Пусть $u = 1 - |x|$. Тогда функция u должна быть решением задачи:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 2\delta(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$u(-1) = u(1) = 0.$$

Задача симметрична относительно $x = 0$, поэтому можно переписать так:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 2\delta(x), \quad 0 \le x < 1,$$

$$u(1) = 0.$$

Обобщенная форма:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = 2\int_0^1 \delta(x)v(x)dx. \tag{*}$$

Так как

$$\int_0^1 \delta(x)v(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \delta(x)\tilde{v}(x)dx = [\text{по свойству дельта-функции}] = \frac{1}{2}v(0),$$

где $\tilde{v}$ – продолжение функции v симметричным образом на отрицательную часть оси, то

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = v(0). \tag{**}$$

Для примера зададим равномерную сетку: $x_i = ih, \quad i = \overline{0,N}, \quad h = 1/N$. Задаем стандартный базис из кусочно-линейных непрерывных функций:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{h}, & 0 \le x \le h \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - i + \dfrac{x}{h}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 1 + i - \dfrac{x}{h}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Локальная матрица жесткости:

$$K_{i,i+1} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Глобальная матрица жесткости:

$$K=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица масс для этой задачи равна нулю.

Остается построить вектор f – вектор правой части, компонентами которого являются интегралы:

$$f_i = 2\int_0^1 \delta(x)\varphi_i(x)dx.$$

Есть 2 варианта:

1) Используем равенство (**). В методе Галеркина вместо v ставится φ_j, и $\varphi_j(0)\neq 0$ только для j = 0, в этом случае $\varphi_0(0)=1$. Получаем вектор f:

$$f=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае при таком выборе правой части нужно следить, чтобы не изменился суммарный заряд (т.е. интеграл от дельта-функции). В данном случае все в порядке.

2) Используем равенство (*) и вспоминаем, что дельта-функцию можно рассматривать как предел последовательности функций, например, таких:

$$g_n(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & |x|<h \\ 0, & |x|\geq h \end{cases}, \qquad h=\frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = 1 \quad \forall n,$$

поэтому суммарный заряд остается неизменным.

Вместо самой дельта-функции будем брать ее приближение при $n = N$. Ненулевых компонент в векторе f в таком случае будет 2:

$$f_0 = 2\int_0^1 \delta(x)\varphi_0(x)dx = 2\int_0^h \frac{1}{2h}\varphi_0(x)dx = \frac{1}{2},$$

$$f_1 = 2\int_0^1 \delta(x)\varphi_1(x)dx = 2\int_0^h \frac{1}{2h}\varphi_1(x)dx = \frac{1}{2},$$

$$f = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$