| | | |
|---|---|---|
| Krzysztof Czarnowus | komputerowe zadanie 6. z zestawu 5. ćwiczeń z Rachunku Prawdopodobieństwa | 1.12.2023 r. |

# 1. Wstęp

Zagadnienie podnoszenia zmiennej losowej o rozkładzie jednorodnym do kolejnych potęg można w prosty sposób rozwiązać analitycznie. Dla zdefiniowania nowej zmiennej $z = x^n$ możliwe jest wyprowadzenie wzoru na gęstość prawdopodobieństwa zmiennej z:

$$g(z)\,dz = f(x)\,dx \tag{1}$$

$$g(z) = f(x)\left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{1}{z} \times \frac{1}{n} \times z^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{2n} z^{\frac{1}{n}-1} \tag{2}$$

Ponieważ zmienna losowa x była zdefiniowana na przedziale otwartym (0, 2), funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej z będzie zdefiniowana na przedziale $(0, 2^n)$. Można pokazać, że funkcja g(z) jest unormowana:

$$\int_0^{2^n} \frac{1}{2n} z^{\frac{1}{n}-1}\,dz = \frac{1}{2n}\int_0^{2^n} z^{\frac{1}{n}-1}\,dz = \frac{1}{2}\left|z^{\frac{1}{n}}\right|_0^{2^n} = 1 \tag{3}$$

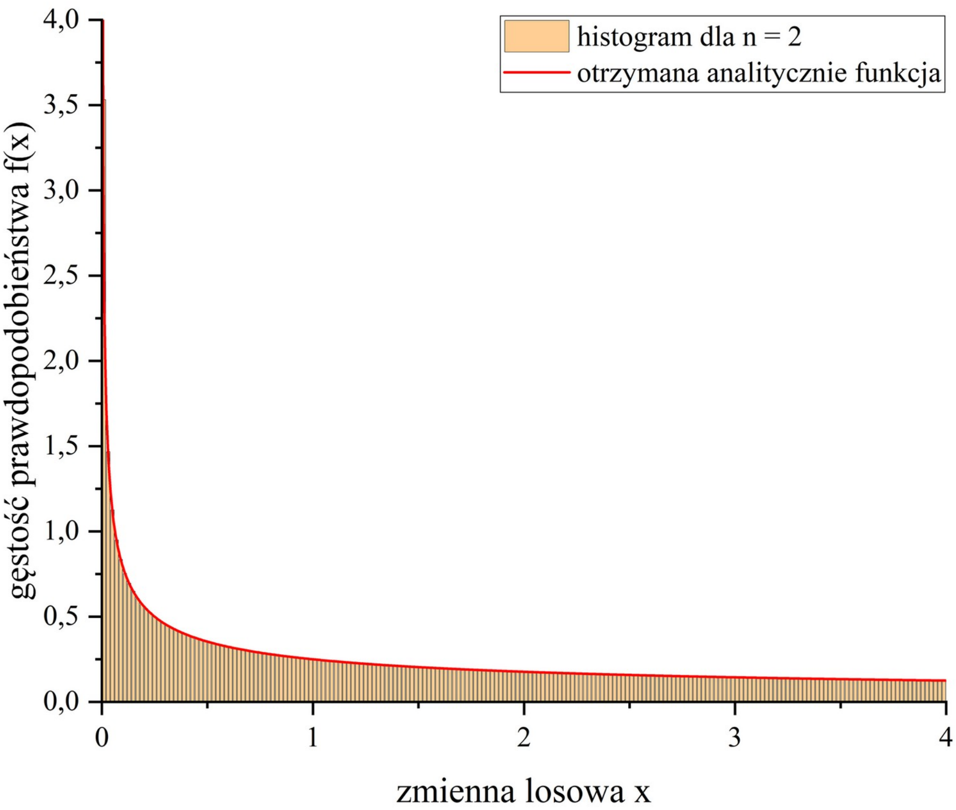
oraz że jej wartość oczekiwana wynosi:

$$E(Z) = \int_0^{2^n} g(z)\,z\,dz = \frac{1}{2n}\int_0^{2^n} z^{\frac{1}{n}}\,dz = \frac{1}{2n}\frac{n}{(n+1)}\left|z^{\frac{1}{n}+1}\right|_0^{2^n} = \frac{2^n}{n+1} \tag{4}$$

