МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра вычислительной математики

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОМ ШАРЕ

Курсовой проект

Парфененко Максима Александровича
студента 3 курса,
специальность «прикладная математика»

Научный руководитель:
магистр физ.-мат. наук,
Левчук Е.А.

Минск, 2023

АННОТАЦИЯ

Курсовой проект, 28 с., 2 источника, 9 рис., 2 прил.

ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ, МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, АППРОКСИМАЦИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ, МОНОТОННОСТЬ

Объект исследования – теплопроводность в однородном шаре.

Цель работы – рассчитать температурные поля, возникающие в кристаллах.

Методы исследования – метод разделения переменных, метод конечных разностей.

Результаты работы: написаны программы, реализующие метод конечных разностей и метод разделения переменных для моделирования распространения тепла, проведён анализ данных методов, их устойчивости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время численное моделирование является одним из наиболее важных инструментов в области научных исследований. Оно позволяет нам моделировать и анализировать сложные системы, которые могут быть трудно или невозможно исследовать экспериментально. Одной из таких систем является процесс распространения тепла.

Изучение теплопроводности в однородных телах имеет большое значение в различных областях, включая техническую и прикладную физику, инженерные расчеты, а также в процессах, связанных с теплообменом. Процессы, происходящие внутри однородного шара, могут быть разнообразными и сложными, и построение математической модели с последующим численным моделированием является важным инструментом для понимания этих процессов.

Подходы к решению уравнения теплопроводности представляют собой мощные инструменты для моделирования и анализа теплопроводности в различных объектах. Они позволяют нам выявить особенности процесса распространения тепла, предсказать его поведение в различных условиях и проводить теоретические эксперименты для изучения систем, которые могут быть сложно исследовать практически.

Целью данного курсового проекта является численное моделирование распространения тепла в однородном шаре. Это важная задача, поскольку она имеет широкий спектр применений, включая, но не ограничиваясь, областями, такими как материаловедение, геофизика и астрофизика.

В данной работе рассматривается численное решение уравнения теплопроводности с использованием метода разделения переменных, а также с помощью разностной схемы.

ГЛАВА 1. Постановка задачи

Этот раздел служит вводным материалом, представляющим общий контекст и подготавливающим почву для дальнейшего изучения и применения этих методов. Он начинается с краткого обзора основных принципов и предпосылок каждого из методов, а также их применимости и эффективности в контексте моделирования распространения тепла.

В подразделе “Метод разделения переменных” рассматривается данный принцип решения задачи, его основные характеристики и преимущества при решении задач теплопроводности.

В подразделе “Метод конечных разностей” делается акцент на понимании основных идей этого метода, его применимости для решения задачи и особенностях реализации.

1.1 Метод разделения переменных

Пусть в шаре $x^2 + y^2 \le R^2$ задано начальное распределение температур, и пусть в точках сферы $x^2 + y^2 = R^2$ поддерживается нулевая температура. Мы будем рассматривать частный случай этой задачи, когда начальная температура зависит только от расстояния точки от центра шара и не зависит от угловых координат данной точки. Заметим, что при $t > 0$ температура в точках однородного шара зависит только от расстояния этой точки до центра данного шара. В результате чего более рациональным и предпочтительным было бы решение данной задачи в сферической системе координат r, θ, φ.

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Сформулируем рассматриваемую нами задачу:

Требуется найти функцию $u(r,t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right),$$

начальному условию:

$$u(r,0) = \varphi(r),$$

а также граничным условиям:

$$u(0,t) \neq \infty, u(R,t) = 0, t > 0, 0 \leq r < R.$$

Заметим, что условие $u(r,0) \neq \infty$ заключается в том, что физически температура в центре шара не может быть бесконечной.

Для того чтобы решить данную задачу, введём вспомогательную функцию $v(r,t) = ru(r,t)$ [1]. Из этого следует, что $u(r,t) = \frac{1}{r}v(r,t)$, а $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t}$.

Решаем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \\ v(r,0) = r\varphi(r) \\ v(0,t) = 0 \\ \frac{\partial v(R,t)}{\partial r} = \frac{v(R,t)}{R} \end{cases}$$

Используя метод разделения переменных получаем:

$$v(r,t) = X(r)T(t)$$

$$X(r) \cdot T'(t) = a^2 T(t) X''(r)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(r)}{X(r)} = -\lambda$$

Решаем задачу на собственные числа:

$$\begin{cases} X''(r) + \lambda X(r) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(R) = \frac{X(R)}{R} \end{cases}$$

С учётом полученных граничных условий иммем задачу Штурма – Лиувилля. Её решение сводится к решению линейного дифференциального уравнения.

Решениями этой задачи будут функции вида

$$X_n(r) = \sin\frac{\pi n r}{R}.$$

Собственные числа равны

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2 r^2}{R^2}$$
.

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения $T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$:

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}$$
,

где C_n – пока ещё не определённые коэффициенты.

Заметим, что

$$v_n(r,t) = X_n(r) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n r}{R}$$

– это частные решения искомого уравнения теплопроводности, удовлетворяющие граничным условиям.

Составим формально ряд, удовлетворяющий граничным условиям (поскольку им удовлетворяют все члены ряда):

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda t} \sin \frac{\pi n r}{R}$$

Осталось определить значения констант (зависящей от n) из начального условия:

$$r\varphi(\rho) = v(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n r}{R}$$

Для того, чтобы определить значение C_n, необходимо разложить функцию $\varphi(r)$ в ряд Фурье:

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n r}{R}$$
,

$$A_n = \frac{2}{R} \int_0^R r\varphi(r) \sin \frac{\pi n r}{R} dr$$

Получаем:

$$v(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi nr}{R}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nr}{R},$$

$$C_n=A_n=\frac{2}{R}\int_0^R\varphi(r)\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr.$$

Отсюда вытекает общее решение:

$$v(r,t)=\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^R\rho\varphi(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right)e^{-a^2\lambda t}\sin\frac{\pi nr}{R}.$$

Отсюда, вспоминая о замене $v(r,t)=ru(r,t)$, получаем

$$u(r,t)=\frac{2}{rR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^R\rho\varphi(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right)e^{-a^2\lambda t}\sin\frac{\pi nr}{R}.$$

В рамках курса математической физики подтверждается, что полученный ряд соответствует всем требованиям поставленной задачи. Это означает, что функция $u(r,t)$ может быть дифференцирована (при этом ряд сходится равномерно), она удовлетворяет уравнению в области её определения и сохраняет непрерывность на границах этой области.

