МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №5

з дисципліни «Дискретна математика»

Виконав:
студент групи КН-115
Сирватка Максим
Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2019 р.

Тема: Знаходження найкоротшого маршруту за алгоритмом Дейкстри. Плоскі планарні графи
Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок з використання алгоритму Дейкстри

Теоретичні відомості

Алгоритм Дейкстри — алгоритм на графах, відкритий Дейкстрою. Знаходить найкоротший шлях від однієї вершини графа до всіх інших вершин. Класичний алгоритм Дейкстри працює тільки для графів без циклів від'ємної довжини.

Нехай **G = (V, E)** – зважений орієнтований граф, **w(vi , vj)** – вага дуги **(vi , vj)**. Почавши з вершини **a**, знаходимо віддаль від *a* до кожної із суміжних із нею вершин. Вибираємо вершину, віддаль від якої до вершини a найменша; нехай це буде вершина **v*.** Далі знаходимо віддалі від вершини a до кожної вершини суміжної з *v** вздовж шляху, який проходить через вершину *v*.* Якщо для якоїсь із таких вершин ця віддаль менша від поточної, то замінюємо нею поточну віддаль. Знову вибираємо вершину, найближчу до *a* та не вибрану раніше; повторюємо процес. Описаний процес зручно виконувати за допомогою присвоювання вершинам міток. Є мітки двох типів: тимчасові та постійні. Вершини з постійними мітками групуються у множину **M**, яку називають **множиною позначених вершин**. Решта вершин має **тимчасові мітки**, і множину таких вершин позначимо як **T, T = V \ M**. Позначатимемо мітку (тимчасову чи постійну) вершини *V* як **l(V).** Значення постійної мітки *l(V)* дорівнює **довжині найкоротшого шляху від вершини *a* до вершини *V***, тимчасової – **довжині найкоротшого шляху, який проходить лише через вершини з постійними мітками.** *Фіксованою* початковою вершиною вважаємо вершину a; довжину найкоротшого шляху шукаємо до вершини z (або до всіх вершин графа). Тепер формально **опишемо алгоритм Дейкстри:**

1. Присвоювання початкових значень. Виконати $l(a) = 0$ та вважати цю мітку постійною. Виконати $l(v) = \infty$ для всіх $v \neq a$ й уважати ці мітки тимчасовими. Виконати $x = a$, $M = \{a\}$.

2. Оновлення міток. Для кожної вершини $v \in \Gamma(x) \setminus M$ замінити мітки: $l(v) = \min\{ l(v), l(x) + w(x, v) \}$, тобто оновлювати тимчасові мітки вершин, у які з вершини x іде дуга.

3. Перетворення мітки в постійну. Серед усіх вершин із тимчасовими мітками знайти вершину з мінімальною міткою, тобто знайти вершину v* з умови $l(v^*) = \min\{l(v)\}$, $v \in T$, де $T = V \setminus M$.

4. Уважати мітку вершини v* постійною й виконати $M = M \cup \{v^*\}$; $x = v^*$ (вершину v* включено в множину M).

5. **а)** Для пошуку шляху від a до z: якщо $x = z$, то $l(z)$ – довжина найкоротшого шляху від a до z, зупинитись; якщо $a \neq z$, то перейти до кроку 2.
б) Для пошуку шляхів від a до всіх вершин: якщо всі вершини отримали постійні мітки (включені в множину M), то ці мітки дорівнюють довжинам найкоротших шляхів, зупинитись; якщо деякі вершини мають тимчасові мітки, то перейти до кроку 2.

Плоскі і планарні графи

Плоским графом називається граф, вершини якого є точками площини, а ребра – безперервними лініями без самоперетинань, що з'єднують відповідні вершини так, що ніякі два ребра не мають спільних точок крім інцидентної їм обом вершини.

Граф називається ***планарним***, якщо він є ізоморфним плоскому графу.

Гранню плоского графа називається максимальна по включенню множина точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребра графа. ***Границею*** грані будемо вважати множину вершин і ребер, що належать цій грані.

Алгоритм **γ-укладання графа G** являє собою процес послідовного приєднання до деякого укладеного підграфа **Ğ** графа G нового ланцюга, обидва кінці якого належать **Ğ** . При цьому в якості початкового плоского графа **Ğ** вибирається будь-який простий цикл графа G. Процес продовжується доти, поки не буде побудовано плоский граф, ізоморфний графові G, або приєднання деякого ланцюга виявиться неможливим. В останньому випадку граф G не є планарним.

