САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ, И. В. ОЛЕМСКОЙ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2012

Перейти к оглавлению на странице: 79

ГЛАВА 1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§1. Общая задача интерполирования

В вычислительной практике наиболее часто приходится иметь дело с функциями, заданными таблично: в узлах $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ известны значения некоторой функции $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Требуется же составить представление о значении этой функции в точке, не входящей в число узлов.

В этом случае строят функцию $\varphi(\cdot)$, совпадающую с $f(\cdot)$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и более простую в вычислительном плане, чем $f(\cdot)$. Задача построения такой функции называется *задачей интерполирования.*

Погрешность интерполирования $\varepsilon = f(x) - \varphi(x)$ зависит:

- от исходных данных, в частности от числа узлов;
- от расположения узлов x_i;
- от выбранного правила интерполирования (выбора класса функций $\varphi(\cdot)$).

Всеми этими факторами – *параметрами интерполирования* – мы, как правило, может распоряжаться.

На практике целесообразно строить интерполяционные формулы, которые могут дать хорошие по точности результаты в некоторых достаточно широких классах функций $f(\cdot)$, содержащих в себе практически важные функции с некоторыми общими для них свойствами.

Рассмотрим класс F функций $f(\cdot)$, заданных на отрезке $[a, b]$. Для интерполирования $f(\cdot)$ выберем семейство Φ функций $\varphi(\cdot)$:

- более простых, чем $f(\cdot)$ и определённых на том же множестве;
- достаточно легко вычисляемых.

Затем среди функций $\{\varphi(\cdot)\}$ выберем ту, которая совпадает со значениями заданной (интерполируемой) функции $f(\cdot)$:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

После этого полагаем, что имеет место приближённое равенство

$$\varphi(x) \approx f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Рассмотрим линейное нормированное пространство $\Phi[a,b]$ и последовательность функций из этого пространства $\varphi_i(\cdot)$, $i=\overline{0,n}$, определённых на отрезке $[a,b]$ и линейно независимых там.

Определение 1.1. Функции бесконечной последовательности называются *линейно независимыми*, если взятые в любом конечном числе они оказываются линейно независимыми. ♣

Возьмём функции $\varphi_i(\cdot)$, $i=\overline{0,n}$ и образуем линейную комбинацию (*обобщённый полином)*

$$s_n(\cdot) = a_0\varphi_0(\cdot) + a_1\varphi_1(\cdot) + \ldots + a_n\varphi_n(\cdot). \tag{1.1}$$

Здесь $\{a_i\}$ – произвольные постоянные. Они выбираются так, чтобы выполнялись условия $s_n(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$. Это значит, что параметры $\{a_i\}$ должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i) = f(x_i), \qquad i=\overline{0,n}. \tag{1.2}$$

Решая её относительно $\{a_i\}$ и подставляя найденные значения в (1.2), получим *обобщённый полином* $s_n(\cdot)$, интерполирующий функцию $f(\cdot)$ по исходным данным.

Из сказанного выше вытекают естественные требования к функциям $\{\varphi_i(\cdot)\}$, которые мы и рассмотрим.

Система (1.2) имеет единственное решение, если её определитель

$$D_{n+1}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

отличен от нуля:

$$D_{n+1}(x_0,x_1,\ldots,x_n) \neq 0. \tag{1.4}$$

Левая часть формулы (1.4) зависит от x_i, $i=\overline{0,n}$. Функции $\{\varphi_i(\cdot)\}$ принято выбирать так, чтобы условие (1.4) выполнялось при любых $x_0, x_1, \ldots, x_n$, из $[a,b]$ и различных между собой. В таком случае *интерполирование функции* $f(\cdot)$ при помощи линейной комбинации $s_n(\cdot)$ возможно и имеет единственное решение при любом выборе узлов x_i, $i=\overline{0,n}$ на $[a,b]$, лишь бы они были не совпадающими.

Определение 1.2. Систему функций $\varphi_i(\cdot)$, $i=\overline{0,n}$, для которой выполняется условие (1.4) при любых различных $x_i \in [a,b]$, называют *системой Чебышева* на интервале $[a,b]$. ♣

Дадим ещё одно, эквивалентное приведённому выше, определение чебышевской системы.

Определение 1.3. Систему функций $\varphi_i(\cdot)$, $i=\overline{0,n}$ называют *системой Чебышева* на $[a,b]$, если обобщённый полином (1.1) имеет на $[a,b]$ *не более* n корней при любом ненулевом наборе коэффициентов $\{a_i\}_{i=0}^n$, $\quad a_0^2+a_1^2+\ldots+a_n^2 \neq 0$. ♣

Пример 1.1. Пусть $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x, \ldots, \varphi_n(x)=x^n$. Эта система функций является Чебышевской, так как определитель (1.4) системы (1.2)

$$D_{n+1}=D_{n+1}(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

есть не что иное, как определитель Вандермонда, который отличен от нуля при всех различных между собой значениях $\{x_i\}$, $i=\overline{0,n}$. Обобщённый многочлен s_n в данном случае есть алгебраический многочлен степени n. Число исходных данных интерполирования при этом может быть произвольным. ♣

Пример 1.2. Пусть $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=\cos x$, $[a,b]=[-1,1]$. Рассмотрим обобщённый полином $s_1(x)=a_0+a_1\cos x$. Уравнение $s_1(x)=0$ при $a_0=\sqrt{3}$, $a_1=-2$ имеет на отрезке $[-1,1]$ два корня $x_{1,2}=\pm\dfrac{\pi}{6}$ и в соответствии с определением 1.3 не является чебышевской на нём. Если же взять отрезок $[0,1]$, то на нём та же система функций будет таковой, поскольку уравнение $s_1(x)=0$

имеет на $[0,1]$ не более одного решения при любом выборе коэффициентов $a_0,\ a_1:\ a_0^2 + a_1^2 \neq 0$. ♣

Сформулируем теперь первое требование, накладываемое на систему функций $\varphi_i(\cdot),\ i = \overline{0,n}$: *при всех значениях* $n = 0, 1, \ldots$ *функции* $\varphi_i(\cdot)$ $i = \overline{0,n}$ *должны составлять систему Чебышева на отрезке* $[a,b]$.

Второе условие связано с понятием полноты.

Определение 1.4. Семейство $\{s_k(\cdot)\}$ линейных комбинаций (обобщённых полиномов) вида (1.1) называется *полным* в классе F функций $f(\cdot)$, если для любой функции $f(\cdot) \in F$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое N и такие коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_N$, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x) - s_N(x)| < \varepsilon$. ♣

Если семейство $\{s_k(\cdot)\}$ не обладает этим свойством, то невозможно рассчитывать на то, чтобы с помощью комбинаций $\{s_k\}$ можно было выполнить сколь угодно точную аппроксимацию любой функции $f(\cdot) \in F$.

Поэтому второе условие сформулируем так: *система функций* $\varphi_i(\cdot),\ i = 1, 2, \ldots$ *должна быть такой, чтобы соответствующее ей семейство линейных комбинаций* $\{s_k(\cdot)\}$ *вида* (1.1) *было полным в классе* F *функций* $f(\cdot)$, *подлежащих интерполированию.*

Замечание 1.1. Необходимо отметить, что полнота еще не гарантирует возможность сколь угодно точной аппроксимации $f(\cdot)$. Это связано с тем, что полнота семейства $\{s_k(\cdot)\}$ в F даёт возможность сколь угодно точной аппроксимации $f(\cdot)$ посредством $s_n(\cdot)$ при некотором n в случае, когда на выбор $s_n(\cdot)$ не налагается никаких ограничений. В задаче же интерполирования выбор $s_n(\cdot)$ (при произвольном, но фиксированном n) определяется (ограничивается):

- выбором узлов $x_i,\ i = \overline{0,n}$;
- выполнением равенств $s_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$.

Именно поэтому вопрос о возможности сколь угодно точного приближения $f(\cdot)$ при этих ограничениях при построении $s_n(\cdot)$ подлежит исследованию для каждого конкретного случая. ♣

Перейти к оглавлению на странице: 79

§2. Алгебраическое интерполирование. Полином Лагранжа

Пусть на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ рассматривается функция $f(\cdot)$ и пусть известны её значения в различных узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих $[a,b]$. Возьмём многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Напомним, что требования к системе функций $\{\varphi_i(x) = x^i\}$ в этом случае выполнены, так как:

- во-первых, она является Чебышевской;
- во-вторых, семейство алгебраических многочленов является полным в классе непрерывных на этом отрезке функций, ибо по теореме Вейерштрасса если функция $f(\cdot)$ непрерывна на конечном замкнутом отрезке $[a,b]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует полином $P_k(\cdot)$ некоторой степени k, для которого при всех $x \in [a,b]$ выполняется $|f(x) - P_k(x)| < \varepsilon$.

Коэффициенты $\{a_i\}$ выбираем так, чтобы значения функции $f(\cdot)$ и полинома $P_n(\cdot)$ совпадали в узлах интерполирования $\{x_i\}$:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Эти равенства дают квадратную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{a_i\}$, откуда следует, что коэффициенты искомого обобщённого полинома $\{a_i\}$ линейно зависят от значений $f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Поэтому и полином $P_n(\cdot)$ линейно зависит от величин $f(x_k)$. Иначе говоря, он может быть представлен в виде:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i).$$

Полиномы $\{l_i(\cdot)\}$ можно найти, используя простые алгебраические соображения. Согласно с постановкой задачи в узлах интерполирования должны быть выполнены равенства (2.1):

$$f(x_k) = P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x_k) f(x_i), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

А это возможно, если

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, $l_k(x)$ – полином степени не выше n, для которого все узлы интерполирования $\{x_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k$ являются его корнями. Количество этих корней – n, степень этого многочлена – n, а поэтому все его корни – простые. Это позволяет выписать разложение многочлена $l_k(x)$:

$$l_k(x) = A_k(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n).$$

Постоянный множитель A_k определяется из условия $l_k(x_k) = 1$, что даёт равенство

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} = \\ &= \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

Многочлены $l_k(x)$ называют *множителями Лагранжа*, а формулу

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i),$$

формулой Лагранжа для интерполирующего полинома $L_n(x)$. Часто интерполяционный полином $L_n(\cdot)$ называют просто полиномом Лагранжа.

§3. Методическая погрешность. Остаточный член формулы Лагранжа

Оценку для $r_n(x) = f(x) - L_n(x)$ будем искать на классе функций $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ в точке $x = x^* \in [a, b]$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Delta(x) = r_n(x) - K \cdot \omega_{n+1}(x)$$

и потребуем, чтобы $\Delta(x^*) = 0$. Это возможно, если положить

$$K = \frac{r_n(x^*)}{\omega_{n+1}(x^*)}.$$

Функция

$$\Delta(x) = r_n(x) - \frac{r_n(x^*)}{\omega_{n+1}(x^*)}\omega_{n+1}(x)$$

имеет корни $x_0, x_1, \ldots, x_n, x^*$. Их общее количество равно $(n+2)$.

По теореме Ролля производная $\Delta'(\cdot)$ функции $\Delta(\cdot)$ обращается в нуль по крайней мере в $(n+1)$-ой точке.

Применяя теорему Ролля к производной $\Delta'(\cdot)$, получаем, что $\Delta''(\cdot)$, обращается в нуль по крайней мере в n точках.

Рассуждая таким образом, придём к тому, что $\Delta^{(n+1)}(\cdot)$ имеет на $[a,b]$ по крайней мере один корень. Пусть это будет точка $\xi \in (a,b)$.

$$\Delta^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K \cdot (n+1)! = 0.$$

Тогда справедливо равенство

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{r_n(x^*)}{\omega_{n+1}(x^*)} \cdot (n+1)! = 0,$$

что позволяет представить остаточный член в виде:

$$r_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x^*).$$

Таким образом справедливо равенство:

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x), \quad \xi \in (a,b).$$

В дальнейшем будем его называть формулой Лагранжа для остатка интерполирования или *методической погрешностью интерполирования.*

§4. Выбор узлов интерполирования

Рассмотрим множество F_{n+1} функций $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{n+1}[a,b]$, производная которых порядка $(n+1)$ ограничена по модулю числом

M_{n+1}: $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$, $x \in [a,b]$. В этом классе функций остаток интерполирования (методическая погрешность интерполирования) имеет оценку:

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0||x-x_1|\dots|x-x_n|. \tag{4.1}$$

Она является *точной* и достигается в том случае, когда $f(\cdot)$ есть многочлен степени $n+1$ вида

$$f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots .$$

Пусть функция $f(\cdot) \in \mathrm{F}_{n+1}$ задана таблично, и $\hat{x}$ – не табличное значение аргумента, для которого необходимо указать значение функции $f(\hat{x})$.

Задача 4.1. *Выбрать $(n+1)$ табличное значение узлов так, чтобы минимизировать методическую погрешность в точке $\hat{x}$ при интерполировании $f(\cdot)$ полиномом Лагранжа $L_n(\cdot)$.* ♣

Множитель $\dfrac{M}{(n+1)!}$ не зависит от выбора узлов. Поэтому при фиксированном значении $\hat{x}$ необходимо выбрать узлы $\{x_{i_k}\}_{k=0}^{n}$ так, чтобы произведение

$$|\hat{x}-x_{i_0}||\hat{x}-x_{i_1}|\dots|\hat{x}-x_{i_n}|$$

имело *наименьшее значение.* Очевидно, что для этого набор узлов $\{x_{i_k}\}_{k=0}^{n}$ следует выбирать из условий:

$$x_{i_0} = \min_i |\hat{x}-x_i|;\ x_{i_1} = \min_{i\neq i_0}|\hat{x}-x_i|;\dots,\ x_{i_n} = \min_{i\neq i_0,i_1,\dots,i_{n-1}}|\hat{x}-x_i|. \ ♣$$

Задача 4.2. *Выбрать узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ на $[a,b]$ так, чтобы максимальное значение правой части оценки (4.1) на $[a,b]$ было минимально.* ♣

Если отрезок $[a,b]$ совпадает с $[-1,1]$, то учитывая свойства полиномов Чебышева можно утверждать,что

$$\omega_{n+1}(x) = \bar{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x).$$

В общем же случае достаточно сделать преобразование отрезка $[a, b]$ в отрезок $[-1, 1]$ и тогда получим искомые узлы $\{x_i\}$ в следующем виде:

$$x_i = \frac{1}{2}\big[(b-a)\cos\frac{(2i+1)}{2(n+1)}\pi + (b+a)\big], \quad i = \overline{0, n}.$$

При таком выборе узлов оценка (4.1) для методической погрешности принимает вид:

$$\big|f(x) - L_n(x)\big| \le \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \quad ♣$$

§5. О сходимости интерполяционного процесса

Решив задачу интерполирования по заданному числу узлов на отрезке $[a, b]$, мы должны ответить на вопрос: как ведёт себя последовательность интерполяционных полиномов при неограниченном возрастании числа узлов на $[a, b]$? Будет ли (и если будет, то при каких условиях) иметь место свойство:

$$r_n(x_*, f) = f(x_*) - L_n(x_*, f) \to 0 \quad \text{при} \;\; n \to \infty \;?$$

Поскольку ответ на поставленный вопрос зависит в том числе и от свойств функции $f(\cdot)$, обозначаем здесь полином Лагранжа через $L_n(x, f)$, чтобы подчеркнуть указанное обстоятельство.
Уточним задачу. Рассмотрим бесконечную треугольную таблицу узлов, расположенных на $[a, b]$:

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1^1 & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\}. \tag{5.1}$$

Определение 5.1. Построение $\{L_n(x, f)\}$ по таблице (5.1) для функции $f(\cdot)$ будем называть *интерполяционным процессом* (для экономии места – ИП). ♣

Определение 5.2. Если для $\hat{x} \in [a,b]$ имеет место: $r_n(\hat{x}, f) \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что ИП для $f(\cdot)$ по таблице (5.1) сходится в точке $\hat{x}$. ♣

Определение 5.3. Если сходимость ИП имеет место для всех $x \in [a,b]$, то говорят, что ИП сходится для $f(\cdot)$ на $[a,b]$. ♣

Определение 5.4. Если $r_n(x, f) \to 0$ при $n \to \infty$ *равномерно* на $[a,b]$, то говорят о *равномерной* сходимости ИП к $f(\cdot)$ на $[a,b]$. ♣

Некоторые факты.

- Для любой функции $f(\cdot) \in \mathbb{C}$ можно выбрать узлы (5.1) так, что ИП будет равномерно на $[a,b]$ сходиться к этой функции. В основе утверждения – теорема Вейерштрасса о приближении функций полиномами.

- (теорема Фабера) Для любой таблицы (5.1) существует непрерывная функция, для которой ИП не является равномерно сходящимся.

- Для целой функции ИП по любой таблице (5.1) равномерно на $[a,b]$ сходится к ней.

Пример Бернштейна. Для $f(x) = |x|,\ x \in [-1,1]$ ИП по равноотстоящим узлам не сходится ни в одной точке, кроме точек $-1, 0, 1$ (при этом -1 и $+1$ считаются узлами интерполирования). ♣

Рассмотрим несколько примеров построения интерполяционного полинома и оценки методической погрешности.