1.2 Метод конечных разностей

Множество задач из области физики и техники ведет к граничным или начально-граничным задачам для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Однако количество задач, которые можно решить аналитически, ограничено. Это обычно задачи в канонических областях, таких как прямоугольник, круг или шар, и, как правило, для уравнений с постоянными коэффициентами. В реальности часто приходится сталкиваться с задачами в сложных областях и для уравнений с переменными коэффициентами, часто нелинейными. Это требует поиска приближенных решений с использованием различных численных методов. Один из эффективных методов численного решения задач математической физики – это метод конечных разностей или метод сеток, который позволяет свести приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. При этом системы алгебраических уравнений формулируются для приближенных значений решения в определенном наборе точек в расчетной области.

Численное решение задачи основывается на создании разностной сетки в области решения задачи. Производные, начальные и граничные условия представляются через значения функций $u(x,t)$ в точках сетки. Это приводит к формированию системы алгебраических уравнений, известной как разностная схема. Решение этой системы позволяет определить значение искомой функции в точках сетки. Создание разностной схемы начинается с внедрения сетки в рассматриваемую область пространства. Прямоугольные сетки являются наиболее простыми и широко используемыми. Например, для решения задачи можно создать прямоугольную разностную сетку с шагом h по координате и шагом t по времени.

Рассмотрим вариант разностной аппроксимации линейного одномерного по пространству уравнения теплопроводности [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, x \in (0,R), t \in (0,T]$$

,

где $T > 0$ – некоторая константа.

Введём в области $\overline{D} = \{0 \le x \le R, 0 \le t \le T\}$ равномерную сетку с шагом h по координате и шагом τ по времени:

$$r_i = ih, i = 0,1,\ldots,N_r, iN_r = R; t_j = j\tau, j = 0,1,\ldots,N_t, \tau N_t = T$$

.

Исследуемое уравнение теплопроводности включает производные по пространственной переменной χ и времени t. Это требует использования сеточных узлов, соответствующих по крайней мере двум разным j, для создания его разностной аппроксимации. Характеристики разностных схем определяются тем, на каком временном слое j аппроксимируется выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$.

Для аппроксимации производных будем использовать следующие выражения:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r,t) \approx \frac{v(r,t+\tau) - v(r,t)}{\tau}, \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,t) \approx \frac{v(r+h,t) - 2v(r,t) + v(r-h,t)}{h^2}$$

, .

Тогда соответствующий разностный оператор будет имет вид:

$$L_{h\tau}^{(0)} = \frac{u(r,t+\tau) - u(r,t)}{\tau} - a^2 \frac{u(r+h,t) - 2u(r,t) + u(r-h,t)}{h^2}$$

.

Пусть $u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, L_{h\tau}^{(0)} u = u_t - a^2 u_{rr}$, где $u = u(r,t), \hat{u} = u(r,t+\tau)$. Найдем погрешность аппроксимации разностным оператором исходного дифференциального оператора L в точке (r,t). Рассмотрим случай, когда мы имеем достаточно гладкую функцию $u(r,t)$ при достаточно малых шагах h и τ имеем:

$$u_t = \frac{u(r,t+\tau) - u(r,t)}{\tau} = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} + O(\tau),$$

$$u_{\bar{r}r} = \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + O(h^2).$$

Таким образом, получаем, что разностный оператор аппроксимирует дифференциальный оператор L с погрешностью $O(\tau) + O(h^2)$ в точке (r,t).

В явной схеме для одномерного уравнения теплопроводности разностная аппроксимация уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=a^2\frac{y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j}{h^2}.$$

Исследуем схему на устойчивость по начальным данным с помощью метода гармоник. Рассмотрим полученное однородное уравнение с начальным условием

$$y_i^0=e^{iqx_i}=e^{i\alpha_q i},\alpha_q=qh,$$

где i – мнимая единица.

Получаем $y_i^j=\lambda_q^j e^{i\alpha_q i}$, где λ_q – множители роста. Подставим y_i^j в одномерное уравнение и сократим на $\lambda_q^j e^{i\alpha_q i}$, тогда получим следующее:

$$\frac{\lambda_q-1}{\tau}-a^2\frac{e^{i\alpha_q}-2+e^{-i\alpha_q}}{h^2}=0.$$

Поскольку

$$\frac{e^{i\alpha_q}-2+e^{-i\alpha_q}}{4}=-\left(\frac{e^{i\frac{\alpha_q}{2}}-e^{-i\frac{a_q}{2}}}{2i}\right)^2=-\sin^2\frac{a_q}{2},$$

то $\lambda_q(\alpha_q)=1-4ra^2\sin^2\frac{a_q}{2},r=\frac{\tau}{h^2}$.

При изменении q от $-\infty$ до ∞ число $\lambda_q(\alpha_q)$ пробегает через весь спектр оператора перехода со слоя на слой. Заметим, что в данном случае спектр расположен на отрезке $[1-4ra^2,1]$ (рисунок 1).

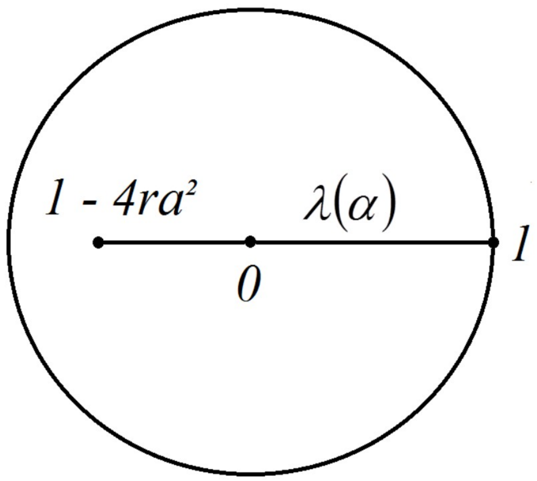

Рисунок 1. Спектр оператора перехода со слоя на слой явной схемы для уравнения теплопроводности

Заметим, что на рисунке 1 окружность – граница области, в пределах которой должно находиться λ, чтобы выполнялось спектральное условие устойчивости.

