# 线性代数 - 第三次作业 (作答)

学生：张三　学号：12345678

提交日期：2025 年 8 月 14 日

---

## 解答详情

### 第一题：矩阵综合分析

**(a) 计算行列式：**

$$\det(A) = (1)(3) - (4)(2) = 3 - 8 = -5$$

**(b) 求解特征值：** 特征方程为 $\det(A - \lambda I) = 0$。

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\lambda)(3-\lambda) - (4)(2) &= 0 \\
\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 &= 0 \\
\lambda^2 - 4\lambda - 5 &= 0 \\
(\lambda - 5)(\lambda + 1) &= 0
\end{aligned}$$

所以，特征值为 $\lambda_1 = 5$ 和 $\lambda_2 = -1$。

**(c) 求解特征向量：** 对于 $\lambda_1 = 5$：求解 $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$。得到 $-4x_1 + 4x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$。对应的特征向量为 $\mathbf{v_1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

对于 $\lambda_2 = -1$：求解 $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$。得到 $2x_1 + 4x_2 = 0 \implies x_1 + 2x_2 = 0 \implies x_1 = 2x_2$。对应的特征向量为 $\mathbf{v_2} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

**(d) 判断是否可以对角化：** 因为我们找到了两个线性无关的特征向量，所以矩阵 $A$ 可以对角化。对角化矩阵 $P$ 由特征向量组成，对角矩阵 $D$ 由特征值组成。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 第二题：概念与证明

**(a) 证明或证伪：如果 $A$ 和 $B$ 都有相同的特征值，那么 $A = B$。** 结论：错误。反例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$。$A$ 的特征值是 $\lambda = 1$ (重根)。$B$ 的特征值也是 $\lambda = 1$ (重根)。它们有相同的特征值，但显然 $A \neq B$。

**(b) 证明或证伪：矩阵 $A$ 与其转置矩阵 $A^T$ 拥有相同的特征值。** 结论：正确。因为特征值由特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 决定。我们知道一个矩阵的行列式和它转置矩阵的行列式是相等的，即 $\det(M) = \det(M^T)$。所以，$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - (\lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I)$。既然 $A$ 和 $A^T$ 有相同的特征方程，它们必然有相同的特征值。