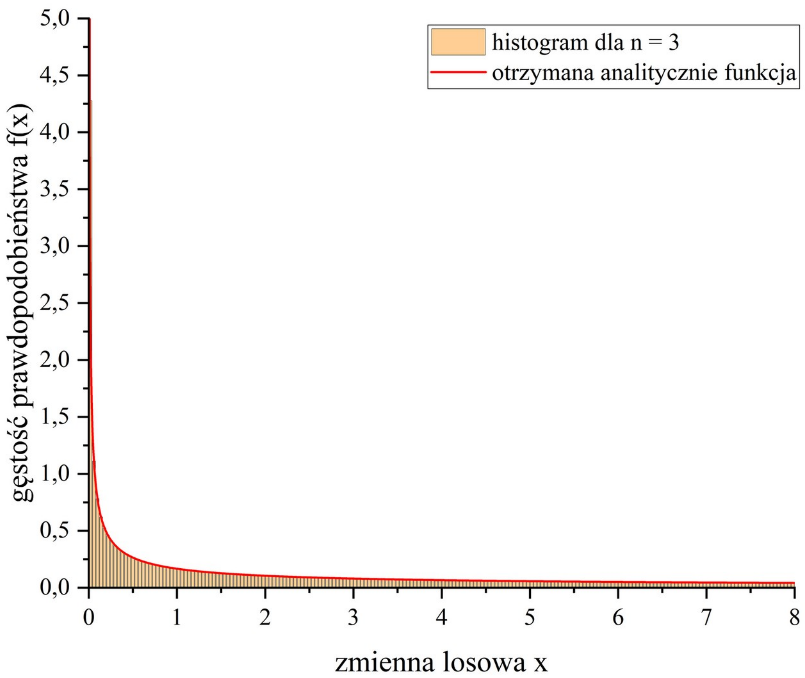
Możliwe jest również numeryczne wyznaczenie zadanych gęstości prawdopodobieństwa przez wygenerowanie dużej ilości liczb pseudolosowych z przedziału (0, 2), podnoszenie ich do odpowiedniej potęgi oraz zliczanie ich w taki sposób, aby móc wygenerować histogram.

## 2. Wyniki

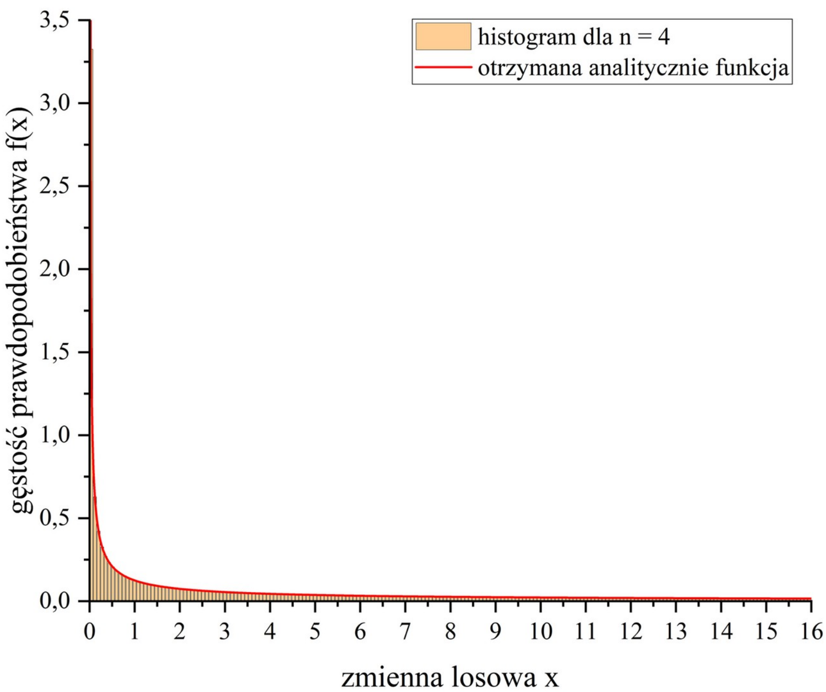
Napisano program w języku C++, który jako argument wywołania funkcji przyjmuje wartość wymiaru sześcianu, dla którego tworzony jest histogram funkcji gęstości prawdopodobieństwa, po czym generuje 10 000 000 liczb pseudolosowych, zliczając je w odpowiedni sposób. Wygenerowano histogramy dla wartości n równych 2, 3, 4, 5 oraz 20, po czym za pomocą programu Origin nałożono na nie wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa z wzoru 2., będące analitycznymi rozwiązaniami rozważanego zagadnienia. Wykresy przedstawiono na rysunkach 1., 2., 3., 4. oraz 5.