Необходимое условие устойчивости явной схемы выполнено, если

$$1-4ra^2 \geq -1, r \leq \frac{1}{2a^2}, \tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

Можно показать, что это же условие является и достаточным для устойчивости схемы. Таким образом, явная схема для уравнения теплопроводности является условно устойчивой. Ее можно использовать только в том случае, когда шаги сетки удовлетворяют неравенству

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

В рассматриваемой разностной схеме значения искомой функции на следующем временном уровне находится непосредственно, явно с помощью полученного одномерного уравнения. Такая схема называется явной разностной. Её точность имеет порядок $O(h^2+\tau)$.

ГЛАВА 2. Теоретическая часть

2.1 Основные понятия

В этой главе представляются ключевые теоремы и определения терминов, которые служат основой для исследования, а также обсуждения их практического применения и значимость в контексте работы. Это поможет читателю лучше понять и оценить подход и результаты.

Задача Штурма – Лиувилля состоит в отыскании нетривиальных (то есть отличных от тождественного нуля) решений на промежутке (a,b) уравнения Штурма – Лиувилля

$$L[y] = \lambda \rho(x) y(x),$$

удовлетворяющих однородным краевым (граничным) условиям:

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases},$$

где $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Оператор $L[y]$ – это действующий на функцию $y(x)$ линейный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}\left[-p(x)\frac{dy}{dx} \right] + q(x)y(x),$$

где $p(x), p'(x), q(x), \rho(x)$ полагаем непрерывными на (a,b), вдобавок к этому – функции $p(x), \rho(x)$ положительными на (a,b).

Задача Штурма-Лиувилля играет важную роль в уравнении теплопроводности. Она служит основным источником для так называемого метода Фурье решения уравнений в частных производных. Она состоит в отыскании нетривиальных (то есть отличных от тождественного нуля) решений на промежутке уравнения Штурма-Лиувилля, удовлетворяющих однородным краевым (граничным) условиям и значений параметра, при которых такие решения существуют.

Эти решения, называемые собственными функциями этой задачи, и значения, при которых такое решение существует — её собственными значениями, играют ключевую роль в численном решении уравнений в частных производных, включая уравнение теплопроводности. Это позволяет свести приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений.

Метод гармоник – это эффективный способ исследования линейных разностных схем на устойчивость, включая схемы для уравнения теплопроводности.

Этот метод основан на разложении решения на пространственные гармоники и рассмотрении каждой гармоники отдельно. Для каждой гармоники вычисляется множитель роста, который позволяет оценить, как изменяется амплитуда гармоники с течением времени.

Для устойчивости схемы необходимо, чтобы для всех гармоник выполнялось условие, что модуль множителя роста не превышает единицу. Это условие гарантирует, что амплитуда каждой гармоники не увеличивается со временем, и, следовательно, решение не становится неограниченно большим.

Таким образом, метод гармоник позволяет анализировать устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности и других уравнений в частных производных.

Метод конечных разностей – это численный метод решения дифференциальных уравнений, который основан на замене производных разностными схемами. Этот метод является сеточным, то есть он использует сетку точек в пространстве и времени для аппроксимации решения.

В основе метода лежит построение сетки на расчетной области, выбор разностной схемы и запись разностного уравнения для каждого узла сетки. Затем учитываются краевые условия и получается система линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы дает приближенные значения решения в узлах.

Однако, ключевым моментом является построение правильной разностной схемы, которая будет сходиться к решению. Построение схемы выполняется исходя из свойств исходного дифференциального оператора.

Метод разделения переменных – это метод решения дифференциальных уравнений, который основан на алгебраическом преобразовании исходного уравнения к равенству двух выражений, каждое из которых зависит только от одной переменной.

В контексте уравнений в частных производных, схема разделения переменных приводит к нахождению решения в виде ряда или интеграла Фурье.

В этом случае метод также называют методом Фурье (в честь Жана Батиста Фурье, который построил решения уравнения теплопроводности в виде тригонометрических рядов) и методом стоячих волн.

Метод разделения переменных применяется для решения краевых задач для линейных уравнений второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов, а также для некоторых классов нелинейных уравнений и уравнений высших порядков.

2.2 Выводы по второй главе

В данной главе были подробно рассмотрены ключевые концепции и методы, которые используются в численном моделировании распространения тепла. Важность этих методов в контексте численного моделирования распространения тепла была подчеркнута, и были представлены основные принципы их применения.

ГЛАВА 3. Реализация

3.1 Метод конечных разностей

3.1.1 Математическая постановка задачи

1. Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

где $0 < r < R, t > 0.$ $v(r,t) = ru(r,t)$ – замена.

2. Граничные условия:

$$v(0,t) = 0,$$
$$v(R,t) = 0,$$

где $t > 0$.

3. Начальное условие:

$$v(r,0) = v_0(r),$$

где $0 < r < R$.

3.1.2 Построение разностной схемы

1. Аппроксимация производных:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r,t) \approx \frac{v(r,t+\tau)}{\tau} - \frac{v(r,t)}{\tau},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,t) \approx \frac{v(r+h,t)}{h^2} - 2\frac{v(r,t)}{h^2} + \frac{v(r-h,t)}{h^2}.$$

2. Введение обозначений:

$$v_{i,j} = v(r_i, t_j),$$
$$r_i = ih,$$
$$t_j = j\tau,$$

где $i \in \{0, ..., N_r\}$, $j \in \{0, ..., N_t\}$.

3. Разностная схема:

$$\frac{v_{i,j+1}}{\tau} - \frac{v_{i,j}}{\tau} = a^2 \left(\frac{v_{i+1,j}}{h^2} - 2\frac{v_{i,j}}{h^2} + \frac{v_{i-1,j}}{h^2} \right),$$

где $i \in \{1, ..., N_r - 1\}$, $j \in \{1, ..., N_t - 1\}$.

4. Начальные и граничные условия:

$$v_{i,0} = ru_0(r_i),$$

где $i \in \{0, ..., N_r\}$,

$$v_{0,j} = 0,$$
$$v_{N_r,j} = 0,$$

где $j \in \{1, ..., N_t - 1\}$.

