1 Теория графов

1.1 Циклические свойства локально связных графов

Граф называется *гамильтоновым*, если в нём имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. На рис. 1 приведен пример гамильтонова графа F и пример негамильтонова графа H. Рёбра графа F, входящие в один из гамильтоновых циклов, изображены на рисунке жирными линиями. Подумайте, почему граф H не содержит гамильтонова цикла?

Граф называется *трассируемым*, если в нём имеется *гамильтонова цепь*, т. е. простая цепь, содержащая каждую вершину этого графа. Очевидно, что каждый гамильтонов граф является трассируемым, но обратное, вообще говоря, неверно. Покажите, что негамильтонов граф H (см. рис. 1) является трассируемым.

Граф на $n \geqslant 3$ вершинах называется *панциклическим*, если он содержит простые циклы всех длин от 3 до n включительно. Понятно, что каждый панциклический граф является гамильтоновым, но обратное, вообще говоря, неверно. Является ли граф F (см. рис. 1) панциклическим? Длина наименьшего (соответственно, наибольшего) простого цикла графа называется *обхватом* (соответственно, *окружением*) этого графа. Обхват и окружение графа G обозначаются через $g(G)$ и $c(G)$ соответственно. Граф G называется *слабо панциклическим*, если он содержит простые циклы всех длин от $g(G)$ до $c(G)$ включительно. Являются ли графы F и H (см. рис. 1) слабо панциклическими?

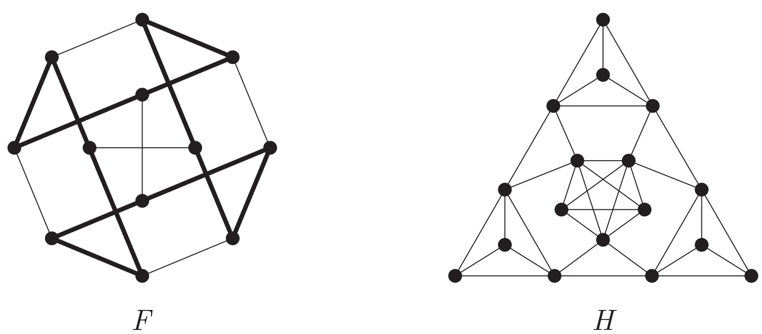

Рис. 1: Гамильтонов граф F и негамильтонов граф H

Хорошо известно, что проблема распознавания гамильтоновости графа является NP-полной [1]. Показано также, что эта задача остаётся NP-полной для графов, имеющих специальную структуру, например, для планарных кубических 3-связных графов [2], двудольных планарных графов, максимальная степень вершин которых равна трём [3], плоских триангуляций [4], k-регулярных графов (для любого фиксированного k, где $k \geqslant 4$) [5], графов квадратной [6], триангулированной [7] и шестиугольной [8] решёток, локально связных графов, максимальная степень вершин которых не более пяти [9], хордальных двудольных и сильно хордальных расщепляемых графов [10], а также для рёберных графов [11].

С другой стороны, задача полиномиально разрешима для кографов [12], интервальных графов [13], графов пересечений дуг окружности [14], графов ко-сравнимости [15], планарных 4-связных графов [16], локально связных $K_{1,3}$-свободных графов [17], локально связных $K_{1,4}$-ограниченных графов [18], локально связных графов триангулированной решётки [7, 19] и некоторых других классов графов.

Поскольку в общем случае рассматриваемая задача является трудной, естественно искать специальные условия, при выполнении которых граф содержит гамильтонов цикл. В настоящем проекте предлагается исследовать локальные условия слабой панцикличности и гамильтоновости графов, а также установить вычислительную сложность задачи распознавания гамильтоновости для ряда классов графов, обладающих предписанной локальной структурой. В основу таких условий положено специальное теоретико-графовое свойство, которое, действуя на графе локально (например, на подграфах, порождаемых окружениями вершин), приводит к существованию в графе гамильтонова цикла или влечёт слабую панцикличность графа.

Далее под *графом* понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Стандартные понятия теории графов можно найти в [20]. Пусть G — граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством рёбер $E(G)$. Число $|V(G)|$ вершин графа G называется его *порядком*. Граф порядка $n > 1$ называется *нетривиальным*. Простая цепь, соединяющая вершины u и v графа G, называется *(u, v)-цепью*. Граф *связен*, если для любых двух его несовпадающих вершин u и v существует (u, v)-цепь. Две (u, v)-цепи графа G называются *непересекающимися*, если у них нет общих вершин, за исключением u и v. Нетривиальный граф *k-связен* ($k \geqslant 2$), если любая пара его несовпадающих вершин u и v соединена по крайней мере k непересекающимися (u, v)-цепями. Граф H называется *подграфом* графа G (обозначается через $H \subseteq G$), если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Подграф $H \subseteq G$ называется *подграфом, порождённым множеством* $S \subseteq V(G)$, если $V(H) = S$ и $E(H) = \{uv \mid u, v \in S$ и $uv \in E(G)\}$. Подграф графа G, порождённый множеством вершин S, обозначается через $G(S)$.

