📖

Конспект(Д/С Будник)

▼ Зачет

2 контрольные, 1 коллоквиум + сдать зачет(лабораторные). Сдавать заранее - зачет автоматом, если приносить отчеты на зачет, то будет решаться на самом зачете. Одна пара лекция, вторая - лабораторная работа, проходят лабораторные по докладу, каждый должен выйти к доске и раскрыть эту тему, доложить. На экзамене задач не будет, будет два вопроса, коллоквиум теоретический, на него отводится одна пара(иногда его оценку можно зачесть за один из вопросов на экзамене).

Методы решения задач со свободными границами.

Введение

Пройдем все этапы мат. моделирования. Начиная от физической постановки до анализа результатов(можно найти схему в первом параграфе конспекта по ВМА). Некоторые вещи буду даваться с нуля, потому что раньше мы их не брали из-за разницы в программах обучения.

Вычислительный эксперимент - схема из первого параграфа ВМА. Корректировать можем все, но чаще всего это численный метод или реализация.

Предмет изучения - задачи со свободными границами. Что это такое поймем по походу прохождения материала.

- Параграф 2 - методы решения задач.
- Параграф 3 - методы решения аналитически.
- Параграф 4- посторенние расчетных сеток.

Задача стационарная - решение не зависит от времени.

Определение: Задача со свободными(неизвестными) границами - новый практически важный класс нелинейных задач математической физики. В этом случае граница области решения неизвестны и определяются в процессе самого решения.

Три типа задач со свободными границами:

- Задача Стефана(задача о фазовом переходе)
- Течение жидкости в канале с неровным дном
- Задача о форме свободной поверхности жидкости

Отличительная особенность - их существенная нелинейности, неизвестная граница определяется по неизвестному решению и наоборот, решение ищется в неизвестной заранее области.

Современные методы решения задач - можно разделить на три класса:

- Методы основанные на формулировке задачи в виде вариационного неравенства с дальнейшей минимизацией соответствующих функционалов.
- Методы граничных и конечных элементов.
- Конечно разностные методы на регулярных сетках.

Будем рассматривать только 3 класс данных методов.

1 Параграф. Формулировка характерных задач со свободными границами.

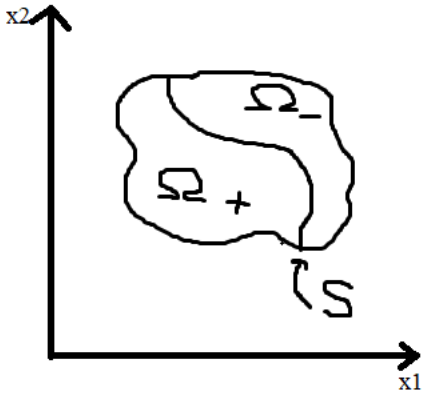
Пункт 1.1. Задача Стефана

Нестационарная задача Стефана. В задачах этого типа рассматривается тепловой процесс при наличии фазового перехода. Остановимся на постановке двухфазной двумерной задачи. Пусть область, обозначим Ω, состоит из двух частей, Ω_+, это множество точек где температура тела $u(x,t)$ больше температуры плавления u^*,

$[x = (x_1, x_2)] > u^*$. Ω_-, область из омега, для которой температура тела меньше температуры плавления $u(x,t) < u^*$. Ω_+ — жидкая фаза, Ω_- — твердая фаза.

$S = S(t)$ — **неизвестная граница фазового перехода.** Где температура равна, температуре плавления $u(x,t) = u^*$.

Выглядит это так:



Рассматриваем симметричный кусок льда, для упрощения задачи. В сечении смотрим как ведет себя фазовый переход. Сформулируем математическую постановку задачи:

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(u)\nabla u), x \in \Omega, t > 0 \quad (1)$$

где:

- ρ — плотность
- c — теплоемкость
- k — теплопроводность

Заметим, что при $u_0 = u^*$, уравнения разрывны. На границе области заданы условия первого рода:

$$u(x,t) = u_1(x,t), x \in \partial\Omega, t > 0 \quad (2)$$

$$u(x,t) = u^*, x \in S, t > 0 \quad (3)$$

Условия сопряжения:

$$\text{a}[u] = 0 \quad (4)$$

$$[k(u)\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}] = \lambda(\overrightarrow{v_0} \cdot \overrightarrow{N}) \quad (5)$$

где:

- λ — скрытая теплота фазового перехода
- $\overrightarrow{N}$ — единичный вектор нормали к S, внешний по отношению к Ω_+
- v_0 — скорость движения границы S

Под символом [ ] понимается скачок при переходе границы раздела фаз. Если [f] — скачок при переходе, значит, это разница между $[f] = f_+(x) - f_-(x), x \in S$.

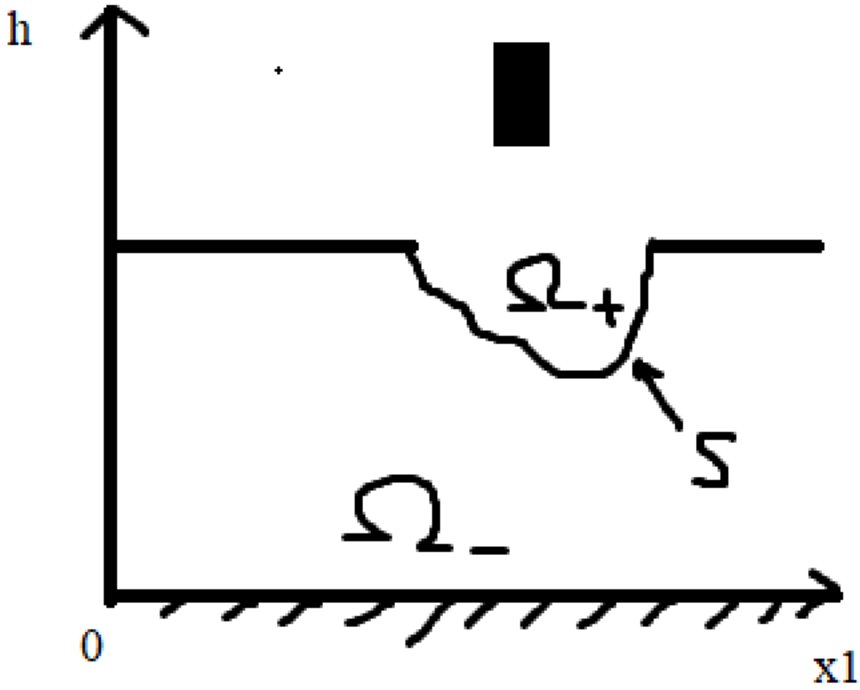
$f_\pm(x) = \lim_{x \to x \in S} f(x')$.

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \quad (6)$$

Таким образом уравнения 1 — 5 определяют нестационарную двухфазную задачу Стефана.

Квазистационарная задача Стефана. В задачах этого типа рассматривается тепловой процесс в неограниченной области Ω причем граница расплавленной области S либо неподвижна, либо движется с постоянно скоростью(v_0).

Более конкретно рассмотрим задачу Сварки. Над бесконечной плоской пластиной толщиной h движется со скорость v_0 источник тепла, мощности которого достаточно, чтобы проплавить часть пластины. В системе координат движущейся с источником тепла граница фазового перехода S неподвижна.



В квазистационарной постановке будет иметь следующий вид:

$$\rho(u)c(u)\overrightarrow{v_0}\cdot\nabla)u = \nabla(k(u)\nabla u), x \in \Omega$$

На верхней границе задается тепловой поток:

$$k(u)\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}} = Q(x), x_2 = h$$

На нижней части пластины ставим простейшее условие, что температура постоянна $u(x) = u_0, x_2 = 0$

$$[u] = 0$$

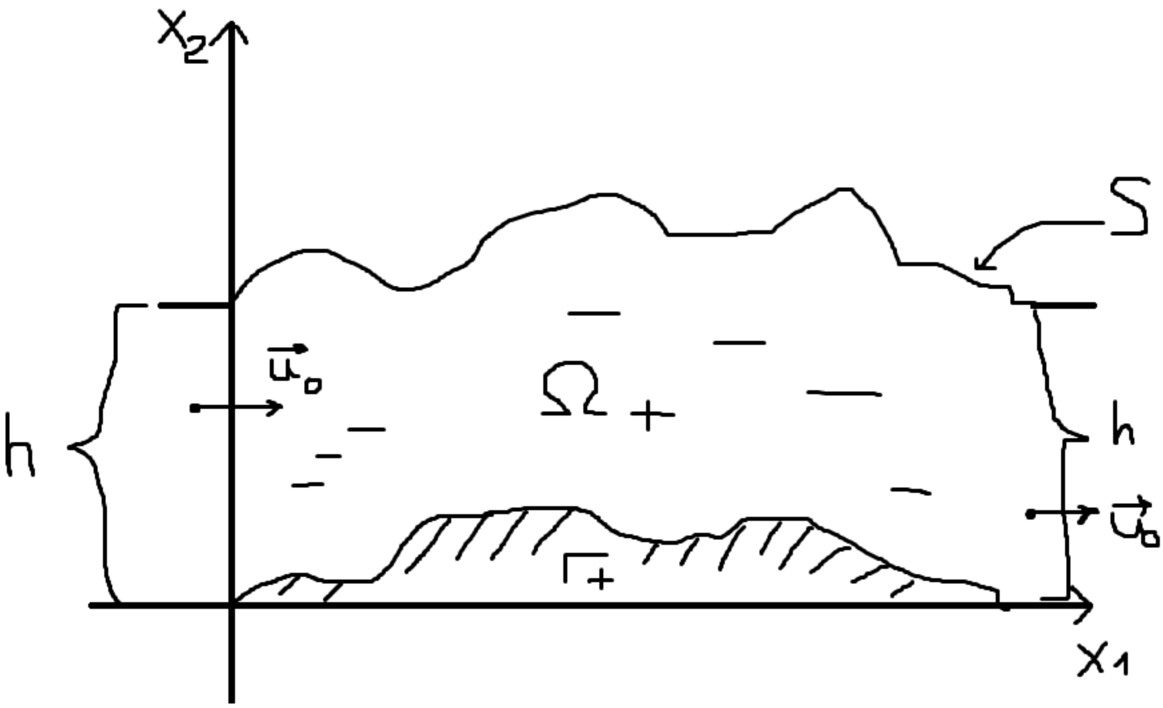
$$[k(u)\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}] = \lambda(\overrightarrow{v_0}\cdot\overrightarrow{N})$$

Уравнения 6 — 9 определяют квазистационарную задачу Стефана. Эта задача описывает и другие процессы расплава и затвердевания: зонная плавка, непрерывная разливка стали.

Пункт 1.2. Задачи идеальной гидродинамики(@February 16, 2024).

