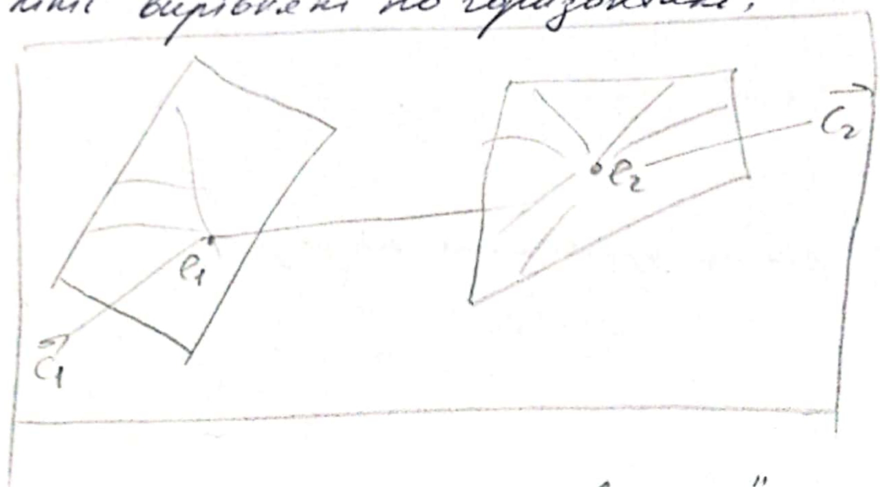
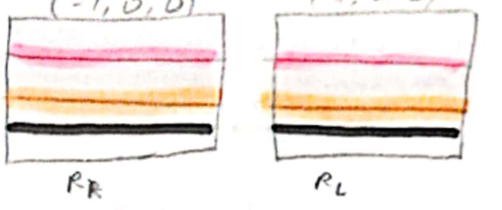
Приведення стереопари до стандартного вигляду за допомогою фундаментальної матриці (uncalibrated stereo rectification) геометрична інтерпретація (як змінюються епіполярні лінії і точки?), навіщо робити ректифікацію, навести та показати коректність алгоритму вирівнювання стереопари за фунд. матрицею

Ректифікація - процес обробки двох зображень з епіполярними лініями, результатом якого є зображення на яких епіполярні лінії вирівнені по горизонталі.



Вектор k:



Якщо лінії паралельні, то вони зустрінуться на нескінченності

Як будуть розміщені камери „в теорії" коли епіполярні лінії паралельні

Камери будуть розміщені паралельно один одному. і на одній лінії.
Відповідно епіполярні точки будуть на нескінченності!

Тобто нам потрібно повернути камери.

Епіполярні точки будуть точками на нескінченності

$$\langle 1,0,0\rangle = R\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{[\vec{k}\times(\vec{e}_1\times\vec{k})]^T}{\|\vec{k}\times(\vec{e}_1\times\vec{k})\|} \\ \frac{(\vec{k}\times\vec{e}_1)^T}{\|\vec{k}\times\vec{e}_1\|} \\ \underset{\langle 0,0,1\rangle}{\vec{k}^T} \end{bmatrix}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ e_{1z} \end{bmatrix}$$

Хочемо викинути e_{1z}

$$\underbrace{G R}_{R_L}\, \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{e_{1z}}{\underset{(Re)_x}{x}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Нехай $\vec{e_1}$ поділимо на e_{1z}.

$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e_1}}{e_{1z}}$, $e_{1z} \neq 0 \Rightarrow e_{1z} \in \{0,1\}$.

Згадаємо фундаментальну матрицю:

Знаємо, що $F = H \cdot [\vec{e}]_x$

Гомографія це відображення із точки в точки, а фундаментальна із лінії в лінії.

Є така вл-ть у F:

$F = C [\vec{e}_1]_x ([\vec{e_1}]_x F)$, $c \in \mathbb{R}$

і знаємо

$F = [\vec{e_1}]_x H$

$K_R = R_L \cdot H$ – так не вийде, але це перетворення не зворотнє.

$R_L ([\vec{e_1}]_x F)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\left[\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k})\right]^T}{\|\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k})\|} \\ \frac{\left[(\vec{k} \times \vec{e_1}) \times \vec{e_1}\right]^T}{\|\vec{k} \times \vec{e_1}\|} \\ \vec{k}^T - \frac{\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k})}{\|\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k})\| x} \end{bmatrix} [\vec{e}_1]_x F = R_R$$

$\vec{y} \times \vec{x} = [\vec{y}]_x \vec{x} = -\vec{x}^T [\vec{y}]_x = -\vec{x} \times \vec{y}$

$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix}$

$x = (\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k}))^T \vec{e_1}$

$$\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} e_1 \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} e_{1y} - 0 \\ e_{1z} \cdot 0 - e_{1x} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1y} \\ e_{1x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{k} \times \vec{e_1} = \begin{bmatrix} -e_{1y} \\ e_{1x} \\ 0 \end{bmatrix}$; $\|k \times (\vec{e_1} \times \vec{k})\| x = \vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k}) \cdot \vec{e_1}$

$$\vec{k} \times (\vec{e_1} \times \vec{k}) [\vec{e_1}]_x = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e_{1z} & e_{1y} \\ e_{1z} & 0 & -e_{1x} \\ -e_{1y} & e_{1x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -e_{1z} & e_{1y} \\ e_{1z} & 0 & -e_{1x} \\ -e_{1y} & e_{1x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_{1z} e_{1y} \\ e_{1z} e_{1y} \\ -e_{1y}^2 + e_{1x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} \times e_1 [\vec{e_1}]_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} -e_{1y} \\ e_{1x} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -e_{1z} & e_{1y} \\ e_{1z} & 0 & -e_{1x} \\ -e_{1y} & e_{1x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} e_{1z} \\ e_{1y} e_{1z} \\ -e_{1y}^2 - e_{1x}^2 \end{bmatrix}$$

Алгоритм приведення стереопари до стандартного вигляду

Нехай k - одиничний вектор $(0,0,1)^T$, $\hat{e}_R$ - епіполярна точка правого зображення, третя координата якої 1, або 0 (знаходимо з ядра фундаментальної матриці F). Матриця викривлення правого зображення:

$$R_R = \begin{bmatrix} \dfrac{(k \times (\hat{e}_R \times k))^T}{\|k \times (\hat{e}_R \times k)\|} \\ \dfrac{(k \times \hat{e}_R)^T}{\|k \times \hat{e}_R\|} \\ k^T - \dfrac{k \times (\hat{e}_R \times k))^T}{k \times (\hat{e}_R \times k) \cdot \hat{e}_R} \end{bmatrix}$$

Щоб центр зображення не змінив свого положення після вирівнювання, потрібно змістити точки отримані за допомогою SIFT, таким чином, щоб координати центра зображення опинилися в початку системи координат, а потім застосувати зсув назад до отриманої матриці R_R.

Матриця викривлення лівого зображення рахується в два етапи

$$R'_L = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix}; \quad z_x = z_y \times z_z; \quad z_y = \frac{((k \times \hat{e}_R) \times \hat{e}_R)^T}{\|k \times (\hat{e}_R \times k)\|} \cdot F$$

$$z_z = (k \times \hat{e}_R)^T \cdot \left(1 + \frac{1}{k \times (\hat{e}_R \cdot k) \cdot \hat{e}_R}\right) \cdot F$$

Далі методом найменших квадратів шукаються такі три числа a, b та c, щоб відповідні пари точок $\langle x, x' \rangle \in M$ (ті що знайдені за допомогою SIFT для оцінки фунд. матриці) були якнайближче одна до одної на вісі абсцис.

$$\sum_{\langle x, x' \rangle \in M} \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^T \cdot \frac{R'_L \cdot x}{(R'_L \cdot x)_z} - \frac{(R_R \cdot x')_x}{(R_R \cdot x')_z} \right)^2 \to \min_{a,b,c \in \mathbb{R}}$$

і отримаємо формулу матриці викривлення лівого зобр-ння:

$$R_L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot R'_L$$

Кроки!

1. Взяти дві фотографії строкатого об'єкту (не пласкої і не круглої ф-ф
2. Знайти фунд. матрицю
3. Викривити зображення так, щоб їх епіполярні лінії були горизонтальними, а кожен рядок у одного зобр-ння відповідав кожному рядку у другого зображення.

Далі пояснення щодо масштабування ...

$$R_L \vec{e}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{(R\vec{e}_L)_x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{(\vec{k} \times (\vec{e}_L \times \vec{k}))^T}{\| \vec{k} \times (\vec{e}_L \times \vec{k}) \|} \\ \frac{(\vec{k}^T \times \vec{e}_L)^T}{\| \vec{k}^T \times \vec{e}_L \|} \\ \vec{k}^T \end{bmatrix}}_{R} \vec{e}_L = \begin{bmatrix} (R\vec{e}_L)_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

матриця повороту.

Нехай візьмемо точку $[0, 0, 1]$

$$G R_L \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

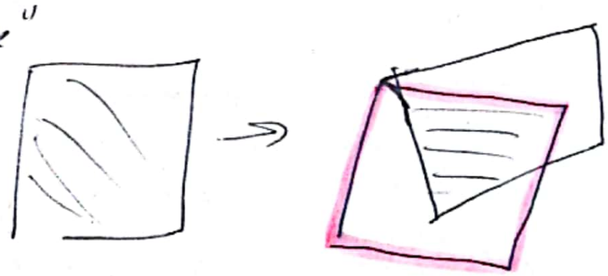
чому отримали 0?

1, бо поворот не міняє довжину вектора.

$\Rightarrow$ і маємо 0, до якого не 0 $\Rightarrow$ поворот змінює довжину, а цього не може бути!

Це значить, що ми отримаємо „обрубок"

Але є трюк, ми центр переносимо в $(0, 0, 1)$



Для цього потрібна матриця переміщення $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{W}{2} \\ 0 & 1 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{W}{2} \\ 0 & 1 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Потрібно перейти з $M - \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle \to \langle T\vec{x}, T\vec{x}' \rangle$

Обґрунтування способу ректифікації стереопари

$$R_R \cdot \vec{e}_R = G \cdot R \cdot \vec{e}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{(R \cdot \vec{e}_R)_x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R))^T}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R) \|} \\ \frac{(k \times \vec{e}_R)^T}{\| k \times \vec{e}_R \|} \\ \vec{k}^T \end{bmatrix} \vec{e}_R = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{(R \cdot \vec{e}_R)_x} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \frac{(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R))^T}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R) \|} \\ \frac{(k \times \vec{e}_R)^T}{\| k \times \vec{e}_R \|} \\ \vec{k}^T \end{bmatrix}$

Вкажу у нас 3-ій базисний вектор ортонормованого простору з базисом i, j, k.

Далі вектор $\vec{k}$ потрібно помножити на $\vec{e}_R$, щоб отримати правильний напрямок, яке занулить $\vec{e}_R$, але буде $\perp$ 3-ій координаті. І потрібно нормувати (щоб вийшла дійсно матриця повороту).

Після, оскільки ніяких обмежень не накладається на координату x просто робимо вектор $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R)$ ортогональним двум попереднім.

Перемножимо G і R і отримаємо R_R

$$R_R = \begin{bmatrix} \frac{(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R))^T}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R) \|} \\ \frac{(\vec{k} \times \vec{e}_R)^T}{\| \vec{k} \times \vec{e}_R \|} \\ \vec{k}^T - \frac{(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R))^T}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R) \| \cdot [\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_R)]^T \cdot \vec{e}_R} \end{bmatrix}$$

Ми знаємо, що фунд. матрицю можна представити у таких вигляд:

$$\begin{cases} F = c \cdot [\vec{e}_R]_x^2 \cdot F \\ F = [\vec{e}_R]_x H \end{cases} \Rightarrow \text{грубо візьмемо} \begin{cases} H \sim [\vec{e}_R]_x F \Rightarrow R_L \text{ отримаємо з } R_R [\vec{e}_R]_x F. \\ R_L = R_R H \end{cases}$$

Якщо ми H можемо представити як $[\vec{e}_R]_x F$ („грубо")

Тоді для ректифікації лівої картинки зробити наступне:
Ми хочемо перевести ліву картинку в систему координат правої картинки, а потім ректифікувати за допомогою матриці ректифікації правої картинки.
Тобто ми хочемо перетворити ліву картинку так, щоб епіполярні лінії вирівнялись чітко так як і лежать відповідні епіполярні лінії правої картинки.

$$R_K \cdot [\vec{e}_K]_\times = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K)\right)^T [\vec{e}_K]_\times}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K) \|} \\ \dfrac{(k \times \vec{e}_K)^T [\vec{e}_K]_\times}{\| \vec{k} \times \vec{e}_K \|} \\ \vec{k}^T [\vec{e}_K]_\times - \dfrac{\left(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K)\right)^T [\vec{e}_K]_\times}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K) \| \left(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K)\right)^T \cdot \vec{e}_K} \end{bmatrix} \circledequal$$

$$-\left(\vec{k}^T [\vec{e}_K]_\times\right)^T = -[\vec{e}_K]_\times^T \vec{k} = [\vec{e}_K]_\times \vec{k} = \vec{e}_K \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{e}_K = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K) = [\vec{k}]_\times \cdot (\vec{k} \times \vec{e}_K) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_y \\ e_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_x \\ -e_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K)\right)^T [\vec{e}_K]_\times = [-e_x \quad e_y \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} = [-e_y e_z \quad e_x e_z \quad -e_y e_x + e_x e_y] =$$

$$= \{e_z = 1\} = [-e_y \quad e_x \quad 0] = (\vec{k} \times \vec{e}_K)^T$$

$$(\vec{k} \times \vec{e}_K)^T [\vec{e}_K]_\times = [-e_y \quad e_x \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} = [e_x e_z \quad e_y e_z \quad -e_y^2 - e_x^2] =$$

$$= \{e_z = 1\} = [e_x \quad e_y \quad -e_y^2 - e_x^2]$$

$$\left(k \times (\vec{k} \times \vec{e}_K)\right)^T \cdot \vec{e}_K = -e_x^2 - e_y^2$$

$$\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K) \| \cdot \left(\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K)\right)^T \cdot \vec{e}_K = -\sqrt{e_x^2 + e_y^2}\,(e_x^2 + e_y^2) = \|(e_x, e_y, 0)\|^3$$

$$\circledequal \begin{bmatrix} \dfrac{(\vec{k} \times e_K)^T}{\| \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_K) \|} \\ \dfrac{\left((\vec{k} \times \vec{e}_K) \times \vec{e}_K\right)^T}{\| \vec{k} \times \vec{e}_K \|} \\ (\vec{k} + \vec{e}_K)^T + \dfrac{(\vec{k} \times \vec{e}_K)^T}{\|(e_x, e_y, 0)\|^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(\vec{k} \times \vec{e}_K)^T}{\|(e_x, e_y, 0)\|} \\ \dfrac{\left((\vec{k} \times \vec{e}_K) \times \vec{e}_K\right)^T}{\|(e_x, e_y, 0)\|} \\ (\vec{k} \times \vec{e}_K)^T \left(1 + \dfrac{1}{\|(e_x, e_y, 0)\|^3}\right) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ бачимо, що це колінеарно цьому і це не є добре

$\Rightarrow$ то маємо лін. комбінацію.

$$\vec{r}_x = \left(\frac{\vec{k}\times\vec{e}_R}{\|(e_x, e_y, 0)\|}\right)^T\cdot F \ ;$$

$$\vec{r}_y = \left(\frac{(\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R}{\|(e_x, e_y, 0)\|}\right)^T\cdot F$$

$$\vec{r}_z = \left(\vec{k}\times\vec{e}_R\left(1+\frac{1}{\|(e_x, e_y, 0)\|^3}\right)\right)^T\cdot F$$

$R_R\cdot[\vec{e}_2]_x\cdot F = \begin{bmatrix}\vec{r}_x^{\,T}\\ \vec{r}_y^{\,T}\\ \vec{r}_z^{\,T}\end{bmatrix}$, але $\vec{r}_x \parallel \vec{r}_z$ $\Rightarrow$ маємо матрицю 2 рангу, а нам потрібно мати матрицю вирівнювання 3 рангу (щоб була оборотною).