Множество всех вершин графа G, смежных с данной вершиной v, называется *окружением* этой вершины и обозначается через $N(v)$. Число вершин в окружении вершины v называется её *степенью* и обозначается $\deg v$ (т. е. $\deg v = |N(v)|$). Минимальная и максимальная степени вершин графа G обозначаются через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ соответственно. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое теоретико-графовое свойство, т. е. класс графов, различаемых с точностью до изоморфизма. Граф G называется *локально $\mathcal{P}$-графом*, если для каждой вершины $v \in V(G)$ порождённый подграф $G\big(N(v)\big)$ принадлежит классу $\mathcal{P}$. В случае, когда свойство $\mathcal{P}$ означает связность, k-связность, трассируемость или гамильтоновость получаем определения локально связного, локально k-связного, локально трассируемого или локально гамильтонова графа соответственно. Если $\mathcal{P}$ есть класс графов, диаметр которых не превосходит некоторой заданной величины d, то локально $\mathcal{P}$-граф в этом случае называется *локально d-диаметрально ограниченным.*

Предлагается исследовать следующие вопросы (бо́льшая часть из них представлена в работах [21, 22, 23]):

1. Являются ли связные локально связные графы с $\Delta \leqslant 5$ слабо панциклическими? Начните исследование этого вопроса со связных локально связных графов, для которых $\Delta = 4$.
2. Является ли каждый связный локально трассируемый граф с $\Delta = 6$ слабо панциклическим? Более общий вопрос: является ли каждый связный локально связный граф с $\Delta = 6$ слабо панциклическим?
3. Является ли каждый связный локально гамильтонов граф с $\Delta = 7$ слабо панциклическим? Является ли каждый связный локально гамильтонов граф с $\Delta = 7$ гамильтоновым? Более общий вопрос: является ли каждый связный локально 2-связный граф с $\Delta = 7$ гамильтоновым?
4. Какова вычислительная сложность задачи распознавания трассируемости локаль-

но связного графа с $\Delta = 5$? Является ли задача распознавания гамильтоновости в классе локально 3-диаметрально ограниченных графов с $\Delta = 5$ полиномиально разрешимой?

5. Какова вычислительная сложность задачи распознавания гамильтоновости в классах локально k-диаметрально ограниченных графов с $\Delta = 6$, где $k \in \{3, 4, 5\}$?

Список литературы

[1] Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972. P. 85–103.

[2] Garey M. R., Johnson D. S., Tarjan R. E. The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete // SIAM J. Comput. 1976. V. 5. P. 704–714.

[3] Akiyama T., Nishizeki T., Saito N. NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs // J. Inf. Process. 1980. V. 3. P. 73—76.

[4] Chvátal V. Hamiltonian cycles // The traveling salesman problem. A guided tour of combinatorial optimization. Wiley–Intersci. Ser. Discrete Math., Wiley, Chichester, 1985. P. 403–429.

[5] Picouleau C. Complexity of the hamiltonian cycle in regular graph problem // Theor. Comput. Sci. 1994. V. 131. P. 463–473.

[6] Itai A., Papadimitriou C. H., Szwarcfiter J. L. Hamilton paths in grid graphs // SIAM J. Comput. 1982. V. 11. P. 676–686.

[7] Gordon V. S., Orlovich Y. L., Werner F. Hamiltonian properties of triangular grid graphs // Discrete Math. 2008. V. 308. P. 6166–6188.

[8] Arkin E. M. [et al.] Not being (super)thin or solid is hard: A study of grid Hamiltonicity // Comput. Geom. 2009. V. 42. P. 582–605.

[9] Иржавский П. А. Гамильтоновость локально связных графов: сложностные аспекты // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 37–43.

[10] Müller H. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs // Discrete Math. 1996. V. 156. P. 291–298.

[11] Bertossi A. A. The edge Hamiltonian path problem is NP-complete // Inf. Process. Lett. 1981. V. 13. P. 157–159.

[12] Corneil D. G., Lerchs H., Stewart Burlingham L. Complement reducible graphs // Discrete Appl. Math. 1981. V. 3. P. 163–174.

[13] Keil J. M. Finding Hamiltonian circuits in interval graphs // Inf. Process. Lett. 1985. V. 20. P. 201–206.