Жидкость рассматривается как сплошная среда и математическое описание состояния движущейся жидкость осуществляется с помощь функций $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ — **скорость**, $p(x_1, x_2, x_3, t)$ — **давление**, $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ — **плотность**. Рассмотрим задачи для идеальной несжимаемой жидкости. Под **идеальной жидкость** понимается такая сплошна среда для которой не учитываются процессы вязкости и теплопроводности между ее участками. Другими словами, для модели идеальной жидкости не существенны процессы теплопроводности и вязкости. **Не сжимаемость** означает, что плотность жидкости везде постоянна.

Рассмотрим задачу о двумерном течении идеальной несжимаемой жидкости в канале с неровным дном:



От x_3 не зависит. Если дно будет ровное, то свободная поверхность будет ровной, иначе задача тривиальная. Для движения должен быть перепад скоростей(давлений). Если течение установившееся, то можно избавиться от времени в задаче, тогда нужно будет найти распределение скоростей, а плотность — $const$.

- Твердая граница — Γ_+
- Свободная граница — S
- Жидкость — Ω_+

Уравнения движения(Эйлера):

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

— уравнение неразрывности

$$(\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u} = -\nabla p$$

— закон сохранения количества движения

- $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ — скорость
- p — давление

К уравнениям 10 и 11 необходимо добавить граничные условия. Для того чтобы сформулировать математическую задачу, переформулируем задачу в другим переменных, называемых — **функция тока-завихренность**. Вводим функцию $\psi(\overrightarrow{x})$ — **функции тока**.

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Уравнение 10 для этой функции будет выполняться автоматически. Вторая переменная это **функция завихренности** — $\omega(\overrightarrow{x})$.

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Линии уровня данных функция — траектория движения жидкости. Мы будем сводить систему из трех уравнений к одному. Из последних условий можно утверждать, что:

$$\Delta \psi = -\omega$$

Соотношением между функцией тока и завихренностью определяется уравнением 12. Сейчас распишем 11 покоординатно:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$$

Поскольку мы ввели функции, зависящие от
u, то мы можем исключить переменную, для этого первое уравнение дифференцируем по $\frac{\partial}{\partial x_2}$ и второе по $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

В итоге вместе систему будем иметь одно уравнение:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0$$

Перепишем его в неявном виде: $\omega = \omega(\psi)$. Теперь подставим в 12, тогда 12 примет вид:

$$\Delta \psi = -\omega(\psi), x \in \Omega_+$$

Предполагается, что $\omega(\psi)$ — известная функция. В случае безвихревого течения $\omega = 0$. Сформулировали в виде уравнений Лапласа:

$$\Delta \psi = 0, x \in \Omega_+$$

Искомая функция — **функция тока(ψ)**. Нам осталось рассмотреть граничные условия, чтобы замкнуть задачу. Предположим, что жидкость движется слева направо, и на входе, и на выходе канала дно ровное и его высота — h. Тогда получается что $-\infty$ и $+\infty$ мы можем указать граничные условия. На границе канала:

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u_0}, x_1 = \pm\infty, x_2 \in (0, h)$$

$\overrightarrow{u_0} = (u_0, 0)$ — скорость.

Теперь учитывая связь между функциями u и ψ, тогда можем записать условие для ψ:

$$\psi(\overrightarrow{x}) = u_0 x_2 + const, x = \pm\infty, x_2 \in (0, h)$$

Одно и то же условия записанное для разных функций. Теперь надо определить граничные условия на твердой(нижней) границе, твердость означается, что **жидкость не может протечь** или **изменить своим течением границу.** Условие непроницаемости**:**

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0, \overrightarrow{x} \in \Gamma_+$$

где $\overrightarrow{n}$ — вектор нормали, внешний к Γ_+

Для того, чтобы выполнилось 17:

$$\psi = const, \overrightarrow{x} \in \Gamma_+$$

В формулах 16 и 18 для постоянных для простоты можно взять **нулевое значение**. Осталось поставить условие на верхней границе. Условия не протекания на свободной границе, то есть условие 17 имеет следующий вид:

$$\psi = u_0 h, \overrightarrow{x} \in S$$

S нам заранее не известно, так что нужно дополнительное условие. Дополнительным условием будет использоваться тот факт, что на линии тока постоянное значение имеет интеграл Бернулли, он связывает между собой характеристики контактирующих сред. Тогда для закона сохранения границы, справедливо следующее:

$$p_0 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) = \rho g x_2 = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 + \rho g h$$

Эти два равенства обеспечивают наличие свободной границы, которая имеет определенную форму. С учетом 19 мы можем последнее уравнение переписать в следующем виде:

$$(\frac{\partial\psi}{\partial n})^2 = |\nabla\psi|^2 = u_0^2 + 2\rho g(h - x_2), \overrightarrow{x} \in S$$

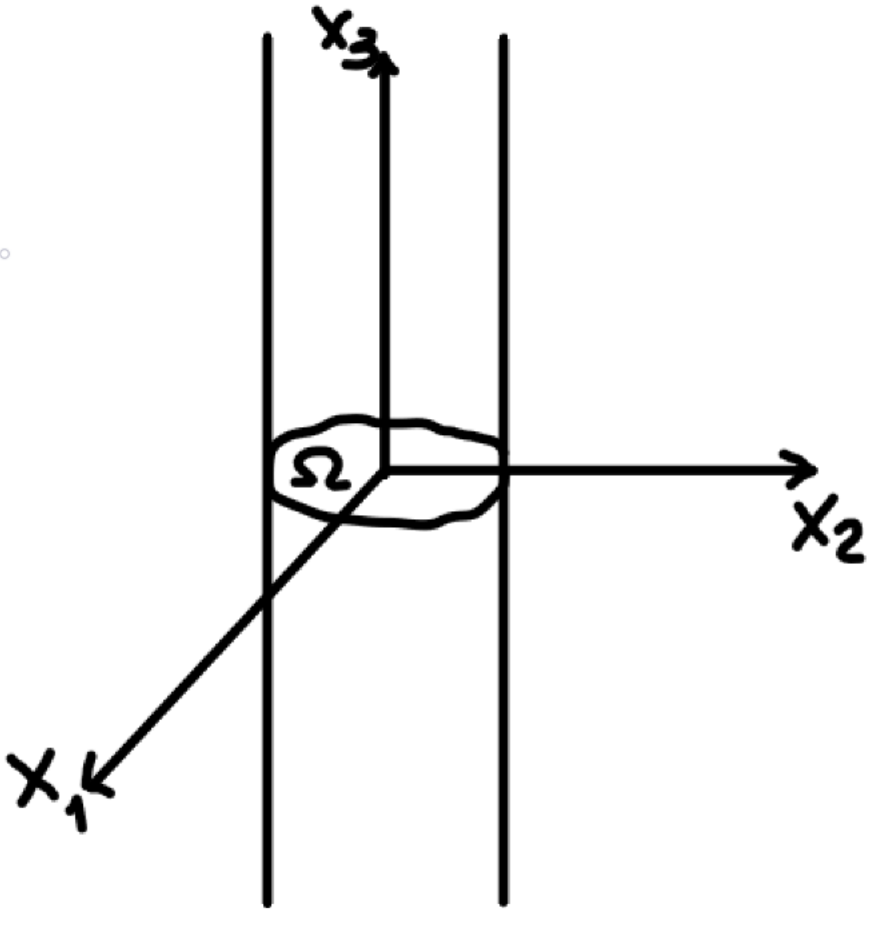
В итоге мы пришли к задаче со свободной границе, определяемой следующими уравнениями:

- на входе — 14^*
- на выходе — 16
- на твердом дне — 18
- на свободной границе — 19-20

Это постановка задачи в плоском канале с неровным дном. Область определяется из решения, аналогично ставятся другие задачи, например: обтекании плавающего тела или погруженного в воду. Можно также ставить похожую задачу с газом, например: расчет тяги, которая возникает при сгорании топлива.

Пункт 1.3. Упругопластическое кручение цилиндрических стержней.

Рассмотрим однородный цилиндрический стержень с поперечным сечением омега, который подвергается равномерному кручению.



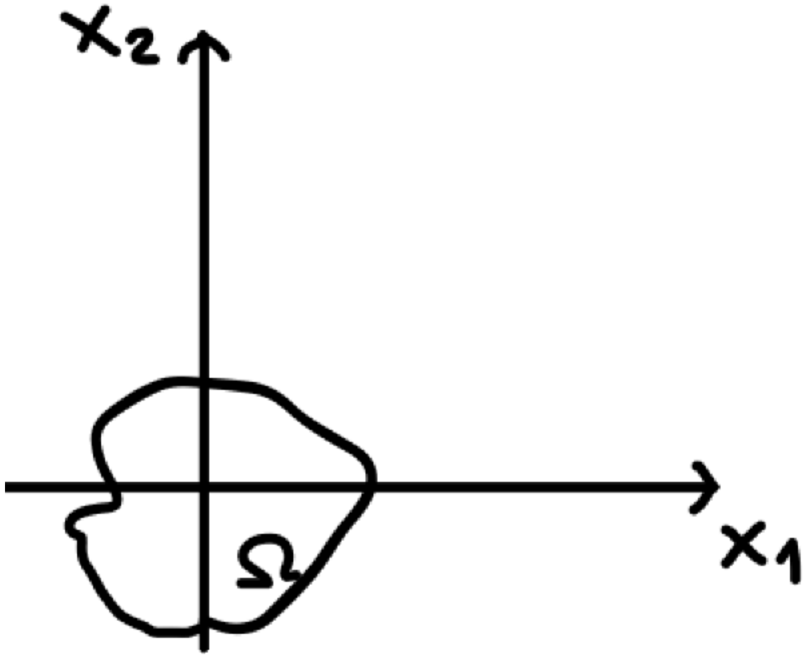
Ось симметрии - x_3. Мы предполагаем, что задан угол $\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial x_3}$ — **угол закрутки на единицу длинны стержня**. Возникают пластические или упругие деформации. Формулируется она для функция, которая является функцией напряжения. Для формулировки уравнений используется информация о напряжениях возникающих в материале стержня. Для компонент тензорных напряжений справедливо представление

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = 0$$

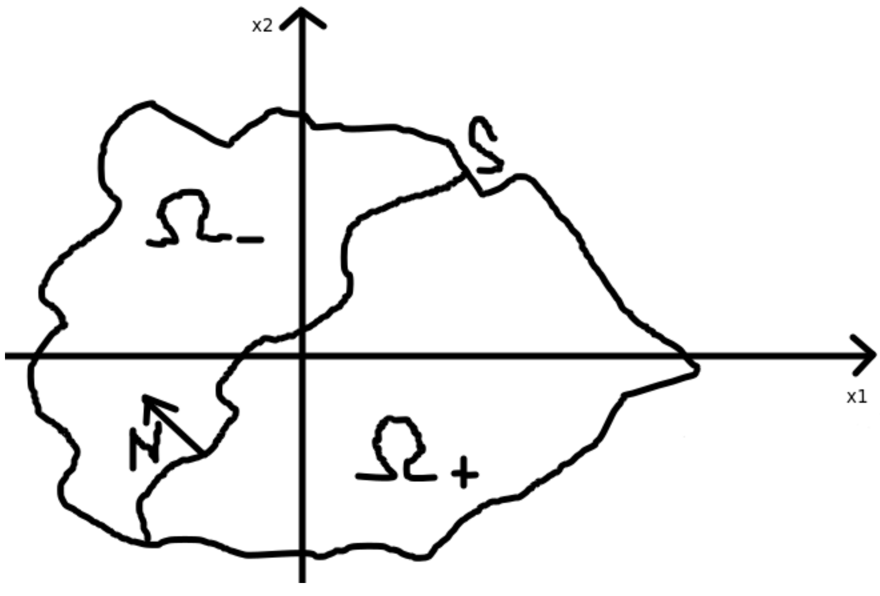
$$\tau_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \tau_{23} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

где $u = u(\overline{x})$ — искомая функция напряжения.