Тобто потрібно зробити, щоб компоненти матриці вирівнювання складали базис $\Rightarrow$ потрібно змінити $\vec{r}_i$, щоб був ранг 3, і базис.
Що нам важливо зберегти - у точках епіполярних ліній?
у та z, а по x не важливо!
Тобто: якщо були точки $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$, то можуть стати $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$, але вони не перемішаються!
Давайте замість $\vec{r}_x$ візьмем $(\vec{r}_y\times\vec{r}_z)^T$

Ми знаємо, що $rank(F)=2$
Нехай помножимо $((\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R)^T$ на F $\Rightarrow$ ми знаємо, що F буде занулять своє ядро; Будь-який $\vec{y}$ може бути заданий у вигляді $\vec{y} = a\vec{x} + b\vec{e}_R$, $x\perp e_R$

$\vec{y}^T F = (a\vec{x}+b\vec{e}_R)^T F = aF\vec{x} \neq \vec{0}$, якщо $a\neq 0$, $\vec{x}\neq\vec{0}$

нехай $y = (\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R = \left\{((\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R)\perp\vec{e}_R \Rightarrow \text{тут компонента } b=0\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot F\neq\vec{0}$. $\Rightarrow$ F не спотворює нічого (не занулює).
F не має порушувати ортогональність компонент матриці вирівнювання, тобто як був базис так і має залишитись

$$((\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R)^T\cdot F \nparallel (\vec{k}\times\vec{e}_R)^T F \Leftrightarrow \left[a(\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R - b(\vec{k}\times\vec{e}_R)\right]^T F\neq\vec{0}$$

$\Rightarrow$ це б виконувалось як би $\underbrace{a(\vec{k}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R}_{\perp e_R} - \underbrace{b(\vec{k}\times\vec{e}_R)}_{\perp e_R} = c\cdot\vec{e}_R$

Тобто різницю двох векторів, що ортогональні $\vec{e}_R$ не можна ніяк не вийде за цю площину

$\Rightarrow$ можна записати так:

$$\boxed{R_L = \begin{bmatrix}(\vec{r}_y\times\vec{r}_z)^T\\ \vec{r}_y^{\,T}\\ \vec{r}_z^{\,T}\end{bmatrix}}$$

, r_y і r_z не колінеарні і не нульові за умови, що $e_R\neq\vec{k}\cdot c$.

Далі працюємо з методом найменших квадратів.

$$\sum_{<\vec{x}',\vec{x}>\in M} \left\| \frac{R_R \vec{x}'}{(R_R \vec{x}')_z} - \frac{R'_L \vec{x}}{(R_L \cdot \vec{x})_z} \right\|^2 \to \min_{R'_L}$$

$$\|(x',y',z') - (x,y,z)\|^2 = (x'-x)^2 + \underset{0}{(y'-y)^2} + \overset{=0}{(\underset{1}{z'} - \underset{1}{z})^2}$$

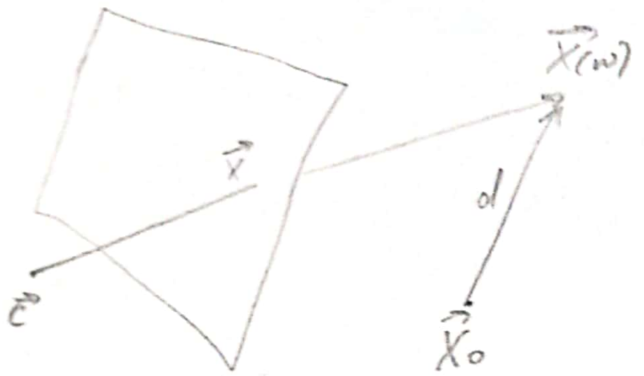
Ми хочемо вирівняти матчі по y ⇒

$$\sum_{<\vec{x}',\vec{x}>\in M} \left\| \frac{(R_R \vec{x}')_x}{(R_R \vec{x}')_z} - \frac{\vec{r}_x^{\,T} \vec{x}}{\vec{r}_z \cdot \vec{x}} \right\|^2 \to \min_{\vec{r}_x \in \mathbb{R}^3}$$

За допомогою МНК ми уточнюємо $\vec{r}_x$ (новий).

$$\Rightarrow R_L = \begin{bmatrix} \vec{r}_x^{\,T} \\ \vec{r}_y^{\,T} \\ \vec{r}_z^{\,T} \end{bmatrix}$$

Точка на нескінченності (vanishing point): математична модель точки на нескінченності, її геометричний зміст (де і як її побачити).



$$\lambda \vec{x} = KR(\vec{X} - \vec{C})$$

Точка на нескінченності це така точка, радіус-вектор якої нескінченність

$$\vec{X}(w) = \vec{d}w + \vec{X}_0$$

Маємо $\lambda \vec{x} = KR(\vec{X}(w) - \vec{C})$

підставимо $\vec{X}(w) = \vec{d}w + \vec{X}_0$.

$$\Rightarrow \lambda \vec{x} = wKR\vec{d} + KR\vec{X}_0 - KR\vec{C} \quad /w$$

$$\frac{\lambda \vec{x}}{w} = KR\vec{d} + \frac{KR\vec{X}_0}{w} - \frac{KR\vec{C}}{w}$$

$$\lambda = [wKR\vec{d} + KR(\vec{X}_0 - \vec{C})]_z$$

$$KRd_z\vec{x} = KR\vec{d} = KR(\vec{d} - \vec{0}) = [KR \mid -KR\vec{C}] \begin{bmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[KR \mid -KR\vec{C}] \begin{bmatrix} \vec{X} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda' \vec{x} = [KR \mid -KR\vec{C}] \begin{bmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

В проективній геометрії 4 вимірний вектор з останньою коорд-ою 0 це спосіб представити точку на нескінченності. бо де б ми не поставили $\vec{X}_0$ у нас все буде керуватись направленням $\vec{d}$.

<u>У ректифікації</u> точка відходить на нескінченність, тому і треба використовувати vanishing point.

Розклад істотної матриці (decomposition of the essential matrix): знайти R та t з розкладу істотної матриці $E = R[t]_x$

Essential matrix rank

$E = R[\vec{t}]_x$:

Знаємо $2E \cdot E^T E - E \cdot tr(E^T E) = 0$

Singular value decomposition (SVD)

$1 = |I| = |U \cdot U^T| = |U||U^T| = |U|^2$; $UU^T = VV^T = I$; $|U| = \pm 1, |V| = \pm 1$.

$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$.

$\hookrightarrow$ підставимо $E = USV^T \Rightarrow 2USV^T(USV^T)^T USV^T - USV^T tr\left[(USV^T)^T USV^T\right] = 0$

$U^{-1} \times \; 2US^3V^T - USV^T tr(S^2) = 0 \; \times V^{-T}$

$tr(VS^2V^T) = tr(S^2VV^T) = tr(S^2)$.

$$2S^3 - S\,tr(S^2) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\sigma_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_1(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\sigma_1^3 - \cancel{\sigma_1^3} - \sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3^2 = \sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) & (1) \\ 0 = 2\sigma_2^3 - \sigma_2\sigma_1^2 - \cancel{\sigma_2^3} - \sigma_2\sigma_3^2 = \sigma_2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2) & (2) \\ 0 = 2\sigma_3^3 - \sigma_3\sigma_1^2 - \sigma_3\sigma_2^2 - \cancel{\sigma_3^3} = \sigma_3(\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2) & (3) \\ 0 \leq \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \end{cases}$$

Нехай $\sigma_3 = 0$

$$\begin{cases} (1)\; 0 = \sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_2^3) = \left[\begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{array}\right. \\ (2)\; 0 = \sigma_2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = \left[\begin{array}{l} \sigma_2 = 0 \\ \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Нехай $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$

$$(1)\; 0 = \sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) \overset{/\sigma_1 > 0}{=} \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2$$

$$(2)\; 0 = \sigma_2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2) \overset{/\sigma_2 > 0}{=} \sigma_2^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_3^2 = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 = \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = 0$.

На практиці:

Нехай $\hat{E} = USV^T$; $S = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow S' = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a+b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{E}' = US'V^T$.

$$\Rightarrow \underbrace{\|\hat{E} - \hat{E}'\|_F}_{\text{норма Фробеніуса}} \to \min_{\hat{E}'}$$

$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $rank(S) = 2$, або якщо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \Rightarrow rank(S) = 0$

S множиться на ортогональні $U, V^T \Rightarrow \boxed{rank(E) = (2 \vee 0)}$

Але нульова матриця не сильно підходить (але на лекції не якого того)

~~Розклад істотної матриці (decomposition of the essential matrix). знайти R та t з розкладу $E = R\cdot[t]_\times$.~~

$$E = USV^T = U\begin{bmatrix}\sigma&0&0\\0&\sigma&0\\0&0&0\end{bmatrix}V^T = \left\{\begin{matrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\sigma&0\\\sigma&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma&0&0\\0&\sigma&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\ W = U\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ |W|=|U|,\ WW^T=I\end{matrix}\right\} =$$

$$= W\begin{bmatrix}0\\0\\\sigma\end{bmatrix}_\times V^T = \left\{\begin{matrix}(M\vec{a})\times(M\vec{b}) = \dfrac{M^{-T}}{|M^{-T}|}\vec{a}\times\vec{b}\\ \begin{bmatrix}0\\0\\\sigma\end{bmatrix}_\times V^T = \left[\underset{M}{V^T}V\begin{bmatrix}0\\0\\\sigma\end{bmatrix}\right]_\times \underset{M}{V^T} = \dfrac{V^{-1}}{|V^{-1}|}\left[V\begin{bmatrix}0\\0\\\sigma\end{bmatrix}\right]_\times\end{matrix}\right\} =$$

Властивості:

$1 = |I| = |UU^T| =$

$= |U|\,|U^T| = |…$

$UU^T = VV^T = I$

$|U| = \pm 1$

$|V| = \pm 1$

$S = \begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\\0&0&\sigma_3\end{bmatrix}, \sigma_1 \le \sigma_2 …\ \ge 0$

$$= WV^{-1}\cdot\frac{1}{\underbrace{|V^{-1}|}_{=V}}\left[V\begin{bmatrix}0\\0\\\sigma\end{bmatrix}\right]_\times =$$

$$= |W|\underbrace{\frac{1}{|W|}}_{det=1}W\ \underbrace{V^{-1}|V|}_{det=1}\left[\begin{bmatrix}\vec{V}_x^T\\\vec{V}_y^T\\\vec{V}_z^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\sigma\end{bmatrix}\right]_\times =$$

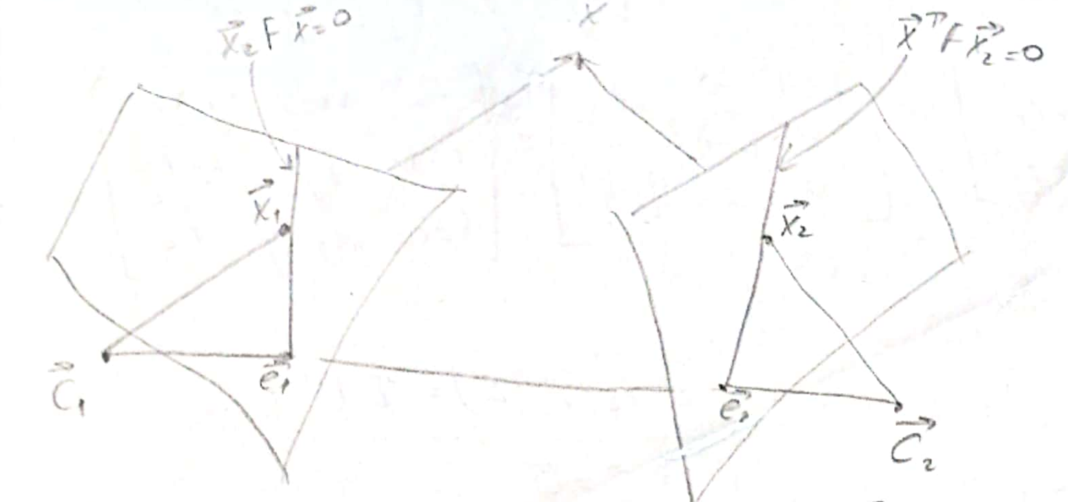
$$= \left(|W|WV^{-1}|V|\right)|W|\left[\sigma\vec{V}_z\right]_\times = \underbrace{|W|WV^T|V^T|}_{R:\ RR^T=I,\ |R|=1}\ \underbrace{\left[\sigma|W|\vec{V}_z\right]_\times}_{\vec{t}}$$

$$= R[\vec{t}]_\times.$$

$$\Rightarrow R = |U|\cdot U\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}V^T|V^T|. \quad \text{— поворот}$$

$$\vec{t} = \frac{s_x+s_y}{2}|U|\cdot\underbrace{\vec{V}_3}_{\text{3-ій стовпчик.}} \quad \text{— зміщення}$$