Нехай побудоване деяке укладання підграфа **Ğ** графа G .

Сегментом S відносно **Ğ** будемо називати підграф графа G одного з наступних виглядів:

- ребро **e ∈ E , e = (u, v)** , таке, що e ∉ **Ĕ; u,v ∈ Ṽ; Ğ = (Ṽ;Ĕ)** ;
- зв'язний компонент графа G – **Ğ**, доповнений всіма ребрами графа G, інцидентними вершинам узятого компонента, і кінцями цих ребер.

Вершину v сегмента S відносно **Ğ** будемо називати **контактною**, якщо **v ∈ Ṽ**. **Припустимою гранню** для сегмента S відносно **Ğ** називається грань Γ графа **Ğ**, що містить усі контактні вершини сегмента S. Через Γ(S) будемо позначати множину припустимих граней для S.

Назвемо **α-ланцюгом** простий ланцюг L сегмента S, що містить дві різні контактні вершини і не містить інших контактних вершин.

Тепер формально опишемо алгоритм **γ**.

0. Виберемо деякий простий цикл C графа G і укладемо його на площині; покладемо **Ğ = G** .

1. Знайдемо грані графа **Ğ** і сегменти відносно **Ğ**. Якщо множина сегментів порожня, то перейдемо до пункту 7.

2. Для кожного сегмента S визначимо множину Γ(S).

3. Якщо існує сегмент S, для якого Γ(S)=∅ , то граф G не планарний. Кінець. Інакше перейдемо до п. 4.

4. Якщо існує сегмент S, для якого мається єдина припустима грань Γ, то перейдемо до п. 6. Інакше до п. 5.

5. Для деякого сегмента S Γ(S)>1. У цьому випадку вибираємо довільну припустиму грань Γ.

6. Розмістимо довільний α-ланцюг L∈S у грань Γ; замінимо **Ğ** на **ĞYL** і перейдемо до п. 1.

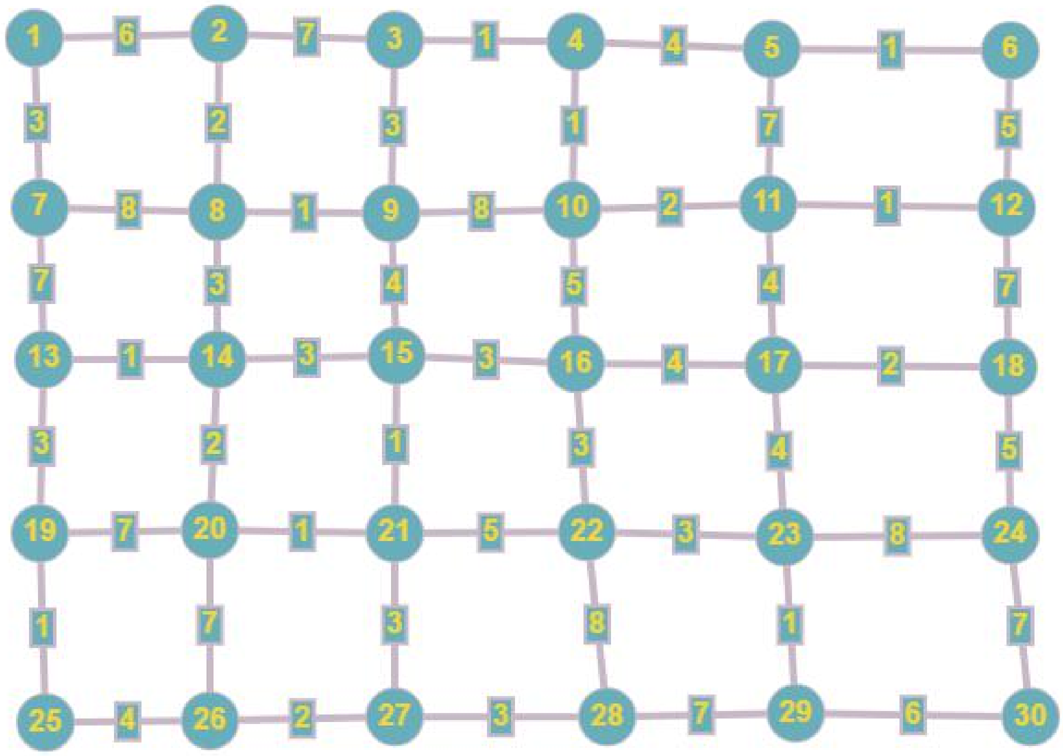
7. Побудовано укладання **Ğ** графа G на площині. Кінець. Кроком алгоритму **γ** будемо вважати приєднання до **Ğ** α- ланцюга L.

