МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №6

з дисципліни «Дискретна математика»

Виконав:
студент групи КН-115
Сирватка Максим
Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2019 р.

Тема: Генерація комбінаторних конфігурацій
Мета роботи: набути практичних вмінь та навичок при комп'ютерній реалізації комбінаторних задач.

Теоретичні відомості

Слово «комбінаторика» вперше зустрічається в «Міркуваннях про комбінаторне мистецтво» - роботі двадцятирічного Лейбніца (1666 р.), яка стала початком цього розділу математики як самостійної науки.
Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінчених множинах.
Правило додавання: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, а y- іншими m способами, тоді
вибір „ x або y" може бути здійснено (m+n) способами.
Правило добутку: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x, y) може бути здійснено (m*n) способами.

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається (n, m) – **розміщенням**, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається (n, m) – **розміщенням з повторюваннями,** кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається (n, m) – **сполученням**, кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається (n,m) - **сполученням з повторюваннями,** кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m.$$

A_n^n – називається перестановкою, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент – n_2 разів, ... , k-ий елемент – n_k разів, причому $n_1+ n_2 +....+ n_k =n$, то їх називають **перестановками з повторенням** та кількість їх можна знайти за формулою:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Нехай X ={X_1, X_2 ,...,X_k} **- розбиття множини X** (X = n) на k підмножин таких, що:

$$\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X \ , \ X_i \cap X_j = 0$$

Їх кількість при фіксованих n_i та упорядкованих X_1, X_2 ,...,X_k обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1,n_2,...,n_k}(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Якщо ж множину X (|X |= n) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх **i=1, …, n є $m_i \geq 0$** підмножин з *i* елементами, та при цьому набір підмножин в розбитті не є упорядкованим, тоді їх кількість обчислюється за формулою:

$$N(m_1, m_2, ..., m_n) = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_n!(1!)^{m1}(2!)^{m2}...(n!)^{m_n}}.$$

Завдання лабораторної роботи

Варіант 15

1. Скількома способами можна розставити:
 а) 15 чоловік в шеренгу;
 б) 5 червоних, 3 зелені и 4 сині кубика в ряд?

Розв'язання:
а) P_{15} = 15! = 1307674368000;
б) $P_{12}^{5,3,4} = \frac{12!}{5!3!4!} = 27720$.

2. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна утворити з семі цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Розв'язання: $\overline{A}_7^5 = 7^5 = 16807$.

3. На площині 12 точок розміщенні так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки?

Розв'язання: пряма однозначно задається двома точками. Оскільки елементи у вибірці не повторюються та їхній порядок не важливий, то:
$$C_{12}^2 = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12*11}{2} = 66$$

4. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії і головний інженер одночасно їхати не можуть?

Розв'язання: Кількість усіх можливих варіантів формування групи без врахування обмеження дорівнює C_{25}^5 . Оскільки не всі ці варіанти підходять, то знайдемо варіанти, які не задовільняють умову, тобто, коли 2 місця з п'яти займуть начальник лабораторії і головний інженер. Решта 3 місця будуть сформовані C_{23}^3 способами. Тому, можливих варіантів буде:

$$C_{25}^5 - C_{23}^3 = \frac{25!}{20!5!} - \frac{23!}{20!3!} = 53130 - 1771 = 51359$$.

5. Скількома способами можна поділити 10 зошитів у клітку та 12 зошитів у лінійку між шістьома студентами так, щоб по одному зошиту у клітинку та по одному зошиту у лінійку було у кожного?

Розв'язання: якби не накладалося обмеження, що у кожного студента повинні бути по одному зошиту у клітинку та по одному зошиту у лінійку, то ми могли б використати формулу сполуки з повтореннями. Щоб гарантувати це, вибиремо 6 зошитів в лінійку та клітинку та віддамо кожному по одному. Тоді залишається розподілити 4 зошити в лінійку та 6 зошитів в клітинку, тобто:

$$\overline{C_6^4} * \overline{C_6^6} = C_9^4 * C_{11}^6 = \frac{9!11!}{4!5!6!5!} = 126 * 462 = 58212$$
.

6. В гуртожиток необхідно поселити у три двомісні кімнати та чотири трьохмісні кімнати 18 дівчат. Скількома способами можна розподілити дівчат у кімнати, якщо має значення тільки хто з ким буде в однієї кімнаті?

Розв'язання: $C_{18}^2 + C_{16}^2 + C_{14}^2 + C_{12}^3 + C_9^3 + C_6^3 + C_3^3$ =
153+120+91+220+84+20+1=689 способи.

7. У бібліотеці усього 40 різних книг з математики, в яких можуть бути розділи за темами першого, другого та третього семестрів з курсу „Вища математика". У 28 книгах є інформація за перший семестр, у 24 – за другий, у 15 – за третій; у 18 – за перший та другий, у 11 – за перший та третій, у 9 – за другий та третій; у 7 – за усі семестри. Скільки книг з математики не містять інформації з курсу вища математика? Скільки книг містить інформацію лише за перший семестр?

