



GRUNDPRAKTIKUM

---

## O11: Polarisation durch Reflexion

---

*Autor:*

■■■■■■■■■■

*Partner:*

■■■■■■■■■■

Versuchsdatum: ■■■■■■■■■■

Versuchsplatz: ■■■■■■■■■■■■■■■■

Abgabedatum: ■■■■■■■■■■

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Verlauf des Experiments</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Bestimmung des Brewster-Winkels</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Berechnung von <math>n</math> für PMMA-Glas</b>	<b>6</b>
5.1	Mit dem Brechungsgesetz im Brewster-Winkel . . . . .	6
5.2	Mit einem nicht-linearen Fits über die Messdaten . . . . .	6
5.3	Mit den Reflexionskoeffizienten für senkrechten Einfall . . . . .	8
5.4	Einschätzung zu den Methoden der $n$ -Bestimmung . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung</b>	<b>10</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>13</b>

# 1 Einleitung

Der Versuch O11: Polarisation durch Reflexion hat zum Ziel, die aus den Maxwell-Gleichungen hergeleiteten Koeffizienten für die Lichtintensität von reflektierten Wellen experimentell am Beispiel eines Glasprismas zu bestätigen. Darüber hinaus wird mit dem Versuch deutlich, dass die Kenntnis der Reflexionseigenschaften eines Materials dazu dienen kann, weitere Informationen über das Medium zu gewinnen. Beispielhaft wurde hier der Brechungsindex  $n(\lambda)$  des verwendeten Acrylglases auf verschiedene theoretisch begründete Methoden bestimmt.

## 2 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Die physikalischen Grundlagen des Versuchs und eine detaillierte Beschreibung der Aufgabenstellung befinden sich in [2, S. 82-85]. Wo nicht anders erwähnt wurde der Versuch wie dort beschrieben durchgeführt.

## 3 Verlauf des Experiments

Für die Messung mit senkrecht zur Einfallsebene polarisiertem Licht (TE-Wellen) wurden die Polarisationsfilter PF1 und PF2 auf  $\psi_1 = (53 \pm 2)^\circ$  respektive  $\psi_2 = (180 \pm 2)^\circ$  eingestellt. Es gilt dann:

$$R_s = \frac{I_{rs}}{I_{es}} = \frac{\sin^2(\alpha_e - \alpha_g)}{\sin^2(\alpha_e + \alpha_g)} \quad (1)$$

wobei  $R_s$  den Reflexionskoeffizient für TE-Wellen bezeichnet,  $I_{rs}$  und  $I_{es}$  die Intensitäten des reflektierten und eintreffenden Lichts sind und  $\alpha_e$  und  $\alpha_g$  für die Winkel der einfallenden Welle respektive der transmittierten Welle stehen.

Für den Fall der parallel zur Einfallsebene polarisierten Welle (TM-Welle) wurden PF1 und PF2 auf  $\psi_1 = (10 \pm 2)^\circ$  bzw.  $\psi_2 = (90 \pm 2)^\circ$  eingestellt. Dann gilt:

$$R_p = \frac{I_{rp}}{I_{ep}} = \frac{\tan^2(\alpha_e - \alpha_g)}{\tan^2(\alpha_e + \alpha_g)} \quad (2)$$

wobei alle Größen analoge Bedeutungen zu Gleichung (1) besitzen. Wenn im Folgenden von  $R_i$  gesprochen wird, sind damit  $R_s$  und  $R_p$  gemeint.

Mit dem Brechungsgesetz ergibt sich weiterhin

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_L}{n} \cdot \sin \alpha_e\right) \quad (3)$$

wobei  $n_L \approx 1$  den Brechungsindex von Luft und  $n$  den unbekannten Brechungsindex des Prismenmaterials, in diesem Fall von PMMA Acrylglas, bezeichnet.

### Zur Intensitäts- bzw. Spannungsmessung

Um den Verlauf von  $R_i$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha_e$  zu bestimmen wurde die Spannung einer Photodiode gemessen, für die  $U \propto I$  gilt. Zuerst musste dafür die Messvorrichtung justiert werden um die Hintergrundstrahlung im Raum zu kompensieren, aber insbesondere auch um eine Sättigung der Photodiode während des Versuchs zu vermeiden, die bei etwa 5 V auftritt.

