

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТУ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”**

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №2
з дисципліни «Дискретна математика»

Виконав:
студент групи КН-115
Сирватка Максим
Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2019 р.

Тема: Моделювання основних операцій для числових множин;

Мета роботи: ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії множин, навчитись будувати діаграми Ейлера-Венна операцій над множинами, використовувати закони алгебри множин, освоїти принцип включень-виключень для двох і трьох множин та комп'ютерне подання множин.

Теоретичні відомості

Множина – це сукупність об'єктів, які називають елементами.

Кажуть, що множина A є **підмножиною** множини S , якщо кожен її елемент автоматично є елементом множини S .

Дві множини A та S називаються **рівними**, якщо вони складаються з однакових елементів. У цьому випадку пишуть $A=S$.

Якщо розглядувані множини є підмножинами деякої множини, то її називають **універсумом** або **універсальною множиною** і позначають літерою U . Множини як об'єкти можуть бути елементами інших множин, Множину, елементами якої є множини, інколи називають **сімейством**.

Дві множини A та S називаються **рівними**, якщо вони складаються з однакових елементів. У цьому випадку пишуть $A=S$.

Множину, елементами якої є всі підмножини множини A і тільки вони (включно з порожньою множиною та самою множиною A), називають **булеаном** або **множиною-степенем** множини A і позначають $P(A)$. **Потужністю** скінченної множини A називають число її елементів, позначають $|A|$.

Множина, яка не має жодного елемента, називається **порожньою** і позначається \emptyset .
Вважається, що порожня множина є **підмножиною будь-якої множини**, а також $A \subset A$.

Множина всіх підмножин множини $|A|$ називається **булеаном** і позначається $P(A)$.
Потужність скінченної множини дорівнює кількості її елементів, позначається $|A|$.

Потужність порожньої множини дорівнює 0. Якщо $|A| = n$, то $|P(A)| = 2^n$.

Над множинами можна виконувати **дії**: об'єднання, переріз, доповнення, різницю, симетричну різницю.

Перетином множин A і B називається множина C , яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній із даних множин ($A \cap B = C$).

Об'єднанням або **сумою двох множин** A і B називається така множина R , яка складається з усіх елементів множин A і B і лише з них ($A \cup B = R$).

Різницею двох множин A і B називається така множина D , яка складається з усіх елементів множини A , які не належать множині B ($D = A \setminus B$).

Симетрична різниця двох множин ($A \Delta B$) — операція, результатом якої є нова множина, що включає всі елементи множин A і B , які не належать одночасно цим множинам ($A \Delta B$).

Доповненням множини A називають таку множину, яка містить елементи, що не належать множині A .

Закони алгебри множин:

Закони асоціативності	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
Закони комутативності	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Закони тотожності	
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Закони домінування	
$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Закони ідемпотентності	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Закони дистрибутивності	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Закони поглинання	
$(A \cup B) \cap A = A$	$(A \cap B) \cup A = A$
Закони доповнення	
$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$\bar{\bar{U}} = \emptyset$	$\bar{\emptyset} = U$
$\bar{\bar{A}} = A$	$\bar{\bar{A}} = A$
Закони де Моргана	
$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Закони двоїстості:

Вивчення законів алгебри множин дозволяє зауважити, що кожна з тотожностей правої колонки може бути одержана з відповідної тотожності лівої шляхом заміни \cup на \cap , \emptyset на U і навпаки. Таку відповідність тотожностей називають **законом двоїстості**, а відповідні тотожності – **двоїстими** одна одній. Використовуючи цей закон, можна обґрунтувати двоїсту тотожність, довівши пряму і обернену операції.

Формула включень та виключень для двох множин:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Формула включень та виключень для трьох множин:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Комп'ютерне подання множин:

Одним із найпоширеніших та найпростіших способів є подання множин за допомогою **бітових рядків**. Нехай універсальна множина U містить n елементів. Упорядкуємо довільним способом елементи універсальної множини. Тоді $U = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$.

Множину $A \subset U$ зображають у комп'ютері за допомогою рядка з 0 та 1 довжиною n так: якщо елемент $a \in A$, то записуємо 1, якщо $a \notin A$, то записуємо 0 (такий запис називають **характеристичним вектором** підмножини A).

Завдання лабораторної роботи

1. Для даних скінчених множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ та універсаму $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(C \setminus A) \cup (B \setminus A)$; б) $(B \setminus C) \cap A$. Розв'язати, використовуючи комп'ютерне подання множин.

Розв'язання:

Комп'ютерне подання множин: $A = \{1111111000\}$, $B = \{0001111111\}$, $C = \{0101010101\}$.

а) $(C \setminus A) \cup (B \setminus A) = \{0000000101\} \cup \{0000000111\} = \{0000000111\}$;

б) $(B \setminus C) \cap A = \{0000101010\} \cap \{1111111000\} = \{1111111010\}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $B \cup C \setminus C$. Знайти його потужність.