Пример 5.1. С какой методической погрешностью можно найти $\sin\dfrac{\pi}{4}$, имея таблицу:

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$
f(x)	0	$1/2$	1

Установим связь между параметрами задачи и параметрами, использованными при рассмотрении вопроса о построении интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(x) = \sin x,\ n = 2,\ a = 0,\ b = \pi/2,\ M_3 = 1.$$

$$\begin{aligned}\left|r_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| &= \left|\sin\frac{\pi}{4} - L_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \frac{1}{3!}\left|\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{\pi}{12} \approx \frac{1}{6}\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{1}{4} \approx \frac{1}{37},\end{aligned}$$

т.е. относительная погрешность вычисления указанного значения с помощью полинома Лагранжа составляет $\approx 3\%$.$\clubsuit$

Пример 5.2. Построить полином Лагранжа по таблице:

x	0	2	3
f(x)	1	3	2

$$\begin{aligned}L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)(-3)}\cdot 1 + \frac{x(x-3)}{2(-1)}\cdot 3 + \\ + \frac{x(x-2)}{3\cdot 1}\cdot 2 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Пример 5.3. Построить полином Лагранжа по таблице:

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	5

$$\begin{aligned}L_3(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)}\cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)}\cdot 3 + \\ &+ \frac{x(x-2)(x-5)}{3\cdot 1\cdot(-2)}\cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5\cdot 3\cdot 2}\cdot 5 = \\ &= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.\quad \clubsuit\end{aligned}$$

Примеры 5.2 и 5.3 показывают, что при добавлении узла приходится заново проделывать всю работу. Этот недостаток может быть устранён при записи интерполяционного полинома в иной *форме*.

§6. Разностные отношения (разделённые разности – РР)

Разностные отношения (другими словами – разделённые разности) применяются при изучении функций, заданных на неравномерной сетке.

Пусть в различных между собой узлах $x_0, x_1, \ldots,$ заданы значения функции $f(x_0), f(x_1), \ldots$.

Определение 6.1.

- Разностными отношениями *первого порядка* называются величины
$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \ldots .$$
- Разностными отношениями *второго порядка* называются величины
$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots .$$
- Разностные отношения *любого порядка* $i+1, \quad i = 1, 2, \ldots$ определяются при помощи разностных отношений порядка i по формуле
$$f(x_0, \ldots, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) - f(x_0, x_1, \ldots, x_i)}{x_{i+1} - x_0}. \clubsuit$$

Нетрудно выписать простые выражения разностных отношений всех порядков через значения функции. Так, для разностного отношения первого порядка справедливо равенство
$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0},$$
а для разностного отношения второго порядка –
$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0}\{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)\} =$$
$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Выполнив индукцию, можно показать, что при всяком n

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \\ = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}, \qquad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{6.1}$$

Полученное соотношение назовём *основным свойством разделённых разностей.* Можно показать, что при всяком $n = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство:

$$f(x_n) = f(x_0) + (x_n - x_0) f(x_0, x_1) + \\ + (x_n - x_0)(x_n - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots + \\ + (x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

устанавливающее связь между значениями функции $f(x_n), f(x_0)$ и разностными отношениями.

§7. Свойства разделённых разностей

- линейность по $f(\cdot)$, т.е. если $f(\cdot) = \alpha\,\varphi(\cdot) + \beta\psi(\cdot)$, то

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \alpha\,\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \beta\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n);$$

- симметричность относительно узлов $\{x_i\}$, т.е.

$$f(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = f(x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$$

при условии, что набор узлов в левой и правой частях формулы один и тот же. ♣

Оба свойства очевидны, если обратиться к представлению разделённых разностей по формуле (6.1). Учитывая второе свойство РР, можно всегда перечислять список аргументов РР в порядке их нумерации. Кроме того, примем соглашение (удобное при записи формул): отождествлять РР *нулевого порядка* с самой функцией, т.е. поскольку узлы считаются *различными и упорядоченными в порядке нумерации*, то $f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = f(x_i)$ при $k = 0$.

§8. Интерполяционный полином Ньютона

Получим форму записи интерполяционного полинома, удобную при увеличении числа узлов.

Пусть $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ – узлы в задаче интерполирования. Пусть по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ (и значениям $\{y_i\}$ функции $f(\cdot)$ в этих точках) построен полином Лагранжа $L_{n-1}(\cdot)$, а по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – полином Лагранжа $L_n(\cdot)$. Рассмотрим их разность:

$$\begin{aligned} \Delta L_n(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) = \\ = A_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{8.1}$$

поскольку $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ являются *корнями* полинома $\Delta L_n(x)$.

Но A_n, как это следует из (8.1), есть старший коэффициент полинома $L_n(x)$, т.е.

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\omega'_{n+1}(x_i)} = f(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь использована формула (6.1) Теперь полином Лагранжа можно представить в виде:

$$\begin{aligned} L_n(x) = L_0(x) + \big(L_1(x) - L_0(x)\big) + \big(L_2(x) - L_1(x)\big) + \ldots + \\ + \big(L_n(x) - L_{n-1}(x)\big) = L_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i(x) = \\ = \sum_{i=0}^{n} f(x_0, x_1, \ldots, x_i)\omega_i(x) \equiv P_n(x). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Здесь использованы соглашения о РР предыдущего раздела, дополненные следующими относительно $\omega_i(x)$:

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_1(x) = x - x_0, \quad \omega_i(x) = \prod_{k=0}^{i} (x - x_k), \ i \geq 2.$$

Полученное представление полинома (8.2) носит название *полином Ньютона*.

Замечание 8.1. Вычисление РР удобно производить в таблице:

порядок РР:	0	1	2	3
x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0, x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$	
		$f(x_1, x_2)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$	
		$f(x_2, x_3)$		
x_3	$f(x_3)$			

Пример 8.1. Построим интерполяционный полином по исходным данным примера 5.3, однако используем результат примера 5.2, т.е. используя те же обозначения, запишем, что

$$L_3(x) = L_2(x) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)\omega_3(x),$$

где $\omega_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$. Остаётся вычислить РР заданной таблично в примере 5.3 функции по узлам $\{0, 2, 3, 5\}$:

порядок РР:	0	1	2	3
$x_0 = 0$	1			
		1		
$x_1 = 2$	3		-2/3	
		-1		3/10
$x_2 = 3$	2		5/6	
		3/2		
$x_3 = 5$	5			

Теперь имеем:

$$L_3(x) = L_2(x) + \frac{3}{10}x(x-2)(x-3)$$

Раскрывая скобки, подставляя $L_2(x)$ из примера 5.2, получим тот же результат, что и в примере 5.3:

$$L_3(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1 + \frac{3}{10}x(x^2 - 5x + 6) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1. \quad \clubsuit$$

§9. Методическая погрешность полинома Ньютона

Получим выражение методической погрешности для полинома Ньютона в точке x_*: $r_n(x_*) = f(x_*) - P_n(x_*)$.

Добавим к имеющимся узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$, по которым построен полином Ньютона, узел $x_* = x_{n+1}$ и решим задачу интерполирования по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, обозначив полученный полином $P_{n+1}(x)$. Для него имеем:

$$P_{n+1}(x_*) = f(x_*) = P_n(x_*) + f(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\,\omega_{n+1}(x_*).$$

Отсюда получаем:

$$r_n(x_*) = f(x_*) - P_n(x_*) = f(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\,\omega_{n+1}(x_*). \tag{9.1}$$

Формула (9.1) и есть искомое представление методической погрешности. Отметим, что РР $f(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ *не может* быть вычислена, т.к. для её вычисления необходимо иметь $f(x_*)$.

Побочным результатом формулы (9.1) является

Теорема 9.1. *Если узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a, b]$ и $f(\cdot)$ имеет там непрерывную производную порядка n, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что для неё верно равенство:*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi). \quad \clubsuit \tag{9.2}$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из сравнения полученной формулы (9.1) и выражения для методической погрешности полинома Лагранжа – *поскольку полиномы Лагранжа и Ньютона представляют собой лишь различную по форме запись интерполяционного полинома, то и методические погрешности для них совпадают.*

Следствие 9.1. *Если $f(x)$ является полиномом степени k, то РР для такой функции порядка k по любой системе узлов есть константа, зависящая лишь от функции, а РР более высоких порядков равны нулю.* $\clubsuit$

Перейти к оглавлению на странице: 79

§10. Конечные разности. Интерполирование по равноотстоящим узлам

Конечные разности (КР) являются рабочим аппаратом при изучении функций, заданных таблицей значений в равноотстоящих узлах. Пусть в равноотстоящих узлах $x_k = x_0 + kh,\ k = 0, 1, 2, \dots$ известны соответствующие им значения функции: $y_k = f(x_0 + kh)$.

Определение 10.1.

- Конечными разностями *первого порядка* называют величины

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Конечными разностями *второго порядка* –

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Конечными разностями *i-го порядка* называют величины

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Примем также *соглашение*, удобное для компактной записи формул, в которых встречаются КР: $\Delta^0 f(x_k) = f(x_k)$, $\Delta^1 = \Delta$.

Нетрудно выразить конечные разности любого порядка через значения функции:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

Продолжая вычисления, получим

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1!} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{n-2} + \ldots + (-1)^n y_0. \qquad (10.1)$$

Существенно упростить представление конечных разностей помогает введение оператора E, при действии которого на $f(x)$ её аргумент увеличивается на h:

$$Ef(x) = f(x + h).$$

При таких обозначениях разность первого порядка примет вид:

$$\Delta y_0 = E y_0 - y_0 = (E - I) y_0.$$

Здесь I – тождественный оператор: $If(x) = f(x)$. Из определения оператора E следует, что $E^m f(x) = f(x + mh)$, а значит конечная разность второго порядка представит в виде

$$\Delta^2 y_0 = E^2 y_0 - 2E y_0 + y_0 = (E - I)^2 y_0$$

и равенство (10.1) перепишется в краткой условной форме:

$$\Delta^n y_0 = (E - I)^n y_0.$$

Столь же просто получить выражения для значения функции y_n через начальное значение y_0 и значения конечных разностей $\Delta^k y_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, относящихся к начальной точке x_0.

Действительно:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \text{откуда } y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0.$$

Продолжая вычисления, получим:

$$\begin{aligned} y_n = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0 = \\ = (I + \Delta)^n y_0 = E^n y_0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Для $k = 1$ очевидно, а для $k > 1$ легко доказывается по индукции соотношение между КР и РР:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}, \quad h = x_{i+1} - x_i = const \tag{10.3}$$

Используя (10.3), запишем представление для полинома Ньютона в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}\, \omega_k(x). \tag{10.4}$$

Пусть узлы интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ являются равноотстоящими, т.е. $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$ и требуется оценить значение $f(x)$, $x \in (x_0, x_1)$.

Введём безразмерную переменную $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ и подставим в формулу (10.4), помня, что $\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$:

$$\begin{aligned}P_n(x) &= f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta^0 f(x_0) + \\ &+ \sum_{k=2}^{n}(x - x_0)\ldots\big(x - (x_0 + (k-1)h)\big)\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\,h^k} = \\ &= f(x_0) + t\Delta^0 f(x_0) + \\ &+ \sum_{k=2}^{n}\frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}\Delta^k f(x_0).\end{aligned} \tag{10.5}$$

Напомним, что комбинаторная формула для *сочетаний* имеет вид:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},\ \ k \geq 2;\ \ C_n^0 = 1,\ \ C_n^1 = n.$$

Используя эту формулу и для нецелых n, формулу (10.5) перепишем в компактном виде:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_t^k \Delta^k f(x_0), \quad t \in (0,1). \tag{10.6}$$

Здесь следует считать $C_t^0 = 1,\ C_t^1 = t$.

Отметим, что если $t = i$, то с учётом формулы (10.2) получаем равенство $P(x_i) = y_i$.

Оценим коэффициенты в формуле (10.6) при $t \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}&|C_t^1| < 1, \quad |C_t^2| < \frac{|t(t-1)|}{2} < \frac{1}{8}, \\ &|C_t^i| < \frac{\big|1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots |i-1|\big|}{i!} < \frac{1}{i}, \quad i > 2.\end{aligned} \tag{10.7}$$

Из полученной выше оценки вытекает, что вклад слагаемых в формуле (10.6) в значение полинома уменьшается вместе с ростом номера слагаемого. К тому же сами КР, как правило, быстро убывают с ростом порядка КР. Полученное представление (10.6) носит название *интерполяционного полинома Ньютона для интерполяции* *вперёд.* Аналогично могут быть получены полиномы Ньютона для интерполирования назад.

Рассмотрим полином Лагранжа для случая равноотстоящих узлов, для чего сделаем замену переменной:

$$x = x_0 + th, \quad t = \frac{x - x_0}{h}, \quad t \in [0, n].$$

Тогда

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) \equiv \bar{L}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\bar{\omega}_{n+1}(t)}{(t-i)\bar{\omega}'_{n+1}(i)} y_i = \sum_{i=0}^{n} \bar{l}_i(t) y_i,$$

$$\text{где } \bar{\omega}_{n+1}(t) = t(t-1)\ldots(t-n), \quad \bar{l}_i(t) = \frac{\bar{\omega}_{n+1}(t)}{(t-i)\bar{\omega}'_{n+1}(i)}$$

Отметим, что полиномы $\bar{l}_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, n$ не зависят от узлов, интервала и значений функции, а потому могут быть составлены независимо от параметров интерполирования.

§11. Задача кратного интерполирования

Предположим, что в узлах $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$, заданы значения функции $f(\cdot)$ вместе с производными до некоторого порядка:

$$\left.\begin{array}{llll} f(x_0), & f'(x_0), & \ldots & f^{(m_0-1)}(x_0) \\ f(x_1), & f'(x_1), & \ldots & f^{(m_1-1)}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_n), & f'(x_n), & \ldots & f^{(m_n-1)}(x_n) \end{array}\right\}. \tag{11.1}$$

Рассмотрим следующую задачу построения алгебраического полинома $P_m(\cdot)$, обладающего свойствами:

$$\begin{cases} P_m^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j) \\ j = \overline{0, n}; \quad k = \overline{0, m_{j-1}}. \end{cases} \tag{11.2}$$

Поставленная задача называется *задачей кратного интерполирования*. Ответим сначала на вопрос: какова должна быть степень искомого полинома $P_m(\cdot)$ для того, чтобы можно было надеяться на её однозначную разрешимость для любых функций $f(\cdot) \in \mathbb{C}^p[a,b]$, где $p = \max\limits_i (m_i - 1)$?

Поскольку $P_m(\cdot)$ имеет $(m+1)$ коэффициент, а СЛАУ (11.2) содержит $\sum\limits_{j=0}^{n} m_j$ уравнений относительно этих коэффициентов, то будем считать, что

$$m + 1 = \sum_{j=0}^{n} m_j. \tag{11.3}$$

§12. Единственность интерполяционного полинома

Пусть равенствам (11.2) удовлетворяют *два* полинома $\bar{P}_m(\cdot)$ и $\tilde{P}_m(\cdot)$, *степень которых определена условием* (11.3). Рассмотрим полином, являющийся их разностью:

$$\Delta P(\cdot) = \bar{P}_m(\cdot) - \tilde{P}_m(\cdot).$$

Обозначив $\deg\, P(\cdot)$ степень полинома $P(\cdot)$, можем записать:

$$\deg\, \Delta P(\cdot) \le m = \sum_{j=0}^{n} m_j \; - 1\,. \tag{12.1}$$

Но узел x_i для $\Delta P(\cdot)$ является корнем кратности не ниже m_i поскольку $\bar{P}_m(x_i) = \tilde{P}_m(x_i)$. Следовательно

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta P(x) = q_s(x) \prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)^{m_i} \\ \text{где } q_s \text{ – полином: } s \ge 0, \quad s = \deg\, q_s(x). \end{array} \right. \tag{12.2}$$

Но тогда получаем:

$$\deg\, \Delta P(\cdot) = s + \sum_{j=0}^{n} m_j \ge \sum_{j=0}^{n} m_j = m + 1,$$

что противоречит соотношению (12.1). Единственность искомого полинома *при условии его существования*доказана.

§13. Существование интерполяционного полинома

Для определения коэффициентов искомого полинома $P_m(\cdot)$ мы имеем СЛАУ (11.2). Рассмотрим её однородный аналог, т.е. положим в (11.2) $y_j^k = f^{(k)}(x_j) = 0$ для всех k, j. Тогда, очевидно, что СЛАУ (11.2) *имеет решение* вида $a_s = 0, \quad s = \overline{0, m}$, а тогда по доказанному в параграфе 12 это решение единственно. Поскольку определитель системы (11.2) не зависит от заданных значений функции y_j^k, то СЛАУ (11.2) имеет единственное решение для любой правой части.