Обмеження, що накладаються на істотну матрицю (essential matrix constraints). Вивести обмеження, що накладаються на істотну матрицю користуючись тим, що її можна розкласти як $E = R\cdot[\vec{t}]_\times$



Є дві камери,
Є точка в просторі $\vec{X}$
Є відповідні проекції точки $\vec{X}$ на проекуючі площини камер $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$

Ми знаємо таке рівняння: $\vec{x}_2^T \cdot \underbrace{K_2^{-T} \underbrace{R_2^{-T} [\vec{C}_2 - \vec{C}_1]_\times R_1^{-1}}_{\text{Essential}} K_1^{-1}}_{\text{Fundamental}} \vec{x}_1 = 0$

$E = \underbrace{R_2^{-T}}_{\text{матриця повороту}} \underbrace{[\vec{C}_2 - \vec{C}_1]_\times}_{\text{зміщення однієї камери відносно іншої}} R_1^{-1}$

Зробимо поворот глобальної системи координат відносно якої-се камери – {домножимо на R_1 зліва} розпишемо векторно

Згадаємо формулу:

$$(M\vec{a}) \times (M\vec{b}) = \frac{M^{-T}}{|M^{-T}|} (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow E = R_2^{-T} (\vec{C}_2 - \vec{C}_1) \times (R_1^{-1} \vec{x})$$

$$\Rightarrow E = R_2^{-T} (R_1^{-1} R_1 (\vec{C}_2 - \vec{C}_1)) \times (R_1^{-1} \vec{x}) = R_2^{-T} R_1^T (R_1(\vec{C}_2 - \vec{C}_1)) \times \vec{x}$$

Ми можемо робити такі „чудеса", бо $\det R = 0$

$$\Rightarrow E = R_2^{-T} R_1^T [R_1 (\vec{C}_2 - \vec{C}_1)]_\times = R \cdot [\vec{t}]_\times$$

R – взаємний поворот між матрицями

$[\vec{t}]_\times$ – кососиметрична матриця створена від вектора зміщення між камерами

1) Властивість матриці E:
Якщо E є фунд (коли K = одинична)
$\Rightarrow$, $\det E = 2$

Два способи одержання істотної матриці.
1) Коли отримали F у вигляді: $F = K_2^{-T} \cdot R_2^{-T} [\vec{C}_2 - \vec{C}_1]_\times R_1^{-1} K_1^{-1}$
Домножити зліва на K_2^T, а зправа на K_1^T і отримаємо істотну
2) З рівняння $\vec{x}_2^T K_2^{-T} R_2^{-T} [\vec{C}_2 - \vec{C}_1]_\times R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 = 0$
домножити зліва на $(\vec{x}_2^T K_2^{-T})^{-1}$, а зправа $(K_1^{-1} \vec{x}_1)^{-1} \Rightarrow$ отримаємо тому істотну матрицю

Властивості істотної матриці.

$$: E^T E = [\vec{t}]_x^T R^T \cdot R [\vec{t}]_x = [\vec{t}]_x^T [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 0 & t_z & -t_y \\ -t_z & 0 & t_x \\ t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_z^2 + t_y^2 & -t_x t_y & -t_x t_z \\ -t_y t_x & t_z^2 + t_x^2 & -t_y t_z \\ -t_z t_x & -t_z t_y & t_y^2 + t_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|t\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|t\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|t\|^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_x^2 & t_x t_y & t_x t_z \\ t_y t_x & t_y^2 & t_y t_z \\ t_z t_x & t_z t_y & t_z^2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathrm{tr}(E^T E) = 2\|t\|^2$$

$$= \boxed{\|t\|^2 I - \vec{t}\,\vec{t}^T = E^T E}$$

$$E E^T E = E \|\vec{t}\|^2 - E\vec{t}\,\vec{t}^T = E\|\vec{t}\|^2 = \boxed{\tfrac{1}{2} E \cdot \mathrm{tr}(E^T E) = E E^T E}$$

$$R [\vec{t}]_x \vec{t} = R(\vec{t} \times \vec{t}) = R \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2 E E^T E - E\,\mathrm{tr}(E^T E) = 0 \Rightarrow (2 E E^T - I \cdot \mathrm{tr}(E^T E)) E = 0$$

Ми знаємо: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |E| = 0 \\ 2 E E^T - I \cdot \mathrm{tr}(E^T E) \overset{①}{=} 0 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow 0 = \mathrm{tr}\{2 E E^T - I\,\mathrm{tr}(E^T E)\} = 2\,\mathrm{tr}(E E^T) - 3\,\mathrm{tr}(E^T E) =$$

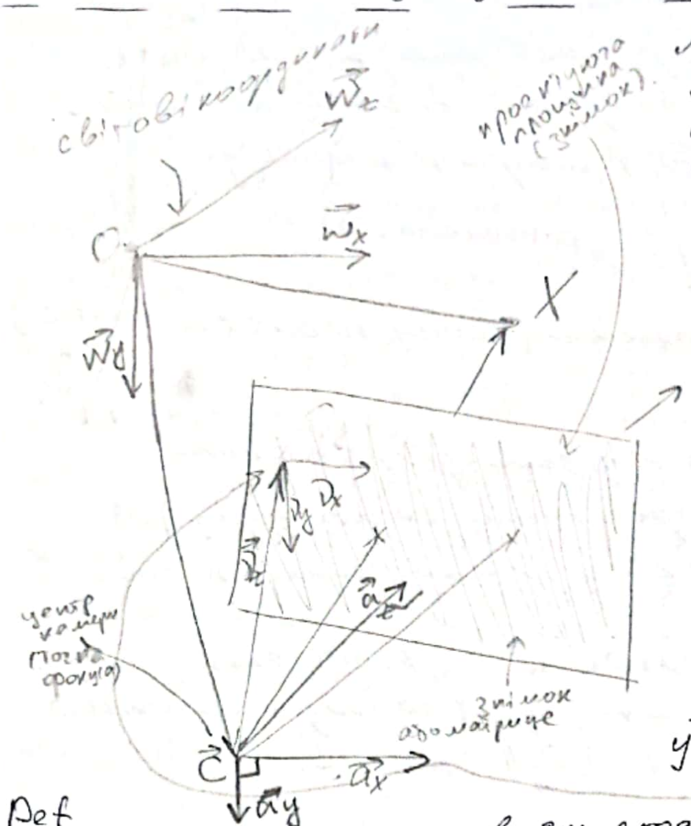
$$= -\mathrm{tr}(E E^T) \Rightarrow \mathrm{tr}(E E^T) = 0 \;②$$

$$\Rightarrow 2 E E^T \overset{①}{=} I \cdot \mathrm{tr}(E^T E) \overset{\det}{\Rightarrow} |2 E E^T| = |I \cdot \mathrm{tr}(E^T E)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Визначника}}{2^3} |E| |E^T| = \mathrm{tr}(E E^T)^3 \Rightarrow 8 |E|^2 \overset{②}{=} 0^3 \Rightarrow \boxed{|E| = 0}$$

до визначника - це scale factor?

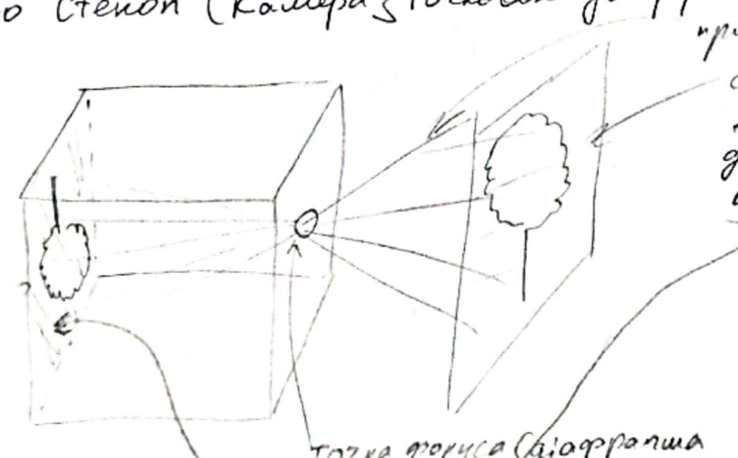
Внутрішні параметри камери з точковою діафрагмою (pinhole instrinsic matrix): вивести вигляд верхньої трикутної матриці внутрішніх параметрів камери з точковою діафрагмою (питання включає в себе розв'язок виникаючих квадратних рівнянь).



Ми працюємо в 3-вимірному просторі. У нас є система координат. Вона не обов'язково прямокутна і її базис не обов'язково ортонормований.
За допомогою базиса ми можемо представити координату точки.
O_w – центр базису.
X – точка. Ми можемо її представити в базисі w: $\langle x, y, z\rangle_w = x\cdot\vec{w}_x + y\cdot\vec{w}_y + z\cdot\vec{w}_z$

Def
Ортонормована сист. коорд. – це така система в якій всі базисні вектори ортогональні (перпендикулярні один одному) і мають одиничну довжину.
Як ми отримуємо інформацію із 3-вимірної сцени? → За допомогою камери.
У камери є точка фокуса (центр камери).

Def
Точка фокуса – це точка в яку сходяться всі промені.
Камера – це математична модель, що складається із точки фокуса, проектуючої площини та матриці камери.
Ми вважаємо, що в нас камера знімає без лінійних спотворень.
Тобто або її лінза нескінченно тонка, або камера – лох.
Охохо, лошара вона. Ну ви поняли? Ахахаха...
Або Стенон (Камера з точковою діафрагмою).



світлочутлива площина (фотоплівка)
Ми взяли і віддеркалили відносно діафрагми те, що отримали в середині

Назвемо цю фотоплівку світлочутливу площину матрицею.

Наша задача! У нас є координати точки X в базисі w, але ми хочемо і отримати в системі координат камери. По суті ми робимо перенос системи координат. Вона зміщується на вектор $\vec{C}$ (Camera center)
Тобто $\vec{X}$ зміщується на $\vec{C}$. Створюємо нову систему координат.
Ми вводимо базисний вектор D_z. Він не обов'язково ортонормований.
І також є D_x, D_y. Чому?
А нас є камера. Що таке координати точки на знімку?

Це позиція в пікселях де вона знаходиться. => значить на цій картинці є базисні вектори. Який розмір пікселя може бути? -> будь-який. І це залежить від характеристики камери. Це є перша причина, що якій не ортонормований базис корисний. Друга — вектор $\|\vec{D_z}\| = f$ — фокусна відстань. => базис вже не нормований.

Щоб представити точку X в системі координат камери: нам потрібно її змістити і застосувати деякі перетворення в нову систему координат (поворот). $\vec{X_D} = \overset{3\times3}{A}\,\overset{3\times1}{(\vec{X_w}-\vec{C})}$ ⊜; A-матриця переходу від одного до іншого базису.

Також записують так: ⊜ $\underbrace{[A \mid A\vec{C}]}_{3\times4}\overset{4\times1}{\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}}$. → конкатенація.

Так, у нас координати стали 4-х вимірними. (Homogeneous coordinates), тобто однорідні координати.

$[A \mid -A\vec{C}]$ — це камера.

Всі точки на картинці (зліва) мають 3-тю координату D_z, бо коли ми проектуємо точку на картинку (ми проектуємо на площину), а площина є там, де 3-тя координата = 1: $<x, y, 1>$ - координати пікселя в системі координат камери (на картинці).

Візьмемо ортонормовану систему координат w, бо навіть якщо у нас є неортонормована система координат ми її завжди можемо нормувати.

Базис: $\vec{w}_x^T \vec{w}_y = \vec{w}_x^T \vec{w}_z = \vec{w}_y^T \vec{w}_z = 0$ та $\|\vec{w}_x\| = \|\vec{w}_y\| = \|\vec{w}_z\| = 1$.

$< \vec{w}_x, \vec{w}_y, \vec{w}_z >$ — ортонормований базис.

У нас є точка X в базисі w: X_w та у базисі D: X_D

A — матриця переходу від сист. коорд. w в систему D. одинична

$\vec{X}_D = A \cdot (\vec{X}_w - \vec{C})$; Позначимо: $P = [A \mid -A\vec{C}] = A[I \mid -\vec{C}]$.

Тоді маємо перехід: $\vec{X}_D = P \cdot \vec{X}_w$

Нам цікаво з чого складається ця матриця A.

Використовуючи QR-decomposition: $A = K \cdot \frac{1}{f} \cdot R$

K — матриця параметрів камери (camera intrinsics) ← верхня трикутна

f — фокусна відстань (відстань від точки фокуса (центра камери) до проектуючої площини. (міститься в K)

вектор $\vec{C}$ вказує на точку фокуса і направлений із сист. коорд. w

R — матриця повороту ← ортогональна

Ми повертаємо систему координат w так, щоб $\vec{a}_z \perp$ проектуючої пл. І довжина цих векторів тепер = фокусній відстані => тобто система координат перестала бути нормованою (але залишається ортогональною). Система a - це нова система, утворена проміжна поворотом w.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

Ми з системи координат a попадаємо в сист. коорд. D множенням векторно на K.

Як виразити координати векторів $\vec{a}$ через $\vec{D}$?

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = [D_x \; D_y \; D_z] \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \\ k_{12} D_x + k_{22} D_y \\ k_{13} D_x + k_{23} D_y + k_{33} D_z \end{bmatrix}$$

Про a нагадаємо: $\vec a_x^T \vec a_y = \vec a_x^T \vec a_z = \vec a_y^T \cdot a_z = 0$, і $\|\vec a_x\| = \|\vec a_y\| = \|\vec a_z\| = f$.

