Krzysztof Czarnowus	zadanie NUM9	grupa 3

1. Wstęp

Istnieje wiele metod znajdowania miejsca zerowego funkcji jednej zmiennej, a dobór odpowiedniej zależy od kształtu konkretnej zależności oraz krotności szukanego miejsca zerowego.

Metoda bisekcji opiera się na wyborze dwóch punktów a i b po różnych stronach szukanego pierwiastka w taki sposób, aby wartość funkcji dla jednego z nich była dodatnia, a dla drugiego ujemna, zatem aby spełniony został warunek:

$$f(a) \times f(b) < 0 \tag{1}$$

Następnie w każdej iteracji tworzy się punkt c taki, że:

$$c=\frac{a+b}{2} \tag{2}$$

po czym liczy dla niego wartość funkcji. Jeśli jest dodatnia, do kolejnej iteracji bierze się punkt c oraz ten z punktów a i b, dla którego funkcja przyjmowała wartość ujemną; jeśli ujemna, przeciwnie.

Na tej samej zasadzie opiera się metoda falsi, różniąca się jedynie sposobem doboru punktu c. Wyznacza się go z równania:

$$c=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \tag{3}$$

Istnieją również metody, w których funkcja nie musi zmieniać znaku dla wybranych punktów początkowych. Jedną z nich jest metoda siecznych, w której wybiera się dwa dowolne punkty x_0 oraz x_1. Przeprowadza się między nimi prostą i przyrównuje ją do zera, otrzymując nowy argument x_{i+1}. W kolejnych iteracjach bierze się pod uwagę dwa ostatnie wygenerowane punkty, obliczając nowy za pomocą wzoru:

$$x_{i+1}=\frac{x_i f(x_{i-1})-x_{i-1}f(x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)} \tag{4}$$

Metoda Newtona polega natomiast na skonstruowaniu tylko jednego punktu x_i, stworzeniu stycznej do funkcji w wybranym punkcie oraz przyrównaniu jej do zera; otrzymany wynik przyjęty zostanie jako x_{i+1} do kolejnej iteracji. Można wyrazić go przez równanie:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{5}$$

Nie wszystkie z wymienionych metod gwarantują uzyskanie zbieżności do poszukiwanego miejsca zerowego; powodzenie algorytmu silnie zależy od poprawnego doboru punktów początkowych.

W zadaniu zaimplementowano wymienione metody do znalezienia miejsc zerowych funkcji:

$$f(x) = \sin(x) - 0.4 \tag{6}$$

$$g(x) = (\sin(x) - 0.4)^2 \tag{7}$$

na przedziale $x \in [0, 2\pi]$. Ponieważ druga z nich, g(x), przyjmuje jedynie nieujemne wartości, bezpośrednie zastosowanie wobec niej metod bisekcji oraz falsi nie jest możliwe; jej pierwiastek jest wielokrotny, spodziewana jest więc również obserwacja pogorszenia szybkości działania metody Newtona. Aby tego uniknąć, możliwe jest zdefiniowanie funkcji h(x), która będzie miała takie same pierwiastki jak wyjściowa funkcja:

$$h(x) = \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\sin(x) - 0.4}{2\cos(x)} \tag{8}$$

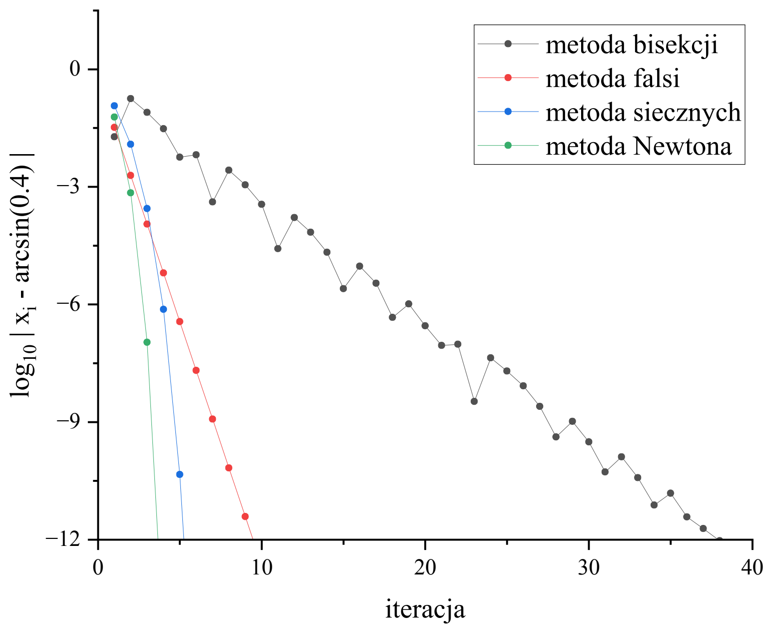
Ich krotność będzie jednak równa jedności, ponadto przyjmie ona wartości ujemne, umożliwiając stosowanie metod falsi oraz bisekcji.