Можем рассматривать нашу задачу в области омега на плоскости x_1, x_2 и записать задачу в этой области.



@February 23, 2024



В этой области мы будем искать значения напряжение, неизвестная функция — $u(x_1, x_2)$. Эта область будет разбита на две — Ω_+ (область упругих деформаций), Ω_- (область пластических деформаций) S — граница раздела. В области упругих деформаций справедливо:

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} = -2G\alpha, x \in \Omega_+$$

G — модуль сдвига материала стержня.

В области пластических деформаций выполняется условие пластичности:

$$\tau_{13}^2 + \tau_{13}^2 = k^2, x \in \Omega_-$$

С учетом приведённых выражений компонент тензора напряжение τ_{13}, τ_{23} вместо (1) и (2) получим систему уравнений вида:

$$\Delta u = -2G\alpha, x \in \Omega_+$$

$$(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 = k^2, x \in \Omega_-$$

На границе $\Omega = \Omega_+ \cup S \cup \Omega_-$.

Неизвестная граница S делит областьΩ на две под области и известно, что области в Ω_+: $|\nabla u|^2 < k^2$, как только сравняется, мы переходим в область пластической деформации, следовательно, признаком в какой области мы находим, мы всегда можем проверить эту величину. На границе ставится условие вида:

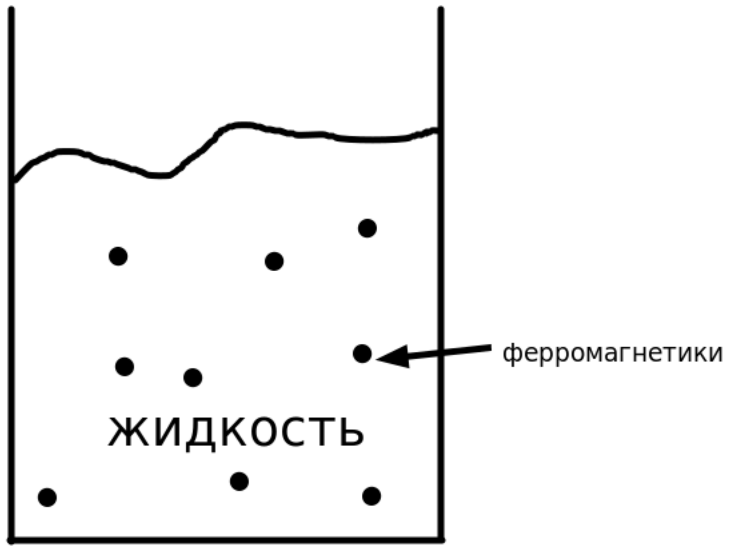
$$[u] = 0$$

$$[\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}] = 0, x \in S$$

Квадратные скобки — скачок. Нормально вектор из Ω_+ направленный на Ω_-. Задача 23 — 26 — задача для упругопластического кручения стержней.

Пункт 1.4. Задачи с уравнениями для свободной границы

Будем рассматривать задачи феррогидростатики. В которых изучается форма свободной поверхности магнитной жидкости в состоянии равновесия. Должны также учитывать устойчивость этого состояния относительно малого возмущения. **Магнитная жидкость** — жидкие среды, представляющие собой коллоидные растворы высоко дисперсных ферромагнетиков в жидкостях-носителях.



Под **высоко дисперсным** понимается их(ферромагнетиков) малая величина. **Коллоидный раствор** — все частицы ферромагнетика распределены по всему объему жидкости и из-за этой малости участвуют в броуновском движении, это величина распределена коллоидным образом по всему объему жидкости-носителя.

В рамках этой теории, которая появилась сформулируем задачу

Пункт 1.4.1. Формулировка задач феррогидростатики

Воспользуемся квазистационарной моделью **Розенцвейга - Нойрингера**. В рамках этой модели магнитная жидкость рассматривается как **не электропроводная однокомпонентная, однофазная жидкость намагниченность которой при любых процессах является равновесной.** Скорость и намагниченность — две величины, которые влияют на поведение жидкости, они изменяются одновременно.

Уравнения Навье-Стокса для изотермической магнитной жидкости имеет следующий вид:

$$\rho\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g} + \mu_0(\overrightarrow{M}\nabla)\overrightarrow{H}$$

Условие не сжимаемости:

$$\nabla\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

- v — скорость
- p — давление
- ρ — плотность
- η — коэффициент динамической вязкости
- μ_0 — магнитная проницаемость вакуума($const$)
- H — напряженность магнитного поля
- M — магнитный момент единицы объема жидкости

В рамках теории максвелла мы предполагаем, что M и H коллинеарные(совпадают с точностью до $const$) в общем случае:

$$\overrightarrow{M} = \frac{M}{H}\overrightarrow{H}$$

$$M = M(H)$$

Поскольку мы рассматриваем задачи статики предположим, что $v = 0$ и в пределах предположения коллинеарности векторов:
$(\overrightarrow{M}\nabla)\overrightarrow{H} = M\nabla H$
Можем записать
основное уравнение феррогидростатики в гравитационном и магнитном полях:

$$\nabla p = \rho\overrightarrow{g} + \mu_0 M\nabla H$$

Напряженность магнитного поля определяется уравнением максвелла, которое в стационарном случае имеет следующий вид:

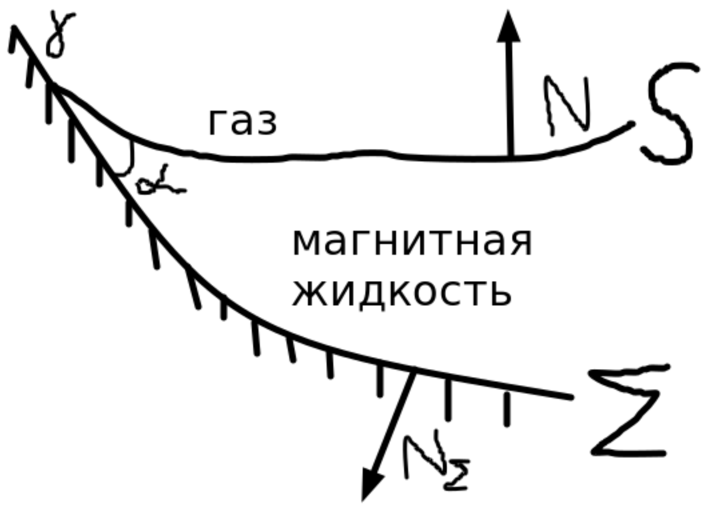
$$\nabla\overrightarrow{B} = 0$$

$$\nabla\times\overrightarrow{H} = 0$$

$$\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{H}) = \mu_0(1 + \frac{M}{H})\overrightarrow{H} = \mu_0(1 + \psi_s)\overrightarrow{H} = \mu_s\overrightarrow{H}$$

- $\psi_s = \frac{M}{H}$ — магнитная восприимчивость
- $\mu_s = \mu_0(1 + \psi_s)$ — магнитная проницаемость

таким образом 27 — 29 составляют замкнутую систему уравнений феррогидростатики. Неизвестно: давление, H, который должен удовлетворять 29. К уравнению необходимо добавить граничные условия, для этого необходимо определиться с объектом.



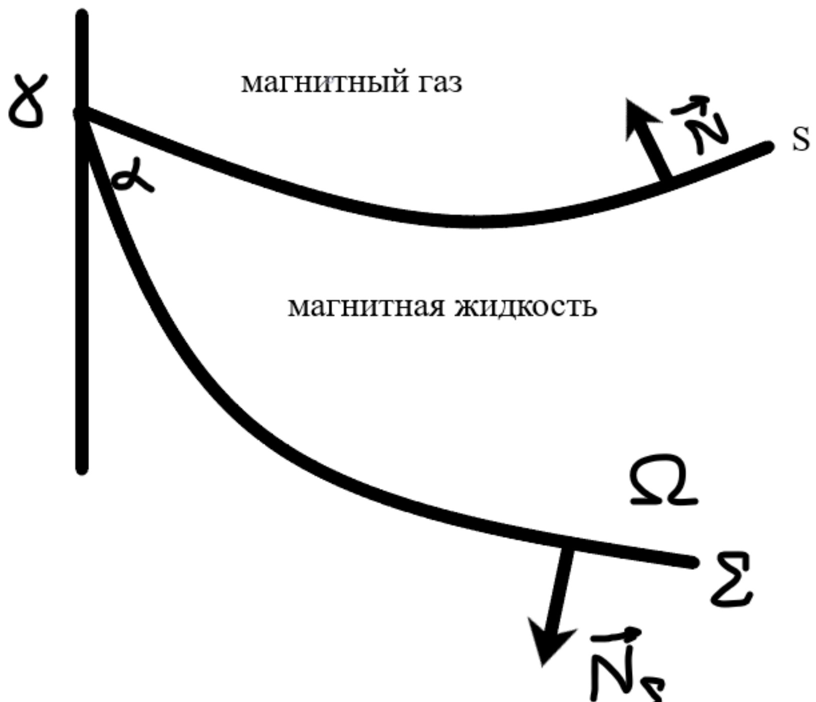
Для формулировки граничных условий предположим, что магнитная жидкость…

Плотностью газа пренебрегаем.

- Σ — стенка сосуда
- γ — линия контакта трех сред
- α — двугранный угол контакта жидкости к стенке.

@March 1, 2024

Теперь для этой системы поставим граничные условия. Теперь мы будем предполагать, что жидкость в сосуде магнитная, но газ теперь обладает магнитным моментом(магнитный газ).



Обобщенное условие Лапласа для магнитной жидкости:

- M — намагниченность жидкости

- M_1 — намагниченность газа
- p_1 — давление жидкости
- p — давление газа

после μ_0 скачок нормали намагниченности жидкости и газа

Граничные условия задаются:

$$H_{1\tau} = H_\tau;\ B_{1n} = B_n$$

- $H_{1\tau}$ — напряженность магнитного поля газа
- H_τ — напряженность магнитного поля жидкости

С τ в индексе — тангенсальное, с n — нормальное.

