# APPLICATIONS LINÉAIRES

## 1 Préliminaires

**Définition.**

*Soient $E$, $F$ deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application quelconque. On dit que :*

1. *$f$ est injective si :*
$$\forall (u, u') \in E^2,\ f(u) = f(u') \implies u = u'$$
2. *$f$ est surjective si*
$$\forall v \in F,\ \exists w \in E\ v = f(w)$$

**Définition.**

*Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *On appelle noyau de $f$ l'ensemble :*
$$Ker(f) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\}$$
2. *On appelle image de $f$ l'ensemble :*
$$Im(f) = \{v \in F,\ \exists w \in E\ v = f(w)\}$$

**Remarques :**

1. Soit $u \in E$. Dire que $u \in \mathrm{Ker}(f)$ signifie que $f(u) = 0_F$ :
$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0_F$$
2. Soit $v \in F$. Dire que $v \in \mathrm{Im}(f)$ signifie que $v = f(w)$ avec $w \in E$.
$$v \in \mathrm{Im}(f) \iff v = f(w) \text{ avec } w \in E \iff \exists w \in E,\ v = f(w)$$
3. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$ et $\mathrm{Im}(f) = \{\, f(u),\ u \in E \,\} = f(E)$.

## 2 Structure d'espaces vectoriels du noyau et de l'image d'une application linéaire

**Proposition (Noyau et image).**

*Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *$Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*
2. *$Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.*

**Preuve :**

1. • On a $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ et comme $f$ est linéaire de $E$ vers $F$, $f(0_E) = 0_F$. D'où, $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.

   • Soient $(u, v) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha\, u + v) &= \alpha\, f(u) + f(v) \text{ par linéarité de } f \\ &= \alpha\, 0_F + 0_F \\ &= 0_F \end{aligned}$$

   Donc, $\alpha\, u + v \in \mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f)$ est bien un sev de $E$.

2. • On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et comme $f$ est linéaire de $E$ vers $F$, $0_F = f(0_E)$. D'où, $0_F \in \mathrm{Im}(f)$.

   • Soient $(v, v') \in (\mathrm{Im}(f))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha\, v + v' &= \alpha\, f(w) + f(w') \text{ avec } (w, w') \in E^2 \\ &= f(\alpha\, w + w') \text{ par linéarité de } f \end{aligned}$$

   Comme $\alpha\, w + w' \in E$, , $\alpha\, v + v' \in \mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f)$ est bien un sev de $F$.

## 3 Lien avec l'injectivité et la surjectivité

**Proposition (Caractérisation de l'injectivité et la surjectivité).**

*Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *$f$ injective $\Longleftrightarrow$ Ker$(f) = \{0_E\}$.*
2. *$f$ surjective $\Longleftrightarrow$ Im$(f) = F$.*

**Preuve :**

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $f$ injective. On sait que

$$\forall\, (u, u') \in E^2,\ f(u) = f(u') \implies u = u'$$

   • Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$.
   $f(u) = 0_F$ et $0_F = f(0_E)$ (car $f$ linéaire) $\Longrightarrow f(u) = f(0_E) \implies u = 0_E$ par injectivité de $f$.
   On a montré que $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$.

   • Comme, $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

   Soit $(u, u') \in E^2$ tel que $f(u) = f(u')$. On a

$$\begin{aligned} f(u) = f(u') &\implies f(u) - f(u') = 0_F \\ &\implies f(u - u') = 0_F \text{ par linéarité de } f \\ &\implies u - u' \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\implies u - u' \in \{0_E\} \text{ par notre hypothèse} \\ &\implies u - u' = 0_E \\ &\implies u = u' \end{aligned}$$

   $f$ est donc injective.

2. On a

$$\begin{aligned} f \text{ surjective } &\Longleftrightarrow \forall\, v \in F,\ \exists\, u \in E\ v = f(u) \\ &\Longleftrightarrow \forall\, v \in F,\ v \in \mathrm{Im}(f) \\ &\Longleftrightarrow F \subset \mathrm{Im}(f) \\ &\Longleftrightarrow F = \mathrm{Im}(f) \text{ car l'inclusion } \mathrm{Im}(f) \subset F \text{ est toujours vraie} \end{aligned}$$