МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №3

з дисципліни «Дискретна математика»

Виконав:
студент групи КН-115
Сирватка Максим
Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2019 р.

Тема: Побудова матриці бінарного відношення

Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Декартів добуток множин А і В (позначається **А×В**) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де a∈A ,b∈B. При цьому вважається, що(a1, b1) = (a2, b2) тоді і тільки тоді, коли a1=a2, b1=b2.

Потужність декартового добутку дорівнює: |A×B| = |A| × |B|.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку A×B : **R⊂A×B.**

Якщо пара (a,b) належить відношенню R, то пишуть: **(a,b)∈R, або aRb.**

Областю визначення бінарного відношення R⊂X×Y називається множина:

$$\delta_R = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$$

Область значень - множина:

$$\rho_R = \{y \mid \exists x (x, y) \in R\}$$

Для скінчених множин бінарне відношення R ⊂ A×B зручно задавати за допомогою **матриці відношення:**

$$R_{m\times n} = (r_{ij}),\ m = |A|,\ n \ = |B|$$

Елементами матриці є значення:

$$r_{ij} = 1,\ якщо((a_i, b_j) \in R$$

$$r_{ij} = 0,\ якщо((a_i, b_j) \notin R$$

Властивості бінарних відношень

1. **Рефлексивність,** якщо для всіх *a* ∈ M має місце *a*R*a*. Бінарне відношення R, визначене на деякій множині і відрізняється тим, що для будь-якого x цієї множини елемент x знаходиться у відношенні R до самого себе, тобто для будь-якого елемента x цієї множини має місце xRx .
2. **Антирефлексивність**, якщо для жодного *a* ∈ M не виконується *a*R*a*. Відзначимо, що так само, як антисиметричність не збігається з несиметричною, антирефлексівність не збігається з нерефлексивністю. Двомісне відношення R, визначене на деякій множині M і відрізняється тим, що для будь-якого елемента x цієї множини не виконується, що воно знаходиться у відношенні R до самого себе (відсутнє xRx), тобто можливий випадок, що елемент множини не знаходиться у відношенні R до самого себе.
3. **Симетричність**, якщо для всіх *a, b*∈ M таких, що *a*R*b* виконується *b*R*a*. Бінарне відношення R, визначене на деякій множині і відрізняється тим, що для будь-яких

елементів x і y цієї множини з того, що x знаходиться до y відносно R (xRy), випливає, що і y знаходиться в тому ж відношенні до x (yRx).

4. **Асиметричність,** якщо для всіх *a, b*∈M таких, що *a*R*b* не виконується b*R*a. Бінарне відношення R, визначене на деякій множині і відрізняється тим, що для будь-яких x та y з xRy слідує заперечення yRx.

5. **Антисиметричність**, якщо для всіх *a, b*∈ M таких, що *a*R*b* і *b*R*a* маємо a = b. Бінарне відношення R, визначене на деякій множині і відрізняється тим, що для будь-яких x та y з xRy і xR — 1y слід x = y (тобто R і R^{-1} виконуються одночасно лише для рівних між собою членів).

6. **Транзитивність**, якщо зі співвідношень *a*R*b* і *b*R*c* випливає *a*R*c. Бінарне відношення R, визначене на деякій множині і відрізняється тим, що для будь-яких x, y, z цієї множини з xRy і yRz слід xRz (xRy & yRz \ toxRz).*

7. **Нетранзитивність** — бінарне відношення R, визначене на деякій множині і відрізняється тим, що для будь-яких x, y, z цієї множини з xRy і yRz не слідує xRz.

Функціональне відношення

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y.
Функція **записується наступним чином:** якщо f ⊆ X ×Y , то f : X → Y .
Множину X називають **областю визначення**, а Y – **множиною значень** функції.
Областю значень функції називається підмножина Y, яка складається з образів всіх елементів x ∈ X . **Вона позначається символом f (x)**.
Оскільки для кожного x ∈ X існує єдиним образом визначений y ∈Y , такий що (x, y)∈ f , то записують y = f (x) та говорять, що **функція f відображує множину X на множину Y**, а f(x) називають **образом** x при відображенні f або **значенням функції**, яка відповідає аргументу x.

Види функціональних відношень

1. Функція називається **ін'єктивною (ін'єкцією),** якщо з умови f (x1) = f (x2) слідує, що x1 = x2 для будь-яких x1, x2 ∈ X . Функція ін'єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких x1, x2 ∈ X якщо x1 ≠ x2 , то f (x1) ≠ f (x2), тобто **для різних аргументів x функція f приймає різні значення.**

2. Функція називається **сюр'єктивною (сюр'єкцією),** якщо для кожного y*∈Y знайдеться такий x*∈ X , що y* = f (x*) .