Нормальные и тангенсальные должны совпадать. Учитывая связь между векторам индукции и напряженности магнитного поля, поэтому второе из условий перепишем в терминах напряженности:

$$H_{1n} - H_n = M_n - M_{1n}$$

Это означает, что тангенсальная составляющая вектора нормали непрерывна, а нормальная составляющая разрывна.

На линии контакта гамма условия:

$$cos(\alpha) = -\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n_\Sigma}$$

Уравнение 28 можно записать в виде:

$p = -\rho\Pi + const$

- Π — потенциал поля массовых сил

Подставим это в обобщенное условие Лапласа:

$$\sigma(k_1 + k_2) = \rho\Pi + \frac{1}{2}\mu_0((\overline{M_1} \cdot \overline{n})^2 - (\overline{M} \cdot \overline{n})^2) + C$$

где С — константа, подлежащая определению. Для замыкания задачи задается какое-либо геометрическое условие, дополнительное условие, которое касается нашей задачи, например, мы знаем объем жидкости, который можно определить с помощью:

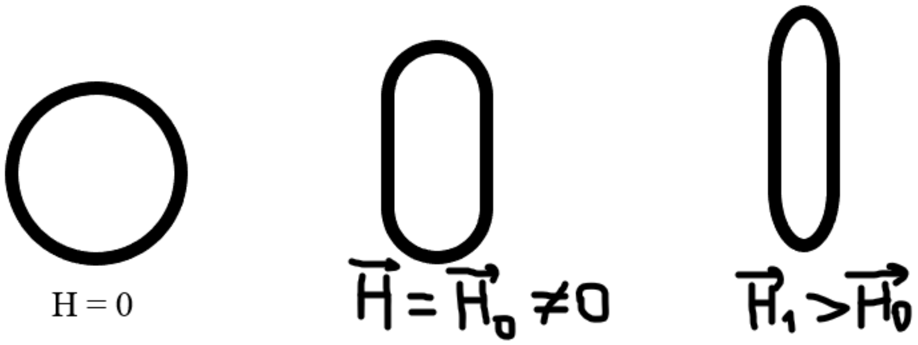
$v = \int_\Omega d\Omega$

Таким образом постановка задачи включается в себя ДУ(33) и 29(уравнение Максвелла).

Уравнение 33 описывается поверхность S, а уравнение 29 описывает распределение магнитного поля внутри и вне жидкости, для них имеются краевые условия 31 для 33 и 31 для поля, при переходе через границу раздела. чтобы задача была определена корректно задаются условия на объем 34.

Пункт 1.4.2 Постановка задачи об оси симметричной форме капли магнитной жидкости в однородном магнитном поле

Пусть изолированная невесомая капля магнитной жидкости помещена в однородное магнитное поле с величиной напряженности H_0 и окружена неподвижный немагнитный газом. Мы начинаем действовать на нее магнитным полем, но с электрическими полями она не воздействует. Интенсивность магнитного поля определяется его напряженностью. Если же $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H_0} \neq 0$, то будут возникать деформации под воздействием этого поля увеличивается магнитный момент жидкости $M(H)$.

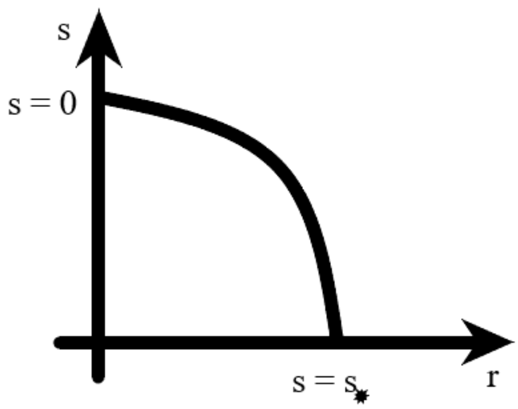


Надо теперь поставить задачу как мы будем искать новую форму в зависимости от поля. Надо выбрать систему координат и какими функциями мы будем представлять свободную границу. **Будем формулировать задачу в цилиндрических координатах с учетом симметрии.** Совместим ось z с направлением магнитного поля. Ось r(начало координат) поместим в середину капли, то симметрия не только осевая, но и относительно оси z = 0, тогда можно рассматривать только четверть капли.

Область: $0 \leq r, z, < \infty$

Теперь должны записать уравнение 33, которое определяет баланс сил. В данном случае мы будем искать форму капли в параметрическом виде: $z(s), r(s), 0 \leq s \leq s_*$

Где s — параметр, мы возьмем в качестве него длину дуги отсчитываемую от оси симметрии .



Для описания поставленной задачи будем рассматривать параметрическую форму задания кривой, тогда уравнение 33 будет иметь вид:

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{rr'}(rz')'$$

где:

- $' = \frac{d}{ds}$

Потенциал поля массовых сил $\Pi(r, z)$**:**

$$\Pi(r, z) = \frac{\mu_0}{\rho} \int_0^H M(H) dH$$

$$M(H) = \chi H$$

где:

- $\chi H - const$

В итоге, сделав все подстановки, мы вместо 33 получим ДУ:

$$\frac{1}{rr'}(rz')' = -\frac{\mu_0}{\sigma}\int_0^H M(H)dH - \frac{\mu_0}{2\sigma}(\overrightarrow{M}\overrightarrow{n})^2$$

Теперь нам нужно записать в виде ДУ в которое входят функции от r и z, поэтому постараемся преобразовать правую часть:

$$\overrightarrow{M} = (M_r, M_z)$$

Также учтем, что:

$M_r = \frac{M}{H}H_r$

$M_z = \frac{M}{H}H_z$

Учитывая это выразим вектор нормали к форме:

$\overrightarrow{n} = (-z', r')$

Если поставим в $\frac{1}{rr'}(rz')' = -\frac{\mu_0}{\sigma}\int_0^H M(H)dH - \frac{\mu_0}{2\sigma}(\overrightarrow{M}\overrightarrow{n})^2,\ \chi H$, тогда сможем взять интеграл и получим:

$$\frac{1}{rr'}(rz')' = -\frac{\mu_0}{2\sigma}\chi H^2 - -\frac{\mu_0}{2\sigma}\chi^2(-z'H_r + r'H_z) + C$$

где $0 \le s \le s_*$.

Теперь у нас есть уравнение в котором неизвестными являются форма и поле. То есть мы получили уравнение для формы, где в правую часть входят компоненты напряженности, они как раз и влияют на форму. Поскольку форма описывается системой функций, то нам нужно иметь систему уравнений относительно этих функций.

Используя $z'^2 + r'^2 = 1$, можем получить r, получаем r'' и выражаем его $r'' = \frac{-z''z'}{r'}$, а z'', можно вычислить из 35 и мы получим два уравнения для уравнения формы. Запишем второе уравнения с учетом равенства (14). Получим

$$r'' = -z'(-\frac{\mu_0}{2\sigma}\chi H^2 - \frac{\mu_0}{2\sigma}\chi^2(-z'H_r + r'H_z)^2 + C - \frac{z'}{r})$$

Запишем для системы 35-36 граничные условия, учитывая симметрию задачи:

$$z'(0) = 0; r'(0) = 1; r(0) = 0$$

$$z'(s_0) = -1; r'(s_*) = 0; z(s_*) = 0$$

Эти условия — условия Дюпре-Юнга.

$$v = 4\pi\int_0^{s_*} zrr'ds$$

Это формула вычисления объема капли. Если бы капля была в невесомости, то H везде была бы равна 0, но у нас действует внешнее поле, сейчас надо записать задачу для магнитного поля, тогда вся задача соберется в одно.

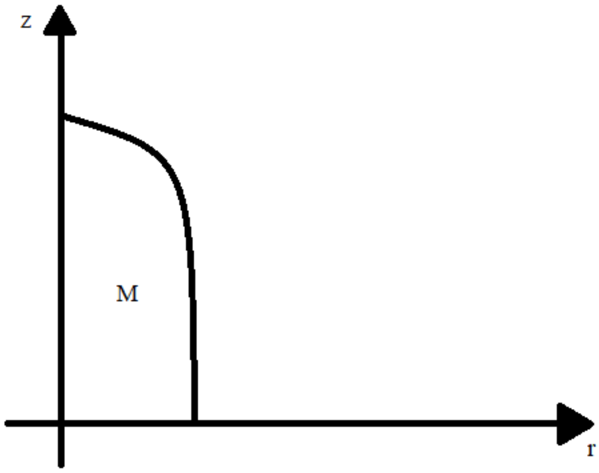
@March 15, 2024

Для описания магнитного поля введем скалярный потенциал $u(r, z)$, так что $\overrightarrow{H} = \nabla u\ H_r = \frac{\partial u}{\partial r}, H_z = \frac{\partial u}{\partial z}$. Вместо системы 29 получим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r(1+\frac{M}{H})\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}((1+\frac{M}{H})\frac{\partial u}{\partial z}) = 0$$

$$0 \le z < \infty$$

Это ни что иное как уравнение Лапласа, записанное в сферических координатах. При чем, внутри капли $M(H) = \chi H,$ а вне капли $M = 0$.



Сформулируем граничные условия для потенциала магнитного поля (u), условия (31) — условия на равенство тангенсальных и нормальной составляющих индукции, можно записать их для функции u в следующем виде:

$$u = u_1$$

$$(1+\chi)(-z'\frac{\partial u}{\partial r} + r'\frac{\partial u}{\partial z}) = -z'\frac{\partial u_1}{r} + r'\frac{\partial u_1}{z}; r, z \in S$$

Теперь запишем оставшиеся граничные условия:

$\frac{\partial u(0,z)}{\partial n} = 0$ — на ось z

$u(r, 0) = 0$ — на оси r

$\uparrow \overrightarrow{H_0} = (0, H_0)$ — на ∞

В итого сформулировали постановку задачи о капле магнитной жидкости в магнитном поле. Уравнения 35 - 41 составляют математическую модель рассматриваемой задачи. Уравнения 35 - 36 определяются функции $z(S), r(S)$, граничные условия — 37 - 38. В этих пунктах мы рассмотрели 4 типа задач.

