



GRUNDPRAKTIKUM

M3: Elastizität und Torsion

Autor:

[REDACTED]

Partner:

[REDACTED]

Versuchsdatum: [REDACTED]

Versuchsplatz: [REDACTED]

Abgabedatum: [REDACTED]

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	2
2	Messwerte und Auswertung	2
2.1	Bestimmung des Elastizitätsmoduls E	2
2.2	Bestimmung des Torsionsmoduls G	4
3	Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung	4
A	Anhang	6

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch M3: Elastizität und Torsion hat zum Ziel zwei Materialparameter von Messing zu bestimmen: den Elastizitäts- und den Torsionsmodul. Dabei wird zuerst die Dehnung eines Messingdrahtes unter Zugspannung gemessen, und im zweiten Versuch das Schwingungsverhalten eines Torsionspendels aus dem gleichen Material. Eine detaillierte Aufstellung der physikalischen Hintergründe und des Versuchsaufbaus befindet sich im Skript [Mü 12, S.41-44], deswegen folgt hier nur eine kurze Übersicht.

Im ersten Versuch wurde ein Messingdraht sukzessive mit Gewichten belastet, und die Auslenkung von der Nullmessung aufgenommen. Mit Kenntnis einiger weiterer geometrischer Parameter kann aus den Wertepaaren nach Formel (11)¹ mit Hilfe einer linearen Regression der gesuchte Elastizitätsmodul E berechnet werden.

Im zweiten Versuch wurde der Messingdraht mit zwei unterschiedlichen Gewichten belastet und verdreht. Aus den gemessenen Periodendauern der einsetzenden Pendelbewegung, und mit Kenntnis über das Zusatzträgheitsmoment J_s sowie die Geometrie des Drahtes, kann nach dem Zusammenhang (10) dann der Torsionsmodul G von Messing bestimmt werden.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls E

Die Versuchsdurchführung wurde skriptgemäß durchgeführt. Nach der Nullpunktbestimmung der Messapparatur wurde der am Arbeitsplatz vorhandene Messingdraht (Radius $R = (0,15 \pm 0,01) \text{ mm}$, Länge $l = (2160 \pm 5) \text{ mm}$, am Arbeitsplatz vorgegeben) mit Massestücken (Masse $m = 50 \text{ g}$ und $m = 100 \text{ g}$, als fehlerfrei angenommen) belastet. Die Belastung wurde dabei von 50 g in 50 g Schritten bis 800 g erhöht, und jeweils mit der Bügelmessschraube die Auslenkung l_i gemessen. Die Differenz der Auslenkung vom Nullpunkt $l_i - l_0$ ergibt dann die tatsächliche Dehnung des Drahtes in Folge der Belastung Δl . Eine zweite Messreihe wurde in umgekehrter Reihenfolge der Belastung durchgeführt.

Für die graphische Darstellung wurde statt der im Skript vorgeschlagenen folgende Form gewählt:

$$f(\Delta l) = \Delta l \cdot \frac{A}{g} = \frac{1}{E} \cdot m$$

Der Vorteil besteht in der Möglichkeit, die Unsicherheiten aller signifikant fehlerbehafteten Größen für die Gewichtung in der Regression zu nutzen. Lediglich der - sehr kleine - Fehler der Belastungsmassen m wird nun vernachlässigt. Die Wertepaare $f(\Delta l)$ und m wurden mit Hilfe von *OriginPro 8* graphisch dargestellt, und einer Regression der Form $y = a \cdot x$ unterzogen. Die Gewichtung erfolgte dabei mit $u_{f(\Delta l)}$ als y-Fehler gemäß der Instrumental-Methode. Die für die Regression verwendeten

¹Formelverweise in runden Klammern beziehen sich auf die Versuchsbeschreibung auf den Seiten 41-44 im gelben Skript [Mü 12].

Zwischenergebnisse finden sich im Anhang.