Завдання лабораторної роботи

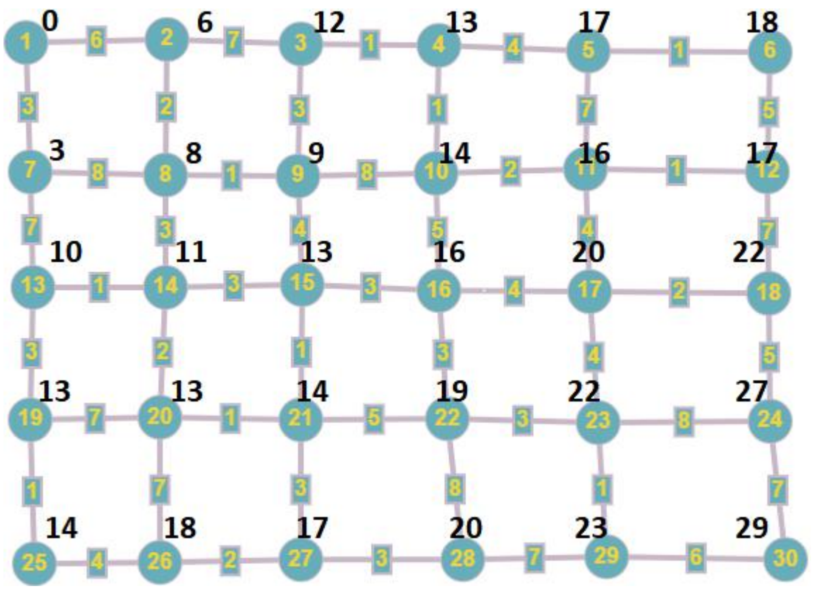
Варіант 15

Завдання № 1. Розв'язати на графах наступні 2 задачі:

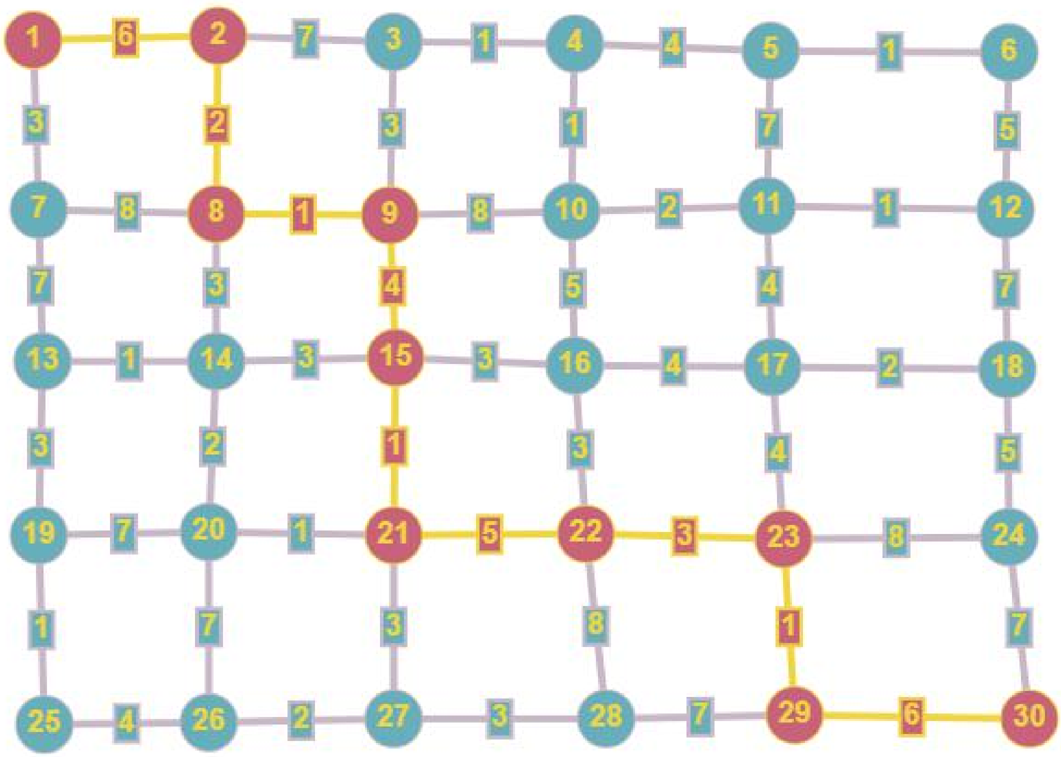
1. За допомогою алгоритму Дейкстра знайти найкоротший шлях у графі поміж парою вершин V0 і V* .