Розв'язання:

Знайдемо множину $D = B \cup C \setminus C$: $B \cup C = \{2, 5, 7, 9\}$, $B \cup C \setminus C = \{5, 7, 9\}$;

$P(D) = 2^3 = 8$; $P(D) = \{\emptyset, 5, 7, 9, \{5, 7\}, \{7, 9\}, \{5, 9\}, \{5, 7, 9\}\}$ - булеан множини $D = B \cup C \setminus C$.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку

невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне – навести доведення):

Розв'язання:

а) $4 \in \{1, 2, 3, \{4, 5\}\}$ - **неправильне**, оскільки елемент 4 не належить даній множині, їй належить підмножина $\{4, 5\}$;

б) $Q \in R$ - **правильне**, тому що раціональні числа є підмножиною дійсних;

в) $Q \cap R = R$ - **неправильне**, тому що $Q \cap R = Q$ (Q є підмножиною R);

г) $Z \cup Q \subset Q \setminus N$ - **неправильне**, оскільки множина $Z \cup Q = Q$ має бути точною підмножиною $Q \setminus N$, що є неможливим;

д) якщо $A \subset B$, то $A \setminus C \subset B \setminus C$ - **правильне**, оскільки, якщо забрати з множин A і B елементи з однієї і тієї ж множини C , то елементи множини A , що залишаться, і надалі будуть належати множині C .

4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \setminus B} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C);$$

Розв'язання:

Використовуючи закони алгебри множин, доведемо дану тотожність:

$$\overline{A \setminus B} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C);$$

$$\overline{A \cap \overline{B}} \cap C = (C \cap \overline{A}) \cup (C \cap B);$$

$$\overline{A} \cup B \cap C = C(\overline{A} \cup B);$$

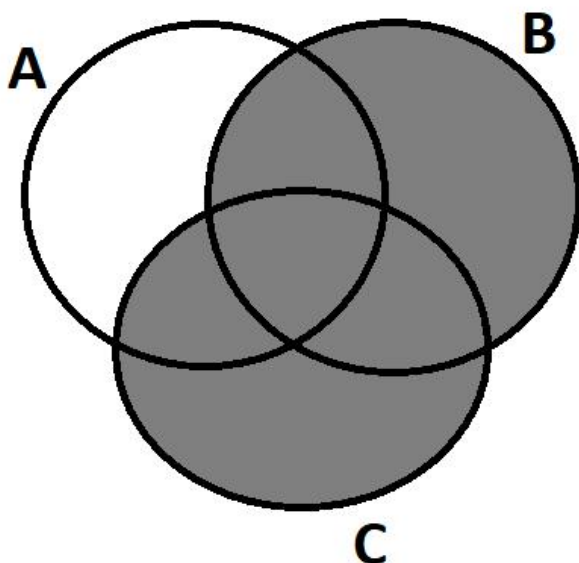
$$C \cap \overline{A} \cup B = C \cap (\overline{A} \cup B);$$

Отже, тотожність **правильна**.

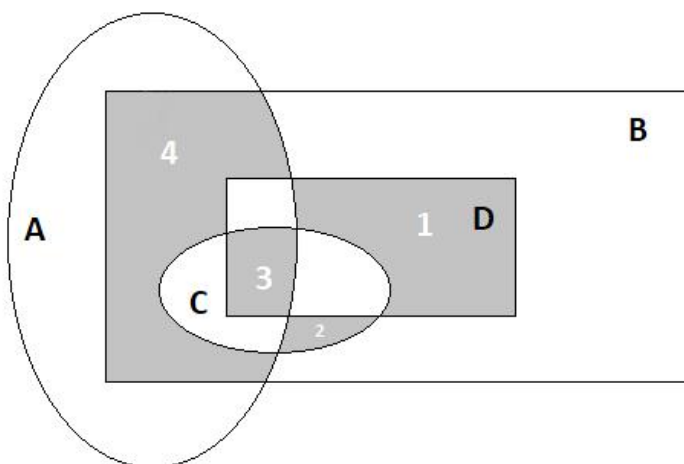
5.Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cap B \Delta C) \cup (B \setminus (A \setminus C)).$$

Розв'язання:



6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



Розв'язання: розглянемо дану множину як об'єднання чотирьох сегментів:

$$1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 = (D / (C \cup A)) \cup (C / (A \cup D)) \cup (C \cap D \cap A) \cup ((A \cap B) / (C \cup D))$$

7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup \bar{C}$$

Розв'язання:

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup \bar{C} = (A \cap B \cap C) \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) \cup U = (A \cap B \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) = (U / (B \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$$

8. У коробці знаходяться m кульок, які пополювині розмальовані двома кольорами – синім і жовтим. Половинки N кульок розмальовані синім кольором, а половинки K кульок – жовтим. L кульок мають і синю і жовту половинки. Скільки кульок не мають цих кольорів і скільки кульок розфарбовані лише цими кольорами?

Розв'язання:

$$L = |N \cap K|$$

Знайдемо, скільки кульок розфарбовані лише цими кольорами:

$$|N \cup K| = |N| + |K| - |N \cap K| = |N| + |K| - |L|$$

Тепер знайдемо скільки кульок не мають цих кольорів:

$$m / |N \cup K| = m - (|N| + |K| - |L|)$$

Додаток №2:

Ввести з клавіатури дві множини цілих чисел. Реалізувати операції об'єднання та перерізу над цими множинами. Вивести на екран новоутворені множини. Знайти програмно їх потужності.