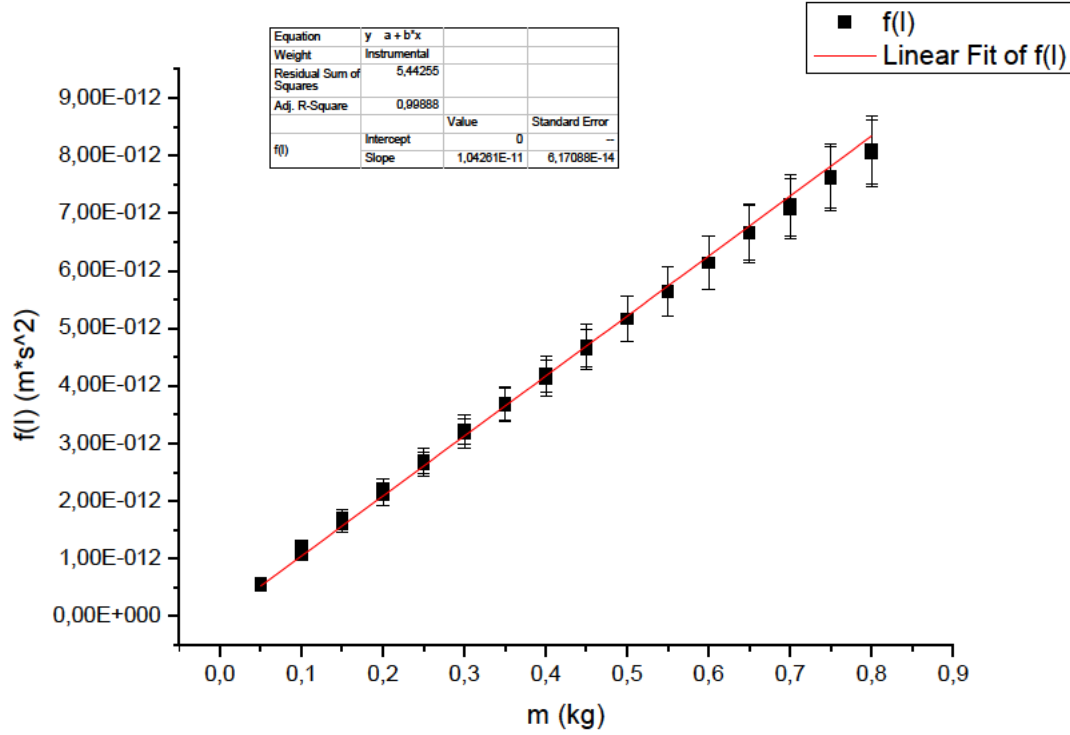


Abbildung 1: Bestimmung von E aus dem Inversen des Anstiegs

Um $u_{f(\Delta l)}$ zu ermitteln wurde die Funktion $f(\Delta l)$ gemäß der Formeln [30] bis [33] des blauen Skripts [Mü 07] abgeschätzt. Die Erdbeschleunigung wurde mit dem offiziellen Wert für Berlin $g = 9,81$ angenommen und als fehlerfrei betrachtet. Die Unsicherheit der Drahtlänge $u_l = 5 \text{ mm}$ war vorgegeben, der Fehler $u_{\Delta l}$ ergibt sich aus der systematischen Unsicherheit der Bügelmessschraube ($50 \mu\text{m} \pm 10^{-5} \cdot \Delta l$) nach Formel [30]. Die Unsicherheit der Drahtfläche u_A berechnet sich aus dem am Messplatz angegebenen Fehler $u_R = 0,01 \text{ mm}$ nach [32]. Letztlich wurden dann die relativen Unsicherheiten nach [31] addiert und mit dem Funktionswert $f(\Delta l)$ multipliziert:

$$u_{f(\Delta l)} = \pm \left(\left| \frac{u_{\Delta l}}{\Delta l} \right| + \left| 2 \frac{u_R}{R} \right| + \left| \frac{u_l}{l} \right| \right) \cdot f(\Delta l)$$

Mit Hilfe der Regression kann nun der gesuchte Elastizitätsmodul aus dem Kehrwert des Anstiegs abgelesen werden. Die Unsicherheit u_E ergibt sich dann aus dem relativen Fehler des Anstiegs, multipliziert mit E . So ergibt sich der folgende Wert für den Elastizitätsmodul von Messing:

$$E = (9,59 \pm 0,06) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 95,9 \pm 0,6 \text{ GPa}$$