Die maximale Spannung  $U_0 \propto I_0$  für den Aufbau ohne Prisma, also für die einfallende Welle, wurde in diesem Zuge für die TE-Messung auf etwa  $U_{0s} \approx 4,5 \text{ V}$  eingestellt, im Falle der TM-Messung auf etwa  $U_{0p} \approx 4,8 \text{ V}$ . Dabei wurden die  $U_{0i}$  jeweils sechs Mal gemessen, um über die Schwankungen einen Vergleichswert für den statistischen Fehler zu erhalten der auftrat, wenn die Photodiode auf den Laserstrahl zentriert werden musste. Zusammen mit dem systematischen Fehler des verwendeten Multimeters  $e_s = 0,3 \% \cdot U + 0,001 \text{ V}$  ergibt sich durch pythagoräische Addition die Unsicherheit von  $U_{0i}$ . Mit den Werten aus Tabelle 2 im Anhang folgt

	$U_{0s} [\text{V}]$	$U_{0p} [\text{V}]$
Mittelwert	4,46	4,81
Vertrauensbereich	0,03	0,02
Syst. Fehler	0,01	0,02
Unsicherheit	0,03	0,02

Im nächsten Schritt wurden dann in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha_e$  die jeweiligen Diodenspannungen  $U(\alpha_e)$  aufgenommen. Dabei konnte der jeweilige Vertrauensbereich von  $U_0$  verwendet werden, um die statistische Unsicherheit der einzelnen Spannungsmessungen abzuschätzen: dazu wurden die relativen statistischen Fehler von  $U_{0i}$  zu  $e_{zs} = U \cdot 7\%$  und  $e_{zp} = U \cdot 4\%$  für die TE- bzw. TM-Messungen bestimmt. Die Unsicherheiten der Einzelmessungen  $U(\alpha_e)$  ergeben sich also allgemein zu

$$u_{U(\alpha_e)} = \sqrt{e_z^2 + e_s^2} \text{ für } \alpha_e \notin M \quad (4)$$

Diese Fehler bewegen sich relativ zum Messwert zwischen 0,7% und 50,2% (TM) und zwischen 0,5% und 0,7% (TE) für große bzw. kleine gemessene Spannungen und spiegeln so das große Gewicht systematischer Fehler für kleine Werte wider, bleiben dabei aber in einem realistischen Rahmen und divergieren nicht. Sie geben die Unsicherheit für alle Spannungsmessungen mit einer Ausnahme, die im Folgenden beschrieben wird, an.

Während der Versuchsdurchführung wurde bemerkt, dass im Intervall

$$M = \{7,5^\circ \leq \alpha_e \leq 12,5^\circ\} \quad (5)$$

also für je drei Messpunkte der TM- und der TE-Messungen, ungewöhnlich hohe Spannungen aufgenommen wurden. Der Grund dafür lag in der Reflexion des transmittierten Lichtes an der hinteren Grenzfläche des Zylinderprismas, die unter dieser Geometrie ebenfalls in die Photodiode geworfen wurde. Die Messwerte in diesem Bereich wurden im TE-Fall mehrmals aufgenommen, siehe Tabelle 3, aber es konnte kein eindeutiger Effekt auf die gemessene Spannung in Abhängigkeit vom Winkel festgestellt werden. Dies lag zum einen am Zustand der Versuchsanordnung an Platz 3: die Lagerung des Tisches war abgenutzt und jede Messung erforderte ein manuelles Nachjustieren in vertikaler Richtung, um den Laser tatsächlich auf die Photodiode auszurichten. In Folge war es extrem schwierig, gerade die Messwerte im Bereich niedriger Spannungen zuverlässig zu reproduzieren (siehe auch Diskussion weiter unten). Zum anderen gestattete es der Versuchsaufbau aus geometrischen Gründen nicht, die Störstrahlung separat von der eigentlich zu messenden Intensität aufzunehmen. Um der Problematik zu begegnen wurde stattdessen die Unsicherheit der Spannungsmessungen im genannten Intervall vergrößert.

Die Abhängigkeit zwischen Spannung und Winkel wurde im kleinen Intervall  $M$  vereinfachend als linear angenommen. Dann können die zwei Werte, die noch als zuverlässig gelten, also  $U(5^\circ)$  und  $U(15^\circ)$ , dazu benutzt werden eine Gerade zu definieren. Aus deren Anstieg

$a$  und Achsenabschnitt  $b$  können die zu erwartenden Messwerte im Intervall interpoliert, also geschätzt, werden. Die entsprechenden Daten finden sich im Anhang in den Tabellen 4 und 5. Die Differenz  $\Delta$  zwischen den interpolierten Werten  $U(\alpha_e)_I$  und den reell gemessenen Werten  $U(\alpha_e)$  gibt dann eine Abschätzung für den Einfluss der Störstrahlung auf die Spannungsmessung. Im Sinne eine Größtfehlerabschätzung wurde das Maximum der Differenzen  $\Delta_{max} = 0,011 \text{ V}$  genommen und pythagoräisch zum Fehler der Spannungsmessungen im Intervall  $M$  addiert:

$$u_{U(\alpha_e)} = \sqrt{e_z^2 + e_s^2 + \Delta_{max}^2} \quad \text{für } \alpha_e \in M \quad (6)$$

Diese Abschätzung wurde separat aber analog für die TE- und die TM-Messreihen durchgeführt.