За допомогою алгоритму Дейкстри знайдемо найкортший шлях від V_0 до кожної вершини графа (мінімальний шлях відображений біля вершин):

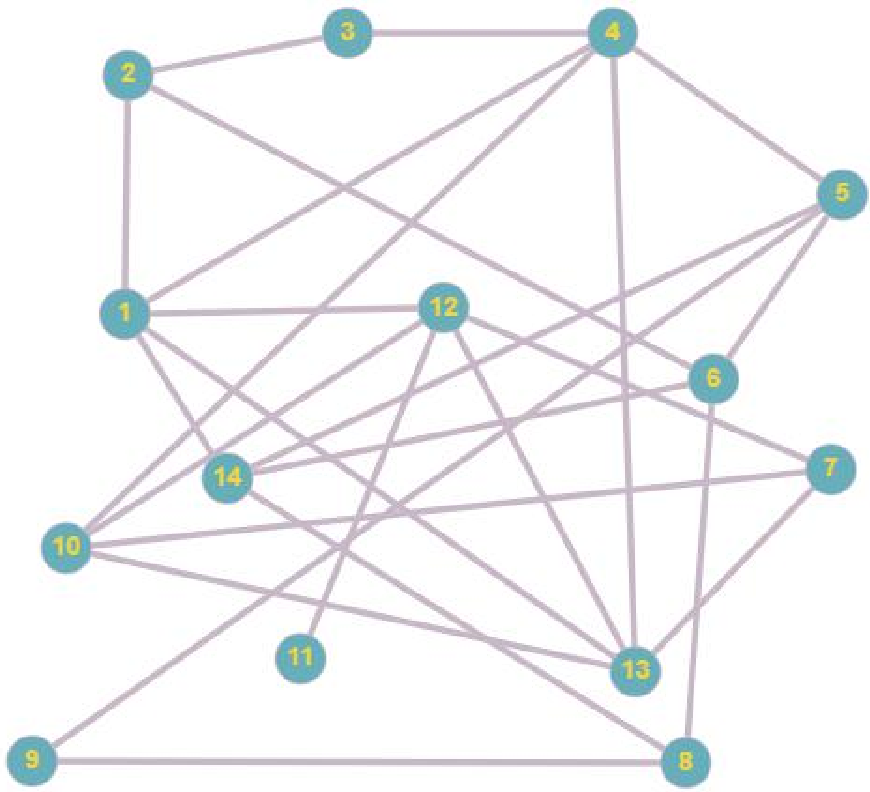


Тепер покажемо найменшу відстань від вершини 1 до вершини 30:

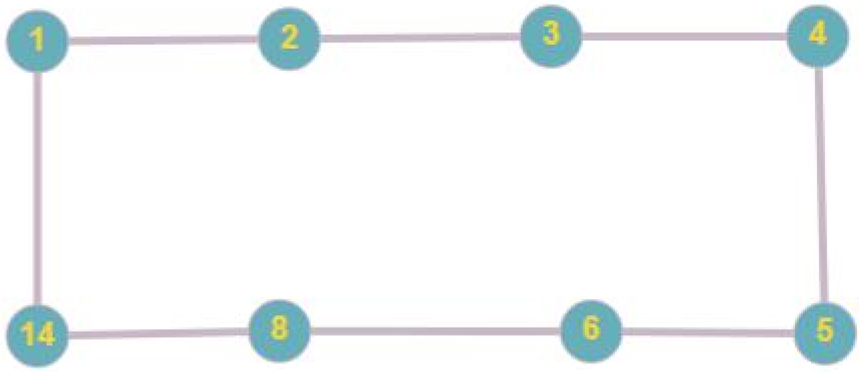


Отже, найкоротша відстань від вершини 1 до вершини 30 рівна **29**.