2.2 Bestimmung des Torsionsmoduls G

Für den zweiten Versuch wurden der Messingdraht (Daten wie oben) als Torsionspendel genutzt. Dazu wurde er zuerst ohne zusätzliche Belastung verdreht, und sechs Mal 30 Perioden gemessen (T_v). Für die zweite Messreihe wurde der Draht mit einer Scheibe (Masse $m_s = (130,472 \pm 0,001) \text{ g}$ und Radius $r_s = (25,0 \pm 0,05) \text{ mm}$) belastet, und die Pendelbewegung sechs Mal für 10 Perioden gemessen (T_s). Nun wurde der Mittelwert über die zwei Messreihen gebildet, und durch die jeweilige Periodenzahl geteilt, um die Periodendauer für eine Periode \bar{T}_s und \bar{T}_v zu erhalten. Die entsprechenden Werte und Zwischenergebnisse befinden sich im Anhang.

Jetzt kann die Formel (10) genutzt werden, um den Torsionsmodul zu bestimmen. Sein Fehler u_G wurde durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (10) errechnet, mit partiellen Ableitungen nach l, R, m_s, r_s, T_s und T_v . Die einzelnen Fehlerbeiträge bestimmen sich wie folgt: u_l, u_R, u_{m_s} und u_{r_s} waren wie oben erwähnt am Versuchsplatz angegeben. Die Unsicherheiten u_{T_v} und u_{T_s} der Mittelwerte für eine Periode ergeben sich aus dem Fehler $\Delta t = 0,01 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$ der verwendeten Stoppuhr.

$$u_G = G \cdot \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(4\frac{u_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{m_s}}{m_s}\right)^2 + \left(2\frac{u_{r_s}}{r_s}\right)^2 + \left(2\frac{T_v \cdot u_{T_v}}{T_s^2 - T_v^2}\right)^2 + \left(2\frac{T_s \cdot u_{T_s}}{T_s^2 - T_v^2}\right)^2}$$

Es ergibt sich als vollständiges Messergebnis für den Torsionsmodul G von Messing:

$$G = (3,66 \pm 0,49) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 36,6 \pm 4,9 \text{ GPa}$$

3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die gefundenen Werte passen zu den Literaturwerten für G und E von Messing, die beispielsweise in [Il 88, S. 275] mit $G = 26...41 \text{ GPa}$ und $E = 80...103 \text{ GPa}$ angegeben werden. Die Messergebnisse und ihre Unsicherheiten von $E = 95,9 \pm 0,6 \text{ GPa}$ und $G = 36,6 \pm 4,9 \text{ GPa}$ können damit als zufrieden stellend bezeichnet werden.

Im ersten Versuch wurde die Berücksichtigung möglichst vieler Unsicherheiten in der Regression angestrebt. Vernachlässigte Fehlerquellen sind die Massenstücke, die Hysterese bei der zweiten Messreihe und die Verkleinerung des Drahtdurchmessers infolge der Streckung. Alle sich daraus ergebenden Unsicherheiten können allerdings als sehr klein und somit unerheblich angenommen werden.

Von den berücksichtigten Fehlern sticht keiner durch besonderes Gewicht heraus. Der relative Fehler von Δl nimmt allerdings mit zunehmender Belastung signifikant ab, was seine Berücksichtigung bei der Regression besonders wichtig macht. Hierbei sollte auch bedacht werden, dass $u_{\Delta l}$ vermutlich etwas unterschätzt wurde, da das Ablesen der Libelle ungenauer war als es die rein systematische Unsicherheit der Bügelmessschraube, die jetzt $u_{\Delta l}$ bestimmt, widerspiegelt. Bei einer erneuten

Versuchsdurchführung würde es sich also anbieten, eine eigene Messreihe bei gleicher Belastung anzufertigen, aus der eine Standardabweichung für das Ablesen der Libelle gebildet werden kann. In Tab. 1 sind die berücksichtigten Fehlerbeiträge exemplarisch für zwei Messwerte bei geringer und hoher Belastung dargestellt.