Mit den so gemessenen  $U(\alpha_e)$  konnte nun für jeden Winkel die Quadratwurzel des Reflexionskoeffizienten nach den folgenden Gleichungen ausgerechnet werden und mit Anwendung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung die entsprechenden Unsicherheiten bestimmt werden:

$$R_i = \frac{I_{ri}(\alpha_e)}{I_{ei}} = \frac{U(\alpha_e)}{U_{0i}} \quad (7)$$

$$u_{\sqrt{R_i}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{R_i}U_0} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{U}{2R_i} \cdot u_{U_0}\right)^2} \quad (8)$$

Die so gemessenen und berechneten Größen können im Anhang in den Tabellen 8 und 9 nachgeschlagen werden.

### Zur Winkelmessung

Am Messplatz wurde der Winkel  $\varphi$  mit Hilfe eines Winkelmessers, der die Lage der Photodiode relativ zum Tisch angab, gemessen: auf die reflektierte Welle eingestellt gilt hier mit  $\alpha_e = \alpha_r$  und somit

$$\varphi = 2\alpha_e \quad (9)$$

So war der Winkel nicht nur einfacher abzulesen, auch der Ablesefehler der Winkelanzeige wird letztlich halbiert. Es wird angenommen, dass der Teilungsfehler der Winkelskala gegenüber den statistischen Fehlern zu vernachlässigen ist.

Der Winkelmesser erlaubte es, den eingestellten Winkel auf einen halben Skalenteil, also  $e_z = 0,5^\circ$  einzustellen. Die tatsächliche Genauigkeit der Winkeleinstellung war jedoch geringer: wie oben bereits erwähnt erforderte der schlechte Zustand der Messapparatur ständiges manuelles Nachjustieren des Trägerarms in vertikaler Richtung. Dabei traten weitere Schwankungen des eingestellten Winkels auf, die hier mit einer zusätzlichen Unsicherheit bei der Winkelmessung von  $e_y = 0,5^\circ$  berücksichtigt werden. Im Sinne eine Größtfehlerabschätzung gilt dann

$$u_{\alpha_e} = \frac{1}{2} \cdot u_\varphi = 0,5^\circ \quad (10)$$

An dieser Stelle ist es auch angebracht zu erwähnen, warum aus den vier Messreihen für die ersten Messungen der  $U(\alpha_e)$ , die oben erwähnt wurden, die vierte Messreihe  $U^{(4)}$  ausgewählt wurde: hier hatten die Experimentatoren bereits eine Methodik entwickelt, die durch das Spiel der Tischhalterung bedingten Schwankungen zu minimieren. Die gesamte Messreihe für alle  $\alpha_e$  wurde danach mit dieser Methodik am Stück gemessen und ist somit zumindest in sich konsistent von diesem zusätzlichen Fehler betroffen.

## 4 Bestimmung des Brewster-Winkels

Werden nun nach Gleichung (1) die Messwerte von  $\sqrt{R_i}$  und  $\alpha_e$  gegeneinander aufgetragen, entsteht eine Kurve, die dem Verlauf in Abb. 16.2 im Skript [2, S. 83] ähnelt. Insbesondere ist in der Darstellung von  $\sqrt{R_p}$  in Abbildung 1 gut sichtbar, dass es ein Intensitätsmaximum im Bereich um  $\alpha_e = 55^\circ$  gibt, denn dort tritt für das verwendete Acrylglas der Brewster-Winkel  $\alpha_B$  auf.

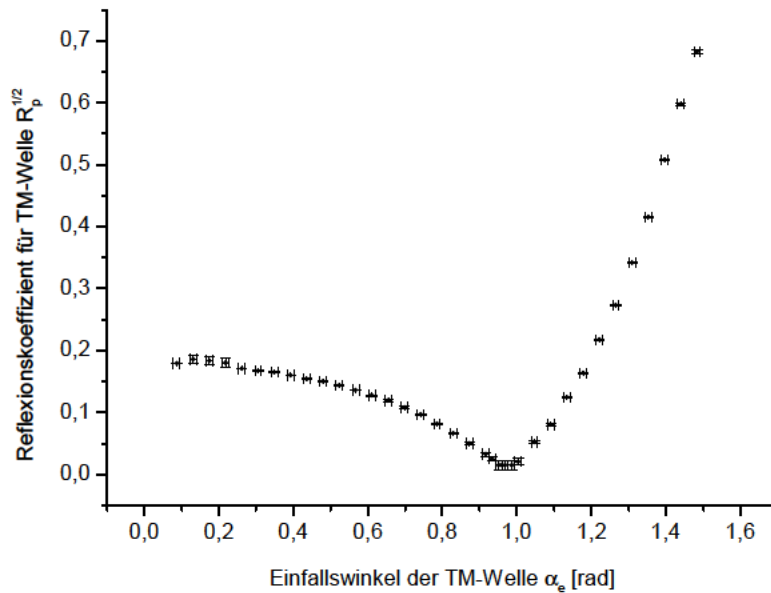


Abbildung 1: Graphische Darstellung der TM-Messung, der Brewster-Winkel ist deutlich als Minimum der Kurve erkennbar

Um den Wert von  $\alpha_B$  möglichst präzise zu bestimmen wurde die Empfindlichkeit der Photodiode erhöht (Einstellung: Gain 100) und im Bereich  $55^\circ \leq \alpha_e \leq 57^\circ$  weitere kleinschrittige Messungen durchgeführt, die in Tabelle 1 aufgeführt sind.