Пункт 1.5 Классификация задач со свободными границами

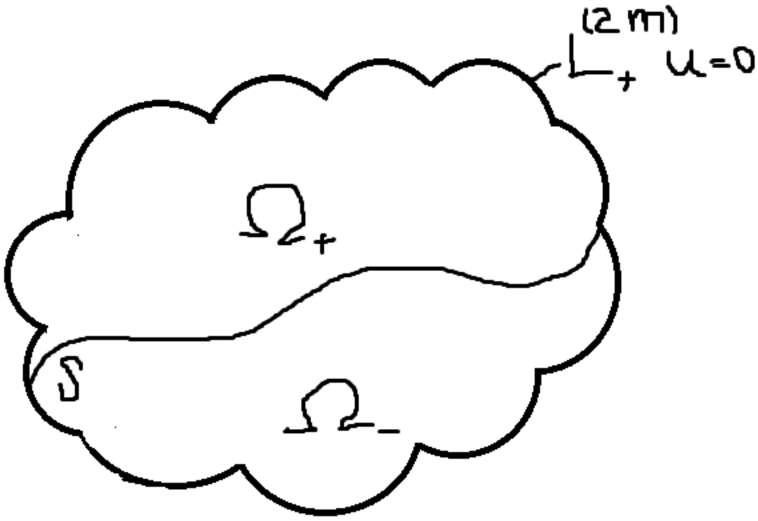
Пусть свободная(неизвестная) граница S разбивает область Ω на две подобласти Ω_+ и Ω_-. В каждой из этих подобластей решение задачи удовлетворяет некоторому ДУ. Положим для определенности, что в Ω_+ удовлетворяет $L_+^{(2m)} u = 0, x \in \Omega_+$. В области Ω_-— $L_-^k u = -, x \in \Omega_-$.

Главный из двух операторов L — есть тот, у которого порядок выше, мы предполагаем, что главным оператором является оператор $L_+^{(2m)}$, таким образом $k \leq 2m$. При этом мы предполагаем, что главный оператор — оператор эллиптического типа.

$L^{(2)} u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, n)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a(x, u, Dn)$ — **квазилинейный самосопряженный эллиптический оператор**. Где:

- $a_{ij} = a_{ji}$
- $x = (x_1, ..., x_n)$
- $D = D_1 D_2 D_3 .....D_n; D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Условия равномерной эллиптичности означает, что существуют такие положительные постоянные $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, что $\forall \xi_i,\ i = \overline{1, n},\ u\ \forall x \in R\ \gamma_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2$ — **условие равномерной эллиптичности оператора**, это должно выполняться.



Будем классифицировать задачи со свободной границей по порядку оператора в областях Ω_+ и Ω_-. Назовем **дефектом задачи со свободным границами** величину $\varkappa = 2m - k,\ 0 \leq \varkappa \leq 2m$, тогда задачу характеризуется порядком эллиптического оператора и дефектом $\varkappa$.

Если $k = 2m$ — то это **задача Стефана**. Вот **первый способ классификации** — по порядку операторов. В соответствии с такой классификацией задача из пункта 1.4.2 $m = 1, \varkappa = 0$. **К задачам с нулевым дефектом принадлежит и квазистационарная задача Стефана**. Если мы хотимм рассматривать не стационарную задачу, то это все обощается. Делается аналогичная классификация, только рассматриваются нестационарные уравнения: $u(x,t):\ L_+^{(2m)} u = 0,\ x \in \Omega_+$. Кроме классификации задачи по дефекту будем рассматривать особенность решения на известной нам границе. Эта характеристика описывает как себя ведет решение при переходе S. Она определяется условиями сопряжения. В общем случае$[u] = \psi_1(x),\ [\frac{\partial u}{\partial \nu}]$. [ ] — **скачок функции** при переходе из Ω_+ в Ω_-. Первое уравнение задет **скачок решение**, а второе задает **скачок производной**.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} cos(\overrightarrow{N}, x_i)$$

Где:

- $\overrightarrow{N}$ — единичная нормаль
- $cos(\overrightarrow{N}, x_i)$ — направляющий косинус

В общем случае $\frac{\partial u}{\partial \nu}$— **есть поток через** S. Если $\psi_1 = \psi_2 = 0$, то будем говорить, что такая задача относиться к классу **задач без особенностей на неизвестной границе**. Если хотя бы одна из этих функций отлична от 0 будем говорить, что такая **задача относиться к классу задач с особенность на неизвестной границе**. Завершили первый параграф.

@March 22, 2024 Параграф №2. Численные методы решения задач со свободными границами.

Все методы решения задач относятся к итерационным, в силу нелинейнойсти этих задач. В данном параграфе мы остановимся на эллиптических уранениях второго порядка

Пункт 2.1. Последовательыне приближения

Пусть **задача со свободными границами** записана в операторной форме $Au = F$, где $\text{A} = A(u)$ — оператор, действующий на u, он **не линеен**. При чем в силу разрывности коэффициентов эллипитического оператора при переходе S, оператор A— **не дифферинциуремый**. Правая часть тоже нелинейна $F = F(u)$. Общий двухслойный итерационный метод решения связывающий два приближения $u^k(x), u^{k+1}(x)$, можно записать в следующем виде: $B_{k+1}\frac{u^{k+1}(x)+u^k(x)}{\tau_{k+1}} + A(u^k)u^k(x) = F(u^k)\ , k = 1,2,3\ldots$Сходимость итерационного процесса существуенно зависит B_{k+1}, τ_{k+1}. Так как теоритически оптимальное значение параметра τ невозможно, то естественно использовать метод простых итеарций, когда $\tau_{k+1} = \tau = const$. Но если в качестве константы выбрать 1, а в качестве оператора B выбрать $B_{k+1} = A(u^k)$. Тогда формула два легко преобразуется в формулу:

$A(u^k)u^{k+1} = F(u^k)$. При выборе таких параметров мы получим простейший вариант метода, который связан с последовательными приближениями по нелинейности. В качестве примера применения рассмотрим задачу для эллиптического уравнения второго порядка с дефектом равным нулю, при наличии особенности на неизвестной границе.

$x \in \Omega;\ u(x);\ L^2u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,u^k)\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x_j}) + a(x,u^k,Du^k) = 0,\ x \in \Omega$(1

Неизвестную границу S определим из условия $S = \{x|x \in \Omega, u(x) = u^*\}$. Тогда область Ω_+ мы будем определять как те значения $x \in \Omega$ для которых $\Omega_\pm = \{x|x \in \Omega, u(x) \lesseqgtr u^*\}$. Коэффициенты исходного уравнения принимают свои значения в каждой из под областей

$a_{ij} = \begin{cases} a^+, a_{ij}^+,\ x \in \Omega_+ \\ a_-, a_{ij}^-,\ x \in \Omega_- \end{cases}$

Граничные условия: $[u] = 0,\ [\frac{\partial u}{\partial \nu}] = \psi_2(x),\ x \in S$. Если обозначим границу $\partial\Omega$, тогда $u(x) = \phi(x),\ x \in \partial\Omega$;

$u^{k+1} = \phi(x),\ \partial\Omega$.

Итерационный процесс 2-3 приминительный к этой задаче. Тогда приближение $S^k = \left\{x|x \in \Omega, u^k(x) = u^*\right\}$.Фиксирум границу на k-той итерации и в точках ставим условие: $[u^{k+1}] = 0,\ [\frac{\partial u^{k+1}}{\partial \nu}] = \psi_2(x),\ x \in S^k$. Таким образом на каждом $k+1$ итерационном шаге необходимо решать линейную задачу. Усложняет ситуацию неоднородность условий сопряжения. Самый простой способ решения данной проблемы(проблемы обработки условий сопряжения) — непосредственная аппроксимация данных условий при применении разностных методов. Начнем с одномерного случая.

Пункт 2.2. Конечно разностная аппроксимация условий сопряжения в одномерном случае.

Рассмотрим модельную задачу для одномерного уравнения теплопроводности.

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x),\ x \in (0,l)$$

- $u(x)$ — температура стержня
- $k(x) \geq k_0 > 0$ — коэффициент теплопроводности материала стержня
- $q(x)u(x)$ — мощность стоков($q > 0$) или источников($q < 0$)
- $f(x)$ — плотность распределения внешних источников($f > 0$) или стоков($f < 0$)

Это уравнение описывает процесс распределения тепла в стрежне длинной l. Если мы задаем граничные условия, то мы определяем физическое состояние системы, которые однозначно опрделяют распределение температуры:

$$u(0) = \mu_1,\ u(l) = \mu_2$$

Где: $\mu_1, \mu_2 - const$. В данном случае свободная граница, в виду одномерности случая, превращается **просто в точку**. Будем предполагать, что в некоторой внутренней точке $x = \xi,\ 0 < \xi < l)$, задаются условия сопряжения $[u] = 0,\ [k(x)u'(x)] = \psi = const,\ x = \xi$.

$[r] = r(x+0) - r(x-0)$ — **определение скачка в одномерном случае.**

Первое слагаемое в формуле — **тепловой поток**, поток терпит разрыв при переходе через точку ξ. Покажем как решать такую задачу без свободной границы и когда она присутствует. Рассмотрим множество точек $\omega_n = \left\{x_i \in [0,l],\ x_i = ih,\ i = \overline{0,N}\right\}$. Где: $h = \frac{l}{N}$.

Вместо исходной функции будем рассматривать новую функцию, которая определена только в узлах сетки. $u(x_i) \approx y(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,N}$. Теперь для нее мы будем формулировать и строить для нее разностную задачу.

$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Зафикисируем h и отбросим предел, получим приближенное значение:

$u'(x) \approx \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h}$

Если у нас есть производная, то ее можно вычислить по этой формуле. Со второй производной: $u''(x) = \frac{u'(x+h)-u'(x)}{h} = \frac{y_{i+1}-2y_i-1}{h^2}$

@March 29, 2024

Для решения задачи 4-5 мы применим подход, который позволяет свести решение ДУ к решению систем алгебраический уравнений, неизвестными в которых являются значения приближенного решения на заднном множестве точек. **Другими словами мы заменяем ДУ разностными уравнениями и ищем приближенное решение на сетке узлов.** Такой способ решения задач математической физики получил название — **метод конечных разностей(или метода сеток)**. А раздел численных методов, посвещенный этим методам — т**еории разностых схем.**

Для построения разностной схемы мы вводим равномерную сетку ω_h и сформулируем задачу для приближенного решения $y(x_i) = y_i \approx u(x_i),\ i = \overline{0, N}$. Для этого в исходном ДУ заменим дифференциальный производные разностными производными. Приведем примеры:

1. $u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} = u_{x,i} = u_x$
2. $u'(x_i) \approx \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h} = \frac{u_i-u_{i-1}}{h} = u_{\overline{x},i} = u_{\overline{x}}$
3. $u''(x_i) \approx \frac{u(x^h_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2} = u_{\overline{x}x,i} = u_{\overline{x}x}$
4. $u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{h^2} = u_{x^0,i} = u_{x^0}$
5. $(k(x_i)u'(x_i))' \approx (ku_{\overline{x}})_x = \frac{k_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - k_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{1}{h^2}\left(k_{i+1}u_{i+1} - (k_{i+1}+k_i)u_i + k_iu_{i-1}\right)$

Погрешность аппроксимаци(замены дифференциальных операторов разностными) мы определяем как некоторую величину:

1. $\psi_1(x_i) = u_{x,i} - u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} - u'(x_i) = \frac{1}{h}\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \dots - u(x_i)\right) - u'(x_i) - u'(x_i) = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(x_i) + \dots = \frac{h}{2}u''(\xi) = O(h)$
2. $\psi_2(x_i) = -\frac{h}{2}u''(x_i) +) + O(h^2) = O(h)$
3. $\psi_3(x_i) = \frac{h^2}{12}u''(x_i) + O(h^4) = O(h^2)$

Где h — **параметр сетки**, следовательно погрешность зависит от шага сетки, таким образом мы получаем, что **погрешность аппроксимации — величина первого порядка**.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f\right)$$

$$u_{\overline{x}x} = (u_{\overline{x}})_x = \frac{u_{\overline{x},i+1} - u_{\overline{x},i}}{h} = \frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_{\overline{x}x,i}$$

$$\frac{1}{2}(u_x + u_{\overline{x}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right) = \left(\frac{u_{i+1}+u_{i-1}}{2h}\right)$$

$u_{\mathring{x},i} = u_{\mathring{x}}$ — **центральная разностная производная**

Используя разностные производный можно построить разностуную схему аппроксимирующую задачу 4-5 с погрешность — $O(h^2)$

$$\begin{cases} (ay_{\overline{x}})_x - dy = -\varphi,\ x \in \omega_h \\ y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2 \end{cases}$$

a, d, φ — коэффиценты. Коэффициенты определены в узлах сетки.