3. Функція називається **бієктивною (бієкцією),** якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно. Таку функцію ще називають **взаємно-однозначним відображенням.**

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 15

Завдання №1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні задачі за своїм варіантом:

1. Чи є вірною рівність: **$(A\times(B\cap C))\cap((A\cap B)\times C) = (A\times C)\cap(B\times B)$?**

Розв'язання:

$(A\times(B\cap C))\cap((A\cap B)\times C) = (A\times C)\cap(B\times B)$;

$((A\times B)\cap(A\times C))\cap((A\times C)\cap(B\times C)) = (A\times C)\cap(B\times B)$;

$(A\times B)\cap(A\times C)\cap(B\times C) = (A\times C)\cap(B\times B)$;

Нехай $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)\cap(B\times C)$ **⇔**

$(x,y)\in(A\times B)$ **&** $(x,y)\in(A\times C)$ **&** $(x,y)\in(B\times C)$ **⇔**

$(x\in A$ **&** $y\in B)$ **&** $(x\in A$ **&** $y\in C)$ **&** $(x\in B$ **&** $y\in C)$ **⇔**

$(x\in A$ **&** $x\in A)$ **&** $(y\in C$ **&** $y\in C)$ **&** $(x\in B$ **&** $y\in B)$ **⇔**

$(x,y)\in(A\times C)$ **&** $(x,y)\in(B\times B)$ **⇔**

$(x,y)\in((A\times C)\cap(B\times B))$.

Отже, дана рівність є **вірною.**

2. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де M = {1,2,3}:

$R=\{(x,y)\mid x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\ |y|\le x\}$

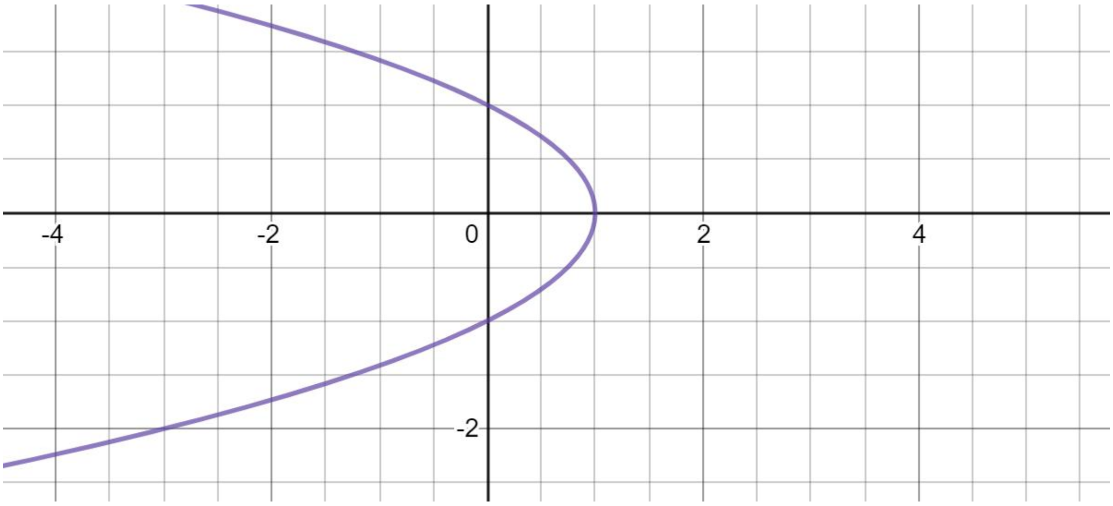
Розв'язання:

	$\varnothing$	**{1}**	**{2}**	**{3}**	**{1,2}**	**{2,3}**	**{1,3}**	**{1,2,3}**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
3	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

3. Зобразити відношення графічно:

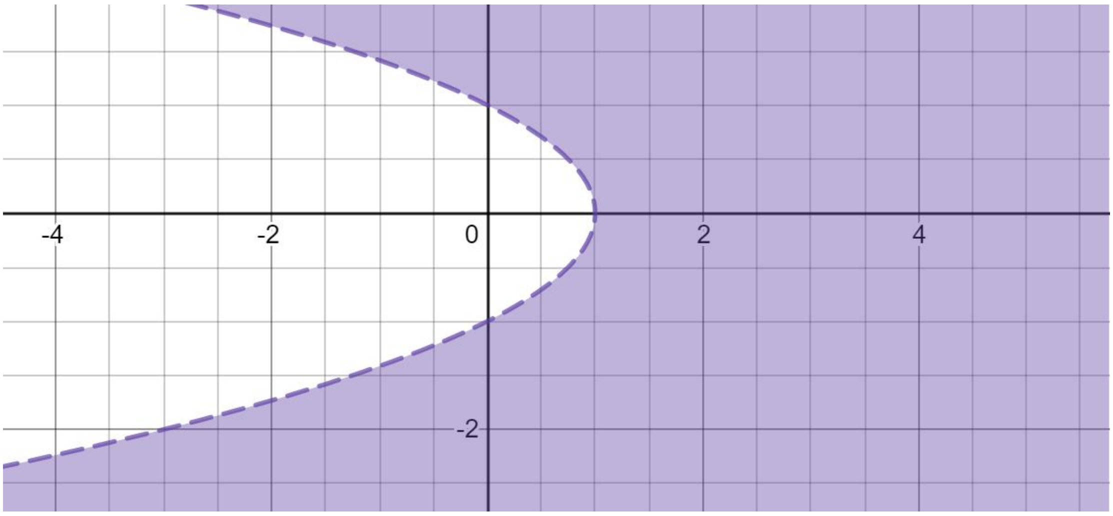
$\alpha=\{(x,y)\mid(x,y)\in R^2\ \&\ x+y^2-1>0\}$, де R - множина дійсних чисел.

Розв’язання: побудуємо графік функції $x + y^2 - 1 = 0$; $y^2 = 1 - x$.



Тепер зообразимо на координатній площині $x + y^2 - 1 > 0$. Даному відношенню відповідає частина площини, зображена на рисунку нижче.

$\mathit{Область\ визначення} : \delta = R; \mathit{область\ значень} : \rho = R.$



4. Навести приклад бінарного відношення R ⊂ A× A, де A = {a, b, c, d, e}, яке є антирефлексивне, несиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

Розв'язання: бінарне відношення: R = (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (c,b), (d,b), (d,c), (d,e), (e,b), (e,c).

Матриця бінарного відношення:

$$R = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Дане відношення є **антирефлексивне, несиметричне** та **транзитивне.**

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \&\ y = x + |x|\}.$$

Розв'язання:

Множина:

$$R = \{1,2,3,4,....,\infty\}$$

На даній множині відношення є **функціональним і бієктивним**.

Завдання №2. Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення ρ⊂ A× B , заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

Текст програми

```cpp
#include <iostream>
#include "BW1.h"

using namespace std;

void Output(int **A, int *B, int *C, int p, int q);
int Symetria(int **A, int p, int q);
int Reflexive(int **A, int p, int q);
int Anrireflexive(int **A, int p, int q);
int Transitive(int **A, int p, int q);
int Antitransitive(int **A, int p, int q);

int main()
{
    int n, m;
    cout << "Input size of A: ";
    cin >> n;
    cout << "Input size of B: ";
    cin >> m;
    if (m != n)
    {
        cout << "The size of A and B must be equal integer figures!" << endl;
    }
    else
    {
        cout << endl;
        int *A = new int[n];
        int *B = new int[m];
        int **Ro = new int *[n];
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            Ro[i] = new  int[m];
        }
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            cout << "Input the element number " << i + 1 << " of A: ";
            cin >> A[i];
        }
        for (int j = 0; j < m; j++)
        {
            cout << "Input the element number " << j + 1 << " of B: ";
            cin >> B[j];
        }
        Output(Ro, A, B, n, m);
        Symetria(Ro, n, m);
        Reflexive(Ro, n, m);
        Antireflexive(Ro, n, m);
        Transitive(Ro, n, m);
        Antitransitive(Ro, n, m);
    }
    return 0;
}
```