Tabelle 1: Feinmessung des Brewster-Winkels mit Gain 100 an der Photodiode

$\alpha_e$ [°]	$u_{\alpha_e}$	$U(\alpha_e)$ [V]
55,0	0,5	0,094
55,5	0,5	0,079
56,0	0,5	0,079
56,5	0,5	0,116
57,0	0,5	0,175

Die minimale Spannung wurde für  $\alpha_1 = 55,5^\circ$  und  $\alpha_2 = 56,0^\circ$  gemessen, eine nähere Bestimmung war aufgrund der oben genannten Probleme mit dem Aufbau an Platz 3 schwer möglich. Der Brewster-Winkel wird also als Mittelwert der beiden  $\alpha_i$  bestimmt, wobei die Unsicherheit hier statt durch Fehlerfortpflanzung mit  $u_{\alpha_B} = 0,5^\circ$  nach oben abgeschätzt wird, da der Winkel in Wirklichkeit sehr wahrscheinlich nicht exakt in der

Mitte zwischen beiden  $\alpha_i$  liegt. Es folgt

$$\alpha_B = (55,8 \pm 0,5)^\circ$$

## 5 Berechnung von $n$ für PMMA-Glas

Die Messungen zu Reflexionseigenschaften und insbesondere dem Brewster-Winkel eines Materials kann dazu eingesetzt werden, weitere Informationen über das Medium zu erhalten. Beispielsweise kann nun die Dispersionsrelation  $n(\lambda)$  des angestrahlten Mediums berechnet werden. Hier soll exemplarisch die Brechzahl  $n$  des verwendeten PMMA-Glases für die Wellenlänge des eingesetzten Lasers  $\lambda = 650 \text{ nm}$  gezeigt werden. Dazu stehen verschiedene Berechnungsmethoden zur Auswahl.

### 5.1 Mit dem Brechungsgesetz im Brewster-Winkel

Ist der Brewster-Winkel  $\alpha_B$  bekannt, so folgt aus den Fresnelschen Formeln direkt

$$\tan \alpha_B = \frac{n}{n_L} \approx n_B \quad (11)$$

und die Unsicherheit des so bestimmten Brechungsindex folgt mit

$$u_{n_B} = \sqrt{\left(\frac{u_{\alpha_B}}{\cos^2 \alpha_B}\right)^2} \quad (12)$$

Es gilt dann für den mit dem Brewster-Winkel bestimmten Brechungsindex  $n_B$ :

$$n_B = 1,47 \pm 0,03$$

### 5.2 Mit einem nicht-linearen Fits über die Messdaten

Eine alternative Möglichkeit den Brechungsindex  $n$  zu bestimmen bietet ein nicht-linearer Fit über Werte von Einfallswinkel  $\alpha_e$  und  $\sqrt{R_i(\alpha_e)}$ . Dazu wird in einem Softwarepaket, in diesem Fall *OriginPro 8.6*, ein Fit mit einer Funktion vom Typ (1) bzw. (2) durchgeführt, wobei  $n$  als freier Fitparameter definiert wird. Es folgt dann also z.B. für die TM-Wellen die Funktion

$$\sqrt{R_p} = \frac{\tan(\alpha_e - \arcsin(\frac{1}{n} \cdot \sin \alpha_e))}{\tan(\alpha_e + \arcsin(\frac{1}{n} \cdot \sin \alpha_e))} \quad (13)$$

wobei  $\sqrt{R_p}$  die abhängige und  $\alpha_e$  die unabhängige Variable darstellen und mit dem Fehler von  $\sqrt{R_p}$  gewichtet wird. Für die TE-Welle wird genauso verfahren.

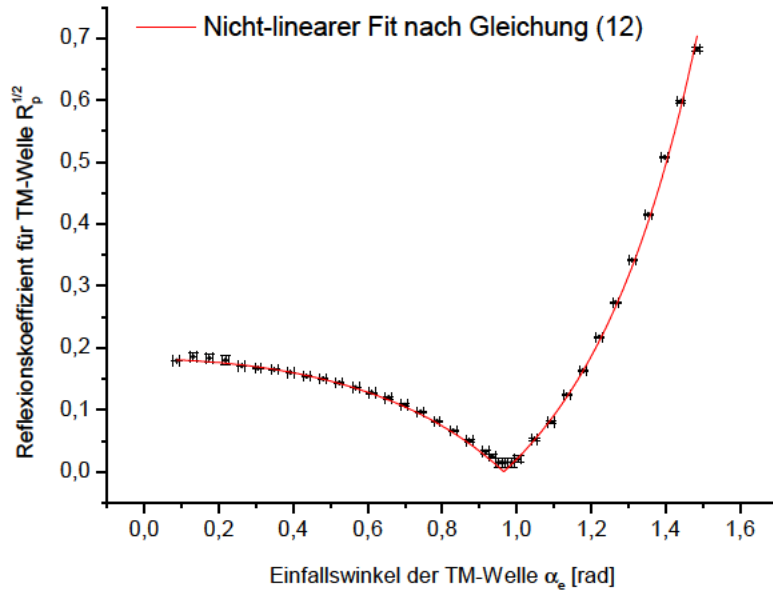


Abbildung 2: Nicht-linearer Fit der experimentellen TM-Daten mit einer Funktion der Form (12) zur Bestimmung von  $n$  aus dem freien Parameter

Das Vorgehen für  $\sqrt{R_s}$  ist völlig analog. Eine graphische Darstellung der so errechneten Funktion befindet sich in Abbildung 3.