[14] Hung R.-W., Chang M.-S. An efficient certifying algorithm for the Hamiltonian cycle problem on circular-arc graphs // Theor. Comput. Sci. 2011. V. 412. P. 5351–5373.

[15] Deogun J. S., Steiner G. Polynomial algorithms for hamiltonian cycle in cocomparability graphs // SIAM J. Comput. 1994. V. 23. P. 520–552.

[16] Chiba N., Nishizeki T. The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs // J. Algorithms. 1989. V. 10. P. 187–211.

[17] Oberly D. J., Sumner D. P. Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is Hamiltonian // J. Graph Theory. 1979. V. 3. P. 351–356.

[18] Иржавский П. А., Орлович Ю. Л. Полная циклическая расширяемость локально связных $K_{1,4}$-ограниченных графов // Тр. Ин-та матем. 2012. Т. 20, № 2. С. 36–50.

[19] Пронин Ф. В. Линейный алгоритм построения гамильтонова цикла в локально связном графе треугольной решетки // Вестн. БГУ Сер. 1. 2011. № 1. С. 90–96.

[20] Емеличев В. А. [и др.] Лекции по теории графов // М.: Наука, 1990. 384 с.

[21] Gordon V. S., Orlovich Y. L., Potts C. N., Strusevich V. A. Hamiltonian properties of locally connected graphs with bounded vertex degree // Discrete Appl. Math. 2011. V. 159. P. 1759–1774.

[22] van Aardt S. A., Frick M., Oellermann O. R. de Wet J. Global cycle properties in locally connected, locally traceable and locally hamiltonian graphs // Discrete Appl. Math. (to appear).

[23] Borchert A., Nicol S., Oellermann O.R. Global cycle properties of locally isometric graphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 205. P. 16–26.

1.2 Несвязные паросочетания в графах

Паросочетанием в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных рёбер. Для паросочетания M обозначим через $G(M)$ подграф графа G, порождённый множеством всех концевых вершин рёбер из M. Пусть $\mathcal{P}$ — заданное теоретико-графовое свойство, т. е. класс графов, различимых с точностью до изоморфизма. Паросочетание M назовём *$\mathcal{P}$-паросочетанием*, если $G(M) \in \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$-паросочетание называется *максимальным*, если оно не содержится в $\mathcal{P}$-паросочетании с большим числом рёбер. Наибольшее по мощности $\mathcal{P}$-паросочетание называется *наибольшим*. Число рёбер в наибольшем $\mathcal{P}$-паросочетании графа G называется *числом $\mathcal{P}$-паросочетания* этого графа и обозначается $\alpha_{\mathcal{P}}(G)$.

Если свойство $\mathcal{P}$ означает связность графа, то $\mathcal{P}$-паросочетание называют *связным* и вместо $\alpha_{\mathcal{P}}(G)$ просто пишут $\alpha_{\text{c}}(G)$. Можно показать, что для связного графа G имеет место равенство $\alpha_{\text{c}}(G) = \alpha'(G)$, где $\alpha'(G)$ — классическое число паросочетания графа G (соответствует случаю, когда $\mathcal{P}$ — класс всех графов).

В связи с исследованием [1] определённый интерес представляют несвязные паросочетания. Паросочетание M называется *несвязным*, если $|M| = 1$ или граф $G(M)$ не является связным. В этом случае $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup K_2$, где $\mathcal{Q}$ — класс несвязных графов. Мощность наибольшего несвязного паросочетания обозначим через $\alpha_{\text{dc}}(G)$.

Предлагается исследовать следующие вопросы:

1. Установить оценки параметра $\alpha_{\text{dc}}(G)$, в частности, найти соотношения этого параметра с другими известными графовыми параметрами.

2. Выяснить, как устроены несвязные паросочетания для таких классов графов, как деревья, унициклические графы, двудольные графы и др.
3. Охарактеризовать классы графов, для которых $\alpha_{\mathrm{dc}}(G) = \alpha'(G)$, $\alpha_{\mathrm{dc}}(G) = \alpha_{\mathrm{im}}(G)$, где $\alpha_{\mathrm{im}}(G)$ — число индуцированного паросочетания графа G (соответствует случаю, когда $\mathcal{P} = \{\ell K_2 \mid \ell \geqslant 1\}$). Заметим, что $\alpha_{\mathrm{im}}(G) \leqslant \alpha_{\mathrm{dc}}(G) \leqslant \alpha'(G)$ для любого графа G.
4. Установить вычислительную сложность задачи распознавания "$\alpha_{\mathrm{dc}}(G) \geqslant K$?".

Список литературы

[1] Goddard W., Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T., Laskar R. Generalized subgraph-restricted matchings in graphs // Discrete Math. 2005. V. 293. P. 129–138.