Полином, решающий задачу кратного интерполирования, называется *полиномом Эрмита*. Обозначим его $H_m(\cdot)$. ♣

§14. Методическая погрешность полинома Эрмита

Введём обозначение $R_m(x) = f(x) - H_m(x)$. Считаем далее, что $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{m+1}(a, b)$ и узлы $\{x_i\}$ расположены на $[a, b]$. Пусть

$$\omega_{m+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^{m_j}$$

– узловой полином в задаче кратного интерполирования. Оценим погрешность $R_m(x)$ в точке $x_* \in (a, b)$, $x_* \neq x_j$.
Введём вспомогательную функцию $\varphi(x) = R_m(x) - k\omega_{m+1}(x)$. Постоянную k определим из условия

$$\varphi(x_*) = 0, \text{ т.е. } k = \frac{R_m(x_*)}{\omega_{m+1}(x_*)}.$$

Таким образом, функция $\varphi(\cdot)$ имеет на $[a, b]$ следующие корни:

x_k – корень кратности не ниже m_k, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots n$;

x_* – корень кратности не ниже 1.

Итого на $[a, b]$ функция $\varphi(\cdot)$ имеет $1 + \sum\limits_{j=0}^{n} m_j = m + 2$ корня (с учётом кратности). Тогда

- $\varphi'(\cdot)$ имеет по теореме Ролля $(n+1)$ корень (хотя бы по одному между любой парой соседних корней функции $\varphi(\cdot)$);
- корень функции $\varphi(\cdot)$ кратности $m_j > 1$ остаётся корнем функции $\varphi'(\cdot)$ кратности $(m_j - 1)$.

Итого функция $\varphi'(\cdot)$ имеет на $[a, b]$ корней (с учётом кратностей) в количестве

$$(n+1) + \sum_{j=0}^{n}(m_j - 1) = \sum_{j=0}^{n} m_j = m + 1,$$

т.е. у производной общее количество корней на единицу меньше, чем у функции. Продолжая рассуждения, придём к выводу о существовании на (a, b) точки ξ такой, что $\varphi^{(m+1)}(\xi) = 0$. Отсюда получаем представление для методической погрешности интерполирования с помощью полинома Эрмита:

$$R_m(x_*) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega_{m+1}(x_*). \ \clubsuit$$

§15. Один численный метод построения полинома Эрмита

Пусть построен интерполяционный полином $P_{n,0}(\cdot)$ (Ньютона или Лагранжа) по узлам x_i, $i = \overline{0, n}$, удовлетворяющий условиям:

$$P_{n,0}(x_i) = y_i^0 = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Полином Эрмита $H_m(\cdot)$ представим в виде

$$\begin{aligned} &H_m(x) = P_{n,0}(x) + \omega_{n+1,0}(x) P_{m-n-1}(x), \\ &\text{где } \ \omega_{n+1,0}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Очевидно, что искомый полином (15.1) удовлетворяет условиям $H_m(x_i) = y_i^0$, поэтому остаётся лишь выбрать полином $P_{m-n-1}(x)$ так, чтобы были выполнены остальные соотношения (11.2):

$$\begin{cases} H_m^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j) \\ j = \overline{0, n}; \quad k = \overline{1, m_{j-1}}. \end{cases} \tag{15.2}$$

Подставив (15.1) в (15.2), получим такую систему уравнений (используя формулу Лейбница):

$$\begin{cases} y_j^k = P_{n,0}^{(k)}(x_j) + \sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s \omega_{n+1,0}^{(s)}(x_j) P_{m-n-1}^{(k-s)}(x_j) \\ j = \overline{0,n}; \quad k = \overline{1, m_{j-1}}. \end{cases} \tag{15.3}$$

Соотношения (15.3) являются СЛАУ относительно коэффициентов полинома $P_{m-n-1}(x)$. Рассмотрим эти соотношения, отвечающие случаю $k = 1$, $j = \overline{0,n}$:

$$y_j^1 = P'_{n,0}(x_j) + \omega'_{n+1,0}(x_j) P_{m-n-1}(x_j) + \omega_{n+1,0}(x_j) P'_{m-n-1}(x_j).$$

Поскольку $\omega_{n+1,0}(x_j) = 0$, $j = \overline{0,n}$, то из предыдущего находим $P_{m-n-1}(x_j)$, $j = \overline{0,n}$:

$$P_{m-n-1}(x_j) = \frac{y_j^1 - P'_{n,0}(x_j)}{\omega'_{n+1,0}(x_j)} \quad j = \overline{0,n}\,.$$

Далее, из (15.3) при $k = 2$ найдём:

$$y_j^2 = P''_{n,0}(x_j) + \omega_{n+1,0}(x_j) P''_{m-n-1}(x_j) + 2\omega'_{n+1,0}(x_j) P'_{m-n-1}(x_j) + \\ + \omega''_{n+1,0}(x_j) P_{m-n-1}(x_j), \; j = \overline{0,n}\,,$$

откуда определяются $\{P'_{m-n-1}(x_j),\; j = \overline{0,n}\}$ для тех узлов, в которых заданы значения $\{y_j^2\}$:

$$P'_{m-n-1}(x_j) = \frac{y_j^2 - P''_{n,0}(x_j) - \omega''_{n+1,0}(x_j) P_{m-n-1}(x_j)}{2\omega'_{n+1,0}(x_j)}.$$

Понятно, что через $\nu = \max\{m_j\}$ шагов получим задачу кратного интерполирования для $P_{m-n-1}(x)$, в которой условий на $(n+1)$ меньше, чем в исходной задаче.

Применив указанную процедуру к полиному $P_{m-n-1}(x)$, редуцируем полученную задачу к новой того же класса, но содержащую ещё меньше условий в таблице.

Наконец через конечное число повторений описанной процедуры придём к простой задаче интерполирования, т.е. такой, которую решает полином Лагранжа. Обратным ходом найдём искомый полином Эрмита. ♣

Пример 15.1. Построить полином Эрмита по таблице:

x	-1	0	1
y	0	1	2
y'	5	0	
y''	-20		

Представим искомый полином $H_5(x)$ в виде:

$$H_5(x) = (x+1) + x(x^2-1)P_2(x);$$

далее в соответствии с приведёнными выше формулами получаем:

$$P_2(-1) = \frac{5-1}{2} = 2;\;\; P_2(0) = \frac{0-1}{-1} = 1;\;\; P_2'(-1) = \frac{-20+12}{4} = -2\,.$$

Таким образом, для $P_2(x)$ вновь получаем такую задачу кратного интерполирования:

x	-1	0
y	2	1
y'	-2	

Вновь $P_2(x)$ запишем в виде: $P_2(x) = (1-x) + x(x+1)P_0(x)$; далее как и выше получаем: $P_0(-1) = \dfrac{-2+1}{-1} = 1$. Остаётся подставить найденные полиномы в представление для $H_5(x)$:

$$H_5(x) = (x+1) + x(x^2-1)\{(1-x) + x(x+1)\} = 1 + x^5. \;\clubsuit$$

§16. Численное дифференцирование. Постановка задачи

Пусть функция $f(\cdot) \in \mathbb{C}^m(a,b)$ представлена таблицей значений $\{y_i\}$ по узлам $\{x_i\}$, $\quad i = \overline{0,n}$. Требуется оценить значение производной $f^{(k)}(\hat{x}) = \hat{y}^k$, где $\hat{x} \in (a,b)$, $k \le m$.

Основная идея численного дифференцирования заключается в замене функции $f(\cdot)$ её интерполяционным полиномом $Q_n(\cdot)$ (*в частности*, алгебраическим) и вычислении его производной требуемого порядка в нужной точке, полагая

$$f^{(k)}(\hat{x}) \approx Q_n^{(k)}(\hat{x}).$$

Здесь естественно считать, что $k \leq n$, поскольку в противном случае, $Q_n^{(k)}(x) \equiv 0$ и приближение производной указанным методом для более высоких порядков теряет всякий смысл.

Если $r_n(x) = f(x) - Q_n(x)$, то

$$r_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - Q_n^{(k)}(x),$$

т.е. методическая погрешность дифференцирования при таком подходе суть $r_n^{(k)}(x)$. При замене функции $f(\cdot)$ её интерполяционным полиномом $Q_n(\cdot)$ предполагают, что методическая погрешность $r_n(x)$ такой замены мала, из чего вовсе не следует малость $r_n^{(k)}(x)$. Практика показывает, что при таком способе вычисления производных получается сравнительно бóльшая погрешность, особенно при вычислении производных высоких порядков.

§17. Формулы численного дифференцирования

Рассмотрим применение данного подхода при использовании в качестве $Q_n(\cdot)$ полиномов Лагранжа и Ньютона.

- При использовании в качестве интерполяционного полинома $Q_n(\cdot)$ интерполяционного полинома Ньютона

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_0, x_1, \ldots, x_i)\omega_i(x) \tag{17.1}$$

  получаем следующие формулы для производных:

$$f^{(k)}(\hat{x}) \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_0, x_1, \ldots, x_i)\omega_i^{(k)}(\hat{x}) \tag{17.2}$$

- При использовании полинома Лагранжа имеем:

$$f^{(k)}(\hat{x}) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\omega'_{n+1}(x_i)} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_i}\right]_{x=\hat{x}} \tag{17.3}$$

Первая формула обладает достоинствами полинома Ньютона, т.е. легко преобразуется при увеличении числа узлов, вторая же формула требует выполнения всей работы заново.

Пример 17.1. Построим формулы для приближённого вычисления производных первого и второго порядков. Заметим, что по теореме 9.1 существует $x \in (a, b)$ такой,что

$$f^{(n)}(x) = n! f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Поэтому

$$f'(x) \approx P_1'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f''(x) \approx P_2'(x) = 2\left[\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \right. \\ \left. + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right].$$

В случае равноотстоящих узлов $x_{i+1} - x_i = h = const > 0$ последнее выражение упрощается:

$$f''(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2} = \frac{1}{h^2}\big(f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)\big). \clubsuit$$

Пусть состав узлов фиксирован и требуется оценивать производные разных порядков в *одной и той же* точке $\hat{x}$. Тогда в формуле (17.3) при y_i стоят некоторые коэффициенты c_i, $i = \overline{0, n}$, *не зависящие* от $f(\cdot)$, т.е.

$$f^{(k)}(\hat{x}) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \quad c_i = c_i(x_0, x_1, \dots, x_n, \hat{x}). \tag{17.4}$$

Рассмотрим задачу о вычислении этих коэффициентов без обращения к их представлению по формулам (17.3).

§18. Метод неопределённых коэффициентов

Идея метода состоит в том, чтобы выбрать $\{c_i\}$ в формуле (17.4) так, чтобы эта формула была *точной* на некотором множестве функций. Таким классом может служить класс полиномов $\mathcal{P}_n$, степени не выше n. В самом деле, если $f(\cdot) = Q_m(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ и $m \le n$ то $L_n^{(k)}(\cdot) = Q_n^{(k)}(\cdot)$ *(по теореме единственности!)*.

Поэтому подставляя в формулы (17.4) $f(x) = x^s$, $s = \overline{0, n}$ и учитывая, что в этом случае имеет место *точное равенство*, получаем:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 1: \quad \sum_{i=0}^{n} c_i = 0 \\
&f(x) = x: \quad \sum_{i=0}^{n} c_i x_i = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f(x) = x^k: \quad \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k = k! \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f(x) = x^n: \quad \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^n = \frac{n!}{(n-k)!}\hat{x}^{n-k}
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

Определитель системы есть определитель Вандермонда, а потому СЛАУ (18.1) имеет единственное решение.

§19. Методическая погрешность формул численного дифференцирования

Пусть $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ – узлы интерполирования, причём $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ – интерполируемая функция, $P_n(\cdot)$ – интерполяционный полином и $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ – методическая погрешность интерполирования. Тогда интересующая нас методическая погрешность численного дифференцирования суть $R_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)$. Получим представление для последней величины.

Поскольку $R_n(\cdot) \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ и $R_n(x_i) = 0, \quad i = \overline{0, n}$, то можно k раз применить теорему Ролля, $k \le n$. При этом расположение нулей производных погрешности $R_n(x)$ можно охарактеризовать с помощью следующей таблицы:

$R_n(x)$	$R_n^{(1)}$	$R_n^{(2)}$	$\dots$	$R_n^{(k)}$
x_0				
x_1	(x_0, x_1)			
x_2	(x_1, x_2)	(x_0, x_2)		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_k	(x_{k-1}, x_k)	(x_{k-2}, x_k)	$\dots$	(x_0, x_k)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
x_n	(x_{n-1}, x_n)	(x_{n-2}, x_n)	$\dots$	(x_{n-k}, x_n)

В последнем столбце таблицы указаны интервалы (x_i, x_{i+k}), в каждом из которых в силу теоремы Ролля лежит по крайней мере один из корней $\{\xi_i\}$ производной $R_n^{(k)}(x)$. Ясно, что точки $\{\xi_i\}_{i=0}^{n-k}$ зависят от функции $f(\cdot)$, узлов интерполирования $\{x_i\}$, но не зависят от x.

Введём в рассмотрение функцию

$$F(z) = R_n^{(k)}(z) - \alpha \prod_{i=0}^{n-k} (z - \xi_i)$$

и заметим, что $F(\xi_i) = 0$ для $i = \overline{0, n-k}$. Для произвольного фиксированного $x \neq \xi_i$, $i = \overline{0, n-k}$ выберем $\alpha = \alpha(x)$ так, чтобы $F(x) = 0$. Тогда $F(\cdot)$ имеет $(n-k+2)$ различных корней и можно опять воспользоваться теоремой Ролля $(n-k+1)$ раз, поскольку $F(\cdot)$ имеет $(n-k+1)$-ю непрерывную производную. Это приводит к заключению, что $F^{(n-k+1)}(z)$ имеет нуль $\eta(x)$ на отрезке, содержащем точки $x, \xi_0, \dots \xi_{n-k}$. Вычисляя указанную производную, получим:

$$0 = F^{(n-k+1)}(\eta) = R^{(n+1)}(\eta) - \alpha(n-k+1)! = f^{(n+1)}(\eta) - \alpha(n-k+1)!,$$

откуда $\alpha = \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n-k+1)!}$. Подставляя найденное значение α в равенство $F(x) = 0$, приходим к формуле

$$R^{(k)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta(x))}{(n-k+1)!} \prod_{i=0}^{n-k} (x - \xi_i). \tag{19.1}$$

Нетрудно видеть, что эта формула остается верной и для $x = \xi_i$, причём η можно считать любой точкой из (a, b).

§20. Анализ полной погрешности формул численного дифференцирования

Рассмотрим простейший случай – вычисление производной первого порядка таблично заданной функции и полную погрешность (без учёта погрешностей округления) изложенного в предыдущем пункте интерполяционного подхода. Будем считать, кроме того, что таблица содержит только два узла и вычисляется первая производная функции. Эти предположения значительно упрощают рассмотрение вопроса, позволяя сделать, тем не менее, принципиальные выводы.

Введём следующие обозначения:

- $r^F_{nk}(\hat{x})$ – полная погрешность вычисления производной k-го порядка в точке $\hat{x}$ при использовании интерполяционного полинома n-ой степени;
- $r^M_{nk}(\hat{x})$ – методическая и
- $r^N_{nk}(\hat{x})$ – неустранимая погрешности.

Как известно, имеет место оценка:

$$|r^F_{nk}(\hat{x})| \le |r^M_{nk}(\hat{x})| + |r^N_{nk}(\hat{x})|. \tag{20.1}$$

Итак, пусть

$$n = 1,\ k = 1,\ x_1 = x_0 + h,\ y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1).$$

Тогда в этом частном случае

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h), \quad P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

и в соответствии с интерполяционным подходом, имеем:

$$f'(\hat{x}) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Выпишем методическую погрешность по формуле (19.1), которая в данном случае $n = 1,\ k = 1$ имеет вид:

$$r_{11}^M(\hat{x}) = f''(\xi)(x - \xi_0) \tag{20.2}$$

Учтём неустранимую погрешность: пусть табличные значения содержат погрешности ε_0 и ε_1: $\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2$. Тогда

$$r_{11}^N(\hat{x}) = \frac{\tilde{y}_1 - \tilde{y}_0}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{h}. \tag{20.3}$$

Подставляя полученные представления методической и неустранимой погрешностей в (20.1), получаем:

$$|r_{11}^F(x_0)| \leq M_2 h + \frac{2\varepsilon}{h},\ M_2 = \sup_{[a,b]} |f''(x)|,\ \varepsilon = \max\{|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|\}. \tag{20.4}$$

Обозначим через $\sigma(h)$ правую часть оценки (20.4):

$$\sigma(h) = M_2 h + \frac{2\varepsilon}{h}. \tag{20.5}$$

Очевидно, что $\sigma(h) \to \infty$ при $h \to 0$ и $\sigma(h) \to \infty$ при $h \to \infty$. Следовательно, на интервале $(0, \infty)$ существует минимум функции $\sigma(h)$ и достигается он, как легко видеть, в точке $\bar{h} = \sqrt{2\varepsilon M_2^{-1}}$. Отсюда следует вывод: *для минимизации полной погрешности формул численного дифференцирования необходимо согласовать шаг сетки с уровнем неустранимой погрешности и свойствами функции* (выраженными в данном случае в константе M_2).

§21. Обратное интерполирование

Пусть для таблично заданной на $[a, b]$ функции $f(\cdot)$ поставлена задача определения точки $\hat{x}$ такой, что в этой точке $f(\hat{x}) = \hat{y}$, где $\hat{y}$ – заданное значение. Будем считать, что $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ и $\hat{y} \in [c, d]$, где $c = \min_i\{y_i\}$, $d = \max_i\{y_i\}$. При сделанных предположениях относительно $f(\cdot)$ можно гарантировать существование искомой точки $\hat{x}$ (теорема Коши).