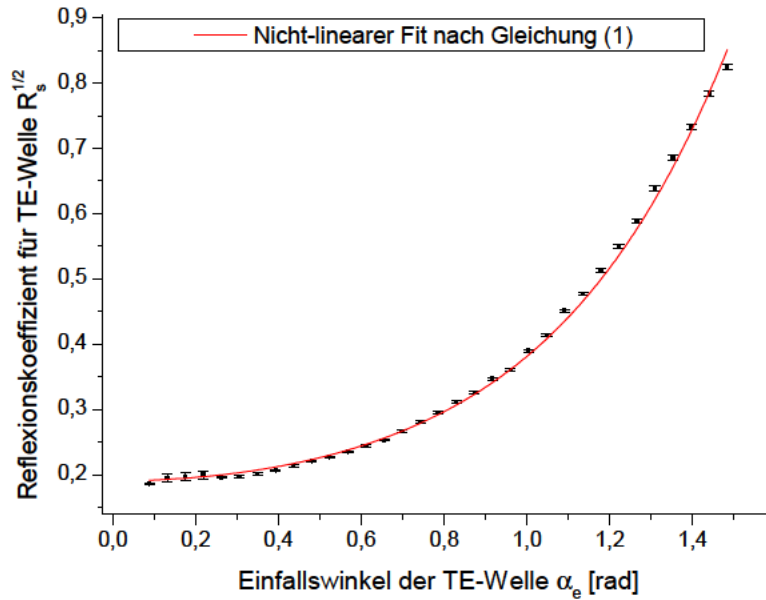


Abbildung 3: Nicht-linearer Fit der experimentellen TE-Daten mit einer Funktion der Form (1) zur Bestimmung von  $n$  aus dem freien Parameter

Aus den nicht-linearen Fits über die Messdaten lassen sich die  $n_{Fi}$  wie folgt angeben,



wobei die Unsicherheit gleich der von der Software berechneten statistische Unsicherheit des Parameters  $n$  ist, die sich wiederum aus den Unsicherheiten der einzelnen Messwerte errechnet. Sie ignoriert damit systematische Fehler.

$$\begin{aligned} n_{Fs} &= 1,443 \pm 0,003 \\ n_{Fp} &= 1,472 \pm 0,003 \end{aligned}$$

### 5.3 Mit den Reflexionskoeffizienten für senkrechten Einfall

Es steht eine dritte Option zur Berechnung des Brechungsindex  $n$  für die eingesetzte Lichtwellenlänge zur Verfügung. Bei senkrechtem Einfall, also  $\alpha_e \rightarrow 0$  gilt

$$R_s(0^\circ) = R_p(0^\circ) = \left( \frac{n - n_L}{n + n_L} \right)^2 \approx \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 \quad (14)$$

und nach umstellen:

$$n_{Ri} = \frac{\sqrt{R_i(0^\circ)} - 1}{\sqrt{R_i(0^\circ)} + 1} \quad (15)$$

Daraus folgt mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung für die Unsicherheit des so bestimmten Brechungsindex

$$u_{n_{Ri}} = \sqrt{\left( \frac{2}{(1 - R_i(0^\circ))^2} \cdot u_{\sqrt{R_i(0^\circ)}} \right)^2} \quad (16)$$

Naturgemäß lässt sich mit der verwendeten Versuchsanordnung das reflektierte Licht ab einem Winkel von  $\alpha_e < 5^\circ$  nicht mehr messen, da die Photodiode den Strahlengang vom Laser zum Prisma blockiert. Aus den graphischen Darstellungen der Verläufe von  $\sqrt{R_i}$ , sichtbar z.B. in den Abbildungen 2 und 3, wird aber deutlich, dass die Reflexionskoeffizienten für kleine Winkel nahezu konstant bleiben. Insbesondere gilt mit Gleichung (6)

$$\sqrt{U(5^\circ)} \approx \sqrt{U(0^\circ)} \Leftrightarrow \sqrt{R_i(5^\circ)} \approx \sqrt{R_i(0^\circ)}$$

Wenn die Reflexionskoeffizienten für den Grenzfall in dieser Weise abgeschätzt werden, müssen allerdings auch die entsprechenden Unsicherheiten  $\sqrt{R_i(0^\circ)}$  vergrößert werden. Um den Fehler abzuschätzen, wird auf die gleiche Technik zurückgegriffen, die schon zur Herleitung von Gleichung (5) benutzt wurde.

