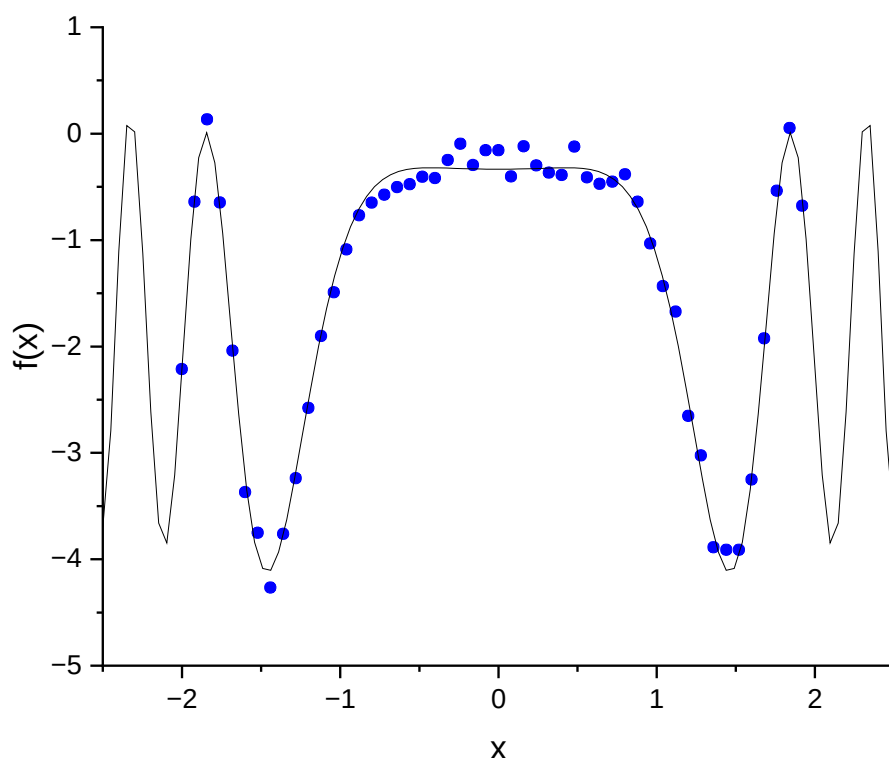
Dla funkcji  $G(x)$  ze wzoru 5 wykonano aproksymacje dla różnych wartości parametrów startowych:

- (a) dla wygenerowania 50 punktów posiadających losowe zaburzenia z przedziału  $\pm 0.2$
- (b) dla wygenerowania 50 punktów posiadających losowe zaburzenia z przedziału  $\pm 3$
- (c) dla wygenerowania 500 punktów posiadających losowe zaburzenia z przedziału  $\pm 3$

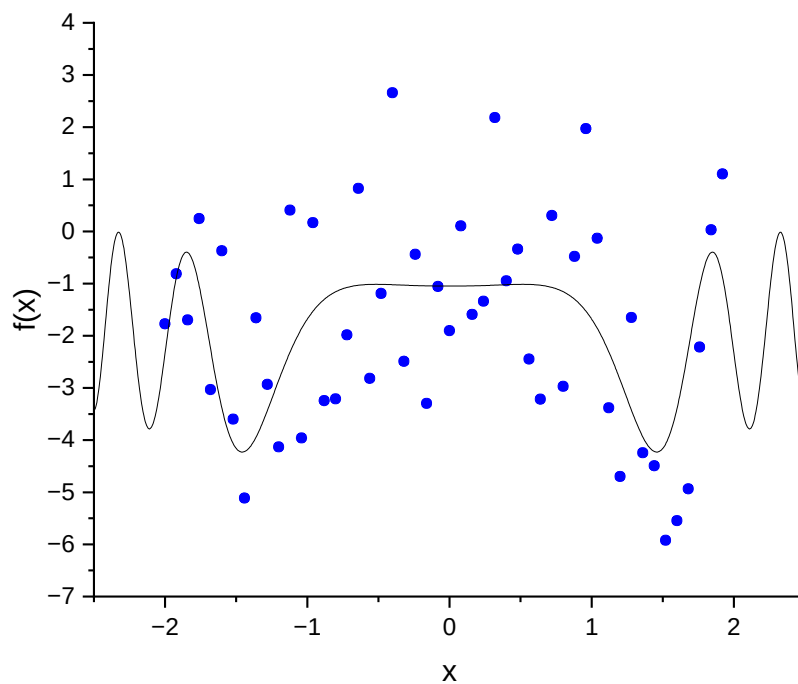
Wszystkie punkty wygenerowane zostały na przedziale  $[-2, 2]$ . Otrzymane wartości współczynników  $a$  (przy funkcji cosinus),  $b$  (przy funkcji kwadratowej) oraz  $c$  (wyrazu wolnego) przedstawiono w tabeli 2, wygenerowane w wyniku pojedynczego wywołania funkcji punkty oraz dopasowane do nich krzywe przedstawiono natomiast na rysunkach 2, 3 oraz 4.