Текст заголовкового файлу “BW.h”

```
#include <iostream>

using namespace std;

void Output(int **A, int *B, int *C, int p, int q)
{
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            A[i][j] = 0;
        }
    }
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            if ((B[i] + C[j] + 1) > 3)
            {
                A[i][j] = 1;
            }
            else
            {
                A[i][j] = 0;
            }
        }
    }
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            cout << A[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
}

int Symetria(int **A, int p, int q)
{
    int a = 1;
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            if ((A[i][j] == 1) && (A[j][i] == 1))
                a *= 1;
            else
                a *= 0;
        }
    }
    if (a == 1)
    {
        cout << "Matrix is symmetric." << endl;
    }
    if (a == 0)
    {
        cout << "Matrix is asymmetric." << endl;
    }
    return a;
}
```

```
int Reflexive(int **A, int p, int q)
{
    int a = 0;
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        if (A[i][i] == 0)
        {
            cout << "Matrix isn't reflexive." << endl;
            a = 1;
            break;
        }
    }
    if (a == 0)
    {
        cout << "Matrix is reflexive." << endl;
    }
    return a;
}

int Antireflexive(int **A, int p, int q)
{
    int a = 1;
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            if ((A[i][j] != 0) && (i == j))
            {
                a *= 0;
            }
        }
    }
    if (a == 1)
    {
        cout << "Matrix is antireflexive." << endl;
    }
    else
    {
        cout << "Matrix isn't antireflexive." << endl;
    }
    return a;
}

int Transitive(int **A, int p, int q)
{
    int a = 0;
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            for (int h = 0; h < q; h++)
            {
                if (A[i][j] == 1 && A[j][h] == 1)
                {
                    if (A[i][h] != 1)
                    {
                        a = 1;
                        break;
                    }
                }
            }
```

```cpp
        }
    }
    if (a == 0)
    {
        cout << "Matrix is transitive." << endl;
    }
    else if(a == 1)
    {
        cout << "Matrix isn't transitive." << endl;
    }
    return a;
}

int Antitransitive(int **A, int p, int q)
{
    int a = 0;
    for (int i = 0; i < p; i++)
    {
        for (int j = 0; j < q; j++)
        {
            for (int h = 0; h < q; h++)
            {
                if (A[i][j] == 1 && A[j][h] == 1)
                {
                    if (A[i][h] != 0)
                    {
                        a = 1;
                        break;
                    }
                }
            }
        }
    }
    if (a == 0)
    {
        cout << "Matrix is antitransitive." << endl;
    }
    else if (a == 1)
    {
        cout << "Matrix isn't antitransitive." << endl;
    }
    return a;

}
```

Результати програми

```
Input size of A: 3
Input size of B: 3

Input the element number 1 of A: 4
Input the element number 2 of A: -2
Input the element number 3 of A: 5
Input the element number 1 of B: 1
Input the element number 2 of B: -3
Input the element number 3 of B: 7
1 0 1
0 0 1
1 0 1
Matrix is asymmetric.
Matrix isn't reflexive.
Matrix isn't antireflexive.
Matrix isn't transitive.
Matrix isn't antitransitive.
```

```
Input size of A: 4
Input size of B: 4

Input the element number 1 of A: -2
Input the element number 2 of A: -4
Input the element number 3 of A: 1
Input the element number 4 of A: 6
Input the element number 1 of B: -7
Input the element number 2 of B: 2
Input the element number 3 of B: 3
Input the element number 4 of B: 5
0 0 0 1
0 0 0 0
0 1 1 1
0 1 1 1
Matrix is asymmetric.
Matrix isn't reflexive.
Matrix isn't antireflexive.
Matrix isn't transitive.
Matrix isn't antitransitive.
```

```
Input size of A: 3
Input size of B: 3

Input the element number 1 of A: -5
Input the element number 2 of A: -2
Input the element number 3 of A: 1
Input the element number 1 of B: 5
Input the element number 2 of B:
4
Input the element number 3 of B: -1
0 0 0
1 0 0
1 1 0
Matrix is asymmetric.
Matrix isn't reflexive.
Matrix is antireflexive.
Matrix is transitive.
Matrix isn't antitransitive.
```

```
Input size of A: 3
Input size of B: 3

Input the element number 1 of A: -4
Input the element number 2 of A: 1
Input the element number 3 of A: 7
Input the element number 1 of B: -2
Input the element number 2 of B: 3
Input the element number 3 of B: 8
0 0 1
0 1 1
1 1 1
Matrix is symmetric.
Matrix isn't reflexive.
Matrix isn't antireflexive.
Matrix isn't transitive.
Matrix isn't antitransitive.
```

```
Input size of A: 3
Input size of B: 3

Input the element number 1 of A: -2
Input the element number 2 of A: 3
Input the element number 3 of A: -1
Input the element number 1 of B: 5
Input the element number 2 of B: -3
Input the element number 3 of B: 2
1 0 0
1 0 1
1 0 0
Matrix is asymmetric.
Matrix isn't reflexive.
Matrix isn't antireflexive.
Matrix is transitive.
Matrix isn't antitransitive.
```

```
Input size of A: 4
Input size of B: 4

Input the element number 1 of A: 9
Input the element number 2 of A: 2
Input the element number 3 of A: -4
Input the element number 4 of A: 1
Input the element number 1 of B: -2
Input the element number 2 of B: 3
Input the element number 3 of B: 7
Input the element number 4 of B: -6
1 1 1 1
0 1 1 0
0 0 1 0
0 1 1 0
Matrix is asymmetric.
Matrix isn't reflexive.
Matrix isn't antireflexive.
Matrix is transitive.
Matrix isn't antitransitive.
```

Висновок: на цій лабораторній роботі я набув практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.