Составим программу в Python для численного решения задачи с помощью приведённой разностной схемы.

Полный код программы расположен в приложении А.

3.1.3 Анализ работы программы

Изобразим начальное распределение температуры для случая, когда $v(r,0) = \frac{\cos(x)}{x}$ (рисунок 2).

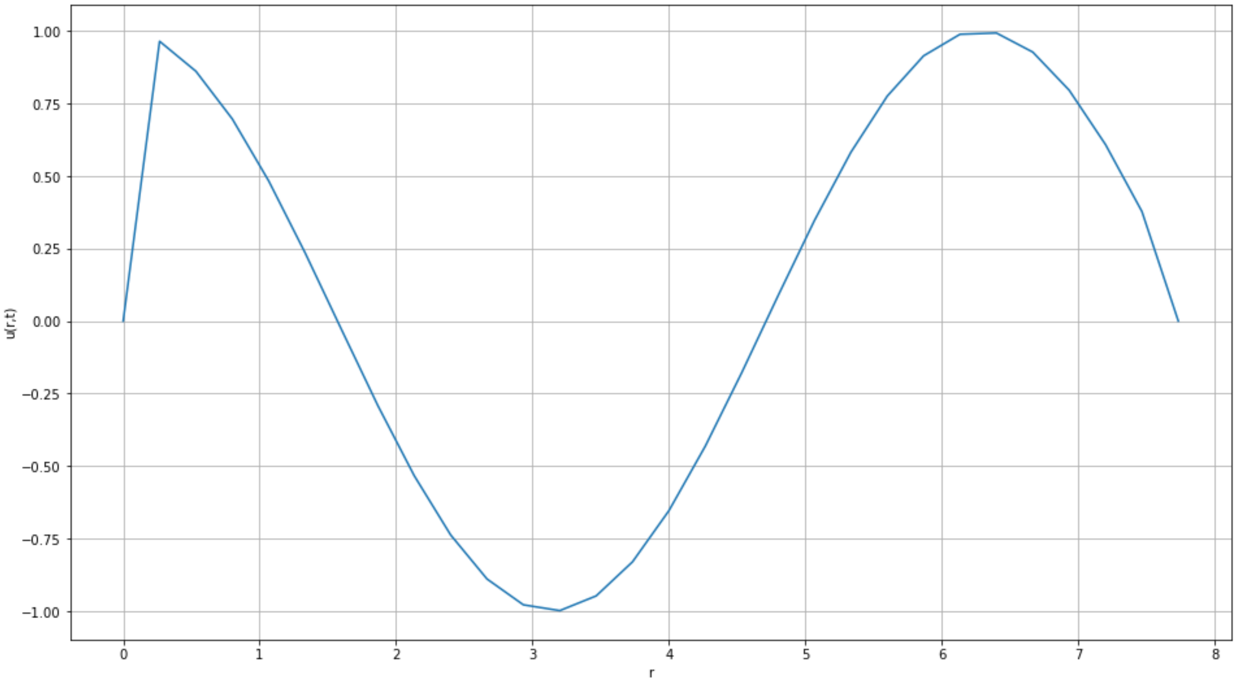

Рисунок 2

Распределение температуры в различные моменты времени представлены на графике, расположенном на рисунке 3.

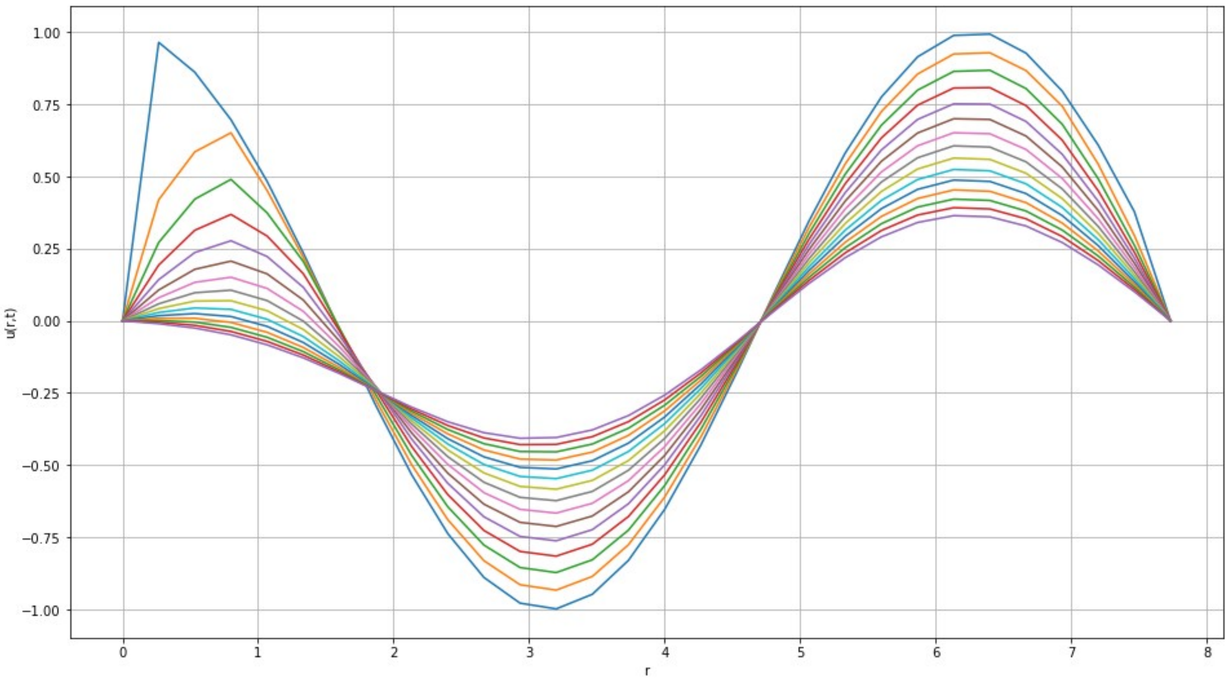

Рисунок 3

В данном случае было произведено 30 итераций. Отметим, что при 20–30 итерациях график отображается более точно. Однако не забываем про полученное условие устойчивости:

$$\tau \le \frac{h^2}{2a^2}, \frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2a^2}.$$

В этом случае коэффициент теплопроводности $a = 0.5 \frac{Вт}{М \cdot K}$, максимальное расстояние $R = 8\ м$, а максимальные значения времени $T = 4\ с$ на правой границе, число шагов $K = 30$ по t и число шагов $N = 30$ по r. Подставив эти значения в выражения для подсчёта шага по r и t:

$$h = R / N, t = T / K,$$

а затем полученные значения в неравенство, получаем:

$$1.875 \le 2.00,$$

то бишь, условие устойчивости выполняется.