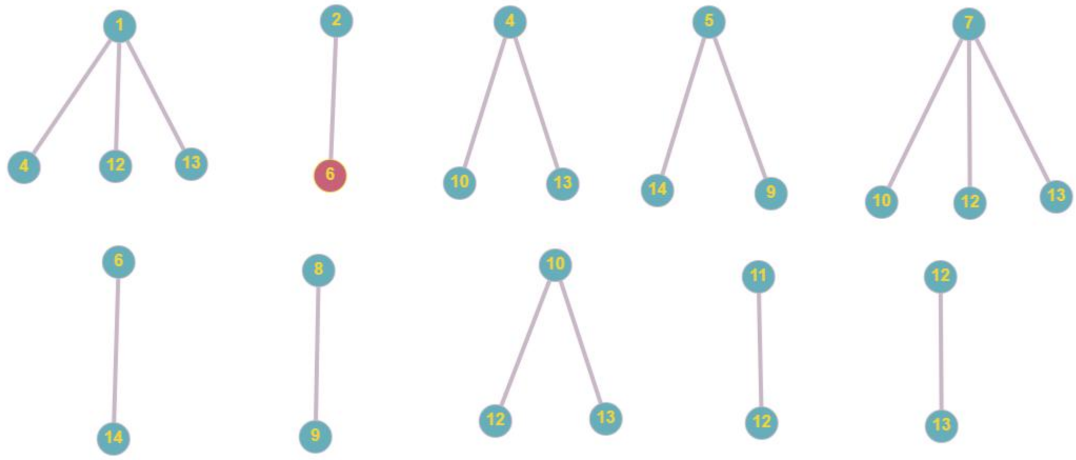
2. За допомогою γ -алгоритма зробити укладку графа у площині, або довести що вона неможлива.



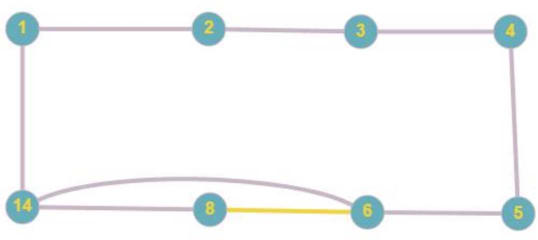
Розв'язання: вибираємо з даного графа простий цикл:

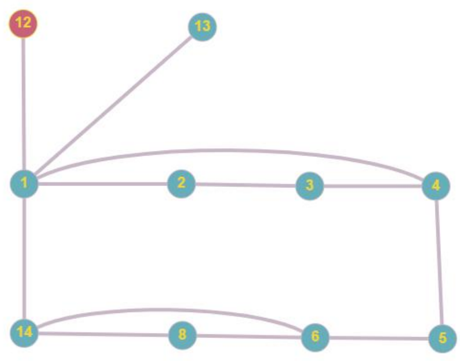


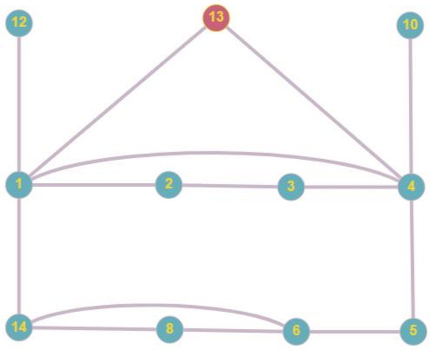
Розбиваємо граф на сегменти:

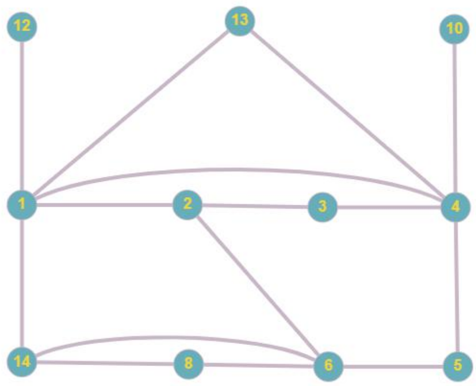


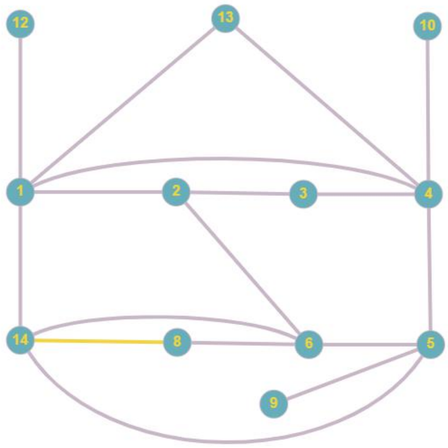
Поступово додавати сегменти у планарний граф:

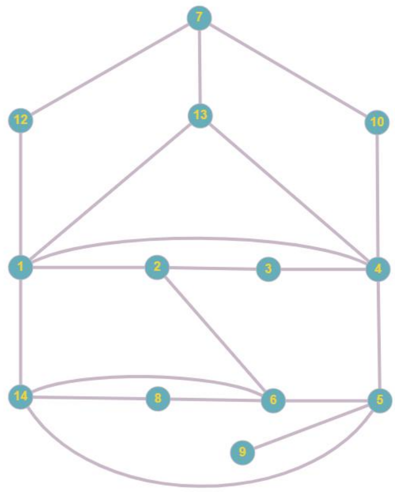


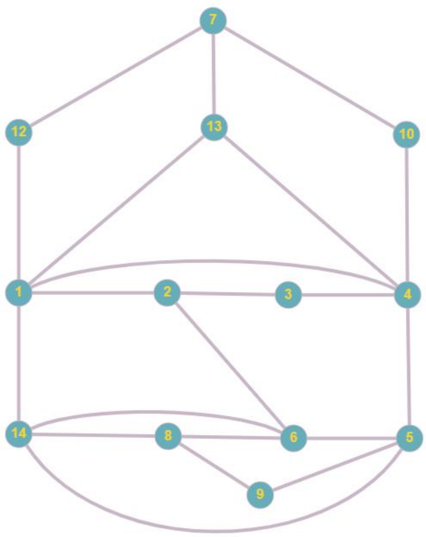


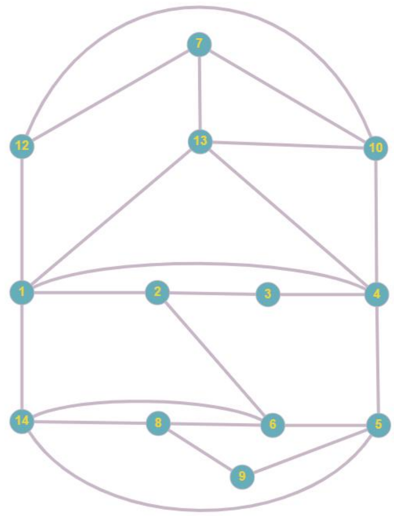

12
13
10
1
2
3
4
14
8
6
5

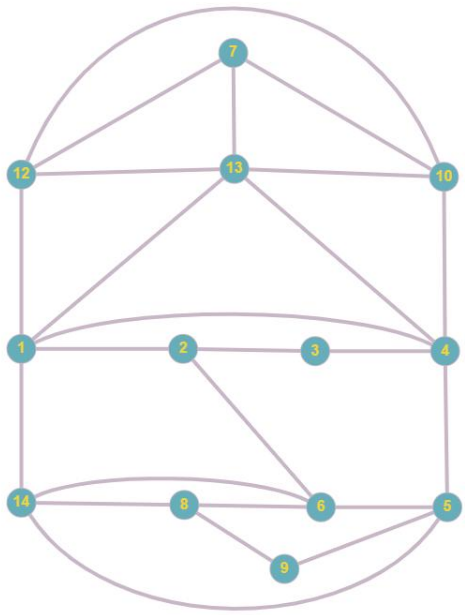

12
13
10
1
2
3
4
14
8
6
5


12
13
10
1
2
3
4
14
8
6
5
9

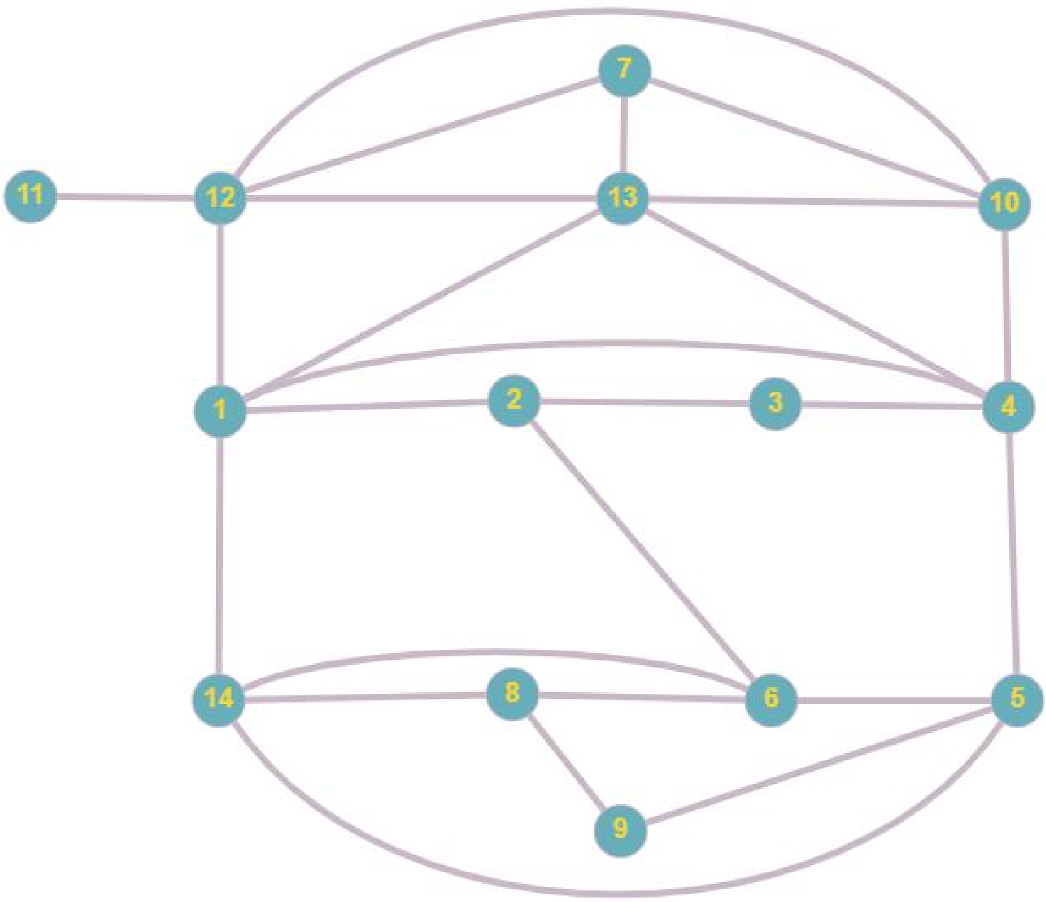

7
12
13
10
1
2
3
4
14
8
6
5
9


7
12
13
10
1
2
3
4
14
8
6
5
9

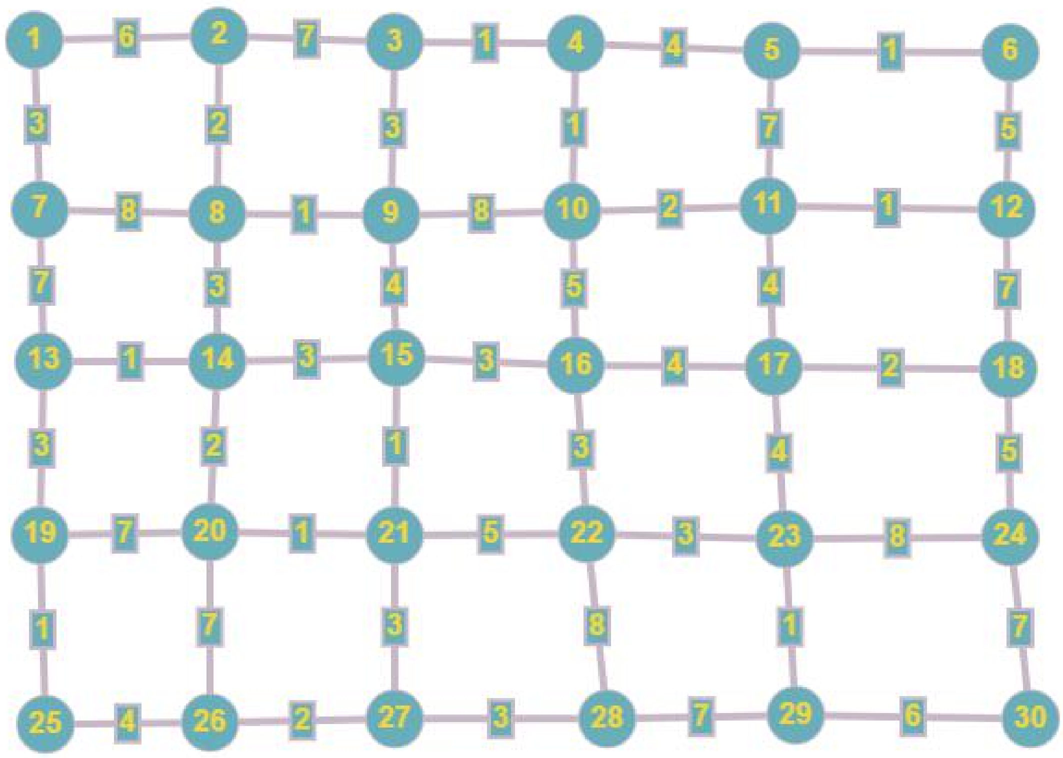

7
12
13
10
1
2
3
4
14
8
6
5
9



Кінцевий результат:



Завдання №2.Написати програму, яка реалізує алгоритм Дейкстри знаходження найкоротшого шляху між парою вершин у графі. Протестувати розроблену програму на графі згідно свого варіанту.



Текст програми

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 30;
const int INF = 20000;

void main()
{
	setlocale(LC_ALL, "ukr");
	int start;
	int graph[N][N] = {
		{0, 6, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{6, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 7, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 1, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 2, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0},