$a_i = K(x_i - \frac{h}{2}),\ d_i = q(x_i),\ \varphi_i = f(x_i)$

Нам также надо определить как вычислять y_i. Для того, чтобы реализовать разностую схему нужно расписать ее в индексом виде. В итоге получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}\left(a_iy_{i-1} - (a_{i-1} + a_i + hd_i)y_i + a_{i+1}y_{i+1}\right) = -\varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = \mu_1 \\ y_N = \mu_2 \end{cases}$$

Всего $N+1$ уравнений с $N+1$ неизвестным. y — неизвестная. Система трехдиагональная, которую можно решить экономичным методом прогонки.

Запишем три формулы для реализации метода разностной прогонки:

Пусть система имеет такой вид:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1 \\ y_N = \varkappa_2 y_2 + \nu_2 \end{cases}$$

Где $\varkappa_i, \nu_i = const$ при $i = \overline{1, 2}$

Чтобы выполнять прогонки, нужно чтобы система была устойчивой:

1. $|A_i| > 0, \ |B_i| > 0, \ |C_i| \geq |A_i| + |B_i|$
2. $|\varkappa_\alpha| \leq 1, \ \alpha = 1, 2; |\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2$

То есть $\varkappa \neq 1$ одновременно.

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \alpha_1 = x_1$$

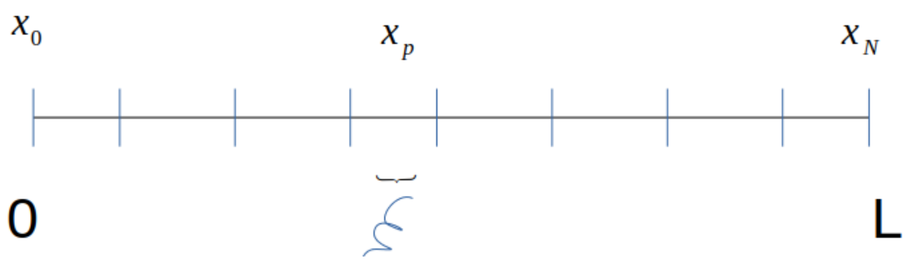
$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad i = \overline{1, N-1}, \beta_1 = \nu_1$$

$$y_N = \frac{\nu_2 + \varkappa_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \varkappa_2}$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \ldots, 0$$

@April 5, 2024

Для посторения разностной схемы для задачи 4-6 введем равномерную сетку $\overline{\omega_h} = \left\{ x_i = ih, i = \overline{o, N}, h = \frac{l}{N} \right\}$



Уравнение 4 аппроксимируется:

$$(a y_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi$$

$$y_o = \mu_1, \ y_1 = \mu_2$$

$$\psi = O(h^2); \quad a_i = k(x_{i-\frac{1}{2}}); \quad d_i = q(x_i); \quad \varphi_i = f(x_i)$$

Низвестная граница определяется уравнением 6. Теперь предположим пусть точка ξ находится в окрестности x_p узла, то есть $\xi = x_p \theta h, \quad -\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}, x_{p-\frac{1}{2}} \leq \xi < x_{p+\frac{1}{2}}$

То есть, учитывая условия сопряжения получим разностную схему следующего вида:

$$(a y_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi + \zeta \frac{\delta_{ip}}{h}$$

Где $\delta_{ip} = \begin{cases} 1, & i = p \\ 0, & i \neq p \end{cases}$ — символ Кронекера.

Наиболее наглядно продемонстрируем в двумерном случае.

Пункт 2.3. Двумерная задача сопряжения

Для простоты будем рассматривать задачу Дирихле для уравнения Лапласса в прямоугольнике $\Omega = \{ x | x = (x_1, x_2), \ 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \ \alpha = 1, 2 \}$ при наличии внутри области неизвестной границы S. Запишем задачу:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in \Omega$$

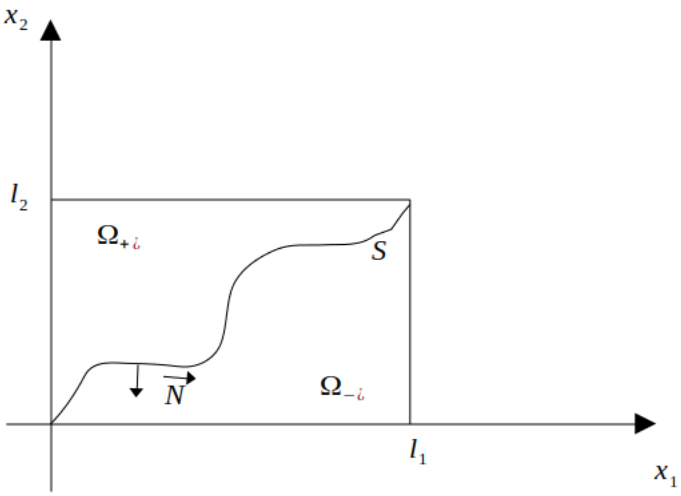
На границе поставим условие первого рода:

$$u(x) - \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$$

На неизвестной границе:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right] = \zeta(x) \quad x \in S$$

Задача будет с особенностью на неизвестно границе. Посмотрим как мы сможем учесть эту неизвестную границу, для того чтобы строить приближенные методы.

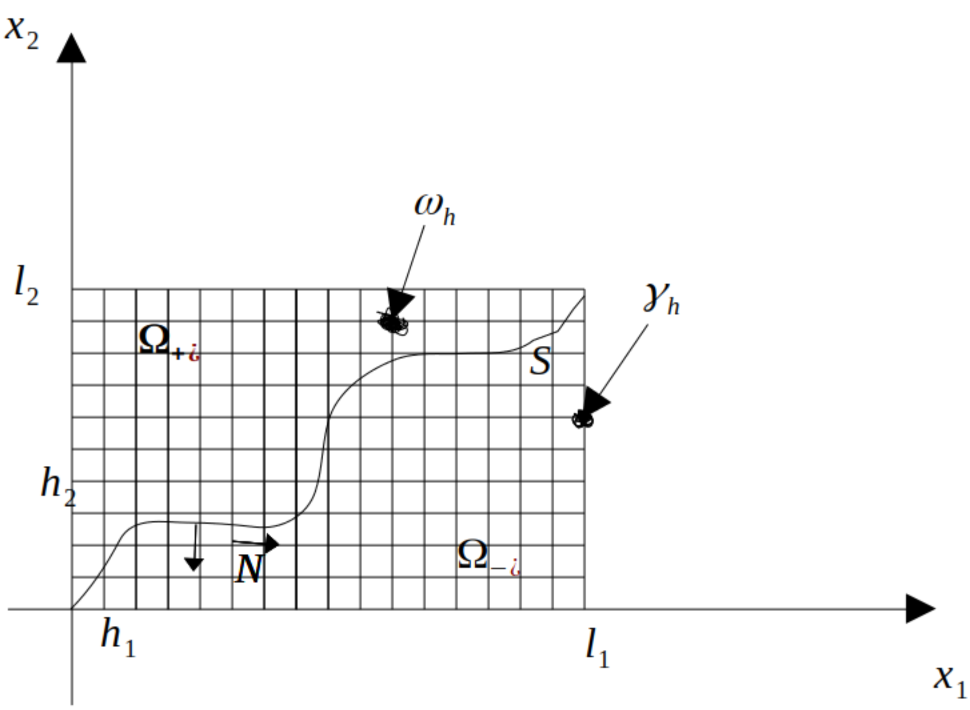


Задача относится к задачам с нулевым деффектом, и там, и там действует оператор второго порядка. Задача с оосбенностями потому что в условии (6) есть функция ζ и она не нулевая. На основании теории разностных схемы мы заменяем нашу функции на дискретном множестве точек в области. В области Ω введ равномерную по обоим напралвениям сетку, ее будем обозначать:

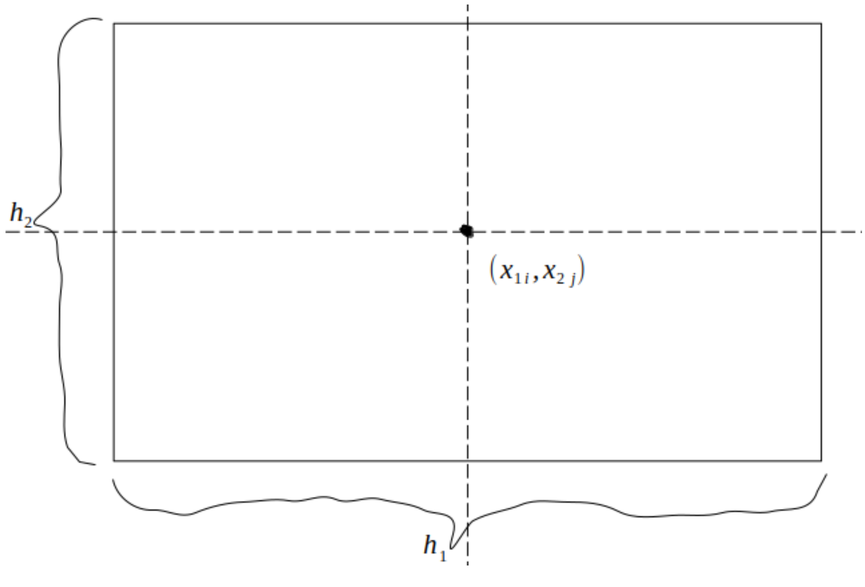
$$\overline{\omega_h} = w_h + \gamma_h = \left\{x \in \Omega | x = (x_{1i}, x_{2j}) = (ih_1, jh_2), i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, h_1 = \frac{l_1}{N_1}, h_2 = \frac{l_2}{N_2}\right\}$$

- γ_h — множество граничных узлов
- ω_h — множество внутренних узлов

Разбиваем равномерным шагом и строим координатные линии.