Однако если мы повысим значение до $N = 40$, то сможем наблюдать, как решение расходится (рисунок 4):

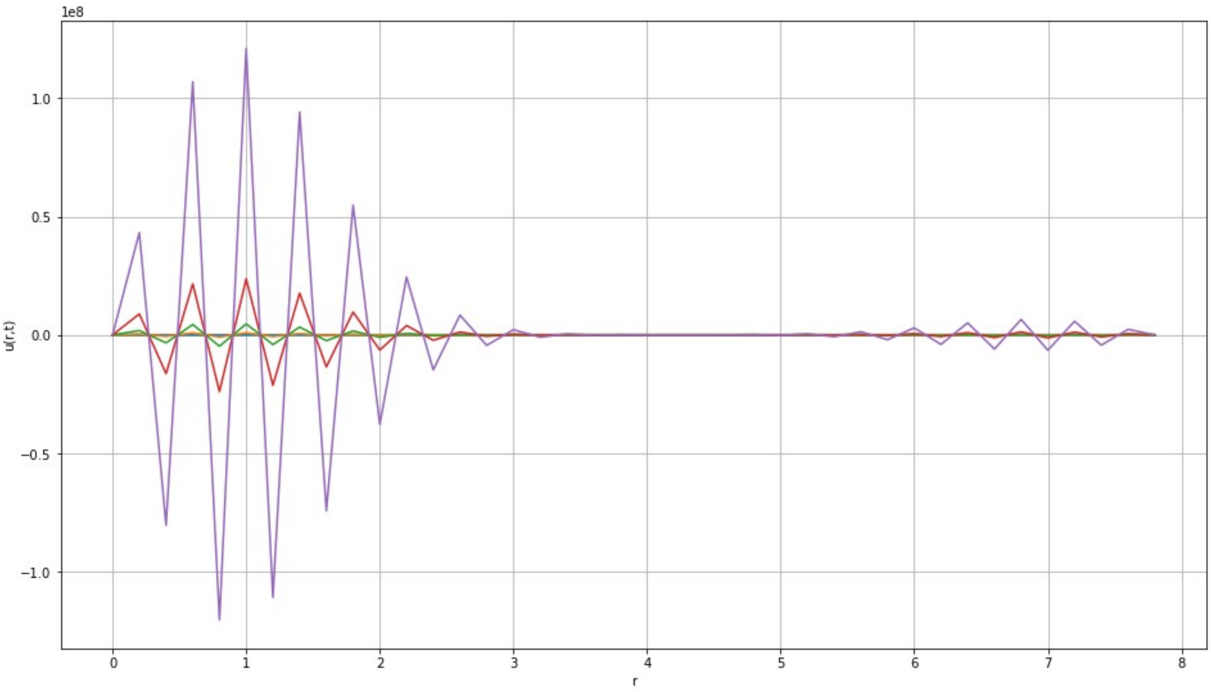

Рисунок 4

Функция $v(r,t)$ принимает в таком случае аномально высокие значения, при этом при изменённых значениях условие устойчивости уже не выполняется:

$$3.(3) > 2.0,$$

что подтверждает изъяны, изображённые на рисунке 4.

Рассмотрим случай, когда $v(r,0) = A(R - r)$ (рисунок 5).

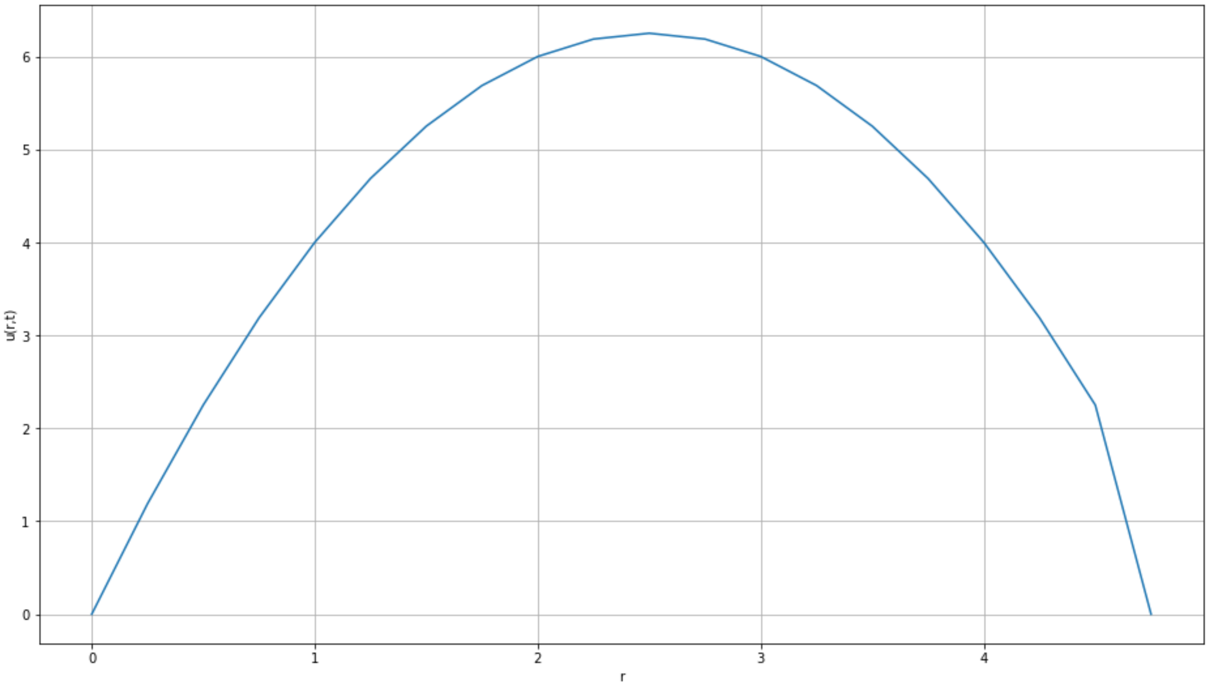

Рисунок 5

Распределение температуры в различные моменты времени представлены на графике, расположенном на рисунке 6.

