# Лабораторная работа №1
## Вариант 9

### №1

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2t - x^2 & 0 < x < 9,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin(x) \\ u_t|_{t=0} = \cos(x) \\ u_x + 9u|_{x=0} = e^t \\ u|_{x=9} = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

$w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$

$$\begin{cases} w(x,t)|_{x=9} = 0 \\ w_x + 9w|_{x=0} = e^t \end{cases}$$

$w|_{x=9} = 81a(t) + 9B(t) + C(t) = 0$

$w_x + 9w|_{x=0} = 2ax + B + 9C = e^t$

Пусть $a = 0$:

$$\begin{cases} 9B + C = 0 \\ B + 9C = e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -\frac{e^t}{80} \\ C = \frac{9}{80} e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow w(x,t) = -\frac{e^t}{80}x + \frac{9}{80}e^t$$

Построение смешанной задачи с однородными граничными условиями

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t) = u + \frac{e^t}{80}x - \frac{9e^t}{80}$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} + \frac{e^t}{80} - \frac{9}{80}e^t = 2t - x^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ v|_{t=0} = \sin(x) - w|_{t=0} \\ \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cos(x) - \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} \\ v|_{x=9} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + 9v|_{x=0} \end{cases}$$

$$\cancel{v(x,t) = u(x,t)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2t - x^2 + \frac{e^t}{80}x - \frac{9}{80}e^t \\ v|_{t=0} = \sin(x) + \frac{x}{80} - \frac{9}{80} \\ v_t|_{t=0} = \cos(x) + \frac{x}{80} - \frac{9}{80} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v|_{x=g}=0 \\ v_x+gv|_{x=0}=0 \end{cases}$$

Используя метод разделения переменных будем искать решение вида

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,X_k(x),\ \text{где}$$

$X_k(x)$ – собственные функции, являющиеся решениями задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \\ X(g)=0 \\ X'(0)+gX(0)=0 \end{cases}$$

Общее решение: $X(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)$

$X(g)=A\cos(g\lambda)+B\sin(g\lambda)=0$

$X'(x)=-A\lambda\sin(\lambda x)+B\lambda\cos(\lambda x)$

$X'(0)+gX(0)=B\lambda+gA=0$

Исходя из предыдущих уравнений получаем: $B=-\dfrac{A\cos(g\lambda)}{\sin(g\lambda)}=-\dfrac{gA}{\lambda}$

$$-\frac{9}{\lambda}=\frac{\cos(9\lambda)}{\sin(9\lambda)} \Rightarrow \frac{\lambda}{9}=tg(9\lambda)$$

Корни этого уравнения $\lambda_k$ будут являться собственными значениями. Решение данного уравнения будет найдено численными методами.

$$\lambda_k \in R,\ k\in N$$

Пусть $A_k=1$, тогда $B_k=-\frac{9}{\lambda_k}$, $k\in N$.

$$X_k(x)=\cos\lambda_k x-\frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x$$

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\lambda_k x-\frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k''(t)\left(\cos\lambda_k x-\frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\left(-\lambda_k^2\cos\lambda_k x+9\lambda_k\sin\lambda_k x\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(\cos\lambda_k x-\frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right).$$

$$f_k=\frac{\int_0^9\left(2t-x^2+\frac{e^t}{80}x-\frac{9e^t}{80}\right)\left(\cos\lambda_k x-\frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k\right.}{\int_0^9\left(\cos\lambda_k x-\frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right)^2dx}$$

Воспользуемся Wolfram Mathematica для вычисления данного интеграла:

$$f_k = \frac{80(-18+(e^t-18t)\lambda^2)+(1440+(e^t-720(2t-83))\lambda_k^2)\cos(9\lambda)}{20\lambda_k(18\lambda_k(80+\lambda_k^2+\cos(18\lambda_k))+(\lambda_k^2-81)\sin(18\lambda_k))} +$$

$$+ \frac{\lambda_k(-9e^t+80(164+(2t-81)\lambda_k^2))\sin(9\lambda_k)}{20\lambda_k(18\lambda_k(80+\lambda_k^2+\cos(18\lambda_k))+(\lambda_k^2-81)\sin(18\lambda_k))}$$

$$T_k''(t)+\lambda_k^2 T_k(t) = f_k$$

Решением этого уравнения будет

$$T_k(t) = A\cos\lambda_k t + B\sin\lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\left(\cos\lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right) = \sin x +$$

$$+ \frac{x}{80} - \frac{9}{80} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\left(\cos\lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right)$$

$$\varphi_k = \frac{\int_0^9 \left(\sin x + \frac{x}{80} - \frac{9}{80}\right)\left(\cos\lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right)dx}{\int_0^9 \left(\cos\lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\right)^2 dx}$$

Данный интеграл вычислим при помощи Wolfram Mathematica...

$\varphi_k \in \mathbb{R}$; $T_k(0) = \varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$

Аналогично повторяем для

$T_k'(0) = \psi_k$,

$$\psi_k = \frac{\int_0^9 \left(\cos x + \frac{x}{80} - \frac{9}{80}\right)\left(\cos \lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k} \sin \lambda_k x\right) dx}{\int_0^9 \left(\cos \lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k} \sin \lambda_k x\right)^2 dx}.$$

$\psi_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Расчёты произведём в Wolfram.

Подставляя начальные условия в общее решение, получим:

$$T_k(0) = A + \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k;\ A = \varphi_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2},\ k \in \mathbb{N}$$

$$T_k'(0) = \lambda_k B = \psi_k \Rightarrow B = \frac{\psi_k}{\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}$$

A и B посчитаем в Wolfram.

$$\Rightarrow u(x,t) = -\frac{e^t}{80} x + \frac{9e^t}{80} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A \cos \lambda_k t + B \sin \lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2}\right) \cdot \left(\cos \lambda_k x - \frac{9}{\lambda_k} \sin \lambda_k x\right)$$