$\vec a_x = k_{11}\vec D_x \Rightarrow \|\vec a_x\| = \|k_1 \vec D_x\| \Rightarrow \boxed{k_{11} = \frac{f}{\|D_x\|}}$

$\vec a_y = k_{12}\vec D_x + k_{22} D_y \Rightarrow$ домножимо цей вираз зліва на $\vec a_x^T$

$\Rightarrow 0 = \vec a_x^T \vec a_y = k_{12}\cdot \vec a_x^T \vec D_x + k_{22}\vec a_x^T \vec D_y = \{\vec a_x = k_{11}\vec D_x \Rightarrow \vec a_x^T = k_{11}\vec D_x^T\} = k_{12}(k_{11}\vec D_x^T)\vec D_x +$

$+ k_{22}(k_{11}\vec D_x^T)\cdot \vec D_y = k_{12}\|\vec D_x\|^2 + k_{22}\vec D_x^T \vec D_y = 0$ (1)

Знову розпишемо $\vec a_y$:

$\vec a_y = k_{12}\vec D_x + k_{22}\vec D_y \Rightarrow$ домножимо зліва на $\vec a_y^T \Rightarrow f^2 = \vec a_y^T \vec a_y = k_{12}\vec a_y^T \vec D_x + k_{22}\vec a_y^T \vec D_y =$

$= \{$підставимо $\vec a_y^T = k_{12}\vec D_x^T + k_{22}\vec D_y^T\} = k_{12}(k_{12}\vec D_x^T + k_{22}\vec D_y^T)\cdot \vec D_x + k_{22}(k_{12}\vec D_x^T + k_{22}\vec D_y^T)\vec D_y =$

$= k_{12}^2\|\vec D_x\|^2 + k_{12}k_{22}\vec D_y^T \vec D_x + k_{12}k_{22}\vec D_x^T\vec D_y + k_{22}^2\|\vec D_y\|^2 = \{k_{22}\vec D_x^T \vec D_y = -k_{12}\|\vec D_x\|^2\} =$

$= k_{12}^2\|\vec D_x\|^2 - k_{12}^2\|\vec D_x\|^2 - k_{12}^2\|\vec D_x\|^2 + k_{22}^2\|\vec D_y\|^2 = f^2$

$\Rightarrow k_{22}^2\|\vec D_y\|^2 = f^2 + k_{12}^2\|\vec D_x\|^2 \Rightarrow$ домножимо цей вираз на $\|\vec D_x\|^2$

$\Rightarrow k_{22}^2\|\vec D_x\|^2\|D_y\|^2 = f^2\cdot\|\vec D_x\|^2 + k_{12}^2\|D_x\|^4$ (2)

$\Rightarrow$ Піднесемо (1) до квадрату та виразимо $k_{12}^2\|D_x\|^4$:

$k_{12}^2\|D_x\|^4 = k_{22}^2(D_x^T\vec D_y)^2 \Rightarrow (\vec D_x^T\vec D_y)^2 = \|\vec D_x\|^2\cdot\|D_y\|^2\cdot\cos^2\angle(\vec D_x,\vec D_y)$.

$\Rightarrow k_{12}^2\|D_x\|^4 = k_{22}^2\cdot\|D_x\|^2\cdot\|D_y\|^2\cdot\cos^2\angle(\vec D_x,\vec D_y)$.

Підставимо це у (2)

$\Rightarrow k_{22}^2\|\vec D_x\|^2\|D_y\|^2 = f^2\|\vec D_x\|^2 + k_{22}^2\|\vec D_x\|^2\cdot\|\vec D_y\|^2\cdot\cos^2\angle(\vec D_x,\vec D_y) \quad /\|D_x\|^2$

$\Rightarrow k_{22}^2\|D_y\|^2 = f^2 + k_{22}^2\|\vec D_y\|^2\cdot\cos^2\angle(\vec D_x,\vec D_y)$

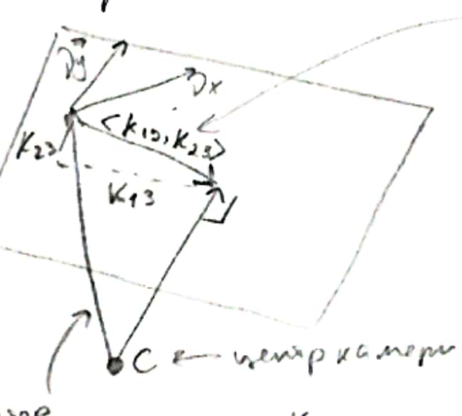
$\Rightarrow k_{22}^2\|D_y\|^2\left(1-\cos^2\angle(\vec D_x,\vec D_y)\right) = f^2$

$\Rightarrow \boxed{k_{22} = \frac{f}{\|D_y\|\cdot\sin\angle(\vec D_x,\vec D_y)}}$.

З (1) підставивши k_{22} маємо: $k_{12} = -\frac{k_{22}\vec D_x^T D_y}{\|D_x\|^2} = -\frac{k_{22}\|D_x\|\|D_y\|\cdot\cos\angle(\vec D_x,\vec D_y)}{\|D_x\|^2\|D_y\|\cdot\sin\angle(\vec D_x,\vec D_y)} =$

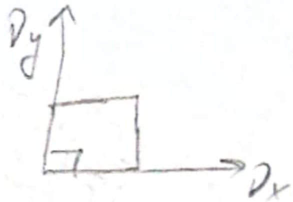
$\Rightarrow \boxed{k_{12} = \frac{-f}{\|\vec D_x\|}\cdot ctg\angle(\vec D_x,\vec D_y)}$.

Ми говоримо, що $\boxed{k_{33} = 1}$; k_{13}, k_{23} – це особливі вектори, які показують на скільки зміщений центр проект. площини відносно бажаного місця.



Вектор що описується матр. K

Припустимо, що нам дали камеру і сказали що вона ідеальна.
Які параметри буде містити матриця K?
Що таке ідеальна камера?

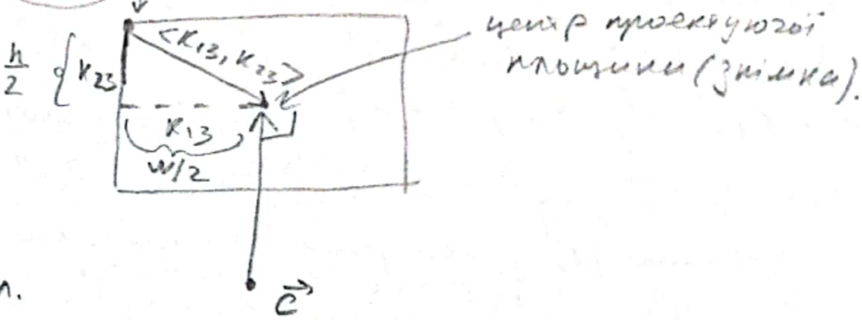


Знаємо, що ідеальний піксель квадратний
значить $\langle(D_x, D_y)\rangle = 90^\circ \Rightarrow k_{12} = 0$, а $k_{22} = \frac{f}{\|\vec{D_y}\|} = \{\|D_x\| = \|D_y\| = 1\} = f$.

Чому дорівнює k_{13}?

$k_{13} = \frac{W}{2}$ — ширина картинки — відстань від початку координат картинки до перпендикуляра центра камери по X.

Аналогічно для $k_{23} = \frac{h}{2}$.



В ідеальній камері перпендикуляр із точки фокуса на проектуючу площину проходить через її центр
проек. пл.

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} f & 0 & \frac{w}{2} \\ 0 & f & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ — в ідеальній камері.

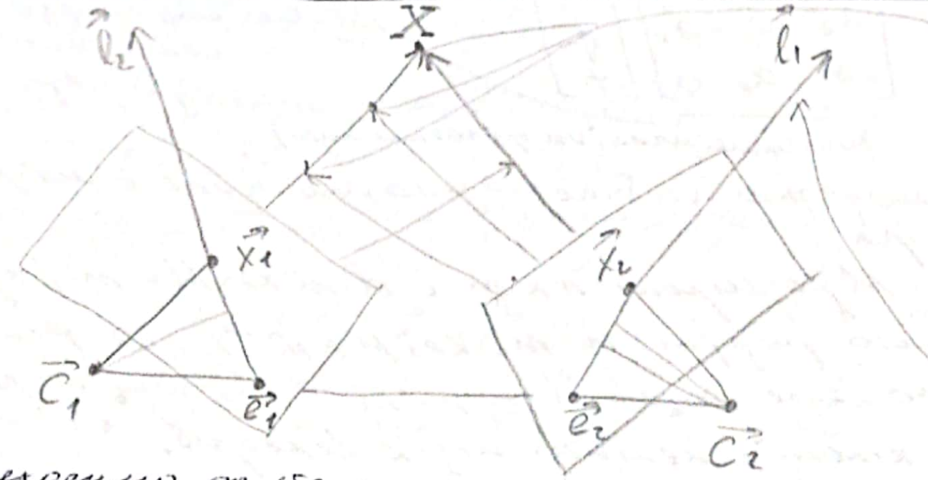
Для того, щоб задати f потрібно знати саму Focal length та Pixel size (розмір пікселя) (часто в мікрометрах)

Приклад: Focal length = 26 mm; Pixel size = 0.8 μm

$$\Rightarrow \underset{\text{в пікселях}}{f} = \frac{26\,mm}{0.8\cdot 10^{-3}\,mm} = 10^4 \cdot \frac{26}{8} = 3{,}25\cdot 10^4.$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 3250 & 0 & ? \\ 0 & 3250 & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Фундаментальна та істотна матриці (fundamental and essential matrices) вивести формулу для фундаментальної та істотної матриць за умови відомих внутрішніх і зовнішніх (intrinsic and extrinsic) параметрів камери з точковою діафрагмою (pinhole camera). Пояснити значення цих матриць та обґрунтувати їх ранг.



Проекції всіх цих точок на другій ($\vec{C_2}$) камері лежать на одній лінії l_1

l_1 виходить з епіполярної точки $\vec{e_2}$

насправді це не вектор а пряма з e_2

Ми переходимо до стерео-зору, а значить у нас є дві камери. Камера з центром $\vec{C_1}$ і камера з центром $\vec{C_2}$. Вони знімають точку в просторі, яку ми називаємо точкою X. Ми знаємо, що не можемо описати 3D простір і зв'язок між двома знімками за допомогою лінійного перетворення. Але є така матриця, яка може описати цей зв'язок.

Існує лінія, що сполучає центри цих двох камер.

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ - називаються епіполярними точками.

Def Епіполярна точка - це точка перетину проектуючої площини з лінією, що з'єднує центри двох камер.

Коли лінія l_1 перетворюється в точку при проектуванні фототочки на проектуючу площину ?

Припустимо точка X буде знаходитися на лінії, що з'єднує центри двох камер, тоді $\vec{l_1}$ вироджується в одну точку на проєк. пл. камери C_2 і це буде т. e_2

$\vec{l_1}$ - це епіполярна лінія.

Def. Епіполярна лінія l_1 - це проекція променя, що виходить із $\vec{C_1}$ через точку x_1 на проектуючу площину іншої камери.

Аналогічно з l_2

(Тобто коли ми беремо два знімки (лівий та правий) і малюємо епіполярні лінії, то на лівому ми бачимо l_2 лінію, а на правому l_1. Кожна еп. лінія лівого зображення відповідає кожній на правому.

Лінію ми можемо описати рівнянням прямої.

Канонічне рівняння прямої на площині: $ax + by + c = 0$

Представимо його у матричному вигляді:

$$\underbrace{[a, b, c]}_{\text{позначимо } \vec{l}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{позначимо } \vec{x}} = 0$$

$\Rightarrow \vec{l}^T \cdot \vec{x} = 0$

Пряма $\vec{l} - \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{l}^T \vec{x} = 0\}$

Scanned with CamScanner

Як можна векторний добуток представити у вигляді добутка матриці і вектора? і для чого?

$\vec a \times \vec b = \underbrace{[\vec a]_\times}_{\text{позначається так}} \vec b$: Взагалі це потрібно для представлення лінійності

$$\vec a \times \vec x = [\vec a]_\times \vec x = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

наз-ся матрицею векторного добутку

кососиметрична (на діагоналі нулі).

Коли розбирали гомографію, то було сказано, що у нас є матриця і ядро лін. оператора.

Якщо матриця M розміром $n \times m$ і $\dim \operatorname{Ker} M = m$ (ядро лін. оп. є підмножиною розірністю m, $\operatorname{Ker} M \in \mathbb{R}^m$), то ранг отриманої матриці буде $\operatorname{rank} M = n - m$. – (є така теорема).

Ранг матриці - кількість лінійно нез-х векторів.

Ранг $[\vec a]_\times$ може бути або 0 або 2.

(! для визначення рангу матриці потрібно брати не нульові мінори)

Ранг $[\vec a]_\times$ може бути 0, якщо $\vec a$ - нульовий вектор

Перетин двох ліній: у нас є $\vec l_1, \vec l_2 \in \mathbb{R}^3$

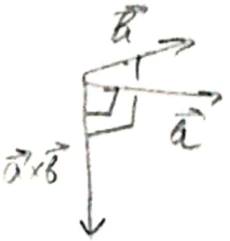
Для того, щоб знайти точку перетину потрібно вирішити таке рівняння:

$$\vec l_1^T \vec x = \vec l_2^T \vec x \Rightarrow \begin{cases} \vec x \perp \vec l_1 \\ \vec x \perp \vec l_2 \end{cases} \Rightarrow \vec x = \vec l_1 \times \vec l_2$$

Лінія, що проходить через дві точки:

Дві точки: $\vec x_1, \vec x_2 \in \mathbb{R}^3$ і $\vec l^T x_1 = \vec l^T \vec x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} l^T \perp x_1 \\ l^T \perp x_2 \end{cases}$ виконання умови.