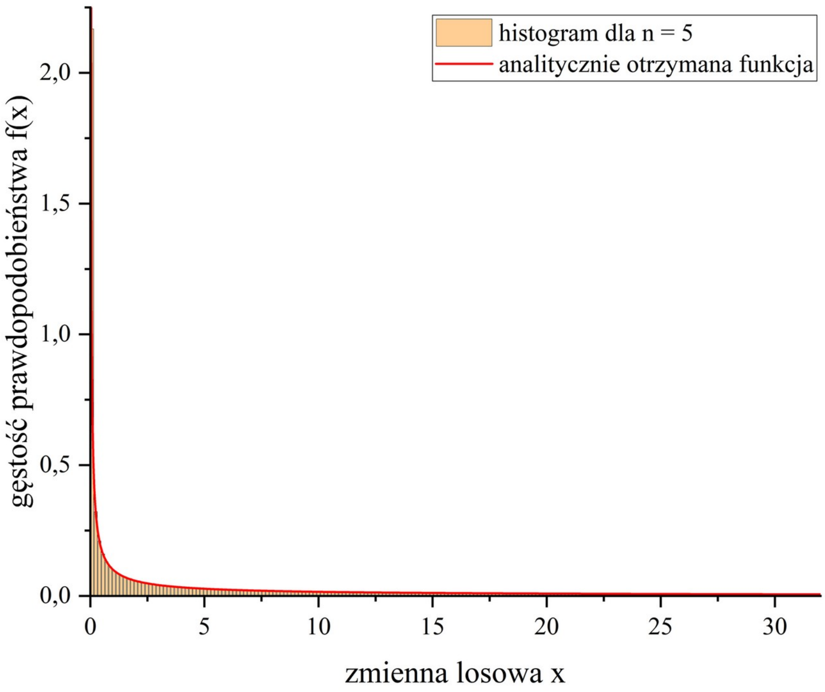

**Rysunek 1.** Histogram dla parametru n = 2 wraz z nałożoną na niego obliczoną analitycznie funkcją ze wzoru 2.



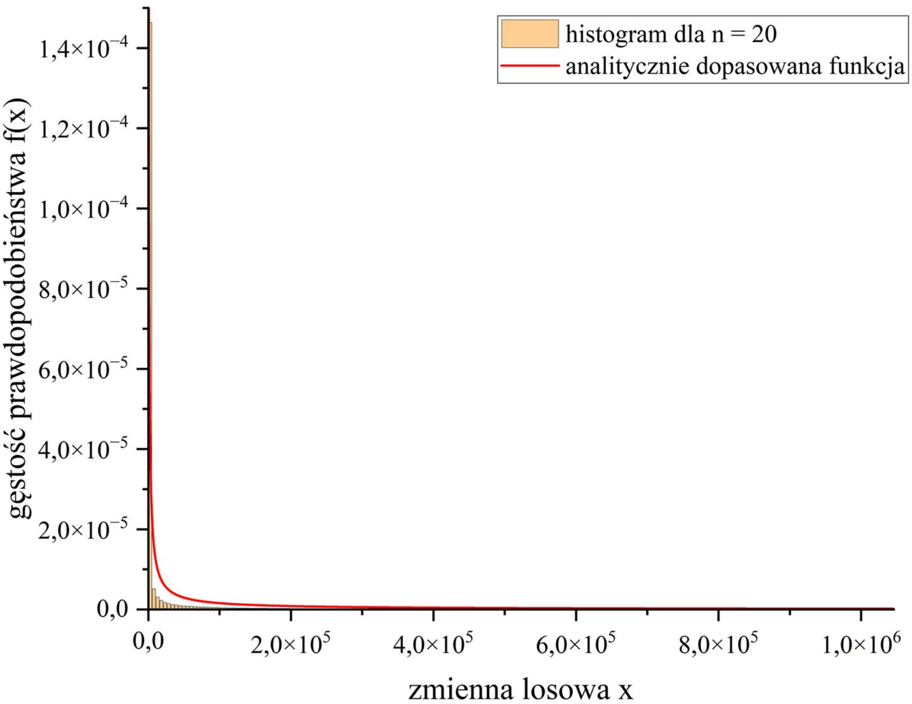

**Rysunek 2.** Histogram dla parametru n = 3 wraz z nałożoną na niego obliczoną analitycznie funkcją ze wzoru 2.




**Rysunek 3.** Histogram dla parametru n = 4 wraz z nałożoną na niego obliczoną analitycznie funkcją ze wzoru 2.




**Rysunek 4.** Histogram dla parametru n = 5 wraz z nałożoną na niego obliczoną analitycznie funkcją ze wzoru 2.




**Rysunek 5.** Histogram dla parametru n = 20 wraz z nałożoną na niego obliczoną analitycznie funkcją ze wzoru 2.

Można zaobserwować, że otrzymane histogramy dobrze pokrywają się z analitycznym rozwiązaniem dla stosunkowo niewielkich wartości n; w przypadku gdy parametr ten jest równy 20, różnice stają się widoczne, co prawdopodobnie wynika częściowo z trudności w dokładnym szacowaniu wartości rzędu $10^{-5}$, jakie zaczynają się pojawiać na histogramie.

Analizując wzór 4. można zauważyć, że chociaż wartości oczekiwane dla kolejnych wartości n będą rosnąć, to wzrost ten będzie mniejszy od zwiększania się przedziału zmiennej losowej, co sprawia, że efektywnie wartość ta będzie zbliżała się coraz bardziej do lewego krańca przedziału.