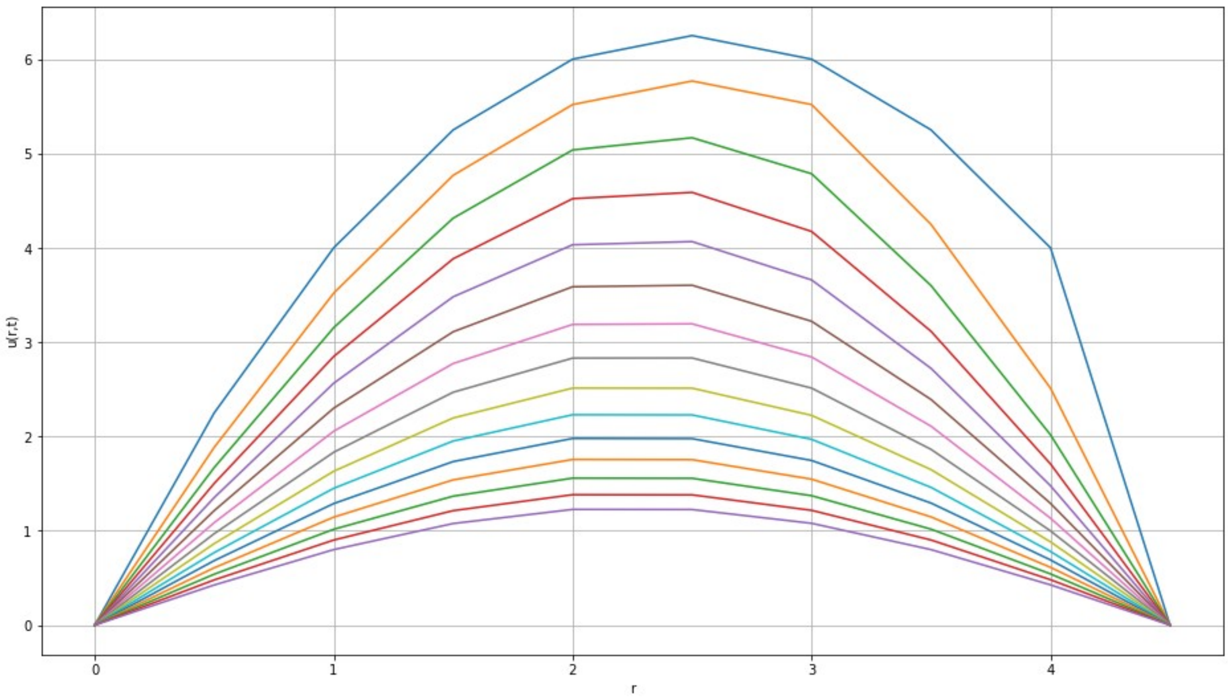

Рисунок 6

В этом случае коэффициент теплопроводности $a = 0.95 \frac{Вт}{М \cdot К}$, максимальное расстояние $R = 5\ м$, а максимальные значения времени $T = 4\ с$ на правой границе, число шагов $K = 30$ по t и число шагов $N = 10$ по r. Подставив эти значения в выражения для подсчёта шага по r и t:

$$0.533 \le 0.554.$$

Увеличим число до $N = 50$ и заметим, что решение вновь расходится (рисунок 7).

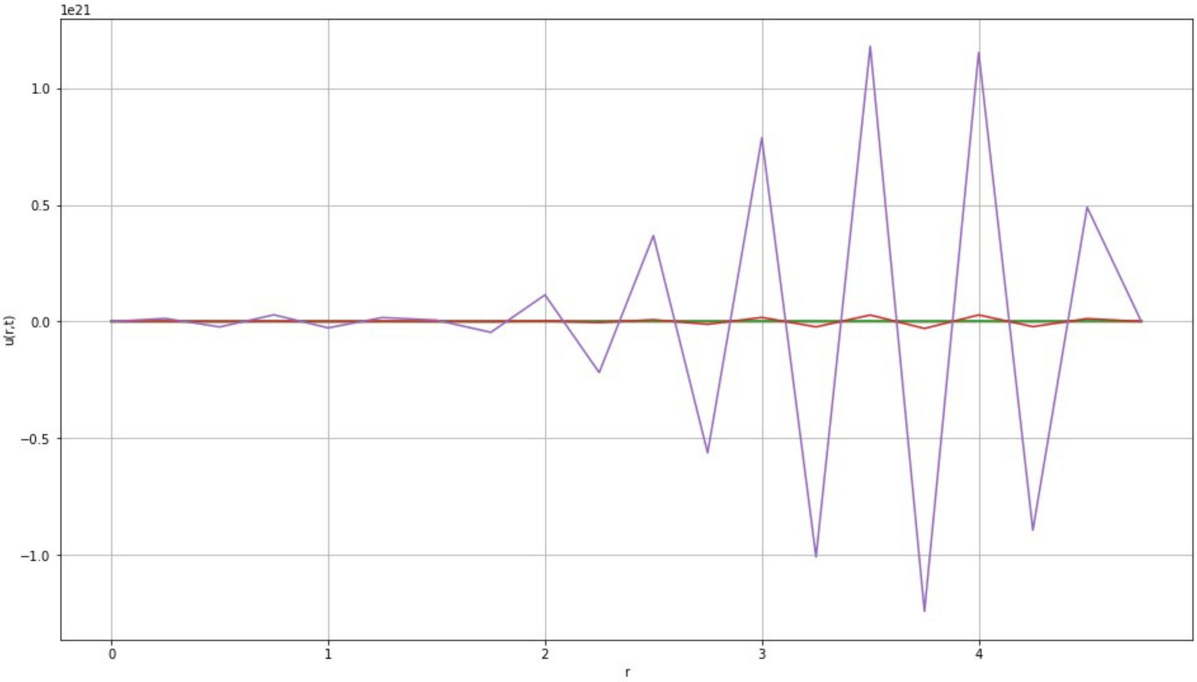

Рисунок 7

Вновь можем наблюдать, как функция $v(r,t)$ принимает весьма большие значения, до 21 степени. Условие устойчивости тоже не выполняется:

$$2.133 > 0.554 .$$

3.2 Метод разделения переменных

3.2.1 Математическая постановка задачи

Общий случай:

Математическая постановка задачи о распространении тепла в однородном шаре радиуса R выглядит следующим образом:

1. Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$$, где

- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$,
- $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – коэффициент теплопроводности, $c\rho$ – теплоёмкость единицы объёма,
- $f = \frac{F}{c\rho}$, где $F(x, y, z, t)$ – объёмная плотность тепловых источников.