Рассмотрим два возможных случая:

- пусть $f(\cdot)$ монотонна на $[a, b]$. В этом случае для $f(\cdot)$ *существует обратная функция* $F(\cdot):\ F\big(f(x)\big) \equiv x,\ x \in [a, b]$. В этом случае числа $\{y_i\}$, $i = \overline{0, n}$ могут быть приняты за узлы интерполирования для функции $F(\cdot)$, а $\{x_i\}$, $i = \overline{0, n}$ – в качестве её значений в указанных узлах. Пусть $L_n(\cdot)$ – полином Лагранжа для $F(\cdot)$; тогда в качестве приближения к точке $\hat{x}$ примем $\tilde{x} = L_n(\hat{y})$, а методическая погрешность может быть представлена в виде:

$$|\hat{x} - \tilde{x}| = |F(\hat{y}) - L_n(\hat{y})| = \frac{F^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\hat{y}).$$

- Если же $f(\cdot)$ не является монотонной на $[a, b]$, то можно, заменив $f(\cdot)$ на её интерполяционный полином $L_n(\cdot)$, решать алгебраическое уравнение

$$L_n(x) = \hat{y}.$$

Пусть $\tilde{x}$ – вещественное решение этого уравнения (*которое существует ввиду сделанного предположения* $\hat{y} \in [c, d]$): $L_n(\tilde{x}) = f(\hat{x}) = \hat{y}$. Оценим методическую погрешность такого решения задачи, считая для определённости, что $\tilde{x} \le \hat{x}$.

С одной стороны по теореме Лагранжа

$$f(\tilde{x}) - f(\hat{x}) = (\tilde{x} - \hat{x})f'(\eta),\ \eta \in [\tilde{x}, \hat{x}].$$

С другой стороны имеем :

$$f(\tilde{x}) - f(\hat{x}) = f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\tilde{x}),\ \xi \in [a, b].$$

Приравнивая правые части двух последних равенств, заключаем, что

$$\tilde{x} - \hat{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f'(\eta)(n+1)!}\omega_{n+1}(\tilde{x}) \quad \text{при } f'(\eta) \neq 0. \tag{21.1}$$

Пусть известны оценки: $|f'(\eta)| \ge m_1 \neq 0$ на $[\tilde{x}, \hat{x}]$ и $f^{(n+1)}(\xi) \le M_{n+1}$ на $[a, b]$. Тогда из (21.1) получаем:

$$|\tilde{x} - \hat{x}| \le \frac{M_{n+1}}{m_1(n+1)!}|\omega_{n+1}(\tilde{x})|. \tag{21.2}$$

§22. Интерполирование функций многих переменных. Постановка и особенности задачи

Пусть $f(\cdot)$ – скалярная функция векторного аргумента, определённая в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^k$ и пусть $\{x^i\}$, $i = \overline{0,n}$ набор векторов из D, которые мы будем называть *узлами*.

Задача. В узлах известны значения некоторой функции. Требуется построить *алгебраический* полином k переменных минимальной степени, который в заданных узлах совпадает с заданными значениями функции. ♣

Дальнейшее рассмотрение вопроса с целью снижения громоздкости записей проведём в предположении $k = 2$.

Итак, пусть (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ узлы, в которых заданы значения функции $z_i = f(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$. Искомый полином запишем в виде:

$$P_m(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j. \tag{22.1}$$

Для определения коэффициентов полинома $P_m(x,y)$ имеем СЛАУ:

$$P_m(x_i, y_i) = z_i, \; i = \overline{0,n}. \tag{22.2}$$

Рассмотрим особенности этой задачи при $n = 2$, $m = 1$, т.е. считаем, что

$$P_1(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y.$$

Тогда уравнения (22.2) примут вид:

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10}x_0 + a_{01}y_0 &= z_0 \\ a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y_1 &= z_1 \\ a_{00} + a_{10}x_2 + a_{01}y_2 &= z_2. \end{aligned}$$

Для разрешимости этой системы при *любой* правой части необходимо потребовать, чтобы её определитель был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Последнее же означает, что указанные узлы (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ *не должны лежать на одной прямой*. Таким образом, возникло первое принципиальное отличие задач интерполирования функции многих переменных и функции одной переменной: *узлы в задаче интерполирования функции многих переменных не могут быть расположены произвольно*.

Так, при $n = 6$ приходится рассматривать вопрос о принадлежности этих узлов одной кривой второго порядка, при $n = 10$ – третьего порядка и т.д., что довольно трудоёмко. Поэтому обычно данную задачу интерполирования решают при специальном расположении узлов, относительно которых заранее известно, что (22.2) разрешима относительно коэффициентов искомого полинома.

Далее, СЛАУ (22.2) в общем случае является системой с

$$1 + 2 + \cdots + (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$$

неизвестными, а уравнений в системе $(n+1)$, поэтому не для любого числа узлов n можно обеспечить равенство

$$\frac{(m + 1)(m + 2)}{2} = n + 1,$$

а это означает, что *даже если решение задачи существует, оно не является, вообще говоря, единственным.*

Третья особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что *нет аналога теоремы Ролля для функций многих переменных и это затрудняет оценку методической погрешности в рассматриваемой задаче интерполирования.*

§23. Линейная интерполяция

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы узлы $\{x^i\}_{i=0}^n$ и в них известны значения функции $f(x^i) = f_i$. Рассмотрим задачу построения полинома первой степени n переменных, совпадающего в этих узлах с заданными значениями функции, т.е.

$$P_1(x) = \alpha_0 + a^T x, \quad P_1(x^i) = f_i, \tag{23.1}$$

т.е. имеем СЛАУ

$$\alpha_0 + a^T x^i = f_i, \quad i = \overline{0, n}. \tag{23.2}$$

Вычитая из последних n уравнений первое, рассмотрим СЛАУ

$$a^T(x^i - x^0) = f_i - f_0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{23.3}$$

Обозначив $q^i = x^i - x^0$, сформулируем теорему:

Теорема 23.1. *Для того чтобы задача линейного интерполирования была однозначно разрешима для любой функции* $f(\cdot)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\det\{q^1, q^2 \ldots, q^n\} \neq 0$. ♣

§24. Квадратичное интерполирование

Рассмотрим задачу построения квадратичной функции

$$P_2(x) = \alpha + 2a^T x + x^T Ax, \quad A^T = A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \tag{24.1}$$

которая совпадала бы со значениями заданной функции $f(\cdot)$ в

$$1 + n + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

узлах (именно столько параметров имеет функция (24.1)).

В качестве узлов возьмём векторы x^0 и

$$\begin{cases} x^i = x^0 + h_1 e^i \\ x^{n+i} = x^0 + h_2 e^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad h_1 \neq h_2. \end{cases} \tag{24.2}$$

Здесь $e^i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, \ldots, 0)^T$. Записав функцию (24.1) в виде

$$P_2(x) = P_2(x^0) + 2(Ax^0 + a)^T(x - x^0) + (x - x^0)^T A(x - x^0),$$

подставим сюда указанные узлы и учтём, что

$$P_2(x^k) = f(x^k) = f_k, \quad k = \overline{0, 2n}.$$

Получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} f_i = f_0 + 2h_1 w_i + h_1^2 a_{ii}, \\ f_{n+i} = f_0 + 2h_2 w_i + h_2^2 a_{ii}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{24.3}$$

Здесь обозначено

$$w_i = (Ax^0 + a)^T e^i. \tag{24.4}$$

Определитель системы (24.3) отличен от нуля при $h_1 \neq h_2$, т.к.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2h_1 & h_1^2 \\ 2h_2 & h_2^2 \end{vmatrix} = 2h_1 h_2 (h_2 - h_1).$$

Следовательно, из (24.3) однозначно определяется набор величин $\{a_{ii}, w_i\}$, $i = \overline{1,n}$. Далее рассмотрим систему узлов

$$x^{ij} = x^0 + h_3 e^i + h_4 e^j, \quad i \neq j, \; h_3 h_4 \neq 0,$$

в которых *заданы* значения функции f_{ij}. Условие совпадения значений заданной $f(\cdot)$ и квадратичной $P_2(\cdot)$ функций в узлах даёт соотношения:

$$f_{ij} = f_0 + 2h_3 w_i + 2h_4 w_j + h_3^2 a_{ii} + h_4^2 a_{jj} + 2h_3 h_4 a_{ij},$$

откуда находятся внедиагональные элементы $\{a_{ij}\}$, $i \neq j$ матрицы A, а из соотношений (24.4) находим компоненты вектора a:

$$a_i = w_i - Ax^0 \cdot e^i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Остаётся используя, например, значение $f_0 = f(x_0)$ выразить α:

$$\alpha = f_0 - 2a^T x^0 - x^0 \cdot Ax^0.$$

Пример 24.1. (квадратичное интерполирование).

Построим квадратичный интерполяционный полином

$$P_2(x) = \alpha + 2a^T x + x^T Ax, \; a = (a_1, \; a_2)^T, \; x = (u, v)^T.$$

$$A = \{a_{i,j}\}, \; i, j = 1, 2$$

для функции $f(x) = u^2 v$. Поскольку искомый полином имеет 6 параметров, то для их определения следует взять 6 узлов.

В качестве узлов интерполирования берём узлы вида (24.2), принимая $x^0 = (0,0)^T$, $e^1 = (1,0)^T$, $e^2 = (0,1)^T$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $n = 2$ и в данном случае получаем $x^1 = (1,0)$, $x^2 = (0,1)^T$, $x^3 = (2,0)^T$, $x^4 = (0,2)^T$.

Нетрудно убедиться, что $f_i = f(x^i) = 0$. Система уравнений для вспомогательных параметров $\{w_i\}$ и диагональных элементов матрицы A имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = 2w_i + a_{ii}, \\ 0 = 4w_i + 4a_{ii}, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

откуда получаем $w_i = 0, \;\; a_{ii} = 0, \; i = 1, 2$.

В качестве последнего шестого узла возьмём

$$x^{12} = x^0 + h_3 e^1 + h_4 e^2 \text{ при } h_1 = 1, \; h_2 = 2,$$

т.е. $x^{12} = (1, 2)^T$. Вычислив $f_{12} = f(x^{12}) = 2$, находим $a_{12} = a_{21}$:

$$f_{12} = 2 = 2 \cdot 2 \cdot a_{12}, \quad a_{12} = \frac{1}{2}.$$

Компоненты вектора $a = (a_1, a_2)^T$ находим из $w_i = (Ax^0 + a)^T e^i$: $a_1 = 0, \; a_2 = 0$. Для α получаем: $\alpha = f_0 - 2a^T - x^0 \cdot Ax^0 = 0$. Тем самым искомый ИП имеет вид: $P_2(x) = uv$. ♣

§25. Интерполирование функции двух переменных по прямоугольной таблице

Пусть задана таблица узлов и значений функции $z = f(x, y)$:

x \ y	y_0	y_1	$\ldots$	y_m
x_0	z_{00}	z_{01}	$\ldots$	z_{0m}
x_1	z_{10}	z_{11}	$\ldots$	z_{1m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	z_{n0}	z_{n1}	$\ldots$	z_{nm}

Зафиксируем столбец, соответствующий столбцу с ординатой y_s и построим интерполяционный полином по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и указанному столбцу:

$$P_n(x, y_s) = \sum_{i=0}^{n} a_{is} x^i, \quad s = \overline{0, m}. \tag{25.1}$$

Пусть $a_0(y), a_1(y), \ldots, a_n(y)$ – полиномы, принимающие значения

$$\{a_{0s}\}_{s=0}^{m}, \quad \{a_{1s}\}_{s=0}^{m}, \quad \ldots, \quad \{a_{ns}\}_{s=0}^{m},$$

в узлах $y_0, y_1, \ldots, y_m$ соответственно. Представим их в виде

$$a_i(y) = \sum_{j=0}^{m} b_{ij} y^j.$$

Очевидно, что полином $P_{n+m}(\cdot,\cdot)$ степени $(n+m)$

$$P_{n+m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_i(y)x^i=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}x^i y^j$$

удовлетворяет условиям задачи.

Замечание 25.1. Методическая погрешность замены функции, заданной прямоугольной таблицей, её интерполяционным полиномом, полученным выше, может быть записана в виде (при условии достаточной гладкости интерполируемой функции)

$$r_{nm}(x,y)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\cdot\frac{\partial^{n+1}f(\xi,y)}{\partial x^{n+1}}+\frac{\omega_{m+1}(y)}{(m+1)!}\cdot\frac{\partial^{m+1}f(x,\eta)}{\partial y^{m+1}}-$$
$$-\frac{\omega_{n+1}(x)\,\omega_{m+1}(y)}{(n+1)!\,(m+1)!}\cdot\frac{\partial^{m+n+2}f(\mu,\nu)}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+1}}.$$

Здесь ξ,η,μ,ν – из интервалов (x_0,x_n) и (y_0,y_m).

Пример 25.1. Пусть задана прямоугольная таблица значений функции $z=f(x,y)$:

x \ y	−1	0	1
−1	4	3	6
0	2	0	2
1	4	3	6

Интерполяционные полиномы для столбцов, как легко видеть, имеют вид:

$$l_1(x)=2x^2+2;\quad l_2(x)=3x^2;\quad l_3(x)=4x^2+2.$$

Теперь построим интерполяционные полиномы $q_i(y)$, $i=0,1,2$ по таблицам, в которых собраны коэффициенты построенных полиномов $l_i(x)$, $i=0,1,2$ при x^0, x, x^2 соответственно.

Они имеют вид:

y	−1	0	1
q_0	2	0	2

,

y	−1	0	1
q_1	0	0	0

,

y	−1	0	1
q_2	2	3	4

.

Решения этих задач легко выписываются:

$$q_0(y) = 2y^2, \; q_1(y) = 0, \; q_2(y) = y + 3,$$

после чего строится искомый интерполяционный полином $P(x, y)$:

$$P(x, y) = q_2(y)x^2 + q_1(y)x + q_0 = 2y^2 + 3x^2 + x^2 y. \; \clubsuit$$

§26. Понятие сплайна. Базис пространства сплайнов

Пусть на $[a, b] \in \mathbb{R}$ задана сетка $\Delta_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, причём $x_i < x_{i+1}$ и $x_0 = a$, $x_N = b$. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество полиномов с действительными коэффициентами степени не выше n. Обозначим через $\mathbb{C}^0[a, b]$ множество непрерывных на $[a, b]$ функций.

Определение 26.1. Функция $s_{n,k}(x)$, определённая на $[a, b]$, называется сплайном степени n гладкости k на сетке Δ_N, если она удовлетворяет условиям:

1) $s_{n,k}(x) \in \mathcal{P}_n$, при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$

2) $s_{n,k}(x) \in \mathbb{C}^k[a, b], \quad 0 \le k \le n \quad \clubsuit$.

Непосредственно из определения получаем

Следствие 26.1. *При заданных n, k, Δ_N множество сплайнов образует линейное пространство $\mathcal{S}_{n,k}(\Delta_N)$. При фиксированной сетке Δ_N имеет место соотношение:*

$$\mathcal{S}_{m,p} \subset \mathcal{S}_{n,q} \; \textit{при} \; \begin{cases} m \le n \\ p \ge q. \; \clubsuit \end{cases}$$

Следствие 26.2. *При $k = n$ имеет место $\mathcal{S}_{n,n} = \mathcal{P}_n$.* $\clubsuit$

Введём в рассмотрение «срезки» степенных функций вида:

$$(x - x_i)_+^j = \begin{cases} (x - x_i)^j & \text{при} \quad x \ge x_i \\ 0 & \text{при} \quad x < x_i. \end{cases} \tag{26.1}$$

Очевидно, что $(x - x_i)_+^\nu \in \mathbb{C}^{\nu - 1}[a, b]$.

Теорема 26.1. *Линейное пространство сплайнов* $\mathcal{S}_{n,k}(\Delta_N)$ *имеет размерность* $(n+1)+(N-1)(n-k)$. *В качестве базиса этого пространства можно взять набор функций*

$$\begin{cases} x^j, & j=\overline{0,n} \\ (x-x_i)_+^\nu, & k+1\le\nu\le n,\ i=\overline{1,N-1}. \clubsuit \end{cases} \tag{26.2}$$

Доказательство. Покажем сначала, что сплайн $s_{n,k}(x)\in\mathcal{S}_{n,k}$ может быть представлен в виде линейной комбинации указанных выше функций (26.2):

$$s_{n,k}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\nu=k+1}^{n}a_{i\nu}(x-x_i)_+^\nu. \tag{26.3}$$

Доказательство проведём методом математической индукции по отрезкам $[x_0,x_i]$, $i=\overline{1,N}$.

1) Пусть $x\in[x_0,x_1]$. На этом отрезке сплайн суть полином степени не выше n, а поэтому он записывается в виде (26.3) при должном выборе коэффициентов a_ν, поскольку все слагаемые под знаком двойной суммы равны нулю по определению функций (26.1). Тем самым создана база для индукции.

