Домашнее задание

Пусть G — граф и $w\colon V(G) \to \mathbb{R}^+$ — вещественно-значная функция, ставящая в соответствие каждой вершине v неотрицательное число $w(v)$ — *вес вершины* v. Пару (G, w) назовём *взвешенным графом*. Под *весом* подмножества $S \subseteq V(G)$ будем понимать сумму весов его вершин. Во взвешенном графе (G, w) независимое множество наибольшего веса называется *взвешенным числом независимости* этого графа и обозначается через $\alpha_w(G)$.

Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 1$. Операция *k-кратного подразбиения ребра $e = \{a, b\}$ графа* состоит в удалении ребра e из графа и добавлении $k+1$ новых рёбер: $e_1 = \{a, x_1\}$, $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$, $i = 2, \ldots, k$, $e_{k+1} = \{x_k, b\}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — новые вершины.

1. Докажите, что для любого взвешенного графа (G, w) верно неравенство

$$\alpha_w(G) \geqslant \sum_{v \in V(G)} \frac{w(v)}{1 + \deg_G v}.$$

   Доказательство проведите двумя способами: методом математической индукции и методом оценки веса независимого множества, построенного жадным алгоритмом, подобным алгоритму GreedyMIN(G), который на каждом шаге выбирает вершину x, максимизирующую функцию $\frac{w(x)}{1+\deg x}$.

2. Выясните, как связано число независимости графа G с числом независимости графа G^*, который получается из графа G с помощью 2ℓ-кратного подразбиения каждого его ребра (здесь ℓ — фиксированное натуральное число).
3. Докажите, что для любого графа G верно неравенство $\alpha(G) \leqslant \Theta(G)$, где $\Theta(G)$ — шенноновская ёмкость графа G.