2. Граничные условия:

$$u(R, \theta, \phi, t) = 0,$$

где R – радиус шара, θ и φ – углы в сферической системе координат.

3. Начальное условие:

$$u(r, \theta, \phi, 0) = u_0(r, \theta, \phi),$$

где $u_0(r, \theta, \phi)$ – начальное распределение температуры.

Частный случай:

В частном случае математическая постановка задачи будет такой же, как в общем случае, за исключением начального условия, которое теперь будет выглядеть так:

$$u(r, 0) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Составим программу в Python для численного решения задачи с помощью данного метода. Полный код программы расположен в приложении Б.

3.2.2 Анализ работы программы

Изобразим распределение температуры в разные моменты времени, когда $u(r,0)=\frac{\cos(x)}{x}$ (рисунок 8).

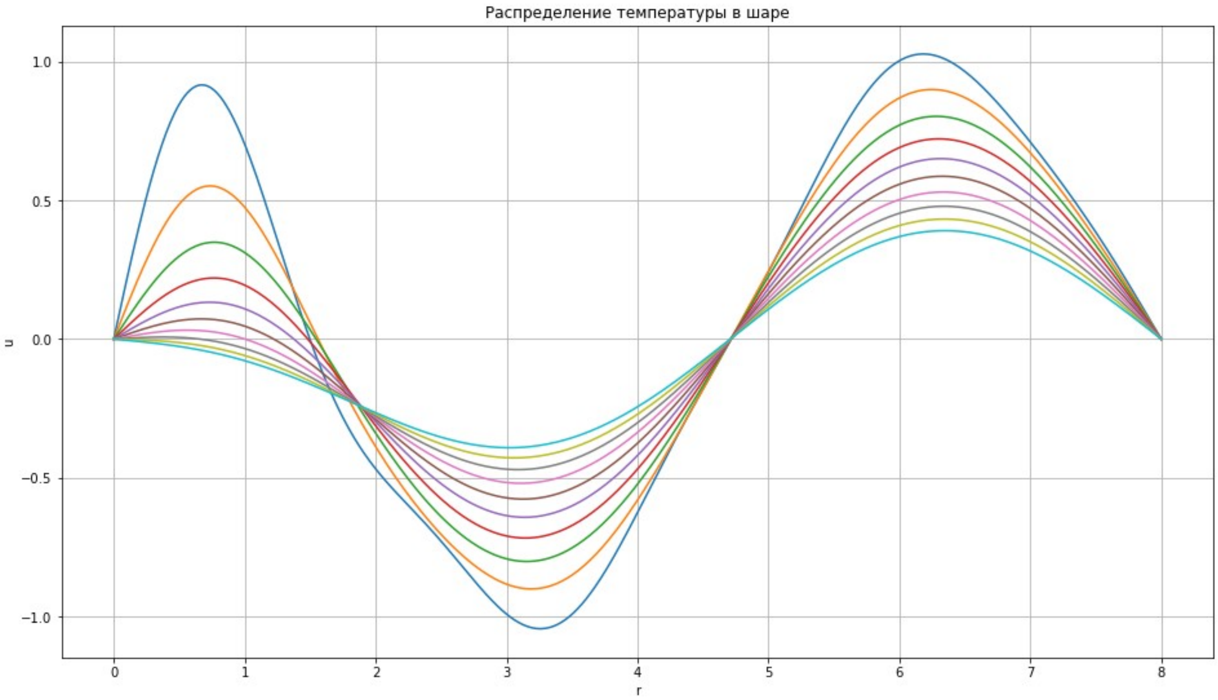

Рисунок 8

В данном случае используются такие же параметры, как и в случае с реализацией решения методом конечных разностей. Начальное количество слагаемых ряда $N=10$. Однако при увеличении данного значения до 50 можем наблюдать, как решение начинает расходиться (рисунок 9).

Таким образом, стоит отметить, что при решении задачи теплопроводности методом разделения переменных, выбор размера шагов зависит от конкретной задачи и требуемой точности. В общем случае, меньшие шаги обычно приводят к более точным результатам, поскольку они позволяют лучше аппроксимировать непрерывные функции. Однако это также может привести к большему времени вычислений и требованиям к ресурсам.

С другой стороны, большие шаги могут быть более эффективными с точки зрения вычислительных ресурсов, но они могут привести к потере точности из-за недостаточной дискретизации. Важно найти баланс между точностью и эффективностью, исходя из конкретных требований к задаче.