Сейчас покажем как можно посторить аппроксимацию, то есть как заменить уравнение его приближенными аналогами. Для построения разностной схемы использует интегро-интерполяционный метод. Запишем уравнение в интегральном виде. Выделим прямоугольник в области омега шириной h_1 и высотой h_2 в сцентром в узле $x = (x_{1i}, x_{2j})$.



И теперь по этой области проинтегрируем уравнение 9. Тогда .если граница С не проходит через этот прямоугольник. Тогда просто интегрируем уравнееи 9 по нашей области.

$$\int_{x_{1i-\frac{1}{2}}}^{x_{1i+\frac{1}{2}}} \int_{x_{2j-\frac{1}{2}}}^{x_{2j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 = 0$$

Где $x_{1i-\frac{1}{2}} = x_{1i} - \frac{h}{2}$.

Теперь преобразуем это уравнение.

$$\int_{x_{2j-\frac{1}{2}}}^{x_{2j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u(x_{1i+\frac{1}{2}}, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_{1i-\frac{1}{2}}, x_2)}{\partial x_1} \right) dx_2 + \int_{x_{1i-\frac{1}{2}}}^{x_{1i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u(x_1, x_{2j+\frac{1}{2}})}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1, x_{2j-\frac{1}{2}})}{\partial x_2} \right) dx_1 = 0$$

Вот эти интегралы мы не можем точно вычислить, их надо вычислять приближенно. Заменим подинтегральную функцию полиномом, а потом от того полинома точно вычислим интеграл, используем простейшую квадратурную формулы, то есть с минимальным количеством узлов, формулы прямоугольника, применим формулу средних прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{b+a}{2})$. Запишем уже приближенное равенство, которое будет иметь следующий вид.

$$h_2\left(\frac{\partial u(x_{1i+\frac{1}{2}}, x_{2j})}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_{1i-\frac{1}{2}}, x_{2j})}{\partial x_1}\right) + h_1\left(\frac{\partial u(x_{1i}, x_{2j+\frac{1}{2}})}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_{1i}, x_{2j-\frac{1}{2}})}{\partial x_2}\right) \approx 0$$

Заменим ДУ произвоные разностными и получим следующее соотношение:

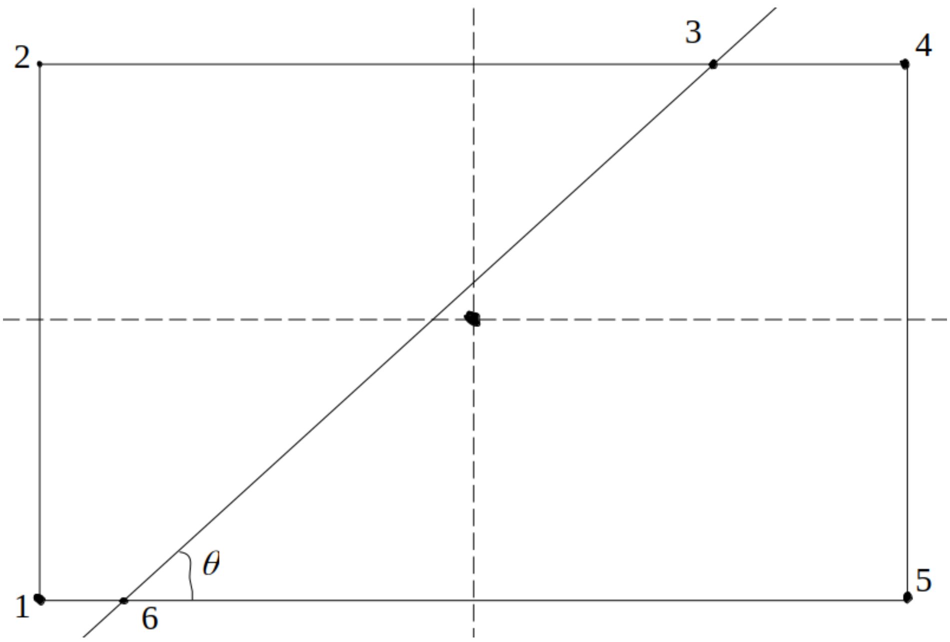
$$h_2(u_{x,ij} - u_{\overline{x},ij}) + h_1(u_{x_2,ij} - u_{\overline{x_2},ij}) \approx 0$$

Где $u_{x,ij} = \frac{u_{i+1i} - u_{ij}}{h}$

Если мы разделим обе части этого равенства на $\frac{1}{h_1 h_2}$ и обозначить через $y_{ij} \approx u_{ij}$ мы получим разностоне уравнение:

$$y_{\overline{x_1}x_1} + y_{\overline{x_2}x_2} = 0, \quad x \in \omega_h, x \in \text{окрестность } S$$

Рассмотрим узел сетки в окрестности неизвестной границы S, выделим несколько характерных случаев в зависимости от того, каким образом, свободная граница пересекает область интегрирования по полуцелым точкам. При этом для простоты мы будем спрямлять участки кривой на отрезке интегрирования.



Запишем уравнение баланса переходя от интегрирования по площадь к интегрированию по границе данной площадь по формуле Гаусса-Остроградского. Значит, будем осуществлять по двум контурам. Первый контур — 1, 2, 3, 6, 1 — в области Ω_+. Второй конутр — 3,4 ,5, 6, 3 — в области Ω_-. Тогда двойной интеграл по области привратиться в криволинейные интегралы и подинтегральная функция тоже измениться, получим следующие интегральные соотношения.

$$-\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau + \int_2^3 \frac{\partial u}{\partial x_2} d\tau + \int_3^6 \left(\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right) d\tau - \int_6^1 \frac{\partial u}{\partial x_2} d\tau + \int_3^4 \frac{\partial u}{\partial x_2} d\tau + \int_4^5 \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau - \int_5^6 \frac{\partial u}{\partial x_2} d\tau - \int_6^3 \left(\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right)$$

— уравнение баланса.

Получаем примерную формулу значения интеграла:

$$\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau \approx h_2 u_{\overline{x_1},ij}$$

$$\int_4^5 \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau \approx h_2 u_{x_1,ij}$$

$$\int_3^6 \left(\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right)_+ - \int_6^3 \left(\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right)_- = \int_3^6 \left[\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right] d\tau \approx \zeta_{ij},\ \Delta S$$

Где: $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}} = \zeta(x)$

@April 12, 2024

Для вычисления интегралов 2-3 и 3-4, рассмотрим точку 3. Если посмотреть на уравнение баланса, то там интеграл 2-3 и 3-4 то подинтегральная функция одна и та же, но на учестке 2-3 принадлежит Ω_+. а на 3-4 Ω_-. Поэтому запишем производную в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}} \cos(\overrightarrow{N}, x_2) + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cos(\tau, x_2)$$

То есть мы раслкладываем производную по другим направлениям(нормаль и тангенсальная составляющая). С учетом непрерывности касательной производной функции $u(x)$, а также принимая во внимание, что $\cos(\overrightarrow{N}, x_2) = \cos(\theta)$, этот угол нам известен. Тогда мы можм сказать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_- = -\left[\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}\right] \cos\theta = -\zeta(x)\cos\theta$$

Теперь приближенно заменим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_+ \approx u_{x_2.ij}$$

Получм

$$\int_2^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_+ d\tau \approx u_{x_2}(h_1 - \Delta_{34})$$

$$\int_3^4 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_- d\tau \approx (u_{x_2} + \zeta\cos\theta)\Delta_{34}$$

Аналогично вычисляются на нижней границе, то есть 5-6 и 6-1:

$$\int_5^6 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_+ d\tau \approx u_{\overline{x_2}}(h_1 - \Delta_{61})$$

$$\int_6^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_- d\tau \approx (u_{\overline{x_2}} - \zeta\cos\theta)\Delta_{61}$$

Теперь подставим в формулу баланса все вычисленные интегралы:

$$-h_2 u_{\overline{x_1}} + h_2 u_{x_1} + h_1 u_{\overline{x_2}} + \Delta_{63}\zeta + (\Delta_{61} + \Delta_{34})\zeta\cos\theta \approx 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{63} = \Delta S = \frac{h_2}{\sin\theta} \\ h_1 = \Delta_{61} + \Delta_{34} + h_2 ctg(\theta) \end{array}\right\} = \Delta 63 + (\Delta_{61} + \Delta_{34})\cos\theta = h_1\cos\theta + h_2\cos\theta$$

Разделим это уравнение на $h_1 h_2$, тогда получим:

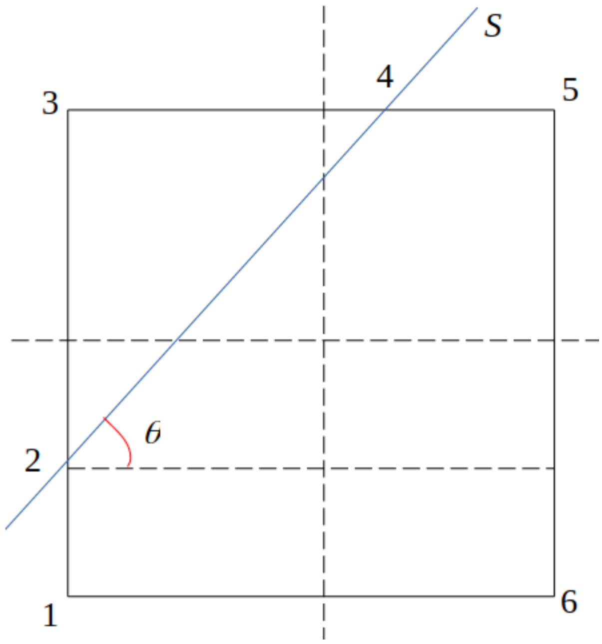
$$y_{\overline{x_1}x_1} + y_{\overline{x_2}x_2} = -F(x), \quad x \in \omega_h, x \in \text{окрест.}S$$

где $F(x) = \zeta(x)\frac{h_1\cos\theta + h_2\cos\theta}{h_1 h_2}$

Таким образом при прохождении линии сопряжении в разностном уравнении появляется правая часть.

Если у нас по-другому будет проходить граница, то по-другому надо обрабатывать эти точки контакта, выпишем еще характерные способы пересечения этой области и запишем уже готовый результат как измениться правая часть.