Da sich die Kurve

$$f(\alpha_e) \equiv \sqrt{R_i(\alpha_e)} \quad (17)$$

dem Wert  $f(0)$  asymptotisch nähert, muss dieser immer über (unter) dem letzten gemessenen Wert  $f(5)$  liegen. Wird nun aus dem jeweils ersten und fünften Messwert der TE- und TM-Messungen eine Linearisierungsgerade bestimmt, so krümmt sich die Kurve stets von dieser Gerade weg, d.h. der interpolierte Abszissenabschnitt  $f(0)_I$  liegt immer oberhalb (unterhalb) des gesuchten Wertes  $f(0)$ . Diese Linearisierung liefert natürlich nicht den tatsächlichen Wert von  $f(0)$ , da die Gerade wegen der oben beschriebenen Problematik mit Messwerten für  $\alpha_e \in M$  aus Spannungen mit  $U(\alpha_e \gg 1)$  berechnet wurde und den wirklichen Verlauf der Kurve deswegen nicht ausreichend genau wieder gibt. Aufwändigere Methoden der Bestimmung von  $f(0)_I$ , z.B. durch Taylorentwicklungen höherer Ordnung, führen hier in Ermangelung guter Stützwerte auch nicht zu deutlich besseren Ergebnissen. Die Linearisierung hat den Vorteil, dass sie einfach durchzuführen ist und eine Abschätzung für die maximale Differenz zwischen dem bekannten  $f(5)$  und dem gesuchten  $f(0)$  gibt.

In Anlehnung an die Vorgehensweise oben wird also nun der Fehler für

$$f(0) = \sqrt{R_i(0^\circ)} \approx \sqrt{R_i(5^\circ)} \quad (18)$$

wie folgt abgeschätzt:

$$u_{f(0)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{R_i(5^\circ)}U_0} \cdot u_{U(5^\circ)}\right)^2 + \left(\frac{U}{2R_i(5^\circ)} \cdot u_{U_0}\right)^2 + \Delta^2} \quad (19)$$

wobei  $\Delta = f(0)_I - f(5)$  die Differenz zwischen dem interpolierten und dem letzten gemessenen Wert von  $f(\alpha_e)$  darstellt. Zu den diesen Rechnungen zugrunde liegenden Werten siehe Tabellen 6 und 7 im Anhang.

Schließlich folgt für die mit Hilfe der Reflexionskoeffizienten bei senkrechtem Einfall bestimmten Brechungsindizes

$$\begin{aligned} n_{Rs} &= 1,46 \pm 0,02 \\ n_{Rp} &= 1,44 \pm 0,01 \end{aligned}$$

#### 5.4 Einschätzung zu den Methoden der $n$ -Bestimmung

Für die Frage, welcher der ermittelten Werte für  $n$  die größte Aussagekraft hat, ist zuerst zu beachten, dass die aus den Regressionen stammenden Werte und vor allem ihre Unsicherheiten unter der Annahme ermittelt worden sind, dass die gewählte Funktion die vorhandenen Daten korrekt beschreibt. Die große Anzahl der Messergebnisse hilft hier zwar, statistische Fehler zu minimieren, aber vor allem systematische Fehler sind von dieser Wirkung ausgenommen. Insbesondere geben die Fehlerintervalle keinen Aufschluss darüber, ob eventuell ein systematischer Fehler in Form eines Offsets der gesamten Kurve vorliegt. Hier wirkt sich auch negativ aus, dass der nicht-lineare Fit nur mit dem Fehler der  $y$ -Werte gewichtet werden konnte, da die Unsicherheit der Winkelbestimmung, die oben bereits als problematisch charakterisiert wurde, so unberücksichtigt bleibt. Die relativ kleinen Unsicherheiten der Fitergebnisse muss also kritisch hinterfragt werden, vor allem vor dem Hintergrund der weiter oben geschilderten Probleme am Versuchsort.

Ähnliches gilt auch für die  $n_{Ri}$ , denn auch sie basieren letztlich auf denselben Daten wie die  $n_{Fi}$  und ihr Fehler gibt keinerlei Auskunft auf eventuell vorhandene systematische Abweichungen der gesamten Messreihe oder eines Teils der Messreihe. In Anbetracht der Komplexität der Messung, die neben den Messinstrumenten auch das handwerkliche Geschick der Experimentatoren forderte, und der aufgetretenen Schwierigkeiten, z.B. beim Vergleich der Messreihen  $U^{(k)}$ , kann nicht unbedingt davon ausgegangen werden, dass kein solches Problem vorliegt. Mehr dazu in der Fehlerdiskussion.