Знаємо, що $\vec a \times \vec b \perp \vec a$, $\vec a \times \vec b \perp \vec b$

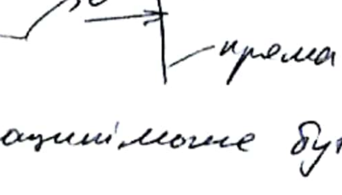


$\Rightarrow \vec x_1 \times \vec x_2 \perp \vec x_1$ і $\vec x_1 \times \vec x_2 \perp \vec x_2$

$\Rightarrow$ Значить як одне з вирішень, щоб отримати лінію, яка проходить через $\vec x_1$ та $\vec x_2$ можна взяти:

$$\vec l = \vec x_1 \times \vec x_2$$

Коли ми говоримо про „пряму“ ми маємо на увазі вектор-нормалі: $\vec l$



Будь-яка пряма на площині може бути описаною таким вектором

Згадаємо як описуються точки $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ відносно камер:

$$\vec{x}_1 = K_1 R_1 (\vec{X} - \vec{C}_1)$$ матриці поворотів

$$\vec{x}_2 = K_2 R_2 (\vec{X} - \vec{C}_2)$$ матриці параметрів камери.

Ми хочемо отримати відстань між двома камерами

Виразимо $(\vec{X} - \vec{C}_1)$ та $(\vec{X} - \vec{C}_2)$:

про R_1, R_2 ми знаємо, що $R^T = R^{-1}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 = \vec{X} - C_1 \\ R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2 = \vec{X} - C_2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ віднімемо одне від іншого

$$\Rightarrow R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 - R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2 = \vec{C}_2 - \vec{C}_1 \quad (1)$$

Домножимо (1) на $[\vec{C}_2 - \vec{C}_1]_x$, щоб отримати зправа 0

$$\Rightarrow [C_2 - C_1]_x \left(R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 - R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2 \right) = \vec{0} \quad (2)$$

векторний добуток вектора самого на себе дає 0.

$\Rightarrow$ домножимо зліва на $(R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2)^T$

$$\Rightarrow (R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2)^T [C_2 - C_1]_x R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 - \underbrace{(R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2)^T [C_2 - C_1]_x R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{x}_2}_{=0} = \vec{0}$$

бо $\vec{b} \perp [\vec{a}]_x \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{b}^T([\vec{a}_x] \cdot \vec{b}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{x}_2^T \underbrace{K_2^{-T} \underbrace{R_2^{-T} [\vec{C}_2 - \vec{C}_1]_x R_1^{-1}}_{\text{Essential matrix}} K_1^{-1}}_{\text{Fundamental matrix}} \vec{x}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{x}_2^T F \vec{x}_1 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Нехай F - фундаментальна

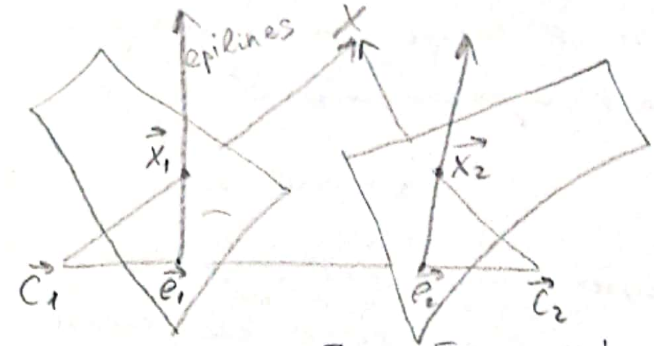
Вона описує зв'язок між зображеннями стерео-пари.

Якщо викинути внутрішні параметри камери $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ отримаємо суттєву матрицю.

Суттєва матриця зберігає інформацію про взаємне розташування камер і більш того, якщо у нас є F і є параметри камери ми можемо одержати суттєву матрицю.

Розклад фундаментальної матриці (decomposition of the fundamental matrix): пояснити як з відношення $F = H\cdot[e]_\times$ знайти матрицю H, якщо відомі внутрішні й зовнішні (intrinsic and extrinsic) параметри камери з точковою діафрагмою (pinhole camera)? Як знайти H, якщо ці параметри невідомі, а відома лише фунд. матриця F?



$\mathbb{R}^3 \ni \vec{l} : \vec{l}^T\vec{x} = 0$ - рівняння прямої

$\lambda \vec{x} = K_1 R_1 (\vec{X} - \vec{C_1})$

Знаємо $\vec{x_2}^T \underbrace{K_2^{-T} \underbrace{R_2^{-T}[\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times R_1^{-1}}_{\text{Essential matrix}} K_1^{-1}}_{\text{Fundamental matrix}} \vec{x_1} = \vec{0}$: $\forall \langle \vec{x_1}, \vec{x_2} \rangle$, які можуть бути проекціями однієї точки простору.

Що значить, якщо rang $F = 0$ і в якому випадку?
Ми знаємо, що ранг нульової матриці $= 0$. В нашому випадку це можливе коли $\vec{C_2}-\vec{C_1} = 0 \Rightarrow \vec{C_2} = \vec{C_1} \Rightarrow$ центри двох камер знаходитимуться в одній точці $\Rightarrow$ всі проекції зв'язані гомографією а не фунд. матрицею.

Ранг F має бути 2!

Чи може ранг F бути не 2?
Ранг 3 не може бути, бо зправа нуль.
Чому не може ранг F бути 1?
Все заключається в $[\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times$: ми знаємо, що $\text{rang}[\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times = 2$.
Взагалі $[\vec{C_2}-\vec{C_1}]^T \in$ ядром лін. оператора $[\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times$ тобо $[\vec{C_2}-\vec{C_1}]$ - паралельний самому собі: $[\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times (\vec{C_2}-\vec{C_1})^T = 0$.
У фунд. матриці праве ядро має залишатись проходячи зправа на ліво

$$\vec{0} \leftarrow [\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times \leftarrow R_1^{-1} \leftarrow K_1^{-1} \longleftarrow \vec{x_1}$$

. Який вектор $\vec{x_1}$ має бути щоб ми отримали $\vec{0}$?

Цей вектор $\vec{x_1}$ буде $K_1 R_1 [\vec{C_2}-\vec{C_1}]^T$

$\Rightarrow [\vec{C_2}-\vec{C_1}]_\times \cancel{R_1^{-1}} \cancel{K_1^{-1}} \cdot (\cancel{K_1} \cdot \cancel{R_1}(\vec{C_2}-\vec{C_1}))$

Чи може бути ще якийсь $\vec{x_1}$?
Ні, не може відповідно з єдиністю рішення системи лін. рів-нь з повним рангом.
Тобто $\alpha(\vec{C_2}-\vec{C_1}) = R_1^{-1} K_1^{-1} \cdot \vec{x} = P \cdot \vec{x}$; матриця P - константна і більш того вона повнорангова і квадратна

Скільки лін. нез. рішень може бути в такій системі: Одне Єдине!

Виходить ми знайшли ядро фунд. матриці:

$k^{\text{const}} \cdot K_1 R_1 (\vec{C_2} - \vec{C_1}) \in \ker F$. - праве ядро

$(C_2 - C_1)^T R_2^T K_2^T \in \ker F^T$ - ліве ядро

Насправді ж: ядрам фундаментальної матриці є епіполярні точки.

Епіполярна точка може відповідати $\forall$ точці на іншому зображенні бо помноживши еп. точку на F отримаємо $\vec{0}$

$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{e}_1 = K_1 R_1 (\vec{C_2} - \vec{C_1})$$

$$\lambda_2 \vec{e}_2 = K_2 R_2 (\vec{C_2} - \vec{C_1})$$

Цікаво було б побудувати таку матрицю знаючи її ядра.

Хочемо представити F у вигляді множення якихось матриць

$F = B \cdot [\vec{e}_1]_\times$ ↖ матриця векторного добутку | Знаємо $\vec{e}_1 = K_1 R_1 (\vec{C_2} - \vec{C_1})$, $\vec{e}_2 = K_2 R_2 (\vec{C_2} - \vec{C_1})$.

$F = [\vec{e}_2]_\times \cdot C$

Хочемо знати взаємозв'язок між $\vec{e}_2$ та $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}_2^{\,T} \cdot A = \vec{e}_1^{\,T}$$

$$K_2^{-1} R_2^{-1} \vec{e}_2 = (\vec{C_2} - \vec{C_1}) \Rightarrow \vec{e}_1 = K_1 R_1 K_2^{-1} R_2^{-1} \cdot \vec{e}_2$$

$\Rightarrow$ Транспонуємо $\Rightarrow$ $\vec{e}_1^{\,T} = K_1^T R_1^T K_2^{-T} R_2^{-T} \cdot \vec{e}_2^{\,T}$

$F = k \cdot K_2^{-T} R_2^{-T} R_1^T K_1^T [\vec{e}_1]_\times$ ← отримали аналітично

$$F = k [\vec{e}_2]_\times K_2 R_2 R_1^{-1} K_1^{-1}$$

Виводимо корисну формулу: $(M\vec{a}) \times (M\vec{b}) = \frac{M^{-T}}{|M^{-T}|}(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$(M\vec{a}) \times (M\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{i}^{\,T} \cdot (M\vec{a} \times M\vec{b}) \\ \vec{j}^{\,T} \cdot (M\vec{a} \times M\vec{b}) \\ \vec{k}^{\,T} \cdot (M\vec{a} \times M\vec{b}) \end{bmatrix} = \{\text{зміш. добуток}\} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i}^{\,T} \\ (M\vec{a})^T \\ (M\vec{b})^T \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \vec{j}^{\,T} \\ (M\vec{a})^T \\ (M\vec{b})^T \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \vec{k}^{\,T} \\ (M\vec{a})^T \\ (M\vec{b})^T \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \{(A\vec{x})^T = \vec{x}^{\,T} A^T\} =$$

$$= \{\text{виносимо } |M^T|\} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i}^{\,T} M^{-T} \\ \vec{a}^{\,T} \\ \vec{b}^{\,T} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \vec{j}^{\,T} M^{-T} \\ \vec{a}^{\,T} \\ \vec{b}^{\,T} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \vec{k}^{\,T} M^{-T} \\ \vec{a}^{\,T} \\ \vec{b}^{\,T} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T |M^T| = \{\text{змішаний добуток навпаки}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{i}^{\,T} M^{-T} (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{j}^{\,T} M^{-T} (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{k}^{\,T} M^{-T} (\vec{a} \times \vec{b}) \end{bmatrix} = \{\text{проекція навпаки}\} = \frac{M^{-T}}{|M^{-T}|}(\vec{a} \times \vec{b}) \ ; \ |M^T| = \frac{1}{|M^{-T}|}$$

$\Rightarrow$ Знаючи це $\Rightarrow$ $\vec{x}_2^{\,T} F \vec{x}_1 = \vec{x}_2^{\,T} K_2^{-T} R_2^{-T} [\vec{C_2} - \vec{C_1}]_\times R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 = \{\vec{C_2} - \vec{C_1} = R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{e}_1\} =$

$= \vec{x}_2^{\,T} K_2^{-T} R_2^{-T} [R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{e}_1]_\times R_1^{-1} K_1^{-1} \vec{x}_1 = \{(M\vec{a}) \times (M\vec{b}) = \frac{M^{-T}}{|M^{-T}|}(\vec{a} \times \vec{b})\} = \{(R_1^{-1} K_1^{-1})^{-T} = (K_1 R_1)^T = R_1^T K_1^T\} =$

$= \vec{x}_2^{\,T} K_2^{-T} R_2^{-T} \frac{R_1^T K_1^T}{|R_1^T K_1^T|} \vec{e}_1 \times \vec{x}_1 = \vec{x}_2^{\,T} K_2^{-T} R_2^{-T} \cdot \frac{R_1^T K_1^T}{|R_1^T K_1^T|} [\vec{e}_1]_\times \cdot \vec{x}_1$

отримали математично

для $[\vec{e}_2]_\times$ аналогічно

$$K_2^{-T} R_2^{-T} [\vec{c}_2 - \vec{c}_1]_\times R_1^{-1} K_1^{-1} =$$

$$= K_2^{-T} R_2^{-T} [R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{e}_2]_\times R_1^{-1} K_1^{-1} = \left\{ (AB)^T = B^T A^T \right.$$

$$= \left(- [R_2^{-1} K_2^{-1} \vec{e}_2]_\times R_2^{-1} K_2^{-1} \right)^T R_1^{-1} K_1^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} M(\vec{a}) \times M(\vec{b}) = \\ = \dfrac{M^{-T}}{|M^{-T}|} \vec{a} \times \vec{b} \end{array} \right\}$$

$$= \left(- \frac{R_2^{T} K_2^{T}}{|R_2^{T} K_2^{T}|} [\vec{e}_2]_\times \right)^T R_1^{-1} K_1^{-1} =$$

$$= \frac{[\vec{e}_2]_\times K_2 R_2}{|R_2^{T} K_2^{T}|} R_1^{-1} K_1^{-1} =$$

$$= k \cdot [e_2]_\times K_2 R_2 R_1^{-1} K_1^{-1}.$$

Ще один спосіб розкладу фундаментальної матриці:

$F \sim [\vec{e}_L]_x \cdot [\vec{e}_L]_x \cdot F$ Доведемо, що ми так можемо розкласти

Знаємо $\vec{x}_L^T F \vec{x}_R = 0 \Rightarrow \vec{x}_L^T [\vec{e}_L]_x \cdot [\vec{e}_L]_x \cdot F \vec{x}_R = 0$.