Четверты случай:

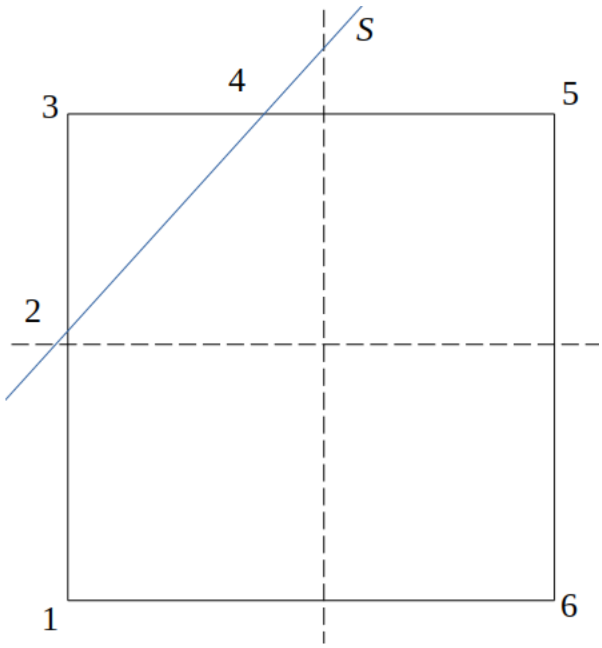


Тогда надо интегрировать по контурам 1, 2, 4, 5, 6.

Проделывая те же выкладки, что и для первого случая.

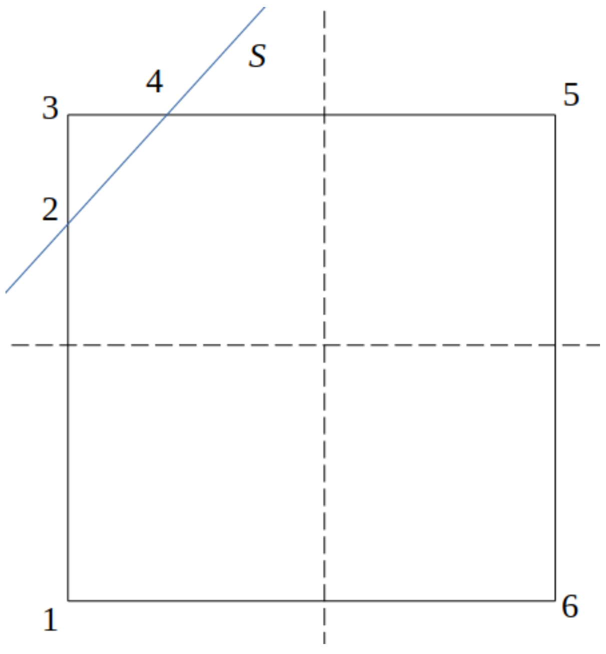
$$F(x) = \zeta(x)\frac{h_1\cos\theta + h_2\cos\theta}{h1 - h_2}$$

То есть такое изменение границы не изменило правую часть уравнения, рассмотрим слелующий вариант.



$$F(x) = \zeta(x)\frac{h_1\cos\theta}{h_1 h_2}$$

Четверты случай:



$$F(x) = 0$$

Объединенеие всех случаев приводит к уравнению 13 с правой частью:

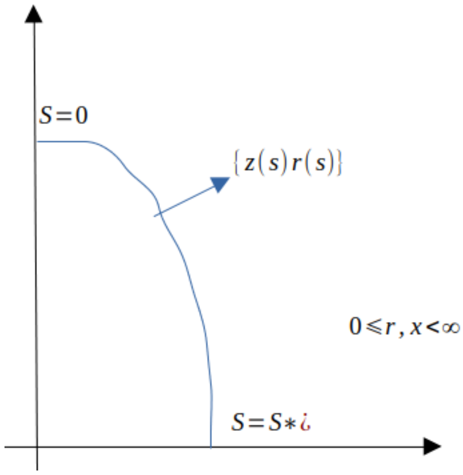
$$F(x) = \zeta(x)\frac{\delta_{is}h_1\cos\theta + \delta_{js}h_2\sin\theta}{h_1h_2}$$

где $\delta_{is}(\delta_{js}) = 0$, если S не пересекает прямую $x = x_{1i}(x_{2j})$ и равно 1 в противном случае.

- x_{1i} — горизонтальная пунктивная линия
- x_{2j} — вертикальная пунктирная линия

Пункт 2.4. Итерационно-разностный метод последовательного уточнения неизвестной границы.

Рассмотрим алгоритм метода на задаче о форме капли магнитной жидкости, сформулированной в пункте 1.4.2. Это формулы 35-41.



Сформулируем безразмерную постановку задачи, в качестве характерных размеров введем s_* — длинна дуги равновесной линии, H_0 — напряженность магнитного поля. Введем безразмерные переменные

$$\overline{z} = \frac{z}{s_*}, \quad \overline{r} = \frac{r}{s_*}, \quad \overline{s} = \frac{s}{s_*}, \quad \overline{u} = \frac{u}{H_0 s_*}$$

Далее предположим, что намагниченность поля является линейной, получим следующую безразмерную задачу равновесия капли магнитной жидкости в магнитном поле.

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{r}(rz')' = r'(Q - F_1) \\ r'' = -z'(Q - F_1 - \frac{z'}{r})\end{matrix}\right\}$$

где $0 < s < 1$.

Граничные условия

$$z'(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad r(0) = 0$$

$$z'(1) = -1, \quad r'(1) = 0, \quad z(1) = 0$$

Эти условия определяют задачу для формы капли. Теперь запишемуравненеи, которое определяет функцию у, которая удовлетворяет данным уравнениям.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq z,\ r < \infty$$

Теперь поставим граничные условия для прошлого уравнения. Условие на границе двух сред:

$$u = u_1, \quad (1+\chi)\left(-z'\frac{\partial u}{\partial r} + r'\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -z'\frac{\partial u_1}{\partial r} + r'\frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad (r, z) \in S$$

Теперь ставим условие симметрии(на осях симметрии?):

$$\frac{\partial u(0,z)}{\partial r} = 0, \quad u(r,0) = 0, \quad u|_{r,z\to\infty} = z$$

Таким образом форма равновесной поверзности капли ищется как решение уравнений 15 и 17, с соотвествующими граничными условия 16 и 18. Эта форма определяется двумя безразмерными параметрами.

(17)

@April 19, 2024 Пункт 2.4.2. Построение сети, адаптированной к форме свободной границы.

рис 1.

Значения из рисунка надо задавать достаточно большими, чтобы не нарушались условия на бесконечности. Мы должна задать (1). Введем так называемую согласованную неравномерную сетку. Ее обозначим омега. (2)

рис 2.

шаги из формулы выбираем таким образом, чтобы свободная поверхность проходила через узлы. Этого можно добиться вводя на равновесной линии сетку(3).

Будем брать неравномерный шаг. N = 4, N_1 = 8. Если и и жи от 0 до H, то в качестве координатных линий сетки омега мы будем брать прямые

(4)

(5)

Пункт 2.4.3. Организаци иерационного процесса

Будем использовать три итерационные процедуры. Одну внешнюю и две внутренние.

Внешний процесс:

(6)

Внешний итерационный процесс связвающий, организуется следующим образом, на каждом льтом шаге решается задача 17-18 с фиксированной свободной границей, определеляемой функциями (7). Затем по найденный значениям уточняется положение свободной поверхности путем решения нелинейной задачи 15-16 и определяются следующие итерационные приближений з эльтое и р эльтое. После этого необходима корректироваака сетки по алгоритму описанному в пункте 2.4.2. Запишем внешний итерационный процесс в виде блок схемы.

(8)

Внутренний итерационный процесс — 1:

Мы определяем в этот момент у эльтое как алгоритм реализации разностной схемы, аппроксимирующей задачу 17-18.

Запишем какой вид имеет разностная схема.

(9)

Во всех внутренни узлах стеки таких что (10). Уравнение (17) примет вид (11)

Первое из условий 18 аппроксимируется:

(12)

Полученная разностная схема — систем аалгебраических уравнений, следовательно, можно применять итерационные методы. Аналогично аппроксимирется (18-2,3,4). Полученная система 19-20 и тд дают возможность получить очередное приближение для дьтой итерации.

Внутренний итерационный процесс — 2:

Представляет собой алгоритм решения 15-16. Запишем итерационный процесс в следующем виде:

(13)

Пункт 2.5. Метод сглаживания

Рассмотрим заадчу со свободной границей, с дефектом равным 0, для эллиптического уравнения 2 порядка, постановка в примере пункта 2.1.

рис 3

@May 3, 2024

Переформулируем задачу 8-9 в переменных мю тетта, тогда неизвестные функции — $x_1 = x_1(\nu, \theta),\ x_2 = x_2(\nu, \theta)$. Так как преобразование 11 невырожденно, то определитель перехода отличен от 0, $J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\nu, \theta)} \neq 0$, также существует боратное преобразование $J' = \frac{\partial(\nu, \theta)}{\partial(x_1, x_2)}$. Получим формальное соотношение для перехода от переменных $x_1, x_2 \to \nu, \theta$. Продифферинцируем соотношение 11 по x_1, x_2.

(1)

затем:

(2)

далее

(3)

Дифферинцируем мя для того, чтобы иметь возможность от преобразования вернуться по обратному преобразованию. Из этих четырех равенств следует следующее соотношение:

(4)

$$\frac{\partial x_1}{\partial \nu} = J\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \nu} = -J\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

Первая производная вычисляется:

(5)

Аналогично находится выражение для нахождения вторых производных, покажем пример по x_1:

(6)

Рассмотрим любую функцию $\Phi(\nu, \theta)$

(7)

При дифференцировании произведения получим:

(8)

Здесь можно воспользоваться формулой 12 и свернуть:

(9)

Возьмем в качестве Ф:

(10)

Пользуясь этими формулами, получим, предположим что в 8 коэффициенты симметричны $a_{12} = a_{21}$:

(11)

(12)

Пункт 3.3.1. Ортогональные переменные

(13)

Выберем ро так, чтобы у от х удовлетворяло уравнению 8 или тоже самое, что преобразованному уравнению 13 и тогда будем рассматривать 13 как уравнения для функции ро. Обратим переменные в 15, то есть вычислим (14). Теперь рассмотрим значение Якобиана:

(15)

Тогда 13 запишется в следующем виде:

(16)

Пункт 3.3.2. Выбор тета от х являющейся решением краевой задачи

Зададим тета от х так, чтобы она удовлетворла некоторому эллиптическому уравнению, аналогичному уравнению 8. Тогда получим задачу для тета:

(17)

Теперь поставим граничные условия, мы их образно разбили на 4 части:

(18)

Запишем основное уравнение в новых переменных, если а и жи = б и жи, = дельта и жи, это константы, либо 1, либо 0. Получим:

(19)

Таким образом вместо линейных уравнени полчили систему нелинейных уравнений, область определения простая — прямоугольник, и простые граничные условия.