2) Пусть формула (26.3) верна для $x\in[x_0,x_j]$, т.е.

$$s_{n,k}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu+\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{\nu=k+1}^{n}a_{i\nu}(x-x_i)_+^\nu. \tag{26.4}$$

Покажем, что она верна и для $x\in[x_0,x_{j+1}]$. Для этого рассмотрим отрезок $[x_j,x_{j+1}]$. На нём сплайн является по определению полиномом $s_{n,k}(\cdot)\in\mathcal{P}_n$. Пусть

$$s_{n,k}(x)=Q_n^{j+1}(x).$$

На интервале $[x_{j-1},x_j]$ он также является полиномом

$$s_{n,k}(x)=Q_n^{j}(x),$$

причём согласно индуктивному предположению на этом интервале для него верно представление (26.4). На $[x_j, x_{j+1}]$ можем записать:

$$\begin{aligned} Q_n^{j+1}(x) - Q_n^j(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} a_{j\nu}(x - x_j)^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} a_{j\nu}(x - x_j)_+^\nu , \end{aligned} \tag{26.5}$$

причём из условий согласованности в узле x_j получаем:

$$\frac{d^m}{dx^m} Q_n^{j+1}(x)\big|_{x=x_j} = \frac{d^m}{dx^m} Q_n^j(x)\big|_{x=x_j}, \quad m = \overline{0, k}, \tag{26.6}$$

откуда следует $a_{j0} = 0,\ a_{j1} = 0, \ldots, a_{jk} = 0$. С учётом (26.5) получаем:

$$Q_n^{j+1}(x) = Q_n^j(x) + \sum_{\nu=k+1}^{n} a_{j\nu}(x - x_j)_+^\nu,$$

что доказывает справедливость формулы (26.3).

Остаётся доказать линейную независимость функций (26.2), что делается аналогично индукцией по отрезкам $[x_0, x_i]$, $i = \overline{1, N}$. Действительно, пусть $s_{n,k}(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. При условии $x \in [x_0, x_1]$ имеем

$$s_{n,k}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_\nu = 0,\ \nu = \overline{0, n}.$$

Тогда на следующем отрезке $x \in [x_0, x_2]$

$$s_{n,k}(x) = \sum_{\nu=k+1}^{n} a_{1\nu}(x - x_1)^\nu \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{1\nu} = 0,\ \nu = \overline{k+1, n}.$$

Дальнейшее очевидно.

Общее число функций в системе (26.2) и даёт размерность пространства $\mathcal{S}_{n,k}$, указанную в теореме. ♣

§27. Интерполирование сплайнами $s_{1,0}(\cdot)$

Пусть на $[a, b]$ задана сетка $\delta_N = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N\}$, $\xi_0 = a$, $\xi_N = b$ в узлах которой известны значения заданной функции $f(\cdot)$: $f_i = f(\xi_i)$, $i = \overline{0, N}$.

На том же интервале и той же сетке $\Delta_N = \delta_N$ зададим пространство сплайнов $\mathcal{S}_{1,0}$ и поставим задачу: построить сплайн $s_{1,0}(\cdot)$ такой, что

$$s_{1,0}(\xi_i) = f_i, \quad i = \overline{0, N}.$$

В рассматриваемом случае существует единственный *интерполяционный* сплайн данного класса, удовлетворяющий заданным условиям. График этого сплайна представляет собой ломанную, соединяющую точки плоскости с координатами (x_i, f_i), $i = \overline{0, N}$.

Пусть $h_i = x_{i+1} - x_i$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ искомый сплайн можно представить в виде:

$$s_{1,0}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} f_i + \frac{x - x_i}{h_i} f_{i+1}. \tag{27.1}$$

Получим представление для методической погрешности интерполирования $r_1(x) = f(x) - s_{1,0}(x)$ сплайнами из $\mathcal{S}_{1,0}$. Поскольку на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн есть интерполяционный полином (Лагранжа), то

$$r_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad x, \xi \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{27.2}$$

Легко видеть, что

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \big|(x - x_i)(x - x_{i+1})\big| = \frac{h_i^2}{4} \quad \text{при } x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

поскольку функция под знаком модуля есть квадратный трёхчлен. Если известна оценка $|f''(x)| \le M_2$ для $x \in [a, b]$, и $h = \max\{h_i\}$, то можем записать

$$|r_1(x)| \le \frac{M_2 h^2}{8} \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

т.е. интерполяционный процесс, построенный с использованием сплайнов из $\mathcal{S}_{1,0}$, *равномерно на* $[a, b]$ *сходится к интерполируемой функции при условии* $f(\cdot) \in \mathbb{C}^2[a, b]$. Это условие гладкости необходимо для возможности использования формулы (27.2).

Замечание 27.1. Используя теорему Кантора (непрерывная на замкнутом интервале функция равномерно непрерывна на нём) нетрудно установить тот факт, что для сходимости интерполяционного процесса на основе сплайнов из $\mathcal{S}_{1,0}$ достаточно потребовать, чтобы $f(\cdot) \in \mathbb{C}[a,b]$. ♣

§28. Интерполирование сплайнами $s_{2,0}(\cdot)$

Пусть $\delta_{2m} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2m}\}$ – узлы на $[a,b]$, причём $x_0 = a$, $x_{2m} = b$ и в этих узлах заданы значения функции $f(\cdot)$. В качестве сетки для введения пространства сплайнов $\mathcal{S}_{2,0}$ возьмём

$$\Delta_m = \{x_0, x_2, \ldots, x_{2m}\}.$$

Поставим задачу: найти $s_{2,0}(\cdot)$ такой, чтобы

$$s_{2,0}(x_i) = f_i, \quad f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, 2m}. \tag{28.1}$$

Существование и единственность поставленной задачи для *любой* функции $f(\cdot)$ очевидны, ибо на каждом интервале $[x_{2i}, x_{2(i+1)}]$ сплайн $s_{2,0}(\cdot)$ совпадает с полиномом, решающим задачу интерполирования по узлам $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2(i+1)}$, $i = \overline{0, m-1}$.

Введём в рассмотрение сплайны $s^i(\cdot)$, $i = \overline{0, 2m}$, определённые условиями:

$$s^i(\cdot) \in \mathcal{S}_{2,0}, \quad s^i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{28.2}$$

С их помощью интерполяционный сплайн может быть записан в виде, вполне аналогичном записи полинома Лагранжа:

$$s_{2,0}(x) = \sum_{i=0}^{2m} s^i(x) f_i. \tag{28.3}$$

Отметим важную особенность сплайна $s^i(\cdot)$: его носитель (т.е. множество, где он отличен от нуля) сосредоточен вокруг точки x_i, поэтому добавление узлов интерполирования добавляет несколько слагаемых в представлении (28.3) интерполяционного сплайна. Графики первых трёх сплайнов $s^i(x)$ имеют вид:

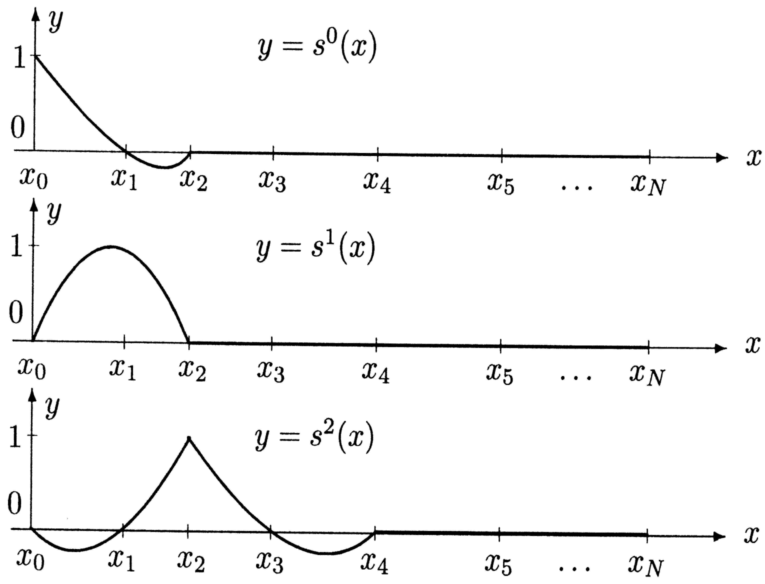

Рис. 2.

Оценим методическую погрешность $r_2(x) = f(x) - s_{2,0}(x)$, предполагая, что $f(\cdot) \in \mathbb{C}^3[a,b]$. На интервале $[x_{2i}, x_{2(i+1)}]$ сплайн совпадает с полиномом Лагранжа, поэтому на этом интервале

$$r_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2}). \tag{28.4}$$

Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max\limits_i\{h_i\}$. Тогда, при условии, что $|f'''(x)| \le M_3$ на $[a,b]$, получим

$$|r_2(x)| \le \frac{M_3 h^3}{3!}. \tag{28.5}$$

Из этой оценки следует, что *интерполяционный процесс, построенный на основе сплайнов из $\mathcal{S}_{2,0}$, равномерно на $[a,b]$ сходится к интерполируемой функции.*

Более того, производная сплайна $s_{2,0}(\cdot)$ (вне узлов, где производная может не существовать), хорошо приближает производную функции $f(\cdot)$ при малости h. Чтобы убедиться в этом, оценим методическую погрешность $r_2'(x) = f'(x) - s_{2,0}'(x)$.

Обозначим ради краткости $\alpha = x_{2i}$, $\beta = x_{2i+1}$, $\gamma = x_{2(i+1)}$. Поскольку $r_2(\alpha) = r_2(\beta) = r_2(\gamma) = 0$, то существуют $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \gamma]$, в которых $r_2'(\xi_1) = r_2'(\xi_2) = 0$. Из последнего следует опять же существование точки $\eta \in [\alpha, \gamma]$, в которой $r_2''(\eta) = 0$. Ввиду равенства $r_2'''(x) = f'''(x), \quad x \neq x_{2i} \in \Delta_m$, получаем:

$$|r_2''(x)| = \Big|\int_\eta^x r_2'''(t)dt\Big| \leq \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\eta^x |f'''(t)|dt \text{ при } x \geq \eta, \\ \displaystyle\int_x^\eta |f'''(t)|dt \text{ при } x \leq \eta \end{array} \right\} \leq$$

$$\leq \int_\alpha^\gamma |f'''(t)|dt \leq 2hM_3.$$

Аналогично $|r_2'(x)| = \left|\int_{\xi_1}^x r_2''(t)dt\right| \leq \int_\alpha^\gamma |r_2''(t)|dt \leq 4h^2M_3$, что и доказывает высказанное утверждение.

§29. Эрмитовы кубические сплайны

Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ – сетка на $[a, b]$, в узлах которой заданы значения функции $f(\cdot)$ и её первой производной. На этой же сетке зададим пространство сплайнов $\mathcal{S}_{3,1}$ и поставим задачу построения сплайна из этого пространства такого, что

$$s_{3,1}^{(r)}(x_i) = f_i^{(r)}, \quad i = \overline{0, N},\ r = 0, 1. \tag{29.1}$$

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ запишем сплайн в виде:

$$s_{3,1}(x) = \sum_{s=0}^{3} a_{is}(x - x_i)^s$$

и рассмотрим задачу (29.1):

$$s_{3,1}^{(r)}(x_j) = f_j^{(r)}, \quad j = i, i+1;\ r = 0, 1. \tag{29.2}$$

Это есть задача кратного интерполирования и потому её решение существует и единственно. Введём переменную

$$t = \frac{x - x_i}{h_i},\ h_i = x_{i+1} - x_i,\ t \in [0, 1].$$

Тогда решение задачи (29.2) может быть записано в виде:

$$\sigma(t) = s_{3,1}(x_i + h_i t) = \alpha(t)f_i + \beta(t)f_{i+1} + \gamma(t)h_i f_i' + \delta(t)h_i f_{i+1}',$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t) \in \mathcal{P}_3$ и *не зависят от номера i интервала* при условии, что эти функции являются решениями следующих задач кратного интерполирования:

$$\begin{array}{|c||c|c|}\hline t & 0 & 1 \\ \hline \alpha & 1 & 0 \\ \hline \alpha' & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c||c|c|}\hline t & 0 & 1 \\ \hline \beta & 0 & 1 \\ \hline \beta' & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c||c|c|}\hline t & 0 & 1 \\ \hline \gamma & 0 & 0 \\ \hline \gamma' & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c||c|c|}\hline t & 0 & 1 \\ \hline \delta & 0 & 0 \\ \hline \delta' & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\ ,$$

Нетрудно получить и явные выражения для этих функций:

$$\begin{array}{rcll} \alpha\,(t) & = & (1-t)^2(1+2t) \geq 0, & \beta(t) = t^2(3-2t) \geq 0, \\ \gamma(t) & = & t\,(1-t)^2 \geq 0, & \delta(t) = -t^{\,2}(1-t) \leq 0. \end{array} \qquad (29.3)$$

Лемма 29.1. *Если $f(\cdot) \in \mathbb{C}[a, b]$ и $p{\cdot}q > 0$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(\xi)\ \clubsuit$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = pf(a) + qf(b) - (p + q)f(x).$$

Имеем для неё:

$$\left.\begin{array}{rcl} \psi(a) & = & q\big(f(a) - f(b)\big) \\ \psi(b) & = & p\big(f(b) - f(a)\big) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \psi(a)\psi(b) < 0.$$

Следовательно, существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\psi(\xi) = 0$, что равносильно утверждению леммы. $\clubsuit$

Лемма 29.2. *Функции $\alpha\,(\cdot)$ и $\beta\,(\cdot)$ обладают свойством:*

$$\alpha(\cdot) + \beta(\cdot) = 1.\ \clubsuit$$

Доказательство. Утверждение леммы доказывается непосредственной проверкой с учётом формул (29.3). $\clubsuit$

Оценим методическую погрешность $R(x) = f(x) - s_{3,1}(x)$. Поскольку $x_i = x - th_i$ и $x_{i+1} = x + (1-t)h_i$, то применяя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем:

$$f_i = f(x) - th_i f'(\xi), \quad f_{i+1} = f(x) + (1 - t)h_i f'(\eta).$$

С учётом леммы 29.1 получаем для $R(x)$:

$$|R(x)| = |f(x) - \sigma(t)| = \Big|f(x) - \big(\alpha(t)\big(f(x) - th_i f'(\xi)\big) + \\ + \beta(t)\big(f(x) + (1-t)h_i f'(\eta)\big) + \gamma(t)h_i f'_i + \delta(t)h_i f'_{i+1}\big)\Big| = \\ = \Big|\delta(t)h_i f'_{i+1} + \beta(t)(1-t)h_i f'(\eta) + \gamma(t)h_i f'_i - \alpha(t)th_i f'(\xi)\Big|.$$

Сгруппировав первое слагаемое с четвёртым и третье со вторым, преобразуем их, используя для каждой пары лемму 29.2:

1. $\big(-\alpha(t)t\big)h_i f'(\xi) + \delta(t)h_i f'_{i+1} = h_i\big(-\alpha(t)t + \delta(t)\big)f'(\hat{\xi})$;
2. $\beta(t)(1-t)h_i f'(\eta) + \gamma(t)h_i f'_i = h_i\big(\beta(t)(1-t) + \gamma(t)\big)f'(\hat{\eta})$.