Die Bestimmung des Brechungsindex  $n_B$  mit Hilfe des Brewster-Winkels erscheint auf den ersten Blick als das ungenaueste Ergebnis. Dennoch hat es zwei entscheidende Vorteile: erstens wurde es durch zwei Messreihen unabhängig bestätigt, nämlich sowohl durch die Grob- als auch die Feinmessung der Spannungen mit erhöhtem Gain an der Photodiode. Zweitens minimiert die Messung von  $\alpha_B$  die Fehlerquellen des Versuchs. Statt in einer komplizierten Beziehung voneinander abhängige Werte aufnehmen zu müssen, die alle zueinander in Beziehung stehen, handelt es sich um eine einfache Winkelmessung für ein Intensitätsminimum. Dabei kann durch die Experimentatoren deutlich besser abgeschätzt werden, welcher Fehlerquellen auftreten und wie diese einzuschätzen sind. Zum Beispiel konnte der negative Einfluss des Spiels der Tischhalterung für die Feinmessung deutlich

minimiert werden, da zur Feinmessung nur wenig mechanische Bewegung des Aufbaus nötig war.

## 6 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Der Vergleich der im Verlauf des Versuches gefundenen Werte für den Brechungsindex von PMMA-Acrylglas bei  $\lambda = 650 \text{ nm}$  in Abbildung 4 zeigt, dass außer dem mit Hilfe des Brewster-Winkels errechneten Wert alle  $n_i$  signifikant kleiner sind als der Referenzwert  $n_{Ref} = 1,48822$  aus [3], und somit tatsächlich ein systematischer Fehler vorliegt.

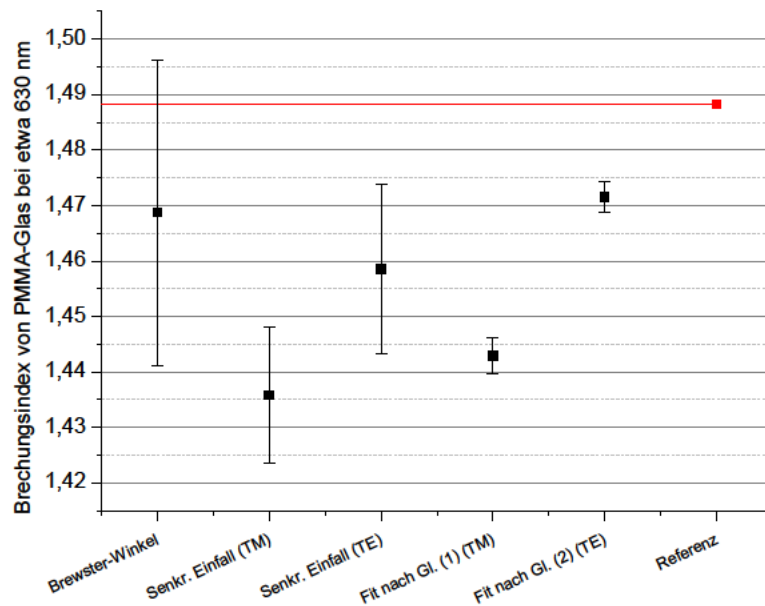


Abbildung 4: Vergleich des mit verschiedenen Methoden bestimmten Brechungsindex von PMMA-Glas für  $\lambda = 650 \text{ nm}$

Da die Ergebnisse der TM-Messung noch einmal deutlich niedriger ausfallen als diejenigen der TE-Messung kann davon ausgegangen werden, dass es entweder zwei separate Fehlerquellen gibt oder sich ein einziger systematischer Fehler auf die TM-Messreihe stärker ausgewirkt hat.

Die Abbildungen 5 und 6 zeigen deutlich, dass die zu den aufgetragenen Reflexionskoeffizienten proportionalen Spannungsmessungen im Vergleich zum theoretischen Verlauf der Kurven mit  $n_{Ref}$  für kleine Werte, im Falle der TM-Messung beispielsweise sichtbar im Bereich  $\alpha_e < \alpha_B$ , zu klein ausfallen. Grund dafür dürfte das oben beschriebene Problem der Schrägstellung des Experimentiertisches sein, die für unterschiedliche Winkel  $\alpha_e$  unterschiedlich stark war und dementsprechend auch unterschiedlich stark manuell kompensiert werden musste. Anscheinend waren die Experimentatoren durch das vertikale Nachjustieren nicht in der Lage, die Mitte der Photodiode immer genau zu treffen und damit die lokal tatsächlich höchste Spannung zuverlässig zu ermitteln. Dies würde zu einem gerichteten Fehler der Messung hin zu kleineren Spannungen führen.