**Tabela 2.** Wartości współczynników otrzymane dla zaburzonych punktów wygenerowanych dla funkcji 5.

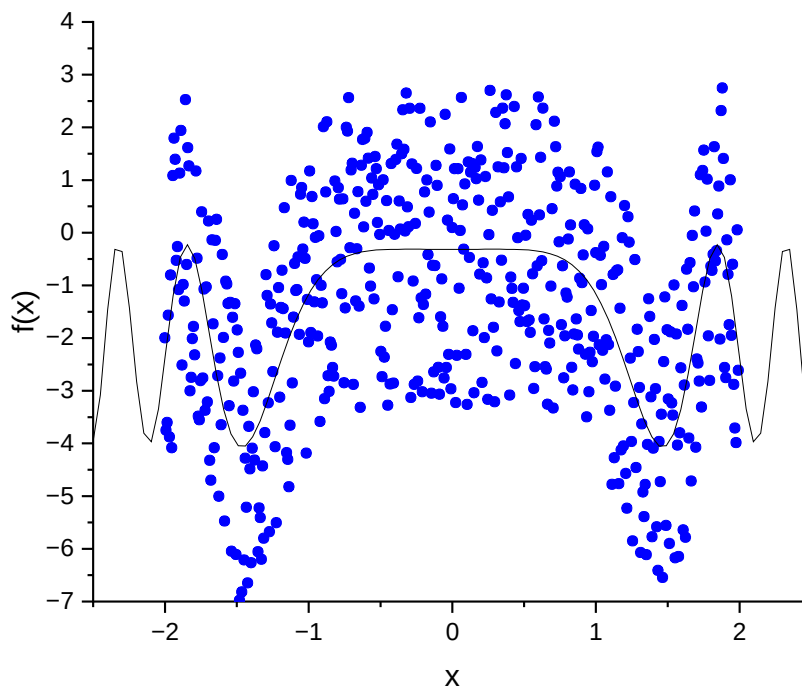
ilość punktów	maksymalny rozmiar zaburzenia	współczynnik a	współczynnik b	współczynnik c
wyjściowa funkcja		2.0	0.1	-2.3
50	0.2	2.00211879	0.10087197	-2.33503409
50	3	1.79456480	0.19115910	-2.84275320
500	3	1.90418753	0.02514426	-2.21892794



**Rysunek 2.** Otrzymane punkty doświadczalne wraz z dopasowaną do nich funkcją  $G(x)$  ze wzoru 5 dla wygenerowania 50 punktów o maksymalnym zaburzeniu równym 0.2.



**Rysunek 3.** Otrzymane punkty doświadczalne wraz z dopasowaną do nich funkcją  $G(x)$  ze wzoru 5 dla wygenerowania 50 punktów o maksymalnym zaburzeniu równym 3.



**Rysunek 4.** Otrzymane punkty doświadczalne wraz z dopasowaną do nich funkcją  $G(x)$  ze wzoru 5 dla wygenerowania 500 punktów o maksymalnym zaburzeniu równym 3.

### 3. Wnioski

Można zaobserwować, że dla niewielkich zaburzeń, jak te przedstawione na rysunkach 1 oraz 2, przeprowadzona aproksymacja skutkowała otrzymaniem krzywej dość dobrze dopasowanej do punktów pomiarowych. W przypadku funkcji  $G(x)$  udało się odtworzyć wyjściowe współczynniki z dokładnością do dwóch cyfr znaczących nawet dla względnie niewielkiej liczby punktów – dopasowanie było dobre nawet dla wygenerowania jedynie 10 punktów.

Zwiększenie rozmiaru zaburzeń wprowadzonych do punktów pomiarowych skutkuje jednak wyraźnie pogorszeniem wyników. Na rysunku 3 można zaobserwować, że prawie żadna z wygenerowanych wartości nie pokrywa się z dopasowaną zależnością. Pokazuje to, że aproksymacja liniowa bardzo zależy od przyjętych składowych; nie znając kształtu wyjściowej funkcji niemożliwe byłoby domyślenie się jej formy na podstawie samych punktów.

Poprawność dopasowania dla dużych zaburzeń nie poprawia się również przy dziesięciokrotnym zwiększeniu ilości punktów pomiarowych, jeśli wszystkie z nich posiadają tak samo wysokie odchylenia, jak wcześniej, co przedstawiono na rysunku 4.

Zwrócono również uwagę na to, że przy dopuszczeniu wysokich losowych zaburzeń (na poziomie  $\pm 3$ ) kolejne wywołania programu prowadzą do uzyskiwania bardzo różnych wartości współczynników. Przedstawione w sprawozdaniu wywołanie programu dla przypadku (c) skutkuje błędem względnym współczynnika  $b$  wynoszącym ok. 75%, podczas gdy kolejne jego uruchomienie i wygenerowanie innych losowych zaburzeń takiego samego rozmiaru prowadzi do otrzymania wartości praktycznie zgodnej z wyjściową.

Dla poprawnego dopasowania krzywej do punktów pomiarowych za pomocą metody aproksymacji niezbędna jest znajomość kształtu zależności, aby optymalizowane były jedynie współczynniki ich kombinacji liniowej. Wykonane zadanie pokazało jednak, że równie ważne jest, aby punkty doświadczalne obarczone były względnie niewielkimi błędami – ponieważ dla dużego rozrzutu wartości nawet stworzenie dużej ilości punktów nie skutkuje otrzymaniem zauważalnie lepszych wyników.