Код програми

```
#include <iostream>
#include <locale.h>

using namespace std;

int main()
{
    const int a = 100;
    setlocale(LC_ALL, "Ukrainian");
    int A[a] = {0};
    int B[a] = {0};
    int n1, n2;
    int i1 = 0;
    int i2 = 0;
    cout << "Введіть розмір множини A: ";
    cin >> n1;
    if (n1 <= 0 || n1 >= 10)
    {
        cout << "Розмірність повинна бути від 1 до 10!" << endl;
        return 0;
    }
    else
    {
        cout << "Введіть множину A" << endl;
        for (i1 = 0; i1 < n1; i1++)
        {
            cout << "Введіть " << i1 + 1 << " елемент: ";
            cin >> A[i1];
        }
        cout << "Введіть розмір множини B: ";
        cin >> n2;
        if (n2 <= 0 || n2 >= 10)
        {
            cout << "Розмірність повинна бути від 1 до 10!" << endl;
            return 0;
        }
        else
        {
            cout << "Введіть множину B" << endl;
            for (i2 = 0; i2 < n2; i2++)
            {
                cout << "Введіть " << i2 + 1 << " елемент: ";
                cin >> B[i2];
            }
        }
    }
}
```

```

cout << endl;
int C[2 * a];
int k = 0;
for (int i = 0; i < n2; i++)
{
    for (int j = 0; j < n1; j++)
    {
        if (B[i] == A[j])
        {
            C[k] = A[j];
            k++;
        }
    }
}
cout << "Перетин множин A і B: { ";
for (int i = 0; i < k; i++)
{
    cout << C[i] << " ";
}
cout << "}";
cout << endl;
cout << "Потужність новоутвореної множини: " << k << endl;
const int r = 2 * a;
int D[r];
for (int i = 0; i < n1; i++)
{
    D[i] = A[i];
}
int f = n1; int q;
for (int i = 0; i < n2; i++)
{
    for (int j = 0; j < n1; j++)
    {
        if (B[i] == A[j])
        {
            q = 1;
            break;
        }
        else
        {
            q = 0;
        }
    }
    if (q == 0)
    {
        D[f] = B[i];
        f++;
    }
}
cout << "Об'єднання множин A і B: { ";
for (int i = 0; i < f; i++)
    cout << D[i] << " ";
cout << "}";
cout << endl;
cout << "Потужність новоутвореної множини: " << f << endl;
}
}
return 0;
}

```


Результати виконання програми:

```
Введіть розмір множини A: 4
Введіть множину A
Введіть 1 елемент: 1
Введіть 2 елемент: 3
Введіть 3 елемент: 5
Введіть 4 елемент: 6
Введіть розмір множини B: 5
Введіть множину B
Введіть 1 елемент: 3
Введіть 2 елемент: 6
Введіть 3 елемент: 7
Введіть 4 елемент: 8
Введіть 5 елемент: 11

Перетин множин A і B: { 3 6 }
Потужність новоутвореної множини: 2
Об'єднання множин A і B: { 1 3 5 6 7 8 11 }
Потужність новоутвореної множини: 7
```

```
Введіть розмір множини A: -5
Розмірність повинна бути від 1 до 10!
```

```
Введіть розмір множини A: sgdhfhm
Розмірність повинна бути від 1 до 10!
```

```
Введіть розмір множини A: 4
Введіть множину A
Введіть 1 елемент: 1
Введіть 2 елемент: 6
Введіть 3 елемент: 7
Введіть 4 елемент: 9
Введіть розмір множини B: -4
Розмірність повинна бути від 1 до 10!
```

```
Введіть розмір множини A: 4
Введіть множину A
Введіть 1 елемент: 1
Введіть 2 елемент: 6
Введіть 3 елемент: 7
Введіть 4 елемент: 9
Введіть розмір множини B: ewtry
Розмірність повинна бути від 1 до 10!
```

```
Введіть розмір множини A: 5
Введіть множину A
Введіть 1 елемент: 1
Введіть 2 елемент: 2
Введіть 3 елемент: 3
Введіть 4 елемент: 4
Введіть 5 елемент: 5
Введіть розмір множини B: 4
Введіть множину B
Введіть 1 елемент: 6
Введіть 2 елемент: 7
Введіть 3 елемент: 8
Введіть 4 елемент: 9

Перетин множин A і B: { }
Потужність новоутвореної множини: 0
Об'єднання множин A і B: { 1 2 3 4 5 6 7 8 9 }
Потужність новоутвореної множини: 9
```

Висновок: під час виконання цієї лабораторної роботи я ознайомвся на практиці із основними поняттями теорії множин, навчився будувати діаграми Ейлера-Венна операцій над множинами, навчився використовувати закони алгебри множин, освоїв принцип включень-виключень для двох і трьох множин та комп'ютерне подання множин.