Здесь $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in (a,b)$. Заметив, что

$$\big(\alpha(t)t - \delta(t)\big) = \beta(t)(1-t) + \gamma(t) = t(1-t)(1+2t-2t^2) \equiv \varphi(t),$$

получаем такую оценку для $R(x)$:

$$|R(x)| \le 2h_i|\varphi(t)|M_1, \tag{29.4}$$

где $M_1 \ge |f'(x)|$, $x \in [a,b]$. Нетрудно убедиться, что

$$\psi(z) = \varphi(z+1/2) = (1/4 - z^2)(3/2 - 2z^2), \quad z \in [-1/2, 1/2],$$

откуда следует, что $\psi(z) \ge 0$ и $\min\limits_{[-1/2,1/2]} \psi(z) = 3/8$. Поэтому оценка (29.4) принимает вид

$$|R(x)| \le \frac{3}{4}hM_1, \ x \in [a,b], \qquad \text{где } h = \max_i h_i.$$

§30. Интерполирование сплайнами $s_{3,2}(\cdot)$

Для краткости обозначим $s_{3,2}(\cdot) = s(\cdot)$ и рассмотрим следующую задачу: в узлах сетки $\Delta_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, $x_0 = a$, $x_N = b$ заданы значения функции $f(x_i) = f_i$. Построить сплайн $s(\cdot) \in \mathcal{S}_{3,2}$, удовлетворяющий условиям:

$$s^{(k)}(x_i - 0) = s^{(k)}(x_i + 0), \quad i = \overline{1, N-1}, \ k = 0,1,2; \\ s(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, N}.$$

Всего уравнений относительно параметров сплайна $s(\cdot)$ (число которых $4N$) имеем $(4N-2)$. Поэтому обычно задают ещё два дополнительных (*краевых*) условия, наиболее распространенные из которых имеют вид:

1. $s'(a) = f'(a), \quad s'(b) = f'(b);$
2. $s''(a) = f''(a), \quad s''(b) = f''(b);$
3. $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) \quad k = 1, 2;$
4. $s'''(x_i - 0) = s'''(x_i + 0), \quad i = 1, N-1.$

Обозначим $s'(x_i) = m_i$, $i = \overline{1, N-1}$. Тогда $s(\cdot)$ можно рассматривать как эрмитов кубический сплайн и тогда $s(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= s(x_i + h_i t) = \alpha(t) f_i + \beta(t) f_{i+1} + \gamma(t) h_i m_i + \delta(t) h_i m_{i+1} = \\
&= (1-t)^2(1+2t) f_i + t^2(3-2t) f_{i+1} + \\
&+ t(1-t)^2 m_i h_i - t^2(1-t) h_i m_{i+1}.
\end{aligned}$$

Выберем параметры m_i, $i = \overline{1, N-1}$ так, чтобы было выполнено включение $s(\cdot) \in \mathbb{C}^2[a, b]$:

$$s''(x) = \frac{6(1-2t)(f_{i+1} - f_i)}{h_i^2} + \frac{2\big((3t-2)m_i + (3t-1)m_{i+1}\big)}{h_i},$$

$$s''(x_i + 0) = s''(x)\Big|_{t=0} = \frac{6(f_{i+1} - f_i)}{h_i^2} + \frac{2(-2m_i - m_{i+1})}{h_i}.$$

Чтобы получить $s''(x_i - 0)$ по выписанной формуле, следует заменить в ней i на $i-1$ и положить $t = 1$:

$$s''(x_i - 0) = \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_{i-1}^2} + \frac{2(m_{i-1} + 2m_i)}{h_{i-1}}.$$

Условие непрерывности $s''(\cdot)$ в точке x_i даёт:

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} =$$
$$= 3\Big(\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\Big) \equiv c_i, \ i = \overline{1, N-1}$$

Здесь обозначено $\mu_i = \dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$, $\lambda_i = 1-\mu_i$.
К полученной системе следует добавить краевые условия. Так, для краевых условий первого типа получаем СЛАУ для определения $m_i,\ i=\overline{0,N}$:

$$\begin{aligned} &m_0 = f'_0,\\ &\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i,\ i=\overline{1,N-1},\\ &m_N = f'_N. \end{aligned}$$

Отметим, что полученная система есть СЛАУ с диагональным преобладанием, а поэтому решение её существует и единственно.

Приведём без доказательства оценку методической погрешности интерполирования с помощью рассмотренных сплайнов для $f(\cdot)\in\mathbb{C}^1[a,b]$:

$$\max_{[a,b]}|f(x)-s(x)| \le \frac{7}{4}M_1 h,$$

где M_1 и h те же, что и в предыдущем пункте.

§31. Интерполирование периодических функций с помощью тригонометрических полиномов

Пусть $f(\cdot)$ периодическая на $(-\infty < x < -\infty)$ функция. Путём линейной замены независимой переменной этот период можно сделать равным $T=2\pi$. В этом случае функцию $f(\cdot)$ целесообразно интерполировать тригонометрическим полиномом

$$Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n}(a_k\cos kx + a_k\sin kx) \tag{31.1}$$

так, чтобы

$$Q_n(x_i) = f(x_i), \quad i=\overline{0,2n} \tag{31.2}$$

где $0 \le x_0 < x_1 < \ldots < 2\pi$ – узлы в задаче интерполирования.

Система уравнений (СЛАУ) для определения искомых коэффициентов $\{a_k\}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&y_0 = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n}(a_k \cos kx_0 + a_k \sin kx_0),\\
&y_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n}(a_k \cos kx_1 + a_k \sin kx_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{2n} = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n}(a_k \cos kx_{2n} + a_k \sin kx_{2n}).
\end{aligned}
\tag{31.3}
$$

Определитель этой системы

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} =
$$

$$
= 2^{n^2} \prod_{0 \le p < q \le 2n} \sin \frac{x_q - x_p}{2}
$$

и поэтому отличен от нуля для системы точек $0 < x_q - x_p < 2\pi$, в силу чего данная задача имеет решение, и притом единственное.

Для построения $Q_n(x)$ возьмём произвольную точку x, не совпадающую с узлами $\{x_i\}$, $i = \overline{0, 2n}$ и для этих $2n{+}2$ точек составим систему из $2n + 2$ уравнений

$$
\begin{aligned}
&Q_n(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0\\
&f(x_0) - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = 0\\
&f(x_1) - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_1 + b_k \sin kx_1) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f(x_{2n}) - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_{2n} + b_k \sin kx_{2n}) = 0,
\end{aligned}
$$

линейных и однородных относительно коэффициентов $c = 1$ при $Q_n(x)$, $f(x_k)$ и $\{a_k,\ b_k,\ k = \overline{0,2n}\}$. Эта система, очевидно, имеет ненулевое решение и поэтому её определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} Q_n(x) & 1 & \cos x & \sin x & \dots & \cos nx & \sin nx \\ f(x_0) & 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ f(x_1) & 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_{2n}) & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \dots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая этот определитель по элементам первого столбца и разрешая полученное уравнение относительно $Q_n(x)$, после упрощения находим искомый тригонометрический полином $(y_i = f(x_i))$

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} y_i \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}\dots\sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2}\dots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_i-x_0}{2}\sin\frac{x_i-x_1}{2}\dots\sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\dots\sin\frac{x_i-x_{2n}}{2}}$$

§32. Задачи по теме

Для полинома $P_4(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$. решить задачи:

1. Построить интерполяционный полином для $P_4(\cdot)$ по узлам:
   - (0,1,2);
   - (-2,0,1,2);
   - (-2,-1,0,1,2).
2. Решить задачу кратного интерполирования для указанного выше полинома $P_4(\cdot)$ по данным: $P_4(-1), P_4(0), P_4'(-1), P_4'(0)$.
3. Построить для $y(\cdot) = P_4(\cdot)$ интерполяционный сплайн $s_{2,0}(\cdot)$, заданный на сетке $(-2, 0, 2)$ с узлами интерполирования $(-2, -1, 0, 1, 2)$.

Решить указанные ниже задачи интерполирования функции двух переменных:

1. Провести квадратичное интерполирование для функции двух переменных $F(x, y) = x^3 + y^3 + xy$.

2. Для функции $f(x,y) = x^2 + y$ решить задачу интерполирования по прямоугольной таблице, взяв в качестве узлов $x_i, y_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = \overline{1,3}$.

Перейти к оглавлению на странице: 79

ГЛАВА 2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§1. Линейная задача наименьших квадратов

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана некоторая функция $f(\cdot)$, причём её значения $\{y_i = f(x_i)\}$ в узлах сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ известны с погрешностями $\{\varepsilon_i\}$, то есть вместо набора значений $\{y_i\}$ имеем набор $\{\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i\}$. (Далее под $\{y_i\}$ будем понимать заданные значения функции, т.е. с погрешностями, вводя обозначение $\tilde{y}_i$ лишь в случае необходимости). Пусть, кроме того, на $[a,b]$ определены функции $\varphi_j(\cdot) \in \Phi$, $\ j = \overline{0,m}$.

Введём в рассмотрение обобщённый полином

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x).$$

Пусть a – вектор коэффициентов полинома $P_m(\cdot)$, y – вектор значений функции $f(\cdot)$ и, наконец, $\varphi(\cdot)$ – вектор-функция, составленная из значений $\{\varphi_i(x)\}$:

$$\begin{aligned}
&a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T,\\
&y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T,\\
&\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))^T,
\end{aligned}$$

Введём также функции

$$\sigma(a,y) = \sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2, \quad \delta(a,y) = \sqrt{\frac{\sigma(a,y)}{n+1}}.$$

Функцию $\delta(a,y)$ назовём *среднеквадратичным уклонением* обобщённого полинома $P_m(\cdot)$ от функции $f(\cdot)$ на системе узлов $\{x_i\}$. Отказываясь теперь от условия $P_m(x_i) = y_i$, $\ i = \overline{0,n}$, поставим задачу так: *найти обобщённый полином $\bar{P}_m(\cdot) = \bar{a}^T \varphi(\cdot)$, для которого среднеквадратичное уклонение минимально*:

$$\delta(\bar{a}, y) = \min_a \delta(a,y).$$

Поставленную здесь задачу называют *линейной задачей метода наименьших квадратов* или просто методом наименьших квадратов (МНК). Если искомый полином существует, то будем называть его *многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения*, для экономии места – МНСП.

Отметим, что минимум функций $\sigma(\cdot)$ и $\delta(\cdot)$ достигается *на одном и том же векторе* $\bar{a}$, поэтому фактически будем вести минимизацию функции $\sigma(a, y)$, а не $\delta(\cdot)$.

Простейший подход к решению задачи – использование необходимых условий в задаче поиска экстремума для дифференцируемой функции:

$$\frac{\partial \sigma(a, y)}{\partial a_k}\Big|_{a=\bar{a}} = 0, \quad k = \overline{0, m}. \tag{1.1}$$

В дополнение к уже введённым ранее обозначениям примем также следующее:

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0), & \varphi_1(x_0), & \dots & \varphi_m(x_0), \\ \varphi_0(x_1), & \varphi_1(x_1), & \dots & \varphi_m(x_1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n), & \varphi_1(x_n), & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Кроме того будем считать, что под скалярным произведением двух векторов $u, v \in \mathbb{R}^k$ понимается число

$$(u, v) = u^T v = u \cdot v = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i,$$

а под нормой векторов – евклидова норма $\|y\|^2 = (y, y)$. Тогда в новых обозначениях

$$\begin{aligned} \sigma(a, y) = \|Qa - y\|^2 &= (Qa - y, Qa - y) = \\ &= (Qa, Qa) - 2(Qa, y) + (y, y) = \\ &= (a, Q^T Qa) - 2(a, Q^T y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Для определения параметров искомого полинома в соответствии с формулой (1.1) имеем СЛАУ:

$$Ha = b, \quad \text{где } H = Q^T Q, \ b = Q^T y. \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Пусть* $\bar{a}$ *– решение системы* (1.2)*. Тогда для введённой выше функции* $\sigma(a, y)$ *верно равенство:*

$$\sigma(\bar{a} + \Delta a, y) = \sigma(\bar{a}, y) + \|Q\Delta a\|^2. \ \clubsuit$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{a} + \Delta a, y) &= \|Q(\bar{a} + \Delta a) - y\|^2 = \\ &= (Q\bar{a} - y + Q\Delta a, Q\bar{a} - y + Q\Delta a) = \\ &= \|Q\bar{a} - y\|^2 + 2(Q\bar{a} - y, Q\Delta a) + \|Q\Delta a\|^2 = \\ &= \sigma(\bar{a}, y) + 2(Q^T Q\bar{a} - Q^T y, \Delta a) + \|Q\Delta a\|^2 \\ &= \sigma(\bar{a}, y) + \|Q\Delta a\|^2,\end{aligned}$$

поскольку $(Q^T Q\bar{a} - Q^T y, \Delta a) = (H\bar{a} - b, \Delta a) = 0$ в силу (1.2). $\clubsuit$

Введём векторы

$$u^j = (\varphi_j(x_0), \varphi_j(x_1), \ldots, \varphi_j(x_n))^T, \ u^j \in \mathbb{R}^{n+1}, \ j = \overline{0, m}. \tag{1.3}$$

Определение 1.1. Будем говорить, что заданная система функций $\varphi_0(\cdot), \varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_m(\cdot)$ *линейно зависима* в точках $\{x_i\}$, если один из векторов u^j системы $u^0, u^1, \ldots, u^m$ может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов этой совокупности, то есть $u^j = \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k u^k$. В противном случае эту систему функций будем называть *линейно независимой* в точках $\{x_i\}$. $\clubsuit$

Лемма 1.2. *Если система функций* $\varphi_0(\cdot), \varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_m(\cdot)$ *линейно независима в точках* $x_0, x_1, \ldots, x_n$*, то* $\det H \neq 0$. $\clubsuit$

Доказательство. По условию

$$\psi(c) = \|\sum_{i=0}^{m} c_i u^i\|^2 > 0 \ \text{ при } \ \sum_{i=0}^{m} c_i^2 > 0.$$

Но функция $\psi(c)$ может быть записана и в виде

$$\psi(c) = \sum_{i,j=0}^{m} c_i c_j (u^i, u^j) = c^T H c > 0, \ \text{при } c \neq 0,$$

т.е. матрица H является положительно определённой. $\clubsuit$

Теорема 1.1. *Если функции* $\{\varphi_i(x)\}$ *линейно независимы в точках* $\{x_i\}$, *то существует единственный многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения.* ♣

Доказательство. Во-первых, в силу леммы 1.2 решение системы (1.2) существует и единственно, а во-вторых на этом решении в соответствии с леммой 1.1 достигается минимум рассматриваемой функции $\sigma(a, y)$. ♣

При $m = n$ и выполнении условий теоремы 1.1 многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения (МНСП) совпадает с интерполяционным многочленом (при условии его существования), т.к. для него $\sigma(a, y) = 0$. ♣

Замечание 1.1. Часто принимают $m \ll n$. В этом случае метод обладает сглаживающими свойствами. ♣

Как правило, для приближений по МНК используют алгебраические многочлены степени $m \leq n$.

Лемма 1.3. *При* $m < n$ *система функций* $1, x, \ldots, x^m$ *линейно независима в точках* $x_0, x_1, \ldots, x_n$. ♣

Доказательство. Пусть $\varphi_k(x) = x^k$, $k = \overline{0, m}$. Если эта система функций линейно зависима в точках $\{x_i\}$, то, введя векторы $\{u^j\}$ в соответствии с (1.3), по определению линейной зависимости этих функций в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ имеем:

$$u^j = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \alpha_k u^k. \tag{1.4}$$

Рассмотрим полином

$$P_m(x) = x^j - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \alpha_k x^k. \tag{1.5}$$

Для него $P_m(x_i) = 0$, $i = \overline{0, n}$, что соответствует покоординатной записи соотношения (1.4). А поскольку $m < n$, то $P_m(x) \equiv 0$, что противоречит (1.5), т.к. в этой записи $\alpha_j = 1$. ♣

Перейти к оглавлению на странице: 79

§2. Наилучшие приближения в линейных нормированных пространствах. Постановка задачи

Пусть U – линейное нормированное пространство заданных линейно независимых функций $\{\varphi_i(\cdot)\} \subset U$, $i = \overline{0, n}$ и $f(\cdot) \in U$.

Введём подпространство $\bar{U}$ пространства U:

$$\bar{U} = \{\varphi(\cdot) \in U : \; \varphi(\cdot) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(\cdot), \; \varphi_i(\cdot) \in U\} \tag{2.1}$$

и расстояние между его элементами

$$\varrho\,(f, \varphi) = \|f(\cdot) - \varphi(\cdot)\| \geq 0.$$

Рассмотрим вопрос: существует ли $\bar{\varphi}(\cdot) \in \bar{U}$ такой, что имеет место равенство $\varrho\,(f, \bar{\varphi}) = \inf\limits_{\varphi \in \bar{U}} \varrho\,(f, \varphi)$?