Також знаємо: $F = H \cdot [\vec{e}_R]_x = [\vec{e}_L]_x \cdot H'$

$\Rightarrow \vec{x}_L^T [\vec{e}_L]_x \cdot [\vec{e}_L]_x \cdot H \cdot [\vec{e}_R]_x \cdot \vec{x}_R = 0$

Розглянемо ситуації:

1) $\vec{x}_R$ – епіполярна точка:

$\vec{x}_R = \vec{e}_R \Rightarrow \vec{x}_L^T \cdot [\vec{e}_L]_x \cdot [\vec{e}_L]_x \cdot H \cdot \underbrace{[\vec{e}_R]_x \cdot \vec{e}_R}_{\vec{e}_R \times \vec{e}_R = 0} = \vec{0}$

2) $\vec{x}_L$ – епіполярна точка:

$\Rightarrow$ все аналогічно

3) Якщо x_R, x_L – не епіполярні точки і ми знаємо $x_L^T F \vec{x}_R = 0$

$$\begin{cases} \vec{x}_R \neq \vec{e}_R \\ x_L \neq \vec{e}_L \\ x_L^T F \vec{x}_R = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x}_L \perp H [\vec{e}_R]_x \vec{x}_R$$

епіполярна лінія

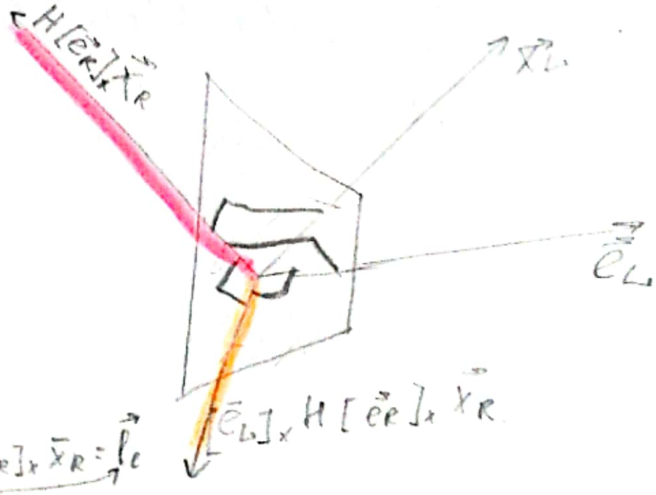
з вл-ст векторного доб-ку

l! не e

$H[\vec{e}_R] \vec{x}_R \overset{def}{=} \vec{l}_L$

$$\begin{cases} \vec{l}_L^T \cdot \vec{e}_L = 0 \\ \vec{l}_L^T \cdot \vec{x}_L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{l}_L^T \perp \vec{e}_L \\ \vec{l}_L^T \perp \vec{x}_L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{l}_L \times \vec{e}_L \perp \vec{e}_L \\ \vec{l}_L \times \vec{e}_L \perp \vec{l}_L \\ \vec{l}_L \times \vec{e}_L \not\perp \vec{x}_L \end{cases}$$



Коли ми помножимо $H[\vec{e}_R]_x \vec{x}_R$ – ми отримуємо епіполярну лінію: $H[\vec{e}_R]_x \vec{x}_R = \vec{l}_L$

$\forall$ еп лінія проходить через $\vec{e}_L$ (еп. точка)

So $\forall$ еп точка лежить на еп лінії

$\vec{l}_L^T \cdot \vec{e}_L = 0$; $\vec{l}_L^T \cdot \vec{x}_L = 0 \Rightarrow \vec{x}_L$ і $\vec{e}_L$ лежать в одній площині, нормаль до якої $\vec{l}_L = H \cdot [\vec{e}_R]_x \vec{x}_R$.

В результаті: $[\vec{e}_L]_x \cdot H[\vec{e}_R]_x \vec{x}_R \begin{cases} \perp \vec{e}_L \\ \perp H[\vec{e}_R]_x \vec{x}_R \end{cases}$

$\Rightarrow [\vec{e}_L]_x \cdot [\vec{e}_L]_x H \cdot [\vec{e}_R]_x \vec{x}_R \parallel\!| \; H[\vec{e}_R]_x \vec{x}_R$ колінеарні

$\Rightarrow$ бо $\langle \vec{e}_L, \vec{x}_L \rangle \perp \vec{l}_L$

$\Rightarrow$ лін. об-ка (*)

Лінійна оболонка векторів: def.

Лінійною оболонкою векторів $v_1, v_2, \dots, v_n$ наз. множина всіх можливих лін. комб-цій цих векторів

$$\langle v_1, v_2 \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, \alpha_i \in F, 1 \le i \le n \right\}.$$

Матриця – це лін. оператор

Давайте його застосуємо до $\vec{x}_R$

Виходить, що матриця $C \cdot H \cdot [\vec{e}_R]_x \vec{x}_R$ з точністю до константи = результату, що дає F

$$\Rightarrow F = [\vec{e}_L]_x \cdot [\vec{e}_L]_x \cdot F.$$

Як знайти H, якщо відома лише фундаментальна матриця?

з виразу $\underbrace{(F[e]_x)}_{H}[e]_x = cF$

Якщо відомі внутрішні і зовнішні параметри камери з точковою діафрагмою:

$$F = k \cdot \underbrace{K_2^{-T} R_2^{-T} R_1^{T} K_1^{T}}_{H} [\vec{e}_1]_x = \underbrace{k\,[\vec{e}_2]_x K_2 R_2 R_1^{-1} K_1^{-1}}_{H}.$$

Оцінка фундаментальної матриці (estimation of the fundamental matrix): описати алгоритм семи точок (7-points algorithm), пояснити чому треба брати саме сім точок, показати коротку формулу квадратного рівняння, що виникає при пошуку розв'язку задачі, пояснити необхідність розв'язку цього рівняння (чим це краще, ніж брати 8 точок і перевіряти ранг матриці?).

- SIFT $\Rightarrow M \ni \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle$ – пари відповідних точок.

Хочемо:

$$\sum_{\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle \in M} \mathbb{1}\{ |\vec{x}^T F \vec{x}'| \le \varepsilon \} \xrightarrow{\circledast} \max_{\substack{F \in \mathbb{R}^{3\times3} \\ \operatorname{rank} F = 2}}$$

$$0 = \vec{x}^T F \vec{x}' = [x_x \ x_y \ x_z] \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_x \\ x'_y \\ x'_z \end{bmatrix} = [x_x \ x_y \ x_z] \begin{bmatrix} f_{xx}x'_x + f_{xy}x'_y + f_{xz}x'_z \\ f_{yx}x'_x + f_{yy}x'_y + f_{yz}x'_z \\ f_{zx}x'_x + f_{zy}x'_y + f_{zz}x'_z \end{bmatrix} =$$

$$= f_{xx} x_x x'_x + f_{xy} x_x x'_y + f_{xz} x_x x'_z + f_{yx} x_y x'_x + f_{yy} x_y x'_y + f_{yz} x_y x'_z +$$
$$+ f_{zx} x_z x'_x + f_{zy} x_z x'_y + f_{zz} x_z x'_z = \sum_{\substack{i \in \{x,y,z\} \\ j \in \{x,y,z\}}} f_{ij} x_i x'_j =$$

$$= [x_x x'_x \ x_x x'_y \ \dots \ x_z x'_z] \begin{bmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{xz} \\ \vdots \\ f_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\operatorname{vec}(\vec{x} \cdot \vec{x}'^T)^T}_{X} \cdot \operatorname{vec}(F) = 0$$

Чому потрібно саме 7 пар точок?

Якби було 8 ... 9 невідомих і 9 рівнянь, то скільки було б рішень? Одне, або не було б.

Якби було 8 рівнянь і 9 невідомих, то скільки було б рішень?

Щоб знайти F потрібно знайти $\ker X$: $\ker X \ni \operatorname{vec}(F)$.

Якщо X розм. $8\times9 \Rightarrow$ у нього буде як мінімум одновимірне ядро.

Але ж ми хочемо, щоб ранг $F = 2$.

З 8 парами буде одне рішення і RANSAC буде дуже довго рахувати.

А якщо візьмемо 7 пар $\Rightarrow \dim \ker X \geq 2$

$\Rightarrow$ будемо мати 2 лін. нез. рішення:

$\Rightarrow F$ можна виразити: $F = \alpha F_1 + \beta F_2$; $\operatorname{rank}(F) = 2 \Rightarrow |\alpha F_1 + \beta F_2| = 0$.

Якщо у F_1 або F_2 ранг $= 2 \Rightarrow F$ знайшли.

Якщо обидві F_1 і F_2 повнорангові (по 3)

$\Rightarrow$ потрібно знайти таку лінійну комбі, щоб $\operatorname{rank}(\alpha F_1 + \beta F_2) = 2$

$\Rightarrow F' = \gamma F_1 + F_2$.

$\Rightarrow \gamma^3 |F_1| + \gamma^2 |F_1| \operatorname{tr}(F_2 F_1^{-1}) + \gamma |F_2| \operatorname{tr}(F_1 F_2^{-1}) + |F_2| = 0$.

Вхід: x, x', epsilon, n_iter
Вихід: F_best, best_ac

7-points-algorithm.

```
best_ac = 0
for iter in range(n_iter):
    X = get_7_pts(x, x').
    F1, F2 = ker(X).
    if rank(F1) = 2:
        accuracy = (*) з F1.
        if accuracy > best_ac:
            F_best = F1.
            best_ac = accuracy.
    if rank(F2) = 2:
        //–//
    if rank(F1) == rank(F2) == 3:
        roots = solution(λ^3 |F1| + λ^2 |F1| tr(F2 F1^-1) + λ |F2| tr(F1 F2^-1) + |F2|.
        for root in roots:
            F = root · F1 + F2
            if rank(F) == 2
```

Нюанс!: Epsilon в пікселях.

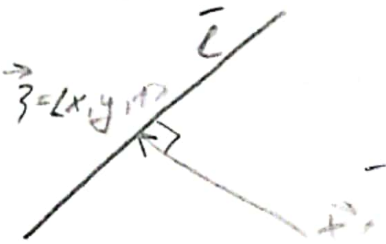
Для програмної реалізації потрібно корегувати (*)

Тобто
$$\sum_{\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle \in M} \left[\left[\frac{\vec{x}^T F x'}{\sqrt{(\vec{x}^T F)_x^2 + (\vec{x}^T F)_y^2}} \right]\right] \leq \varepsilon.$$

Це ми отримали з:

$$\vec{l}^{\,T} \vec{x}' = \vec{x}^T F \vec{x}'$$

$$ax + by + c = 0$$



— Одгинаювимо відстань від x' до епіполярної лінії.

$$\Rightarrow \frac{\langle \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \cdot c \rangle \cdot \langle x'_x, x'_y, 1 \rangle}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2}} = \frac{a x'_x + b x'_y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Побудова карти висот за допомогою напівглобального співставлення (SGM). Як знаходити карту зсувів за горизонтальних епіполярних ліній та як потім рахувати віддаленість до відповідних точок об'єкту? Як можна модифікувати алгоритм для роботи з трохи неідеально вирівненою стереопарою, коли пікселю зі строки y може відповідати піксель зі строк від y − 4 до y + 4?

$\{D^x_{min}, \dots D^x_{max}\} \times \{D^y_{min}, \dots D^y_{max}\} = D \subseteq Z^2$

Кількість міток (у нашому випадку диспаритет)

Алгоритм SGM (Semi-Global Matching)

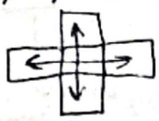
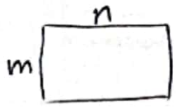
Ініціалізуємо:

Створюємо масиви L, R, U, D у розміром: height, width, n-labels

Створюємо масиви L, R, U, D у розміром: height, width, n_labels.

q_i - унарні штрафи: height, width, n_labels.

g_i - бінарні штрафи: height, width, n_labels, n_labels.

Сусідство:  ; Картинка 

$R \equiv 0$, $D \equiv 0$, ; $U_{0j} = D_{nj} = R_{i\,m+1} = 0$

for $i = \overrightarrow{m, 1}$ — заходимо в кожен об'єкт (піксел)

for $j = \overrightarrow{n, 1}$ — проходимося по кожній мітці

for $k \in K$:

$$D_{ij}(k) = \max_{k' \in K}\left[D_{i+1j}(k') + q_{i+1,j}(k') + g_{ij\,i+1j}(k, k')\right]$$

$$R_{ij}(k) = \max_{k' \in K}\left[R_{ij+1}(k') + q_{ij+1}(k') + g_{ij\,ij+1}(k, k')\right]$$

заповнюємо D і R

for $i = \overrightarrow{1, m}$

for $j = \overrightarrow{1, n}$

for $k \in K$

$$L_{ij}(k) = \max_{k' \in K}\left[L_{ij-1}(k') + q_{ij-1}(k') + g(k, k')\right]$$

$$U_{ij}(k) = \max_{k' \in K}\left[U_{i-1j}(k') + q_{i-1j}(k') + g(k, k')\right]$$

Знаходимо розмітку: (карту висот).

for $i = \overrightarrow{1, m}$:

for $j = \overrightarrow{1, n}$:

$$k^*_{ij} = \arg\max_{k' \in K}\left[L_{ij}(k') + R_{ij}(k') + q_{ij}(k') + D_{ij}(k') + U_{ij}(k')\right]$$

Якими мають бути q і g?

$q_{y,x}(dy, dx, L, R) = \|L_{y,x} - R_{y+dy,\,x+dx}\|$

y, x — в пікселі y, x; dy, dx — диспаритети по y та x; L, R — ліве і праве зобр-ння

$$g(\vec{d}, \vec{d'}) = \|\vec{d} - \vec{d'}\| \cdot c$$

c — константа

Можливі модифікації штрафних ф-ій.

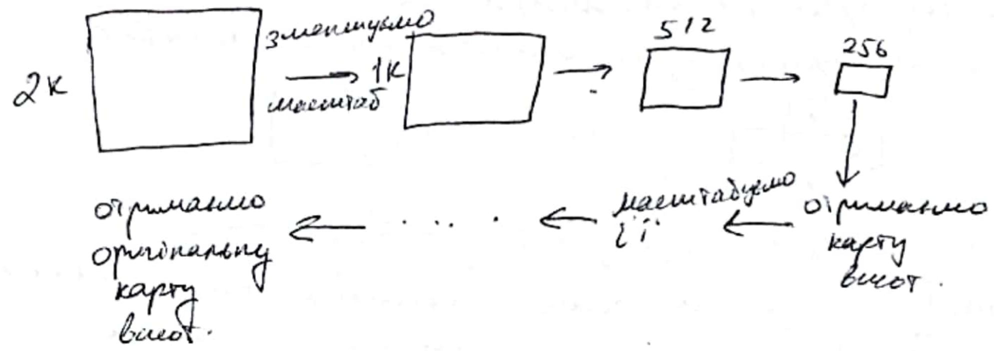
$$f(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|, & \|x-y\| < \alpha \\ \alpha, & \text{otherwise} \end{cases} ; \quad f(x,y) = \begin{cases} \alpha, & x = y \\ \beta, & \|x-y\| \le C \\ \gamma, & \text{otherwise} \end{cases}$$

гарна для картинок великих розмірів

Такі функції кращі оскільки добре працюють з розривами тобто з місцями де закінчується один об'єкт і починається інший.

