DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS
OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1 Somme et produit

Soient f et g deux fonctions admettant des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x),$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$. Alors,

1. $f + g$ admet un DL en 0 à l'ordre n et

   $$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n+x^n\varepsilon(x),$$

   où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
2. $f \times g$ admet un DL en 0 à l'ordre n et

   $$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n \varepsilon(x),$$

   où $T_n(x)$ est le polynôme tronqué à l'ordre n et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2 Composition

Si $g(0) = 0$, alors la fonction fog admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $f(g(x))$, où

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

3 Intégration

Théorème 1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I dont le DL en $x_0 \in I$ à l'ordre n est*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \text{ où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit F une fonction primitive de f. Alors F admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$ et

$$F(x) = F(x_0) + a_0(x - x_0) + \ldots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + (x - x_0)^{n+1} \eta(x),$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} \eta(x) = 0$.