Определение 2.1. Всякий элемент $\bar{\varphi}(\cdot) \in \bar{U}$, для которого выполняется последнее равенство, называется элементом *наилучшего приближения* для $f(\cdot)$ в $\bar{U}$ (или *проекцией* $f(\cdot)$ на $\bar{U}$). ♣

§3. Существование элемента наилучшего приближения

Теорема 3.1. *В $\bar{U}$ для любой функции $f(\cdot) \in U$ существует элемент наилучшего приближения $\bar{\varphi}(\cdot)$.* ♣

Доказательство. Используя свойства нормы имеем неравенства:

$$\|f_1(\cdot)\| = \|\big(f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\big) + f_2(\cdot)\| \leq \|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\| + \|f_2(\cdot)\|;$$
$$\|f_2(\cdot)\| = \|\big(f_2(\cdot) - f_1(\cdot)\big) + f_1(\cdot)\| \leq \|f_2(\cdot) - f_1(\cdot)\| + \|f_1(\cdot)\|,$$

откуда следует:

$$\|f_1(\cdot)\| - \|f_2(\cdot)\| \leq \|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|,$$
$$\|f_1(\cdot)\| - \|f_2(\cdot)\| \geq -\|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|,$$

и поэтому имеет место соотношение:

$$\big|\|f_1(\cdot)\| - \|f_2(\cdot)\|\big| \leq \|f_2(\cdot) - f_1(\cdot)\|.$$

Используя это неравенство, получаем:

$$\big|\|f(\cdot)-\sum_{i=0}^{n}c_i^1\varphi_i(\cdot)\|-\|f(\cdot)-\sum_{i=0}^{n}c_i^2\varphi_i(\cdot)\|\big|\le\big\|\sum_{i=0}^{n}(c_i^2-c_i^1)\varphi_i(\cdot)\big\|$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}|c_i^2-c_i^1|\cdot\|\varphi_i(\cdot)\|,$$

откуда следует, что функция $F(f,c)=\|f(\cdot)-\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(\cdot)\|$ непрерывна по своему аргументу $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^T$ для любой функции $f(\cdot)\in U$. Функция $F(0,c)$, будучи непрерывной и на сфере $\|c\|=1$, достигает на ней своей точной нижней грани в некоторой точке c^0:

$$\mu=\inf_{\|c\|=1}F(0,c).$$

Очевидно, что $\mu>0$ при условии линейной независимости функций $\{\varphi_i\}$, $i=\overline{0,n}$. Для любого вектора $c\in\mathbb{R}^{n+1}$, $c\neq 0$ имеет место неравенство:

$$F(0,c)=\|c\|\,F\Big(0,\frac{c}{\|c\|}\Big)\ge\mu\|c\|. \tag{3.1}$$

Обозначим $r=2\dfrac{\|f(\cdot)\|}{\mu}$ и рассмотрим шар $S=\{c:\ \|c\|\le r\}$. Поскольку $F(f,c)$ неотрицательна и непрерывна в $\mathbb{R}^{n+1}$, то в некоторой точке $\bar c\in S$ она достигает своей точной нижней грани:

$$F(f,\bar c)=\inf_S F(f,c)\equiv\nu.$$

Заметив, что $F(f,0)=\|f(\cdot)\|$, получаем неравенство (т.к. $0\in S$):

$$\|f(\cdot)\|=F(f,0)\ge\nu$$

С другой стороны вне шара имеем, учитывая неравенство (3.1):

$$\begin{aligned}F(f,c)&=\|f(\cdot)-\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(\cdot)\|\ge\big\|\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i\big\|-\|f(\cdot)\|=\\&=F(0,c)-\|f(\cdot)\|\ge\mu r-\|f(\cdot)\|=\|f(\cdot)\|\ge\nu.\end{aligned}$$

Таким образом, верно неравенство

$$F(f,c)\ge\nu=F(f,\bar c)\qquad\text{для всех } c\in\mathbb{R}^{n+1},$$

что и доказывает утверждение теоремы. ♣

§4. Единственность элемента наилучшего приближения

Определение 4.1. Линейное нормированное пространство U называется *строго нормированным*, если из условия

$$\|f_1(\cdot)+f_2(\cdot)\| = \|f_1(\cdot)\| + \|f_2(\cdot)\|,$$

где $f_1(\cdot)\neq 0$, $f_2(\cdot)\neq 0$ следует равенство:

$$f_2(\cdot)=\alpha f_1(\cdot),\ \alpha>0. \clubsuit$$

Теорема 4.1. *Если U – строго нормированное пространство, то в подпространстве $\bar U$ существует единственный элемент наилучшего приближения для любой функции $f(\cdot)\in U$.* $\clubsuit$

Доказательство. Допустим существование двух *различных* элементов наилучшего приближения, т.е. $\bar\varphi(\cdot),\hat\varphi(\cdot)\in\bar U$ и

$$\|f(\cdot)-\bar\varphi(\cdot)\| = \|f(\cdot)-\hat\varphi(\cdot)\| = \nu = \inf_{\varphi(\cdot)\in\bar U}\|f(\cdot)-\varphi(\cdot)\|.$$

Отметим, что здесь $\nu>0$, поскольку иначе $\bar\varphi(\cdot)=\hat\varphi(\cdot)=f(\cdot)$, что противоречит только что сделанному предположению $\bar\varphi(\cdot)\neq\hat\varphi(\cdot)$. Кроме того, имеем оценку:

$$\begin{aligned}\left\|f(\cdot)-\frac{\bar\varphi(\cdot)+\hat\varphi(\cdot)}{2}\right\| &= \left\|\frac{f(\cdot)-\hat\varphi(\cdot)}{2}+\frac{f(\cdot)-\bar\varphi(\cdot)}{2}\right\|\le\\ &\le \frac{\|f(\cdot)-\hat\varphi(\cdot)\|}{2}+\frac{\|f(\cdot)-\bar\varphi(\cdot)\|}{2}=\nu\end{aligned}$$

Поскольку $\dfrac{\bar\varphi(\cdot)+\hat\varphi(\cdot)}{2}\in\bar U$, то $\left\|f(\cdot)-\dfrac{\bar\varphi(\cdot)+\hat\varphi(\cdot)}{2}\right\|\ge\nu$ и сравнивая с предыдущим заключаем, что

$$\left\|\frac{f(\cdot)-\hat\varphi(\cdot)}{2}+\frac{f(\cdot)-\bar\varphi(\cdot)}{2}\right\| = \frac{\|f(\cdot)-\hat\varphi(\cdot)\|}{2}+\frac{\|f(\cdot)-\bar\varphi(\cdot)\|}{2}=\nu.$$

Учитывая строгую нормированность пространства $\bar U$, имеем:

$$\frac{f(\cdot)-\bar\varphi(\cdot)}{2}=\alpha\frac{f(\cdot)-\hat\varphi(\cdot)}{2},\quad \alpha>0.$$

Если здесь $\alpha \neq 1$, то $f(\cdot) = \dfrac{\bar{\varphi}(\cdot) - \alpha\hat{\varphi}(\cdot)}{1-\alpha} \in \bar{U}$ и, следовательно, $\nu = 0$, что мы уже отвергли. Если же $\alpha = 1$, то $\hat{\varphi}(\cdot) = \bar{\varphi}(\cdot)$, что противоречит предположению. ♣

§5. Наилучшие приближения в пространстве $\mathbb{C}$

Пусть $U = \mathbb{C}[a,b]$, $\|f(\cdot)\| = \|f(\cdot)\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f(\cdot)|$, причём функции $\{\varphi_i(\cdot)\}$, $i = \overline{0,n}$ линейно независимы в $\mathbb{C}[a,b]$ и

$$\bar{U} = \bar{C} = \{\varphi(\cdot) : \ \varphi(\cdot) = \sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(\cdot)\}, \ c_i \in \mathbb{R}.$$

Определение 5.1. Элемент $\bar{\varphi}(\cdot) \in \bar{C}$ называется элементом *наилучшего равномерного приближения*, если

$$\|f(\cdot) - \bar{\varphi}(\cdot)\| = \min_{\varphi(\cdot)\in\bar{C}} \|f(\cdot) - \varphi(\cdot)\|. \ ♣$$

На основании предыдущего рассмотрения такой элемент существует, однако пространство $\mathbb{C}[a,b]$ не является строго нормированным, поскольку, например, для функций

$$f_1(x) = 1, \ f_2(x) = x,$$

рассматриваемых на $[-1,1]$, имеем:

$$\|f_1(\cdot)\| = 1, \ \|f_2(\cdot)\| = 1, \ \|f_1(\cdot) + f_2(\cdot)\| = 2 = \|f_1(\cdot)\| + \|f_2(\cdot)\|,$$

однако $f_1(\cdot) \neq \alpha f_2(\cdot)$.

Теорема 5.1. (теорема Хаара.) *Для того, чтобы для любой функции $f(\cdot) \in \mathbb{C}[a,b]$ существовал единственный обобщённый многочлен наилучшего равномерного приближения, необходимо и достаточно, чтобы функции $\{\varphi_i(\cdot)\}$, $i = \overline{0,n}$ образовывали систему Чебышева.* ♣

§6. Наилучшие приближения алгебраическими полиномами

Будем далее считать, что $\varphi_k(x) = x^k$, $k = \overline{0,n}$. Тогда обобщённый многочлен становится алгебраическим многочленом $Q_n(\cdot)$.

Обозначим через $\bar{Q}_n(\cdot)$ *алгебраический полином наилучшего (равномерного) приближения* (АПНП) и $E_n = \|f(\cdot) - \bar{Q}_n(\cdot)\|$.

Теорема 6.1. *Чтобы алгебраический многочлен $Q_n(\cdot)$ был многочленом наилучшего равномерного приближения функции для функции $f(\cdot) \in \mathbb{C}[a,b]$ необходимо и достаточно существования на $[a,b]$ по крайней мере $(n+2)$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ таких, что*

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i \|f(\cdot) - Q_n(\cdot)\|, \; i = \overline{0, n+1} \tag{6.1}$$

причём здесь $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$ для всех узлов одновременно. ♣

Замечание 6.1. Точки $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющие условиям теоремы, называются *точками Чебышевского альтернанса.* ♣

Замечание 6.2. Алгебраический многочлен наилучшего равномерного приближения единствен в силу теоремы Хаара 5.1. ♣

Пример 6.1. Покажем, что для функции $f(x) = \sin 2x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ многочленом наилучшего приближения второй степени является полином $Q_2(x) \equiv 0$. Для этого найдём точки Чебышевского альтернанса: $L = \sup|\sin 2x - 0| = 1$; уравнение $|\sin 2x| = 1$ имеет на $[0, 2\pi]$ четыре корня $(n = 2, m = n + 2 = 4)$

$$x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

В этих точках выполнены соотношения:

$$\sin 2x_k - 0 = (-1)^k \cdot 1, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

что в соответствии с теоремой Чебышева и доказывает высказанное утверждение. ♣

Пример 6.2. Покажем, что полином

$$Q_{n-1} = x^n - \bar{T}_n(x), \quad \bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

является полиномом наилучшего приближения степени $(n-1)$ на отрезке $[-1, 1]$ для полинома вида $f(x) = x^n$.
Действительно:

$$L = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - Q_{n-1}| = \sup_{x \in [-1,1]} |\bar{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}};$$

точки экстремума полинома Чебышева $T_n(x)$ являются точками Чебышевского альтернанса для $Q_{n-1}(x)$, т.к.

$$x_k^n - Q_{n-1}(x_k) = (-1)^k L, \quad x_k = \cos\frac{\pi k}{n}, \ k = \overline{0, n}, \ m = n + 1,$$

что в соответствии с теоремой Чебышева $(m = (n-1)+2)$ и доказывает высказанное утверждение. ♣

Пример 6.3. Покажем, что АПНП нечётной функции есть функция нечётная.

Пусть $\bar{Q}_n(x)$ – АПНП для $f(x)$, $f(-x) = -f(x)$. Согласно сделанным предположениям

$$E_n(f) = \sup_x |f(x) - \bar{Q}_n(x)| = \sup_x |-f(-x) - (-\bar{Q}_n(-x))|.$$

Отсюда следует, что полином $-\bar{Q}_n(-x)$ является АПНП для функции $-f(-x) = f(x)$, а в силу единственности такого полинома $\bar{Q}_n(x) = -\bar{Q}_n(-x)$. ♣

Следствие 6.1. *Для чётной функции АПНП – функция чётная.* ♣

Пример 6.4. Построить полином минимальной степени, равномерно на $[-1, 1]$ приближающий функцию $f(x) = \sin x$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
Возьмём отрезок разложения данной функции в ряд Тейлора

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!},$$

погрешность замены которым заданной функции оценивается величиной $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{(2n+3)!}$, поскольку данный ряд является Лейбницевым. При $n = 2$ имеем: $\deg P_{2n+1}(x) = 5$, $\varepsilon_0 \approx 2 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$. Понижение степени (пример 6.2) вносит дополнительную погрешность

$$\varepsilon_1 = \frac{|a_5|}{2^4} \approx 5.2 \cdot 10^{-4}.$$

Поскольку $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 < \varepsilon$, то понижение степени допустимо:

$$\begin{aligned} Q_3(x) &= P_5(x) - \frac{1}{2^4}\frac{1}{5\,!}T_5(x) = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{1920}(16x^5 - 20x^3 + 5x) \\ &= \frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_2 \approx \dfrac{5}{32} \cdot \dfrac{1}{2^2} > \varepsilon = 10^{-4}$, то дальнейшее понижение степени невозможно. ♣

§7. Полиномы Бернштейна

Построение АПНП – непростая задача, в то же время равномерное приближение непрерывной функции полиномом может оказаться полезным во многих вычислительных задачах. В частности, рассматриваемые ниже полиномы Бернштейна позволяют получить равномерное приближение непрерывной функции с любой наперёд заданной точностью.

Вспомогательные алгебраические соотношения

1. $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1\,,$
   поскольку $A(x) = \big(x + (1-x)\big)^n = 1\,.$

2. Обозначим

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{n} k^p C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad p \geq 1.$$

Заметим, что $S_0(x) = A(x)$, если принять $0^0 = 1$. Возьмём производную от $S_p(x)$ и проделав несложные преобразования, получим:

$$S_p'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(k^{p+1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \right.$$
$$\left. -k^p(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right) =$$
$$= \frac{S_{p+1}(x)}{x} - \frac{1}{1-x}\big(nS_p(x) - S_{p+1}(x)\big),$$

откуда получаем рекуррентное соотношение:

$$S_{p+1}(x) = x(1-x)S_p'(x) + nxS_p(x).$$

В частности, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} S_1(x) &= x(1-x)S_0'(x) + nxS_0(x) = nx. \\ S_2(x) &= x(1-x)S_1'(x) + nxS_1(x) = nx(1-x) + (nx)^2. \end{aligned}$$

Используя полученные формулы, получим представление для следующей суммы:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \\ &= S_2(x) - 2nxS_1(x) + (nx)^2 S_0(x) = nx(1-x). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\sigma_n(x) = nx(1-x)$. Легко видеть, что на отрезке $[0,1]$ она удовлетворяет соотношениям:

$$\sigma_n(x) \geq 0, \qquad \max_{x\in[0,1]} \sigma_n(x) = \sigma_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}.$$

Пусть функция $f(\cdot)$ определена на $[a,b]$.

Определение 7.1. Полином вида

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называется полиномом Бернштейна для функции $f(\cdot)$. ♣

Теорема 7.1. *Если функция $f(\cdot)$ удовлетворяет на $[0,1]$ условию Липшица с константой L, то*

$$|B_n(x) - f(x)| \le \frac{L}{2\sqrt{n}}. \clubsuit$$

Доказательство. Введём векторы $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$u^1 = \left\{ \left| \frac{k}{n} - x \right| \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \right\}_{k=0}^{n},$$
$$u^2 = \left\{ \sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \right\}_{k=0}^{n}.$$

Оценим методическую погрешность

$$\begin{aligned} \Delta_n &= |B_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \\ &\le L \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = L u^1 \cdot u^2 \le \\ &\le L\|u^1\| \cdot \|u^2\| \le L \sqrt{\frac{1}{n^2} \sigma_n(x)} \sqrt{A(x)} \le \frac{L}{2\sqrt{n}}. \clubsuit \end{aligned}$$

Теорема 7.2. *Если $f(\cdot) \in \mathbb{C}[0,1]$ и удовлетворяет условию Липшица, то $B_n^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$ при $k \to \infty$ равномерно на отрезке $[0,1]$.* $\clubsuit$

§8. Приближение функций в гильбертовых пространствах

Будем рассматривать в дальнейшем только вещественные пространства. Напомним, что линейное пространство называется гильбертовым, если

- в нём введено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$;
- оно сепарабельно, т.е. в нём существует счётное всюду плотное множество.

Напомним, что норма в гильбертовом пространстве H вводится как $\|h\|^2 = (h, h)$. Система функций $\{\varphi_i\}$ в гильбертовом пространстве называется ортонормированной, если $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Ортонормированная система $\{\varphi_i\}$ называется полной, если из условия $(\varphi_i, \psi) = 0$ следует $\psi = 0$. *В гильбертовом пространстве любая ортонормированная система не более чем счётна.* Приведём некоторые теоремы.

Теорема 8.1. *В гильбертовом пространстве существует не более чем счётная полная система функций.* ♣

Теорема 8.2. *В гильбертовом пространстве ряд Фурье для любого элемента этого пространства по полной ортонормированной системе элементов сходится к этому элементу.* ♣

Рассмотрим гильбертово пространство U и его подпространство H. Пусть в U определена функция $f(\cdot)$. Поставим задачу: *найти элемент $h_0 \in H$ (элемент наилучшего приближения), для которого выполнено равенство*

$$\|f(\cdot) - h_0(\cdot)\| = \inf_{h \in H} \|f(\cdot) - h(\cdot)\|.$$

Замечание 8.1. Здесь не предполагается, что H есть линейная оболочка, натянутая на конечное число элементов из U. ♣

§9. Основные теоремы теории приближения

Теорема 9.1. *Если в H существует элемент наилучшего приближения h_0, то $(f - h_0, h) = 0$ для любого $h \in H$.* ♣

Доказательство. Пусть $h_0 \in H$ существует, но одновременно существует и $h_1 \in H$: $(f - h_0, h_1) = \alpha \neq 0$. Рассмотрим элемент $h_2 = h_0 + \alpha h_1$, считая $\|h_1\| = 1$. Имеем:

$$\|f - h_2\|^2 = \|f - h_0\|^2 - 2\alpha(f - h_0, h_1) + \alpha^2 = \|f - h_0\|^2 - \alpha^2,$$

что противоречит определению h_0. ♣

Теорема 9.2. *В подпространстве $H \subset U$ не может существовать двух элементов наилучшего приближения.* ♣

Доказательство. Пусть это не так, т.е. существуют *два* элемента наилучшего приближения h_0, h_0', $h_0 \neq h_0'$; тогда по теореме 9.1 имеем

$$\begin{cases} (f - h_0, h) &= 0, \\ (f - h_0', h) &= 0 \quad \forall h \in H, \text{ например } h = \Delta h = h_0 - h_0'. \end{cases} \tag{9.1}$$

Тогда

$$\|\Delta h\|^2 = \big((h_0 - f) + (f - h_0'), \Delta h\big) = (h_0 - f, \Delta h) + (f - h_0', \Delta h) = 0$$

в соответствии с (9.1), откуда $\|\Delta h\| = 0$, $\Rightarrow \Delta h = 0$, что противоречит предположению. ♣

Пусть теперь

$$H = H_n = \{h: \ h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\},$$

$\{h_i\}$ $i = \overline{1, n}$ – *линейно независимы*, причём $\{h_i\}$ $i = \overline{1, \infty}$ – *полная* система[1] элементов в *полном*[2] гильбертовом пространстве U. На основании предыдущих рассмотрений элемент наилучшего приближения существует и единствен. Рассмотрим вопрос о построении элемента наилучшего приближения h_0.