```

```
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 1, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 2, 0, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 0, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 7, 0},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 6},
		{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 6, 0} };

	do
	{
		cout << "Початкова вершина: ";
		cin >> start;
	} while (start < 1 || start > N);
	int Dist[N];
	int count, index, i, u, m;

	m = start;
	bool visited[N];
	for (i = 0; i < N; i++)
	{
		Dist[i] = INF;
		visited[i] = false;
	}
	Dist[start - 1] = 0;

	for (count = 0; count < N; count++)
	{
		int min = INF;
		for (i = 0; i < N; i++)
		{
			if (!visited[i] && Dist[i] <= min)
			{
				min = Dist[i];
				index = i;
			}
		}
		u = index;
		visited[u] = true;
		for (i = 0; i < N; i++)
			if (!visited[i] && (graph[u][i] && Dist[u] != INF) && Dist[u] + graph[u][i] < Dist[i])
			{
				Dist[i] = Dist[u] + graph[u][i];
			}
	}

	cout << "Відстань від заданої вершини до всіх вершин графа: " << endl;
	for (i = 0; i < N; i++)
	{
		if (Dist[i] != INF)
		{
			cout << m << " -> " << i + 1 << " = " << Dist[i] << endl;
		}
	}
	system("pause");

}
```

Результати виконання програми

```
Початкова вершина: 4323
Початкова вершина: 33
Початкова вершина: -1
Початкова вершина: 1
Відстань від заданої вершини до всіх вершин графа:
1 -> 1 = 0
1 -> 2 = 6
1 -> 3 = 12
1 -> 4 = 13
1 -> 5 = 17
1 -> 6 = 18
1 -> 7 = 3
1 -> 8 = 8
1 -> 9 = 9
1 -> 10 = 14
1 -> 11 = 16
1 -> 12 = 17
1 -> 13 = 10
1 -> 14 = 11
1 -> 15 = 13
1 -> 16 = 16
1 -> 17 = 20
1 -> 18 = 22
1 -> 19 = 13
1 -> 20 = 13
1 -> 21 = 14
1 -> 22 = 19
1 -> 23 = 22
1 -> 24 = 27
1 -> 25 = 14
1 -> 26 = 18
1 -> 27 = 17
1 -> 28 = 20
1 -> 29 = 23
1 -> 30 = 29
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Висновок: на цій лабораторній роботі я навчився знаходити найкоротший шлях за алгоритмом Дейкстри та укладати граф за допомогою алгоритму γ-укладання графа.