Як виглядає масив диспаритетів?

dy	dv
0	0
0	1
0	2
0	3
1	0
1	2
1	3
2	0
2	2
2	3



Як модифікувати даний алгоритм?
Нехай у нас є велика картинка (наприклад 2K пікселів) ми її зменшуємо до 1K потім до 512×512, а потім до 256×256
Знаходимо на найменшій карту висот, потім берем картинку 512×512 і масштабуємо карту висот тобто використовуємо висоти з попередньої картинки як опори.
Нехай зміщення на 256×256 було $d_x \in \{0, \dots, 10\}$,
ну і для кожного пікселя буде своє зміщення $d_x^{t} = \{12, 13, \dots, 22\}$

$d_x^{t'} = \{0, 1, \dots, 10\}$

$d_x^{t''} \in \{5, \dots, 15\}$

Тобто замість того, щоб на великій 2K картинці запускати SGM наприклад на 88 міток ми запускаємо так.

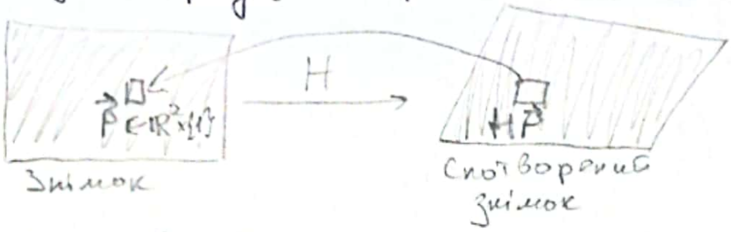
$11^2 \cdot 256^2$
$11^2 \cdot 512^2$
$11^2 \cdot 1024^2$
$11^2 \cdot 2048^2$

замість $88^2 \cdot 2048^2$

Scanned with CamScanner

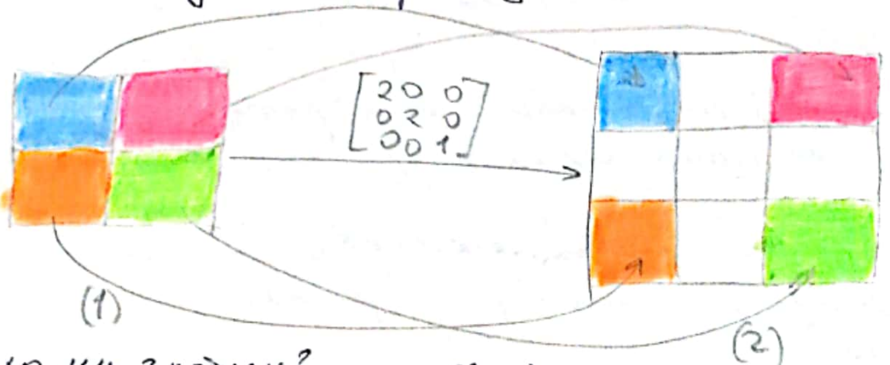
Гомографія (хомографію): точки фокусу двох камер знаходяться в одній точці – як гармонійно сумістити два зображення, що вони дають, на одному (панорамне склеювання)? Вивести алгоритм оцінки гомографії між такими зображеннями.

Image warping (спотворення зображення).



У нас є знімок. Ми хочемо змінити його форму так, щоб кожна точка спотвореного знімка описувалась лінійним множенням матриці на координати точки знімка.

Здавалося б, це просто. Лише потрібно до кожної точки знімку ми застосовуємо матрицю H. Але ні. Що, якщо у нас матриця збільшення?



Переносимо колір кожного пікселя

Взагалі мають бути цілі матриці, але ми обрізали до 3x3

Що ми зробили?

Синій на (1): $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ← координати; Рожевий на (1): $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; Оранжевий на (1): $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

Зелений на (1): $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Переходимо на (2):

Синій на (2): $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

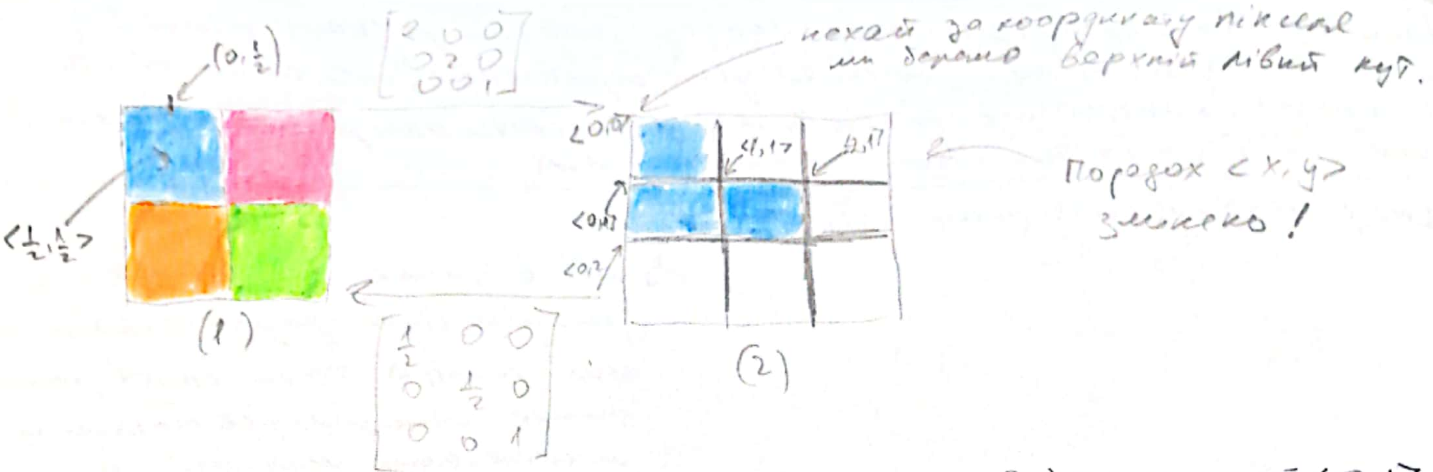
Рожевий на (2): $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ...

Але чим заповнити пусті пікселі?

Можна забирати колір тільки звідти, звідки потрібно і застосовувати зворотню матрицю.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матриця збільшення у 2 рази

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матриця зменшення у 2 рази



Нехай нам потрібно дізнатись колір пікселя на (2) на позиції $\langle 0,1\rangle$.

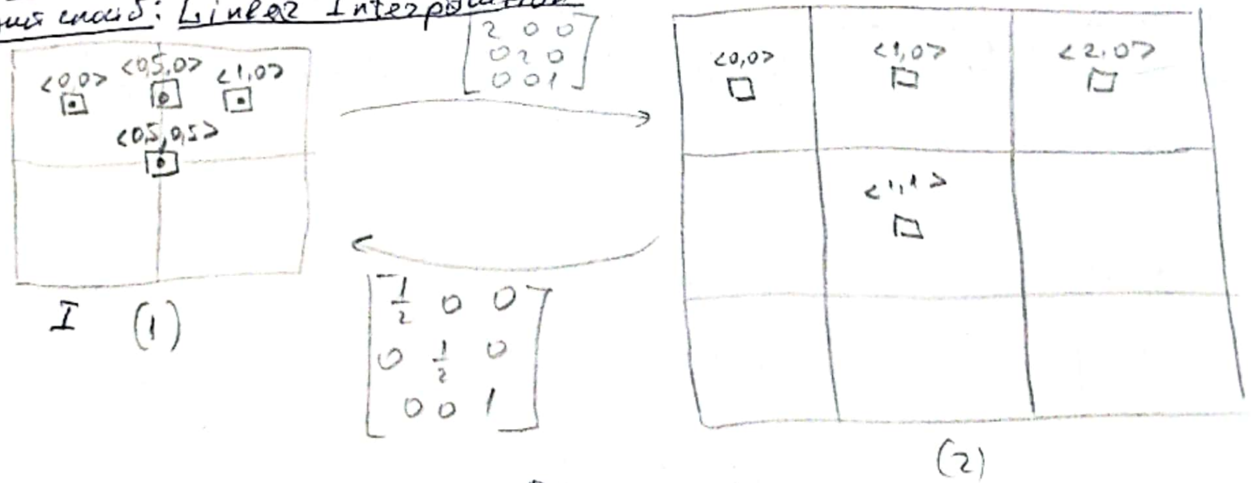
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$ – дані координати потрапляють на синій піксель в (1)

ще приклад $\langle 1,1\rangle$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$ – дані координати теж потрапляють на синій піксель в (1)

Це найпростіший спосіб заповнення пустих пікселів.
Ми тепер знаємо, що у матриці H має бути зворотня —

Кращий спосіб: Linear Interpolation



Приймемо за колір пікселя його пох. сист. координат в центрі кожного пікселя

$\langle 1,1\rangle$ з (2) буде брати колір з $\langle 0{,}5; 0{,}5\rangle$ в (1). Але там знаходиться аж 4 пікселя $\Rightarrow$ колір в $\langle 1,1\rangle$ в (2) $= \frac{1}{4} I(0,0) + \frac{1}{4} I(0,1) + \frac{1}{4} I(1,0) + \frac{1}{4} I(1,1)$

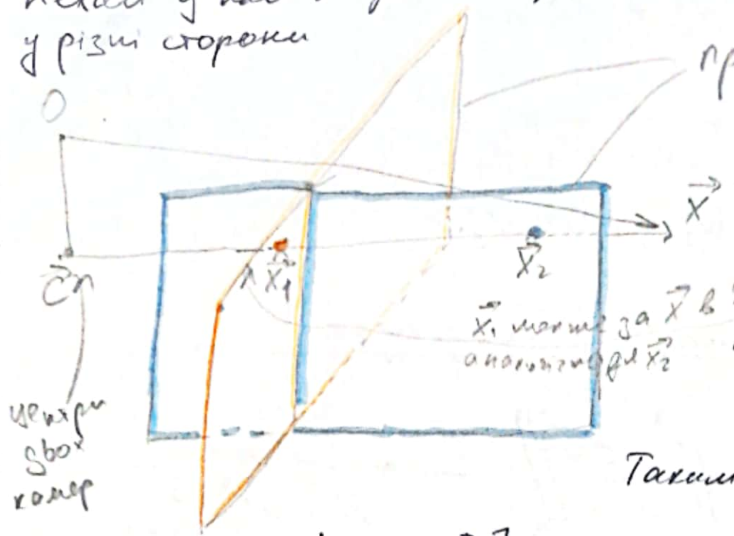
$\langle 1,0\rangle$ з (2) буде брати колір з $\langle 0{,}5, 0\rangle$ в (1).
колір в $\langle 1,0\rangle$ в (2) $= \frac{1}{2} I(0,0) + \frac{1}{2} I(1,0)$

Маємо таку формулу.

$$(x-\lfloor x\rfloor)\cdot(y-\lfloor y\rfloor)\, I(\lfloor x\rfloor+1, \lfloor y\rfloor+1) + (\lfloor x+1\rfloor - x)\cdot(y-\lfloor y\rfloor)\cdot I(\lfloor x\rfloor, \lfloor y+1\rfloor) + (x-\lfloor x\rfloor)(\lfloor y+1\rfloor - y)\, I(\lfloor x+1\rfloor, \lfloor y\rfloor) + (\lfloor x+1\rfloor - x)(\lfloor y+1\rfloor - y)\cdot I(\lfloor x\rfloor, \lfloor y\rfloor)$$

Homography

Нехай у нас є дві камери, в яких спільний центр. Вони направлені у різні сторони



Ми знаємо, що для опису точок $\vec{x_1}$ та $\vec{x_2}$ необхідні формули:

$$\lambda_1 \vec{x_1} = K_1 R_1 (\vec{X} - \vec{C})$$

$$\lambda_2 \vec{x_2} = K_2 R_2 (\vec{X} - \vec{C})$$

Виразимо $\vec{x_2}$ через $\vec{x_1}$:

$$\lambda_2 \vec{x_2} = \underline{K_2 R_2 (K_1 R_1)^{-1}} \lambda_1 \vec{x_1}$$

Таким чином $\lambda \vec{x_2} = H \cdot \vec{x_1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda x_2^x \\ \lambda x_2^y \\ \lambda \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{H_1}^T \vec{x_1} \\ \vec{H_2}^T \vec{x_1} \\ \vec{H_3}^T \vec{x_1} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \vec{H_3}^T \vec{x}1; \quad \lambda x_2^y = \vec{H_2}^T x_1 \Rightarrow x_2^y = \frac{\vec{H_2}^T \vec{x_1}}{\vec{H_3}^T \vec{x_1}}$$

1, 2, 3 рядки матриці H

аналогічно $x_2^x = \dfrac{\vec{H_1}^T \vec{x_1}}{\vec{H_3}^T \vec{x_1}}$

Нам потрібно знайти $\vec{H_1}^T, \vec{H_2}^T, \vec{H_3}^T$

домножимо на знаменник

$$x_2^x \vec{H_3}^T \vec{x_1} - \vec{H_1}^T \vec{x_1} = 0$$

аналогічно x_2^y: $x_2^y \vec{H_3}^T x_1 - \vec{H_2}^T \vec{x_1} = 0$

$\Rightarrow$ Нам потрібно представити у вигляді $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{якась матриця}}}{X} \begin{bmatrix} \vec{H_1}^T \\ \vec{H_2}^T \\ \vec{H_3}^T \end{bmatrix} = \vec{0}$

Який сенс λ?
Матриця K не змінюється для точок. Вона одна єдина для пари картинок.
А от λ мінеяться

Згадаємо що таке ядро лін. оператора.
У нас є лін. оператор $A \Rightarrow \ker A = \{\vec{v} : A\vec{v} = \vec{0}\}$; $\Rightarrow$ кажуть, що $\vec{v} \in \ker A$
Ми хочемо вирішити систему: $\bar{X} \begin{bmatrix} \vec{H_1}^T \\ \vec{H_2}^T \\ \vec{H_3}^T \end{bmatrix} = \vec{0}$

