ESPACES VECTORIELS

DÉNINITION ET PROPRIÉTÉS D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition d'une application linéaire

Définition 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que l'aplication f est linéaire, si :*

1. $\forall (u, v) \in E^2,\ f(u + v) = f(u) + f(v)$.

2. $\forall\ (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est ***noté*** $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *ou, tout simplement, $\mathcal{L}(E, F)$.*

Remarque 1

1. *Une application linéaire f de E dans F est appelée $morphisme$ ou* ***homomorphisme****. Si, de plus, f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.*

2. *Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui même est appelée* ***endomorphisme****.*

2 Propriétés

Proposition 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors*

$$f(0_E) = 0_F \text{ et } \forall u \in E,\ f(-u) = -f(u).$$

Proposition 2 *(**Caractérisation d'une application linéaire**) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire, si et seulement si,*

$$\forall\ (u, v) \in E^2 \text{ et } \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Remarque 2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire, si et seulement si,*

$$\forall\ (u, v) \in E^2 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v).$$