Tabelle 1: Exemplarische Fehlerbeiträge zur Bestimmung von E

m	$\frac{u_{\Delta l}}{\Delta l}$	$\frac{u_R}{R}$	$\frac{u_l}{l}$
0,05	5,97E-02	6,67E-02	2,31E-03
0,80	4,18E-03	6,67E-02	2,31E-03

Konstruktionsbedingt wurde beim zweiten Versuch statt eines Vollzylinders ein Hohlzylinder genutzt, um das zusätzliche Trägheitsmoment J_s zu erzeugen. Damit sind streng genommen die verwendeten Formeln für J_s nicht korrekt, doch der so verursachte Fehler kann als sehr gering angenommen werden und wurde deswegen vernachlässigt. Ein Blick auf die Beiträge der berücksichtigten Fehler (vgl. Tab. 2) zeigt, dass die Unsicherheit des Drahradius u_R besonders ins Gewicht fällt, während der Fehler der Masse der Zusatzscheibe u_m vernachlässigbar gegenüber den übrigen Unsicherheiten ist. Um das Messergebnis also weiter zu verbessern könnte der Radius des Drahtes genauer bestimmt werden, oder aber ein dickerer Draht verwendet werden, um den relativen Fehler zu verringern.

Tabelle 2: Fehlerbeiträge zur Berechnung von G

	$\frac{\partial G}{\partial l}$	$\frac{\partial G}{\partial R}$	$\frac{\partial G}{\partial m}$	$\frac{\partial G}{\partial r_s}$	$\frac{\partial G}{\partial T_s}$	$\frac{\partial G}{\partial T_v}$
u_x	1,69E+10	-9,75E+14	2,80E+11	2,93E+12	-7,70E+09	3,80E+09
$(u_x \cdot \bar{x})^2$	7,17E+15	2,38E+19	7,86E+10	2,14E+16	6,68E+15	1,63E+15

Literatur

- [Il 88] Illberg, W. *Physikalisches Praktikum für Anfänger*. 8. Auflage, 1988.
- [Mü 07] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.
- [Mü 12] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik*. 2012.

A Anhang

Tabelle 3: Regression mit $f(\Delta l) = E^{-1} \cdot m$

m [kg]	Reihe 1		Reihe 2	
	$f(\Delta l)$ [$m \cdot s^2$]	$u_{f(l)}$ [$m \cdot s^2$]	$f(\Delta l)$ [$m \cdot s^2$]	$u_{f(l)}$ [$m \cdot s^2$]
5,00E-02	5,34E-13	7,07E-14	5,67E-13	7,30E-14
1,00E-01	1,07E-12	1,07E-13	1,20E-12	1,17E-13
1,50E-01	1,60E-12	1,44E-13	1,70E-12	1,51E-13
2,00E-01	2,10E-12	1,79E-13	2,20E-12	1,86E-13
2,50E-01	2,64E-12	2,16E-13	2,70E-12	2,20E-13
3,00E-01	3,17E-12	2,52E-13	3,24E-12	2,57E-13
3,50E-01	3,67E-12	2,87E-13	3,70E-12	2,89E-13
4,00E-01	4,14E-12	3,19E-13	4,20E-12	3,24E-13
4,50E-01	4,64E-12	3,54E-13	4,70E-12	3,58E-13
5,00E-01	5,17E-12	3,91E-13	5,17E-12	3,91E-13
5,50E-01	5,64E-12	4,23E-13	5,64E-12	4,23E-13
6,00E-01	6,14E-12	4,57E-13	6,14E-12	4,57E-13
6,50E-01	6,64E-12	4,92E-13	6,67E-12	4,94E-13
7,00E-01	7,07E-12	5,22E-13	7,14E-12	5,26E-13
7,50E-01	7,61E-12	5,59E-13	7,64E-12	5,61E-13
8,00E-01	8,04E-12	5,88E-13	8,11E-12	5,93E-13

Tabelle 4: Periodendauer des Torsionspendels

	T_v [s]	T_s [s]
	186,18	125,63
	186,37	125,50
	186,16	125,78
	186,13	125,78
	186,16	125,84
	186,32	125,78
Mittelwert	186,22	125,72
Perioden	30	10
1 Periode	6,21	12,57
Unsicherheit	0,01	0,01