ESPACES VECTORIELS

1 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition (Intersection de sev).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

• $F \subset E$ et $G \subset E \Longrightarrow F \cap G \subset E$.

• F et G sous-espaces vectoriels de $E \Longrightarrow 0_E \in F$ et $0_E \in G \Longrightarrow 0_E \in F \cap G$.

• Soient $(u, v) \in (F \cap G)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $(u, v) \in F^2$ et $(u, v) \in G^2$. Or

$$\begin{aligned} &F \text{ sous-espace vectoriel de } E \Longrightarrow \alpha\, u + v \in F. \\ &G \text{ sous-espace vectoriel de } E \Longrightarrow \alpha\, u + v \in G. \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha\, u + v \in F \cap G$.

2 Somme de sous-espaces vectoriels

Proposition (Somme de sev).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

On rappelle que $F + G = \{u \in E, \exists\, (u_1, u_2) \in F \times G, u = u_1 + u_2\}$.

Ainsi, un vecteur u de E est dans $F + G$ si on peut l'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$u = \underbrace{u_1}_{\in F} + \underbrace{u_2}_{\in G}$$

• De par sa définition, $F + G \subset E$.

• $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ car F et G sev de E. D'où, $0_E \in F + G$.

• Soient $(u, v) \in (F + G)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\exists\ (u_1, u_2) \in F \times G$ et $\exists\, (v_1, v_2) \in F \times G$ tels que $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$. Ainsi,

$$\alpha\, u + v = \alpha\, (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = \underbrace{(\alpha\, u_1 + v_1)}_{\in F} + \underbrace{(\alpha\, u_2 + v_2)}_{\in G}$$

car F et G sev de E. Donc $\alpha\, u + v \in F + G$.

Théorème (Unicité de la décomposition dans $F+G$).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe c'est-à-dire $F \cap G = \{0_E\}$.
Alors la décomposition est unique dans $F+G$:

$$\forall\, u \in F+G, \exists\,!(u_1, u_2) \in F \times G,\ u = u_1 + u_2$$

Preuve :

Soit $u \in F+G$. Supposons deux décompositions possibles :

$$u = u_1 + u_2 \text{ avec } (u_1, u_2) \in F \times G \text{ et } u = v_1 + v_2 \text{ avec } (v_1, v_2) \in F \times G$$

Alors, $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \Longrightarrow u_1 - v_1 = v_2 - u_2$. Comme $(u_1, v_1) \in F^2$ et F sev de E, $u_1 - v_1 \in F$. De même, $v_2 - u_2 \in G$ car $u_2 \in G$, $v_2 \in G$ et G sev de E. Ainsi, $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in G$ et on obtient $u_1 - v_1 \in F \cap G$. Comme F et G sont en somme directe, on en déduit que $u_1 - v_1 = 0_E$ c'est-à-dire $u_1 = v_1$. De là, on en déduit que $u_2 = v_2$. L'écriture est unique.

3 Espaces vectoriels engendrés

Proposition (Ev engendré).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$. Si u_n est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ alors

$$Vect\,((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)) = Vect\,((u_1, \ldots, u_{n-1}))$$

Preuve :

$\boxed{\subset}$ Soit $v \in \text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n))$.

$$\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_n u_n$$

Or $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $u_n = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1}$. D'où

$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_n \lambda_1 u_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n-1} u_{n-1} = (\alpha_1 + \alpha_n \lambda_1) u_1 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n \lambda_{n-1}) u_{n-1}$

Donc $v \in \text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}))$.
On a montré que $\text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)) \subset \text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}))$.

$\boxed{\supset}$ Soit $v \in \text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}))$.

$$\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que } v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + 0 u_n$$

Donc $v \in \text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n))$.
On a montré que $\text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1})) \subset \text{Vect}\,((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n))$