Звідси $\begin{bmatrix} \vec{H_1}^T \\ \vec{H_2}^T \\ \vec{H_3}^T \end{bmatrix} \in \ker \bar{X}$

часто наз-ть "null-space"

Розмірність ядра це кількість лін. нез. рішень цієї системи.
Якщо невідомих стільки скільки і рівнянь $\Rightarrow$ ядро буде містити тільки $\vec{0}$
Якщо невідомих > рівнянь $\Rightarrow$ то нам треба довизначати

$$\begin{bmatrix} \vec{x_1}^T \\ \vec{x_2}^T \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{H_1} \\ \vec{H_2} \\ \vec{H_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^x \vec{H_3}^T \vec{x_1} - \vec{H_1}^T \vec{x_1} \\ x_2^y \vec{H_3}^T \vec{x_1} - \vec{H_2}^T \vec{x_1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{X}_1^T(\vec{H}_1 \circ \vec{H}_2 \circ \vec{H}_3) = -\vec{X}_1^T \vec{H}_1 + \vec{0}\vec{H}_2 + x_2^x \vec{X}_1^T \vec{H}_3$$

конкатенація

$$\vec{X}_2^T(\vec{H}_1 \circ \vec{H}_2 \circ \vec{H}_3) = \vec{0}^T \vec{H}_1 - \vec{X}_1^T \vec{H}_2 + x_2^y \vec{X}_1^T \vec{H}_3$$

← Беремо 4 пари точок x, y, z, w

$$\vec{X}_7^T = \langle -\vec{W}_1^T, \vec{0}^T, w_2^x \vec{W}_1^T \rangle$$

$$\vec{X}_8^T = \langle \vec{0}^T, -\vec{W}_1^T, w_2^y \vec{W}_1^T \rangle$$

Є 8 рівнянь і 9 невідомих

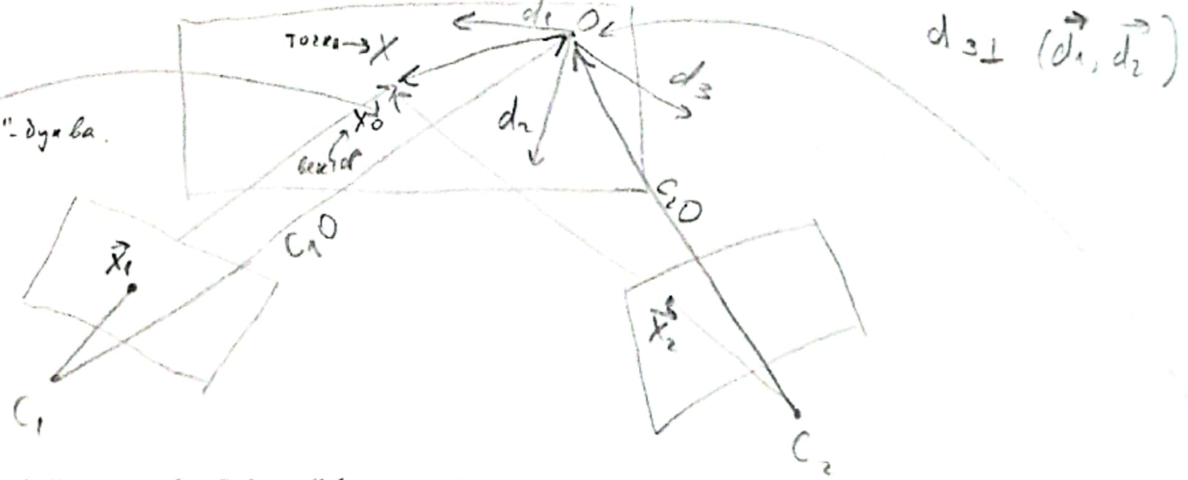
Алгоритм знаходження матриці гомографії

$$E(H) = \sum_{\langle x_1, x_2 \rangle \in S} \left[\!\left[\left\| \vec{x}_2 - \frac{H\vec{x}_1}{(H\vec{x}_1)_z} \right\| > \varepsilon \right]\!\right] \to \min_{\substack{H \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\ \det H \neq 0}}$$

індикатор

1) Вибираємо випадковим шляхом чотири пари відповідних точок (із SIFT) $\{\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle, \langle z_1, z_2\rangle, \langle w_1, w_2\rangle\}$.
2) Обчислюємо H по формулі $vec(H) \in ker(X)$.
3) Обчислюємо $E(H)$.
4) Якщо $E(H) < E(H^*) \Rightarrow H^* \leftarrow H$.
5) go to 1 1000–100 000 разів.

Якщо у нас є декілька камер, що розташовані в декількох точках і знімають площину, то ці точки на площині теж можна описати за допомогою гомографії:



це O, а „O" - дужка.

Якщо у нас є деяка площина, то ми можемо сказати: нехай ця площина буде визначати нашу світову систему координат. d_1, d_2, d_3 - базисні вектори цієї системи координат.

$$X_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{x}_1 = K_1 R_1 (\vec{X}_0 - \vec{C}_1) = [\underbrace{K_1 R_1 \,|\, -K_1 R_1 \vec{C}_1}_{\text{конкатенація}}] \begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \{\text{позначимо так}\} =$$

$$= [\vec{p}_1^{\,1}\ \vec{p}_2^{\,1}\ \vec{p}_3^{\,1}\ \vec{p}_4^{\,1}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\vec{p}_1^{\,1}\ \vec{p}_2^{\,1}\ \vec{p}_4^{\,1}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

прибрали бо =0

$$\lambda_2 \vec{x}_2 = K_2 R_2 (\vec{X}_0 - \vec{C}_2) = [K_2 R_2 \,|\, -K_2 R_2 \vec{C}_2] \begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\vec{p}_1^{\,2}\ \vec{p}_2^{\,2}\ \vec{p}_3^{\,2}\ \vec{p}_4^{\,2}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\vec{p}_1^{\,2}\ \vec{p}_2^{\,2}\ \vec{p}_4^{\,2}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

тому ми так зробили, бо це матриця $3 \times 4 \Rightarrow$ ми не зможемо взяти зворотню гомографію.

$$\lambda_2 \vec{x}_2 = [\vec{p}_1^{\,2}\ \vec{p}_2^{\,2}\ \vec{p}_4^{\,2}]\,[\vec{p}_1^{\,1}\ \vec{p}_2^{\,1}\ \vec{p}_4^{\,1}]^{-1} \lambda_1 \vec{x}_1$$

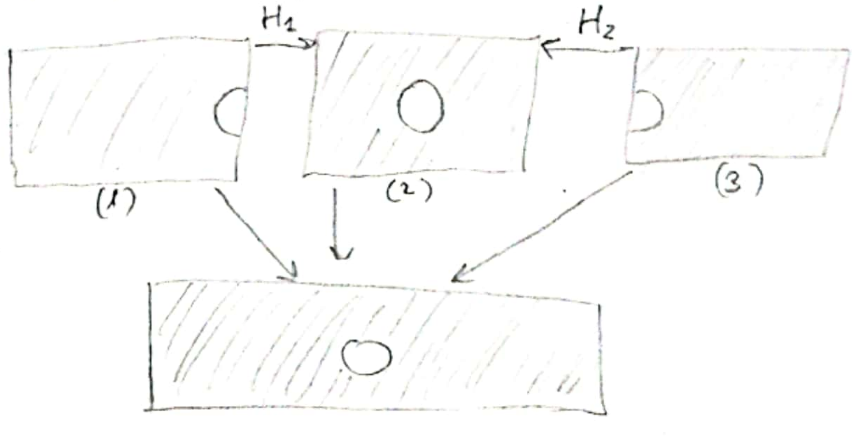
Але ця ця матриця не має бути виродженою, тобто мають бути лін. нез. вектори і для цього $\vec{C}_1 \vee C_2$ має містити не нульову останню компоненту!

Якщо ост. комп в $\vec{C}_1 \vee \vec{C}_2 = 0 \Rightarrow X_c(K_1R_1) + Y_c(K_2R_2) = K_1R_1\vec{C}_1$ (камери ~~з двох~~ дивляться одна на одну (одна схована у стіні)).

→ тоді буде лін. зал-ть в $[\vec{p}_1^{\,1}, \vec{p}_2^{\,1}, \vec{p}_4^{\,1}]$.

→ Ми обґрунтували той факт, що проекції ∀ точки площини нето і на дві різні камери, на зображенні, зв'язані матрицею

Панорамне склеювання



■ — кратові точки зображень (1), (2), (3)

Будуємо підкладку

Алгоритм склеювання за допомогою TRW-S

Вхід: Стек зображень (input_images), кількість ітерацій TRW-S.

Вихід: Склеєна панорама.

1. Крок. Вибираємо базову фотографію для склеювання (Нехай буде перша)

2. Крок. Вирівнювання.

```
number_of_images = len(input_images).
base_image = input_images[0]; m,n = base_image.shape.
edge_points = [[0,0], [0,m-1], [m-1,0], [m-1,n-1]] // shape=(4,1,2).
merged_points = array(number_of_images, 4,1,2)
merged_points[0,...] = edge_points.
for i, image in input_images:
    Hi = calculate_homography(image, base_image)
    merged_points[i,...] = perspective_transform(edge_points, H).
```

Знаходимо min_x, max_x, min_y, max_y серед merged_points.

Створюємо підкладку розміром (max_y - min_y, max_x - min_x).

Заповнюємо підкладку base_image.

Створюємо матрицю переносу $H_{tr} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -min\_x \\ 0, & 1, & -min\_y \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$

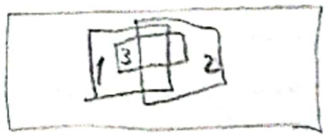
Створюємо нові вирівняні фото накладанням $H_{tr} \cdot H_i$ на кожен input_images[1:...] розміром

3. Крок. Створюємо панораму

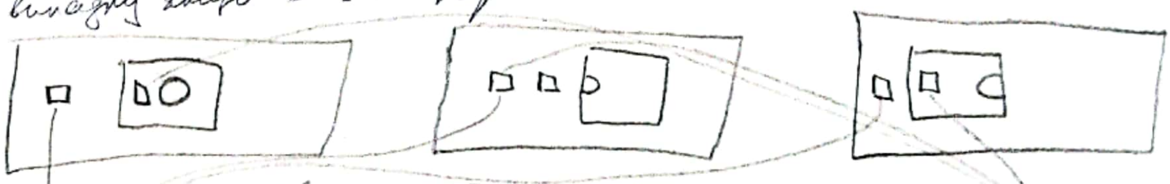
1. Обчислюємо унарні штрафи таким чином.

$$g_t(1) = \begin{cases} +\infty, & H_1^{-1} t \notin img\,1 \\ 0, & \dots \end{cases}$$

для картинки 1



Ми говоримо, що ми можемо брати піксель із якоїсь картинки тільки в тому випадку якщо в цій картинці цей піксель існує.



Вирівнені зображення з підкладкою (aligned_images after 2 step)

тут ми ставимо всі g по нулям

тут ми ставимо g(0, +∞, +∞) - в залежності від порядку вирів. зобр. Нb

2. Обчислюємо бінарні штрафи.

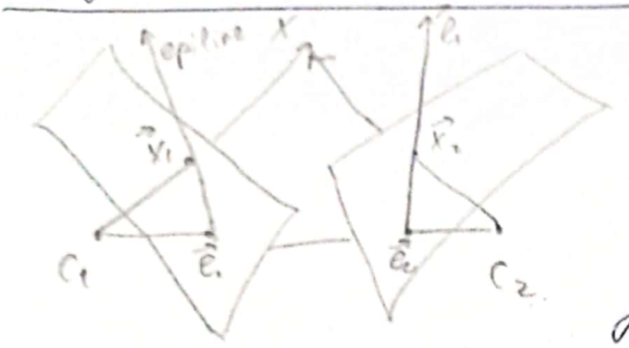
$$g_{tt'}(k,k') = \|img_k^t - img_{k'}^t\| + \|img_k^{t'} - img_{k'}^{t'}\|.$$

$k : \overline{0, number\ of\ images}$

4. крок Запускаємо TRW-S

→ отримаємо склеєну панораму.

Епіполярні лінії та епіполярні точки (epipolar lines and epipolar points): геометрична інтерпретація (де можна побачити епіполярну точку?), яка їх роль у стереозорі, як їх знаходити, коли відома фундаментальна або істотна матриця.



Умає є дві камери. Камера з центром $\vec{C_1}$ і камера з центром $\vec{C_2}$.
Вони знімають точку в просторі, яку ми називаємо точкою $\vec{X}$.
Існує лінія, що сполучає центри цих двох камер

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ — наз-ся епіполярними точками.

Def

Епіполярна точка — це точка перетину проектуючої площини з лінією, що з'єднує центри двох камер
$\vec{l_1}$ — наз-ся епіполярною лінією.

Def

Епіполярна лінія l_1 — це проекція променя, що виходить із $\vec{C_1}$ через точку X_1 на проектуючу площину іншої камери.

Аналогічно з l_2.

Тобто коли ми беремо два знімки (лівий та правий) і малюємо епіполярні лінії, то на лівому ми бачимо l_2 лінію, а на правому l_1. Кожна епіполярна лінія лівого зображення відповідає кожній на правому.

Епіполярна точка належить множині точок епіполярних ліній.

Коли лінія $\vec{l_1}$ перетвориться в точку при проектуванні якоїсь точки на проектуючу площину?

Припустимо точка X буде знаходитись на лінії, що з'єднує центри двох камер, тоді $\vec{l_1}$ виродиться в одну точку на проек. пл-ні камери $\vec{C_2}$ і це буде еп.т. $\vec{e_2}$

Знайти епіполярну точку епіполярну лінію можна описати так:

$$l^T \vec{e} = 0 \longrightarrow [a, b, c]\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

а взагалі

$$l^{T}\vec{x} = 0$$

$$\vec{l} : \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{l}^T \vec{x} = 0\} \quad \text{або} \quad l = F \cdot [e]_\times$$

Знаючи істотну матрицю ми не можемо знайти $\vec{l}$.

?!