2. Opracowanie wyników

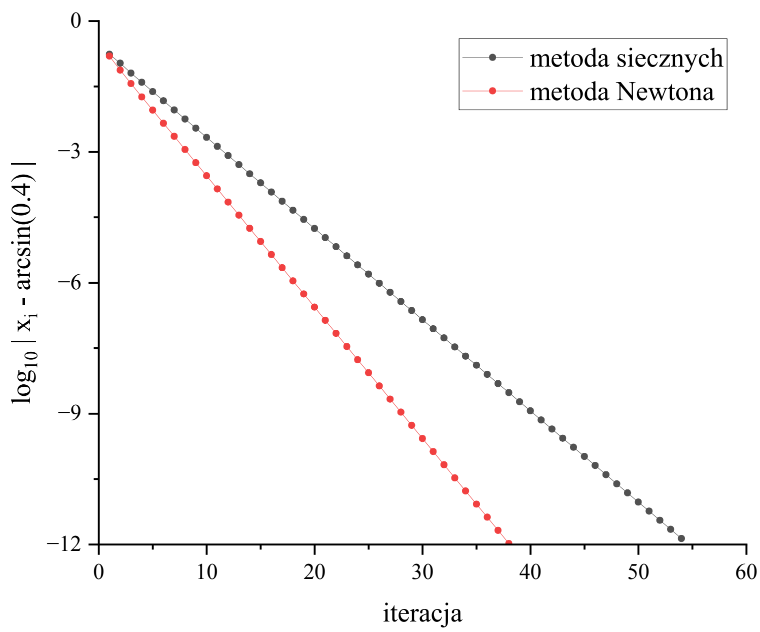
Jako kryterium zbieżności ε dla badanych metod przyjęto różnice między kolejnymi obliczanymi punktami mniejszą od 10^{-12}:

$$\varepsilon = | x_i - x_{i-1} | < 10^{-12} \tag{9}$$

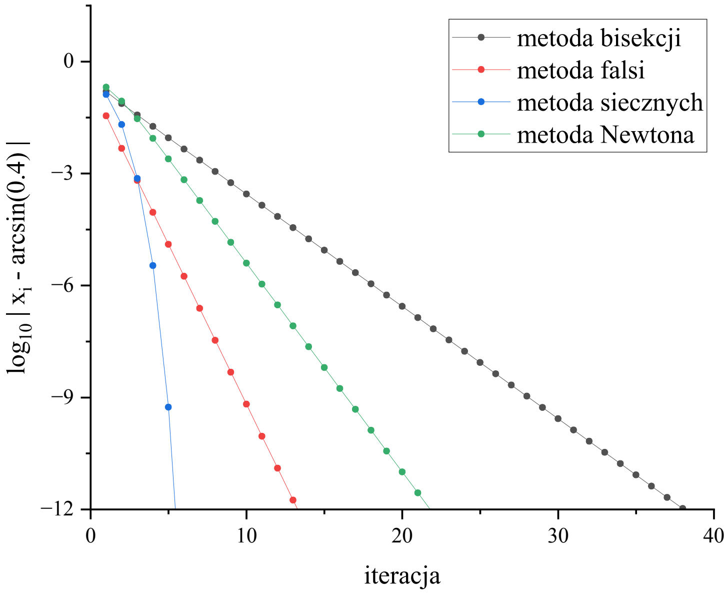
Dla metod bisekcji oraz falsi przyjęto punkty początkowe a = 0 i b = π/4, dla metody siecznych $x_0 = 1$ i $x_1 = \pi/4$, natomiast metodę Newtona inicjowano punktem x = π/4; takie wartości gwarantowały osiągnięcie zbieżności w satysfakcjonującym czasie.



Rysunek 1. Zależność logarytmu dziesiętnego z różnicy między otrzymanym punktem a wartością dokładną od numeru iteracji dla czterech metod stosowanych wobec funkcji f(x) = sin(x) – 0.4.



Rysunek 2. Zależność logarytmu dziesiętnego z różnicy między otrzymanym punktem a wartością dokładną od numeru iteracji dla dwóch metod zastosowanych wobec funkcji $g(x) = (\sin(x) - 0.4)^2$.



Rysunek 3. Zależność logarytmu dziesiętnego z różnicy między otrzymanym punktem a wartością dokładną od numeru iteracji dla czterech metod zastosowanych wobec funkcji h(x) = (sin(x) – 0.4) / 2cos(x).

Dla wszystkich metod i wszystkich badanych funkcji uzyskano spodziewaną wartość miejsca zerowego wynoszącą arcsin(0.4) = 0.4115168. Zbieżność metod dla funkcji f(x) z równania (6) przedstawiono na rysunku 1, dla funkcji g(x) z równania (7) na rysunku 2, natomiast funkcji h(x) z równania (8) na rysunku 3.

3. Dyskusja

Można zaobserwować, że zgodnie z oczekiwaniami metoda Newtona prowadziła do najszybszego otrzymania wyników dla funkcji ze wzoru 6. Jej efektywność była wyraźnie gorsza dla funkcji ze wzoru 7, posiadającej pierwiastek o krotności równej dwa, co wynika z tego, że w takich przypadkach zbieżność metody Newtona jest liniowa, a nie kwadratowa, jak dla pojedynczych pierwiastków. Dla funkcji ze wzoru 8, posiadającej pierwiastek pojedynczy, jej zbieżność jednak staje się gorsza od metody siecznych oraz falsi; możliwe, że wynika to ze specyfiki badanej funkcji bądź też z doboru punktu początkowego.

Wyraźnie widać również, że metoda falsi prowadzi do szybszego osiągnięcia zbieżności niż metoda bisekcji, co dla badanych funkcji zgadza się z oczekiwaniami. Ostatecznie druga z nich okazuje się najwolniejszym ze stosowanych algorytmów, podczas gdy metody Newtona i siecznych raczej prowadzą do szybszego znalezienia miejsca zerowego. Biorąc pod uwagę koszt wykonania jednej iteracji, należy spodziewać się, że gdyby mierzyć czas działania każdej z napisanych funkcji, prawdopodobnie najefektywniejsza okaże się metoda siecznych, jako że metoda Newtona jest bardziej złożona obliczeniowo.

Zauważono również zwiększenie zbieżności dla szukania miejsc zerowych funkcji g(x) o dwukrotnym pierwiastku podczas definiowania nowej funkcji h(x) będącej ilorazem wyjściowej zależności i jej pochodnej; otrzymane pierwiastki mają taką samą wartość, ale dużo szybciej można je znaleźć.