Построение разностной задачи

Равновесная форма свободной поверхности, определяющаяся функцией $y(x)$

19 апреля 2024 г.

1 Построение разностной задачи

Рассмотрим безразмерную постановку задачи о равновесной форме свободной поверхности, которая определяется функцией $y(x)$, $(0 \le x \le 1)$, которая зависит от двух параметров (число Бонда $Bo = \frac{\rho g}{\sigma}S$ и угол смачивания α и является решением краевой задачи вида:

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{Bo}{I}y + q, \tag{1}$$

$$y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$y'(1) = -tg\alpha, y(1) = 0, \tag{3}$$

$$I = 2\int_0^1 ydx \tag{4}$$

$$q = -sin\alpha - \frac{Bo}{2}. \tag{5}$$

Для аппроксимации уравнений (1)-(5) в области определения искомой функции () введем равномерную сетку $\omega_h = \{x_k = kh, k = \overline{0,N}, h = \frac{1}{N}\}$, где N - число разбиений отрезка $[0,1]$.

Запишем разностные уравнения для сеточной функции $y(x_k) = y_k, k = \overline{0,N}$, аппроксимирующие исходные уравнения с погрешностью $O(h^2)$.

Тогда вместо (1) будем иметь:

$$\frac{1}{h^2}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) = \left(1 + \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right)^2\right)^{3/2}\left(\frac{Bo}{I_h}y_k + q\right), \tag{6}$$

$$\text{где } q = -\left(\sin\alpha + \tfrac{Bo}{2}\right), \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Аппроксимации условий (2)-(3) примут следующий вид:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{h}{2}\left(\frac{Bo}{I_h}y_0 + q\right), \tag{7}$$

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = -tg\alpha - \frac{h}{2}\frac{1}{cos^3\alpha}q, y_N = 0. \tag{8}$$

Величину интеграла (4) вычислим по составной квадратурной формуле трапеций, а именно:

$$I_h = 2h\left(\frac{(y_0 + y_N)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right). \tag{9}$$

Таким образом, разностные уравнения (6)-(8) с учетом формулы (9) представляют собой разностную схему второго порядка аппроксимации.

2 Организация итерационного процесса

Так как система уравнений (6)-(9) является нелинейной, то для ее решения организуем следующий итерационный процесс. Вычисления на $m+1$ итерации осуществляются в таком порядке: сначала прогонкой решается нижеследующая система, образованная уравнениями (6), (7) и (8):

$$y_{k+1}^{(m+1)} - 2y_k^{(m+1)} + y_{k-1}^{(m+1)} = h^2 \left[1 + \left(\frac{y_{k+1}^{(m)} - y_{k-1}^{(m)}}{2h}\right)^2\right]^{3/2} \left(\frac{Bo}{I_h^{(m)}} y_k^{(m)}\right) + q, k = \overline{1, N-2}, \tag{10}$$

$$y_0^{(m+1)} = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2I_h^{(m)}} Bo} y_1^{(m+1)} - \frac{h^2 q}{2\left(1 + \frac{h^2}{2I_h^{(m)}} Bo\right)}, \tag{11}$$

$$y_{N-1}^{(m+1)} = htg\alpha + \frac{h^2}{2} \frac{1}{cos^3\alpha} q, y_N^{(m+1)} = 0. \tag{12}$$

Вследствие чего находятся $y_k^{(m+1)}$ при всех k. Для стабилизации итерационного процесса полученные значения $y_k^{(m+1)}$ пересчитываются по формуле:

$$y_k^{(m+1)} = \tau * y_k^{(m+1)} + (1-\tau) * y_k^{(m)}, \tag{13}$$

где τ - параметр релаксации $(0 < \tau \leq 1)$.

После этого уточняется значение I_h по формуле:

$$I_h^{(m+1)} = 2h\left(\frac{y_0^{(m+1)}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^{(m+1)}\right), \tag{14}$$

Итерации проводятся до достижения заданной точности ε, т.е. до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\frac{|y_k^{(m+1)} - y_k^{(m)}|}{\tau} \leq \varepsilon, \forall k. \tag{15}$$