Поскольку $h_0 \in H_n$, то на основании теоремы 9.1 должны быть выполнены равенства

$$(f - h_0, h_i) = 0, \quad h_i \in H_n, \ i = \overline{1, n}. \tag{9.2}$$

Это есть СЛАУ $Ax = b$ с матрицей Грама $A = \{(h_i, h_j)\}$, поэтому $\det A \neq 0$ и, следовательно, для любой функции $f(\cdot)$ существует единственный элемент наилучшего приближения $h_0 \in H_n$:

$$h_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i.$$

[1] ортонормированная система элементов $\{\varphi_i\}$ пространства U называется полной, если не существует элемента $h \in U$, $h \neq 0$ такого, что $(\varphi_i, h) = 0$ $\forall i$

[2] пространство называется полным, если любая фундаментальная (сходящаяся в себе) последовательность элементов этого пространства сходится к некоторому элементу этого пространства

Уклонение этого элемента от функции $f(\cdot)$ может быть представлено в виде:

$$\delta^2 = \|f - h_0\|^2 = (f - h_0, f - h_0) = (f, f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (h_i, f).$$

При условии *ортонормированности* элементов $\{h_i\}$ в соответствии с равенством Парсеваля имеет место оценка

$$\delta^2 = \|f - h_0\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

§10. Приближения алгебраическими многочленами

Пусть $U = L_2[a, b]$. Скалярное произведение и норма, как известно, задаются в этом пространстве формулами:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx, \quad \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Пусть $p(x) \geq 0$, причём $p(x) = 0$ не более, чем на множестве меры нуль. Введём пространство $L_2(p)$: считаем, что $f(\cdot) \in L_2(p)$, если существует интеграл

$$\int_a^b p\,(x) f^2(x)\, dx.$$

Очевидно, что это пространство является линейным. Скалярное произведение в $L_2(p)$ зададим равенством:

$$(f, g) = \int_a^b p\,(x) f(x) g(x)\, dx.$$

Сходимость в пространстве L_2 – известная в анализе *сходимость в среднем*, а в $L_2(p)$ – *сходимость в среднем с весом* $p(\cdot)$. В дальнейшем будем рассматривать пространство $L_2(p)$ как более общий случай.

Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, взятые в любом числе, линейно независимы в $L_2(p)$. Множество $\mathcal{P}_n$ полиномов степени не выше n

можно рассматривать как линейную оболочку, натянутую на функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$, поэтому на основании предыдущих результатов можем утверждать, что в $\mathcal{P}_n$ существует единственный полином $\bar{P}_n(\cdot)$, дающий наилучшее приближение функции $f(\cdot) \in L_2(p)$ по метрике этого пространства, т.е.

$$\delta_n^2 = \|f - \bar{P}_n\|^2 = \int_a^b p\,(x)\big(f(x) - \bar{P}_n(x)\big)^2\,dx = \\ = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \int_a^b p\,(x)\big(f(x) - \bar{P}_n(x)\big)^2\,dx.$$

Если ввести обозначения

$$s_k = \int_a^b p\,(x)x^k\,dx, \quad m_k = \int_a^b p\,(x)f(x)x^k\,dx,$$

то коэффициенты $\{a_i\}$ полинома $\bar{P}_n(\cdot)$ могут быть найдены как решение следующей СЛАУ

$$\big(f(x) - P_n(x), x^k\big) = 0, \quad k = \overline{0, n},$$

или с использованием введённых обозначений

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n & = & m_0, \\ a_0 s_1 + a_1 s_0 + \cdots + a_n s_{n+1} & = & m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_0 s_n + a_1 s_{n+1} + \cdots + a_n s_{2n} & = & m_n. \end{cases}$$

Это есть система с определителем Грама, построенная по системе линейно независимых элементов $\{x^k\}$ и потому имеет единственное решение для любой функции $f(\cdot) \in L_2(p))$, однако с ростом n её обусловленность ухудшается, поэтому выгоднее выбирать ортонормированную систему полиномов. Метод ортогонализации позволяет построить такую систему:

$$\{Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\}: \quad \int_a^b p\,(x)Q_i(x)Q_j(x)\,dx = \delta_{ij}.$$

Имеет место

Теорема 10.1. *Ортонормированная система полиномов в* $L_2(p)$ *определяется единственным образом.* ♣

Доказательство. Покажем сначала, что существует единственный полином $Q_n(\cdot) \in \mathcal{P}_n^1$, т.е. полином вида

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

который ортогонален относительно введённого скалярного произведения в $L_2(p)$ всем многочленам степени $(n-1)$. Запишем эти условия:

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_{n-1}s_{n-1} + s_n = 0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + \ldots + a_{n-1}s_n + s_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 s_{n-1} + a_1 s_n + \ldots + a_{n-1}s_{2n-2} + s_{2n-1} = 0 \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет единственное решение, поскольку матраца её является матрицей Грама, построенной по линейно независимым элементам. Наряду с $Q_n(\cdot)$ этим же свойством ортогональности к множеству $\mathcal{P}_{n-1}$ обладает, очевидно, и полином $\alpha Q_n(\cdot)$. Покажем, что других ортогональных к $\mathcal{P}_{n-1}$ полиномов из $\mathcal{P}_n$ нет.

Действительно, если $\hat{Q}_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0$ ортогонален множеству $\mathcal{P}_{n-1}$, то полином $q(\cdot) = \hat{Q}_n(\cdot) - \alpha_n Q_n(\cdot)$ имеет степень не выше $(n-1)$ и обладает свойством ортогональности ко всем полиномам из $\mathcal{P}_{n-1}$. Следовательно, (q,q), т.е. $q = 0$ и потому $\hat{Q}_n(\cdot) = \alpha_n Q_n(\cdot)$ ♣.

Определение 10.1. Многочлен $\alpha_n Q_n(\cdot)$, $\alpha_n \neq 0$ будем называть ортогональным (относительно веса $p(\cdot)$ и отрезка $[a,b]$). ♣

Теорема 10.2. *Корни ортогонального многочлена вещественны, просты и расположены на интервале* (a,b).♣

Доказательство. Поскольку

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)dx = 0,$$

то $Q_n(x)$ имеет на (a,b) точки перемены знака, т.е. корни нечётной кратности, расположенные внутри (a,b). Пусть это корни

Перейти к оглавлению на странице: 79

$x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m < n$ (если $m = n$ – утверждение верно). Образуем полином

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

и рассмотрим полином $q(x)Q_n(x)$. Это есть полином, у которого на отрезке $[a, b]$ все корни чётной кратности, а потому он сохраняет знак на $[a, b]$. Но тогда имеем

$$\int_a^b p(x)q(x)Q_n(x)dx \neq 0,$$

т.е. $Q_n(\cdot)$ не ортогонален полиному $q(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-1}$, что противоречит определению ортогонального полинома.♣

Теорема 10.3. *Пусть $Q_n(\cdot)$ – ортогональный многочлен на отрезке $[-a, a]$, $a > 0$ и при этом $p(\cdot)$ – чётная функция. Тогда полином $Q_n(\cdot)$ чётен или нечётен вместе со степенью n.* ♣

Доказательство. Представим $Q_n(\cdot)$ в виде:

$$Q_n(\cdot) = r_n(\cdot) + q_{n-1}(\cdot),$$

где $r_n(x)$ и $q_n(x)$ содержат члены одинаковой чётности с n и $(n-1)$ соответственно. Поскольку $q_{n-1}(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-1}$, то $q_{n-1}(\cdot)$ ортогонален полиному $Q_n(\cdot)$ и поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-a}^a p(x)Q_n(x)q_{n-1}(x)dx = \\ &= \int_{-a}^a p(x)r_n(x)q_{n-1}(x)dx + \int_{-a}^a p(x)q_{n-1}^2(x)dx. \end{aligned}$$

Но

$$\int_{-a}^a p(x)r_n(x)q_{n-1}(x)dx = 0$$

как интеграл от нечётной функции, а следовательно и

$$\int_{-a}^a p(x)q_{n-1}^2(x)dx = 0,$$

откуда $q_{n-1}(x) = 0$, т.е. $Q_n(x) = r_n(x)$. ♣

Укажем некоторые частные случаи ортогональных систем многочленов.

- **Многочлены Якоби:**

$$p\,(x) = (1-x)^a(1+x)^b,\ a,b > -1;\ x \in [-1,1],$$

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\big[(1-x)^{a+n}(1+x)^{b+n}\big].$$

- **Многочлены Лежандра:**

$$p\,(x) = 1,\ x \in [-1,1],$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\big[(1-x^2)^n\big].$$

(Частный случай полиномов Якоби при $a = b = 0$)

- **Многочлены Чебышева первого рода:**

$$p\,(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ x \in [-1,1],$$

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x).$$

- **Многочлены Чебышева второго рода:**

$$p\,(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},\ x \in [-1,1],$$

$$U_n(x) = \frac{\sin\big[(n+1)\arccos x\big]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- **Многочлены Лагерра:**

$$p\,(x) = x^a e^{-x},\ a > -1,\ x \in [0,+\infty),$$

$$L_n^{(a)}(x) = (-1)^n x^{-a}e^x\frac{d^n}{dx^n}\big[x^{a+n}e^{-x}\big].$$

- **Многочлены Эрмита:**

$$p\,(x) = e^{-x^2},\ x \in (-\infty,+\infty),$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\big[e^{-x^2}\big].$$

Для выбранной системы ортогональных многочленов

$$\{Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)\}$$

многочлен наилучшего приближения $\bar{Q}_n(x) \in \mathcal{P}_n$ запишется в виде

$$\bar{Q}_n(x) = c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \dots + c_n Q_n(x),$$

причём коэффициенты $\{c_i\}$ на основании общей теории вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{\int_a^b p\,(x) f(x) Q_k(x)\,dx}{\int_a^b p\,(x) Q_k^2(x)\,dx}.$$

Величина отклонения δ_n наилучшего приближения от аппроксимируемой функции определится по формуле

$$\delta_n^2 = \int_a^b p\,(x) f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \int_a^b p\,(x) Q_k^2(x)\,dx.$$

§11. Задачи по теме

Для функции $y(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ выполнить задания:

1. Построить алгебраический полином не выше третьей степени $p^0(\cdot) \in \mathcal{P}_3$, являющийся наилучшим среднеквадратичным приближением для $y(\cdot)$, т.е.

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(p^0(t) - y(t)\right)^2 dt = \min_{p(\cdot)\in\mathcal{P}_3} \int\limits_{-1}^{1} \left(p(t) - y(t)\right)^2 dt$$

и вычислить величину методической погрешности

$$r = \|y(\cdot) - p^0(\cdot)\|_{L_2[-1,1]}.$$

Предлагается при выполнении задания использовать полиномы *Лежандра*: $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, обладающие свойством ортогональности в пространстве $L_2[-1,1]$.

Перейти к оглавлению на странице: 79

2. Для заданной функции $y(x)$ построить полином $Q_3(x) \in \mathcal{P}_3$ путём замены полинома $q(x) = x^4$ полиномом его наилучшего равномерного приближения третьей степени на отрезке $[-1, 1]$ и оценить погрешность $\|y(x) - Q_3(x)\|_{\mathbb{C}[-1,1]}$.

Перейти к оглавлению на странице: 79

ГЛАВА 3. ВОПРОСЫ ПО ВТОРОЙ ЧАСТИ КУРСА

§1. Интерполирование и аппроксимация функций

1. Постановка задачи интерполирования. Существование интерполирующей функции. Чебышевские системы функций.
2. Алгебраическое интерполирование. Полином Лагранжа.
3. Методическая и неустранимая погрешность.
4. Выбор узлов интерполирования в полиноме Лагранжа.
5. Интерполяционный процесс, его сходимость. Пример Бернштейна.
6. Разделенные разности и их свойства. Полином Ньютона.
7. Задача кратного интерполирования. Существование и единственность полинома Эрмита.
8. Один численный метод построения полинома Эрмита.
9. Задача численного дифференцирования. Вывод формул. Метод неопределенных коэффициентов.
10. Анализ полной погрешности формул формул численного дифференцирования.
11. Задача обратного интерполирования.
12. Интерполирование функций многих переменных. Особенности задачи. Задача квадратичного интерполирования.
13. Интерполирование по прямоугольной таблице.
14. Понятие сплайна. Базис пространства сплайнов.
15. Интерполирование сплайнами степени единица гладкости нуль.

16. Интерполирование сплайнами степени два гладкости нуль.
17. Эрмитовы кубические сплайны.
18. Интерполирование кубическими сплайнами (степени три гладкости два).
19. Линейная задача наименьших квадратов.
20. Многочлены Бернштейна. Теорема Вейерштрасса.
21. Среднеквадратичные приближения алгебраическими многочленами. Ортогональные системы полиномов.
22. Свойства ортогональных полиномов (рекуррентные формулы, свойства корней).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков.* Численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 2006.
2. *В. М. Вержбицкий.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Изд. Высшая школа, 2000.
3. *В. С. Рябенький.* Введение в вычислительную математику. — М.: Изд. Физматлит, 1994.
4. *И. П. Мысовских.* Лекции по методам вычислений. — СПб.: Изд. СПбГУ, 1998.
5. *А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В Копчёнова.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Изд. Высшая школа, 1994.
6. *А. А. Самарский.* Введение в численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 1987.
7. *В. В. Воеводин.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Изд. Физматлит, 1977.
8. *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева.* Вычислительноые методы линейной алгебры. — М.: Изд. Физматлит, 1963.
9. *И. С. Березин, Н. П. Жидков.* Методы вычислений, т. 1, 2. — М.: Изд. Физматлит, 1962.
10. *Б. П. Демидович, И. А. Марон.* Основы вычислительной математики. — М.: Изд. Физматлит, 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Интерполирование функций **2**
§ 1. Общая задача интерполирования 2
§ 2. Алгебраическое интерполирование. Полином Лагранжа 6
§ 3. Методическая погрешность. Остаточный член формулы Лагранжа 7
§ 4. Выбор узлов интерполирования 8
§ 5. О сходимости интерполяционного процесса 10
§ 6. Разностные отношения (разделённые разности – РР) 12
§ 7. Свойства разделённых разностей 14
§ 8. Интерполяционный полином Ньютона 15
§ 9. Методическая погрешность полинома Ньютона 17
§10. Конечные разности. Интерполирование по равноотстоящим узлам 18
§11. Задача кратного интерполирования 21
§12. Единственность интерполяционного полинома 22
§13. Существование интерполяционного полинома 23
§14. Методическая погрешность полинома Эрмита 23
§15. Один численный метод построения полинома Эрмита . . . 24
§16. Численное дифференцирование. Постановка задачи 26
§17. Формулы численного дифференцирования 27
§18. Метод неопределённых коэффициентов 28
§19. Методическая погрешность формул численного дифференцирования 29
§20. Анализ полной погрешности формул численного дифференцирования 31
§21. Обратное интерполирование 32
§22. Интерполирование функций многих переменных. Постановка и особенности задачи 34
§23. Линейная интерполяция 35

§24. Квадратичное интерполирование 36
§25. Интерполирование функции двух переменных по прямоугольной таблице 38
§26. Понятие сплайна. Базис пространства сплайнов 40
§27. Интерполирование сплайнами $s_{1,0}(\cdot)$ 42
§28. Интерполирование сплайнами $s_{2,0}(\cdot)$ 44
§29. Эрмитовы кубические сплайны 46
§30. Интерполирование сплайнами $s_{3,2}(\cdot)$ 48
§31. Интерполирование периодических функций с помощью тригонометрических полиномов 50
§32. Задачи по теме 52
Глава 2. Аппроксимация функций в метрических пространствах 54
§ 1. Линейная задача наименьших квадратов 54
§ 2. Наилучшие приближения в линейных нормированных пространствах. Постановка задачи 58
§ 3. Существование элемента наилучшего приближения 58
§ 4. Единственность элемента наилучшего приближения 60
§ 5. Наилучшие приближения в пространстве $\mathbb{C}$ 61
§ 6. Наилучшие приближения алгебраическими полиномами . 61
§ 7. Полиномы Бернштейна 64
§ 8. Приближение функций в гильбертовых пространствах . . 66
§ 9. Основные теоремы теории приближения 67
§10. Приближения алгебраическими многочленами 69
§11. Задачи по теме 74
Глава 3. Вопросы по второй части курса 76
§ 1. Интерполирование и аппроксимация функций 76
Литература 78