МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
РАСЧЁТ РАВНОВЕСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КАПЛИ ЖИДКОСТИ
ВАРИАНТ 1

Парфененко Максим Александрович
студента 3 курса,
специальность "прикладная
математика"
Преподаватель:
Будник А. М.

Минск, 2024

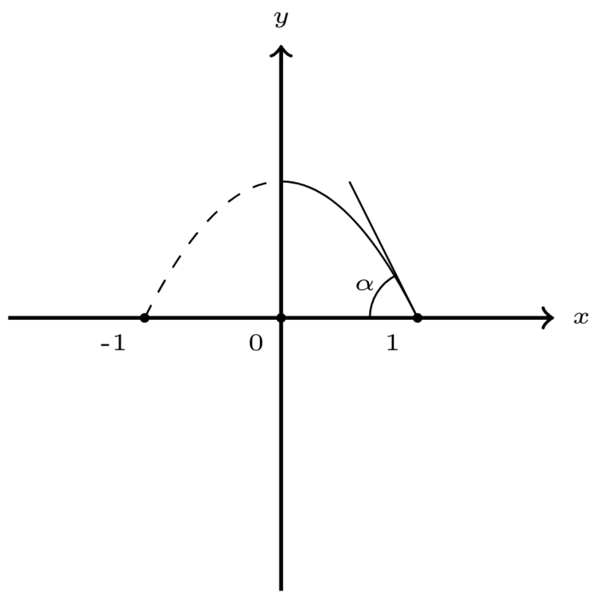
Постановка задачи

Определить форму цилиндрической равновесной поверхности жидкости с площадью поперечного сечения, находящегося на горизонтальной поверхности. На жидкость действует однородное гравитационное поле, направленное вдоль вертикальной оси. На линии контакта жидкости с поверхностью задан угол смачивания α.

Необходимо:

1. Получить безразмерную математическую модель задачи при условии, что уравнение равновесной линии представляется в виде $y(x)$, где $0 \le x \le R$, взяв в качестве характерного размера расстояние от оси OY до линии контакта.
2. Решить полученную дифференциальную задачу итерационно-разностным методом.
3. Найти решение при следующих значениях физических параметров: $= 1/^3$
4. Методом продолжения по параметру исследовать влияние на равновесную поверхность действующей на жидкость силы. Результаты представить графически.

Построение размерной математической модели



Будем искать форму равновесной линии в виде $y(x), 0 \leq x \leq R$. Тогда для записи дифференциального уравнения Лапласа, являющимся условием для перепада давлений,

$$\sigma(k_1 + k_2) = \rho \Pi + c, \tag{1}$$

где k_1, k_2 - кривизны главных нормальных сечений поверхности Γ, σ - коэффициент поверхностного натяжения, c - произвольная константа, рассматриваем следующую формулу:

$$k_1 + k_2 = \pm \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}, ' = \frac{d}{dx}, \tag{2}$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{y'}{\pm\sqrt{1 + (y')^2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{1 + (y')^2}} \right), \vec{n_{\sum}} = (0, \mp 1). \tag{3}$$

Знак плюс (или минус) выбирается, если жидкость находится на (или подвешена к) горизонтальной плоскости. Согласно условию нашей задачи, выбираем знак плюс. В таком случае, условие Лапласа будет иметь следующий вид:

$$\sigma \left(\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right) = \rho \Pi + c. \tag{4}$$

Пусть на жидкость действуют массовые силы, объёмную плотность которых обозначим $\rho \vec{F}(\vec{x})$. Необходимым условием существования равновесных состояний жидкости является потенциальность поля $\vec{F}(\vec{x})$. По условию задачи на жидкость действует однородное гравитационное поле, направленное вдоль вертикальной оси. Тогда

$$\Pi = gy. \tag{5}$$

По итогу условие Лапласа выглядит так:

$$\sigma\left(\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}\right) = \rho g y + c. \tag{6}$$

Вычислим $\vec{n}$ и $\vec{n_{\sum}}$. Сформулируем граничное условие при $x = R$:

$$cos(\alpha) = -\vec{n} \cdot \vec{n_{\sum}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} => y'(R) = -tan(\alpha). \tag{7}$$

Сформулируем граничное условие при x = 0. Положим, что $\alpha = 90°$, тогда:

$$cos(\alpha) = -\vec{n} \cdot \vec{n_{\sum}} = \frac{-y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0. \tag{8}$$

Так как $\vec{n_{\sum}} = (-1, 0)$ и $\vec{n_{\sum}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$, тогда $y'(0) = 0$. Согласно условию задачи, $y(R) = 0$.
Для определения константы c в постановку задачи обычно добавляют условие, при котором известна площадь поверхности жидкости S, который можно определить в виде:

$$S = \int\limits_{\Omega} d\Omega \tag{9}$$

В нашем случае, площадь поверхности жидкости будем вычислять следующим образом:

$$S = \int_0^R y(x)dx. \tag{10}$$

Объединяя все полученные выражения, сформулируем размерную постановку задачи:

$$\begin{cases} \sigma\left(\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}\right) = \rho g y + c, \\ y'(0) = 0, \\ y'(R) = -tan(\alpha) \\ y(R) = 0, \\ S = \int_0^R y(x)dx. \end{cases} \tag{11}$$

Построение безразмерной математической модели

Построим безразмерную задачу путём обезразмеривания по радиусу R:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{x}{R}, \overline{y} = \frac{y}{R}, 0 \leq \overline{x} \leq 1, \\ q = c \cdot R, \\ I = \frac{v}{R^2} = \int_0^1 y(x)dx, \\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Договоримся использовать одни и те же буквы для обозначения размерных и безразмерных величин в ходе дальнейшей работы.
Введём безразмерную величину — число Бонда. Она характеризует отношение гравитационных сил к капиллярным:

$$Bo = \frac{\rho g}{\sigma} \cdot S \tag{13}$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}\right) = \frac{Bo}{I}y + q, \\ y'(0) = 0, \\ y'(R) = -tan(\alpha) \\ y(R) = 0, \\ I = \int_0^1 y(x)dx. \end{cases} \tag{14}$$

Проинтегрируем первую часть первого уравнения системы (14) от 0 до 1:

$$s = \int sqrt(1 + (y')^2)dx, \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}, \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\sqrt{1 + (y')^2}). \tag{15}$$

Используя правило цепочки вычисляем производную $\sqrt(1 + (y')^2$ по y', получаем $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Мы видим, что если умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1 + (y')^2}$, то получим:

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{y'y''}{(1 + (y')^2)\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{d^2s}{dx^2} \cdot \frac{1}{1 + (y')^2}. \tag{16}$$

Интеграл второго производного s по x даст нам разность значений первого производного s на концах интервала интегрирования:

$$\int_0^1 \frac{d^2s}{dx^2}dx = \frac{ds}{dx}\bigg|_0^1. \tag{17}$$

Зная, что $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$, получим:

$$\int_0^1 \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}dx = \sqrt{1+(y')^2}\Big|_0^1. \tag{18}$$

Таким образом, получаем:

$$\int_0^1 \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}dx = \sqrt{1+(y'(1))^2} - \sqrt{1+(y'(0))^2} = 0. \tag{19}$$