BASES ET DIMENSION D'UN EV

1 Bases

Théorème (Caractérisation d'une base).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$. On a :

$$(e_1, \ldots, e_n) \text{ base de } E \iff \forall\, u \in E,\, \exists !\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\; u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, α_i est appelé i-ème coordonnée de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Preuve :

$\boxed{\Longrightarrow}$ • Existence : elle est immédiate car $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E.

• Unicité. Soit $u \in E$.
Supposons $\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \quad \text{et} \quad u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

On a

$$\begin{aligned}
&u - u = (\alpha_1 - \lambda_1) e_1 + \ldots + (\alpha_n - \lambda_n) e_n = 0_E \\
&\quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 - \lambda_1 = \ldots = \alpha_n - \lambda_n = 0 \;\; \text{car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ libre} \\
&\quad \Longrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!]\;\; \alpha_i = \lambda_i
\end{aligned}$$

La décomposition est unique.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall\, u \in E,\, \exists !\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\; u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

• $(e_1, \ldots, e_n)$ est alors génératrice de E.

• $(e_1, \ldots, e_n)$ libre ?
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E$. Cela nous donne une décomposition du vecteur nul de E selon $e_1, \ldots, e_n$. Or, on peut aussi écrire que $0 e_1 + \ldots + 0 e_n = 0_E$ ce qui nous donne une seconde décomposition. Par unicité de la décomposition, on en déduit que

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

• Conclusion : $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

2 Existence d'une base en dimension finie

Théorème (Existence d'une base).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie avec $E \neq \{0_E\}$. Alors E admet au moins une base.

Preuve :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie avec $E \neq \{0_E\}$. On sait alors que E admet une famille génératrice finie. Notons $G = (u_1, \ldots, u_n)$ cette famille génératrice.

• Si G est libre alors G est une base de E.

• Si G est liée alors un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs. Quitte à renommer les vecteurs, on peut supposer par exemple que c'est u_n. On a alors

$$E = \mathrm{Vect}(G) = \mathrm{Vect}\left((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)\right) = \mathrm{Vect}\left((u_1, \ldots, u_{n-1})\right)$$

ce qui signifie que la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est génératrice de E.

• Si la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est libre alors c'est une base de E.

• Si la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est liée alors un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et on peut l'éliminer. On répète alors le principe. La famille ayant un nombre fini de vecteurs au départ, le processus s'arrêtera au maximum quand il n'en restera plus qu'un, par exemple u_1. u_1 étant non nul (car $E \neq \{0_E\}$), il formera une famille libre et génératrice de E donc une base.