Розв'язання: для того, щоб знайти скільки книг з математики не містять інформації з курсу "Вища математика", знайдемо різницю загальної кількості книг та книг, які містять дану інформацію. За формулою включень-виключень:

$$40 - (28 + 24 + 15 - 18 - 11 - 9 + 7) = 40 - 36 = 4.$$

Тепер знайдемо кількість книг, які містить інформацію лише за перший семестр:

28 - 18 - 11 + 7 = 6.

Завдання №2. Запрограмувати за варіантом обчислення кількості розміщення(перестановок, комбінацій, алгоритму визначення наступної лексикографічної сполуки, перестановки) та формулу Ньютона і побудувати за допомогою неї розклад за варіантом.

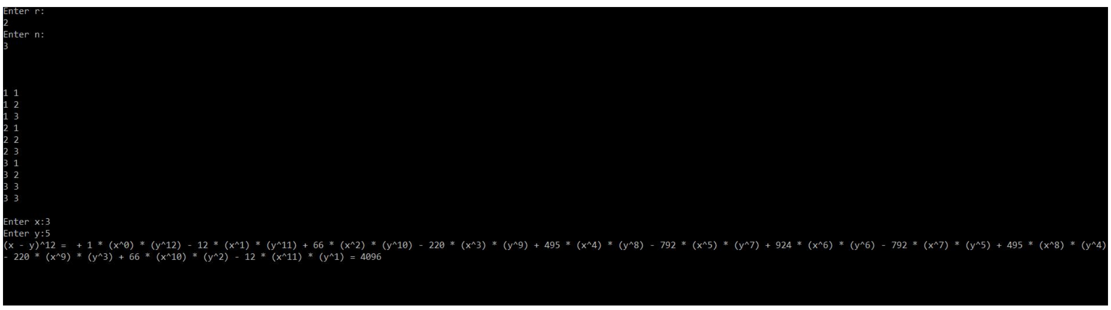
Задані додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі розміщення з повтореннями із r елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x-y)^{12}$.

Текст програми

```
#include <iostream>
#include <math.h>

using namespace std;

int factorial(int a)
{
    if (a == 1)
    {
        return a;
    }
    else if (a == 0)
    {
        return 1;
    }
    return a * factorial(a - 1);
}

long long int koef(int n, int d)
{
    return factorial(d) / (factorial(n) * factorial(d - n));
}

int main()
{
    int a[50];

    int r;
    cout << "Enter r: " << endl;
    cin >> r;
    int n;
    cout << "Enter n: " << endl;
    cin >> n;
    for (int i = 0; i < r; ++i)
    {
        a[i] = 0;
    }
    bool finish = false;
    int key = 0;

    while (!finish)
    {
        for (int i = r - 1; i >= 0; --i)
        {
            if (a[i] < n)
            {
                a[i]++;
                for (int j = i + 1; j <= r; ++j)
                {
                    a[j] = 1;
                }
                break;
            }
            if (i == 0)
                finish = true;
        }

        for (int i = 0; i < r; ++i)
```

```
        {
            if (a[i] == 0)
            {
                break;
            }
            else
            {
                if ((key / r) < (pow(n, r)))
                    cout << a[i] << " ";
                key++;
            }
        }
        cout << endl;
    }


    long long int x, y;
    cout << endl << "Enter x:";
    cin >> x;
    cout << "Enter y:";
    cin >> y;
    if (x == y) {
        cout << "(x - y)^12 = 0";
        return 0;
    }
    long long int binom = 0;
    for (int i = 0; i <= 12; ++i)
    {
        binom += koef(i, 12) *pow(x, i) * pow(-y, 12 - i);
    }
    cout << "(x - y)^12 = ";
    for (int i = 0; i < 12; ++i)
    {
        if (i % 2)
        {
            cout << " - ";
        }
        else
        {
            cout << " + ";
        }
        cout << koef(i, 12) << " * (x^" << i << ") * (y^" << 12 - i << ")";
    }
    cout << " = " << binom << "\n";
    return 0;
}
```

Результат програми



```
Enter r:
2
Enter n:
3



1 1
1 2
1 3
2 1
2 2
2 3
3 1
3 2
3 3
3 3

Enter x:3
Enter y:5
(x - y)^12 =  + 1 * (x^0) * (y^12) - 12 * (x^1) * (y^11) + 66 * (x^2) * (y^10) - 220 * (x^3) * (y^9) + 495 * (x^4) * (y^8) - 792 * (x^5) * (y^7) + 924 * (x^6) * (y^6) - 792 * (x^7) * (y^5) + 495 * (x^8) * (y^4)
- 220 * (x^9) * (y^3) + 66 * (x^10) * (y^2) - 12 * (x^11) * (y^1) = 4096
```

Висновок: на цій лабораторній роботі я набув практичних вмінь та навичок при комп’ютерній реалізації комбінаторних задач, навчився користуватись біномом Ньютона та формулами комбінаторики.