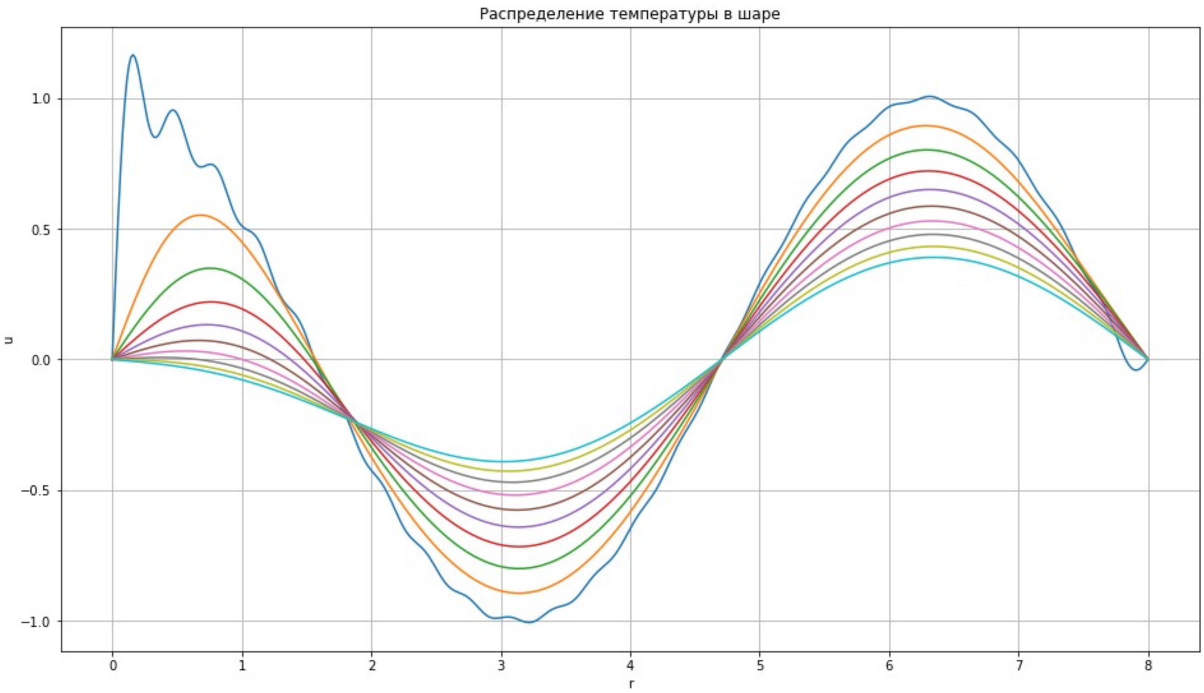
Распределение температуры в шаре
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
u
0
1
2
3
4
5
6
7
8
r

Рисунок 9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были применены различные методы решения уравнения теплопроводности, включая метод разделения переменных, метод конечных разностей, а также разностные схемы.

Метод разделения переменных позволил преобразовать исходное уравнение теплопроводности в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что значительно упростило его решение. Этот подход оказался особенно полезным при моделировании распространения тепла в однородном шаре, так как позволил учесть радиальную симметрию задачи. Метод особенно полезен, когда граничные условия однородны, то есть они равны нулю

Метод конечных разностей был использован для дискретизации полученных дифференциальных уравнений. Этот метод широко используется из-за его простоты и гибкости. Он может обрабатывать сложные геометрии и граничные условия, и его можно использовать с неоднородными сетками.

В результате проведенного исследования было показано, что численное моделирование может быть эффективным инструментом для изучения процессов распространения тепла в однородных средах. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации тепловых процессов в различных областях, включая энергетику, машиностроение и материаловедение.

Оба метода имеют свои преимущества и используются в различных ситуациях в зависимости от конкретной задачи и граничных условий. Метод разделения переменных часто используется для задач с простой геометрией и однородными граничными условиями, в то время как метод конечных разностей является более общим и может решать более сложные задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с

2. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 30      # Максимальное число шагов по r
K = 30      # Максимальное число шагов по t
R = 8       # Значение расстояния R на правой границе
T = 4       # Значение времени t на правой границе
h = R / N   # Шаг сетки по r
t = T / K   # Шаг сетки по t
a = 0.5     # Коэффициент теплопроводности
A = 1       # Константа
eps = 10**(-6)

# Инициализация сетки
x_i = np.arange(0 + eps, R, h) # Значения в узлах по r
t_j = np.arange(0 + eps, T, t) # Значение в узлах по t
r_i = len(x_i)            # Число узлов по r
r_j = len(t_j)            # Число узлов по t
u = np.zeros([r_j, r_i]) # Искомая сетка

# Начальное распределение температуры
def f_st(x): return np.cos(x)

# Вычисление начального распределения температуры
u[0] = f_st(x_i)

# Вычисление устойчивого условия
const = t / (h**2)
const2 = 1 / (2*(a**2))
print("t / h^2 =", float('{:.3f}'.format(const)))     # Вывод значения t / h^2
print("1 / 2a^2 = ", float('{:.3f}'.format(const2)))  # Вывод значения 1 / 2a^2

for j in range(len(u) - 1):
    for i in range(len(u[j]) - 1):
        u[j + 1, i] = u[j, i] + (a**2) * const * (u[j, i+1] - 2 * u[j, i] + u[j,
i - 1])


        # Граничные условия
        u[j, 0] = 0
        u[j, len(u[j]) - 1] = 0

plot_ = np.arange(0, 30, 2)
plt.figure(figsize=(16, 9))

plt.xlabel('r')
plt.ylabel('u(r,t)')
plt.grid(True)
for y in plot_:
    plt.plot(x_i, u[y])
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

```
import numpy as np
from scipy.optimize import newton
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры задачи
R = 8    # Радиус шара
A = 1    # Начальное распределение температуры
a = 0.5 # Коэффициент теплопроводности
N = 10   # Количество членов в ряде
T = 4    # Значение времени t на правой границе

eps = 10**(-6)

mu = np.array([(i) * np.pi for i in range (N)])

def phi(x): return A * (R - x)

# Вычисляем коэффициенты a_n
def integrand(ro, n):
    return ro * phi(ro) * np.sin(mu[n] * ro / R)

a_n = np.array([2 / R * quad(integrand, 0, R, args=(n))[0] for n in range(N)])

# Функция для вычисления температуры в зависимости от r и t
def u(r, t):
    return np.sum([a_n[n] * np.exp(-(a * mu[n] / R) ** 2 * t) * np.sin(mu[n] * r
/ R) for n in range(N)])

# Построение графика
# Функция для вычисления температуры в зависимости от r и t
u_vect = np.vectorize(u)

# Построение графика
r = np.linspace(0 + eps, R, 500)
t = np.linspace(0 + eps, T, 10)

plt.figure(figsize=(16, 9))
for time in t:
    plt.plot(r, u_vect(r, time), label=f't={time}')

plt.xlabel('r')
plt.ylabel('u')
plt.title('Распределение температуры в шаре')
plt.grid(True)
plt.show()
```