алгебраических ($n > 2$), трансцендентных и сеточных уравнений, как правило, определяются приближенно с заданной точностью.

Решение осуществляется в два этапа:

Первый этап. Находятся отрезки $[a_i, b_i]$, внутри каждого из которых содержится один простой или кратный корень ($x_{*i} \in [a_i, b_i]$) (см. рис. 3.1). Этот этап называется процедурой *отделения корней*. По сути на нем осуществляется грубое нахождение корней x_{*i}.

Второй этап. Грубое значение каждого корня x_{*i} уточняется до заданной точности одним из численных методов, в которых реализуются последовательные приближения. Порядок (скорость) сходимости метода определяется так же, как в п. 1.3.1.

3.1.2. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Для отделения действительных корней полезно определять заранее число корней, а также верхнюю и нижнюю границы их расположения. Для этого используется ряд теорем.

Теорема 3.1 (о числе корней алгебраического уравнения (3.3)).

Алгебраическое уравнение (3.3) *n-й степени имеет ровно n корней, действительных или комплексных, при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

Теорема 3.2 (о свойстве парной сопряженности комплексных корней уравнения (3.3)).

Если $x_{*i} = \alpha + \beta i$ *— корень алгебраического уравнения* (3.3) *кратности* k, *то число* $\bar{x}_{*i} = \alpha - \beta i$ *также является корнем той же кратности.*

Следствие. *Алгебраическое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.*

Теорема 3.3 (об оценке модулей корней уравнения (3.3)).

Пусть $A = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\}$, $B = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|\}$, *где* a_k, $k = \overline{0,n}$ *— коэффициенты уравнения* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

Тогда модули всех корней x_{*i} ($i = 1, \ldots, n$) *уравнения удовлетворяют неравенству*

$$\frac{1}{1+\dfrac{B}{|a_0|}} < |x_{*i}| \le 1 + \frac{A}{|a_n|}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.4}$$

т. е. корни уравнения расположены в кольце.

Следствие. *Числа* $r = \dfrac{1}{1+\dfrac{B}{|a_0|}}$ *и* $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$ *являются соответственно нижней и верхней границами положительных корней алгебраического уравнения* $r < x_{*i}^{+} < R$. *Аналогично числа* $-R$ *и* $-r$ *служат нижней и верхней границами отрицательных корней уравнения* $-R < x_{*i}^{-} < -r$.

Приведем полезные теоремы, используемые для более точного установления границ действительных корней алгебраических уравнений.

Теорема 3.4 (теорема Лагранжа о верхней границе положительных корней уравнения (3.3)).

Пусть $a_n > 0$ и a_i — первый отрицательный коэффициент в последовательности $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$; C — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Тогда за верхнюю границу положительных корней уравнения (3.3) *может быть принято число*

$$R = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.5 (о нижних и верхних границах положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения).

Пусть R — верхняя граница положительных корней уравнения $P_n(x) = 0$,

R_1 — верхняя граница положительных корней уравнения $P^1(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = 0$,

R_2 — верхняя граница положительных корней уравнения $P^2(x) = P_n(-x) = 0$,

R_3 — верхняя граница положительных корней уравнения $P^3(x) = x^n P_n\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$.

Тогда положительные корни x_{*i}^+ и отрицательные корни x_{*i}^- уравнения (3.3) *удовлетворяют неравенствам*

$$\frac{1}{R_1} \le x_{*i}^+ \le R; \quad -R_2 \le x_{*i}^- \le -\frac{1}{R_3}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.6 (теорема Декарта о количестве действительных корней алгебраических уравнений).

Число S_1 положительных корней (*с учетом их кратностей*) *алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$* (*коэффициенты, равные нулю, не учитываются*) *многочлена $P_n(x)$ или меньше этого числа на четное число. Число S_2 отрицательных корней* (*с учетом их кратностей*) *алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ равно числу перемен знаков в последовательности a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_0$ многочлена $P_n(-x)$ или меньше этого числа на четное число.*

Теорема 3.7 (теорема Гюа о необходимом условии действительности всех корней алгебраического уравнения).

Если алгебраическое уравнение (3.3) *имеет все действительные корни, то квадрат каждого некрайнего коэффициента больше произведения двух его соседних коэффициентов.*

Следствие. *Если при каком-нибудь k выполнено неравенство $a_k^2 \le a_{k-1}a_{k+1}$, то уравнение* (3.3) *имеет по крайней мере одну пару комплексных корней.*

Для отделения корней применяется следующая теорема.

Теорема 3.8. *Если функция $f(x)$, определяющая уравнение $f(x) = 0$, на концах отрезка $[a_i, b_i]$ принимает значения разных знаков, т. е. $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$, то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения. Если же $f(x)$ непрерывна и дифференцируема и ее первая производная сохраняет знак внутри отрезка $[a_i, b_i]$ $\left(\underset{[a_i, b_i]}{\operatorname{sign}} f'(x) = \mathrm{const}\right)$, то на $[a_i, b_i]$ находится только один корень x_{*i} уравнения.*