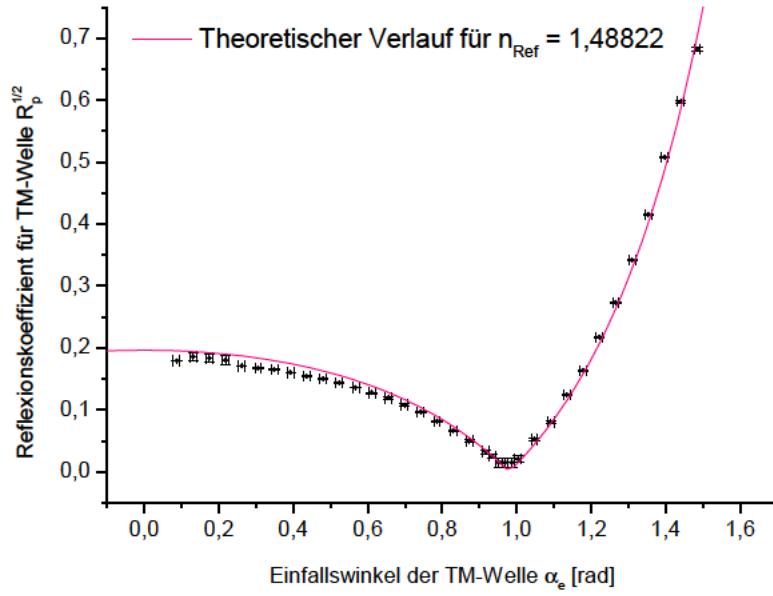


Abbildung 5: Vergleich der Messwerte mit dem theoretischen Verlauf von  $\sqrt{R_p}$  für den Referenzwert des Brechungsindex  $n_{Ref}$

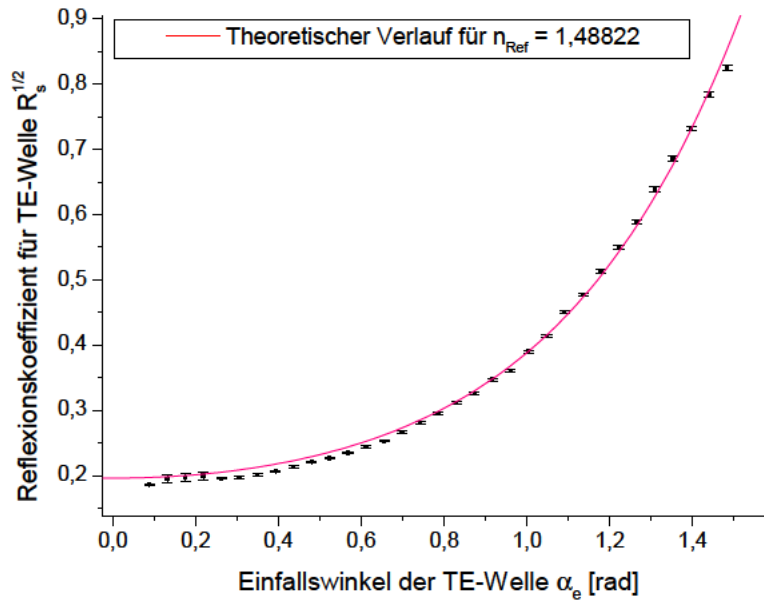


Abbildung 6: Vergleich der Messwerte mit dem theoretischen Verlauf von  $\sqrt{R_e}$  für den Referenzwert des Brechungsindex  $n_{Ref}$

Da die Systematik für beide Messreihen ähnlich ist, kann davon ausgegangen werden, dass die gleichgerichteten Abweichungen der mit Hilfe dieser Daten ermittelten  $n$  tatsächlich mit diesem Fehler zu erklären ist. Im Falle der TM-Welle hat er dann stärkere Auswirkungen, da mit dem Brewster-Winkel das lokale Minimum genau vorgegeben ist und sich

der Verlauf der Fit-Kurve im Bereich  $\alpha_e < \alpha_B$  fast ausschließlich aus den fehlerhaften Messwerten berechnet. Damit ist die Auswirkung auf die Gesamtkurve hier stärker als im Fall der TE-Welle, wo sich eine Verschiebung der kleinen Werte weniger wesentlich auf den Verlauf der Gesamtkurve auswirkt.

Der oben bereits erwähnte Fall ist damit eingetreten: die kleineren Unsicherheiten der Brechungsindizes, die mit dem nicht-linearen Fit ermittelt wurden, täuschen eine zu große Genauigkeit vor, da hier nur die durch die große Anzahl an Messpunkten minimierten statistischen Fehler berücksichtigt werden können. Eine systematische Verschiebung der Kurve kann dabei unter Umständen unentdeckt bleiben.

Wie bereits vorausgesagt scheint die Bestimmung des Brechungsindex mit Hilfe von  $\alpha_B$  nicht im gleichen Maße von der systematischen Abweichung betroffen zu sein. Der Wert ist zwar wie alle anderen Werte im Vergleich mit dem Referenzwert tendenziell zu klein, schließt diesen aber in seinem Fehlerintervall ein. Hier zeigt sich deutlich, dass neben der besser kontrollierbaren Messung - es mussten nicht mehrere Komponenten synchron aufeinander eingestellt werden, insbesondere musste der genaue Wert der Spannung nicht gemessen sondern nur ein Minimum gesucht werden - auch die bessere Handhabung der Fehler eine Rolle spielt. Die auftretenden Probleme konnten relativ einfach abgeschätzt werden, das Fehlerintervall um  $n_B$  ist demnach groß aber berücksichtigt nach Kenntnis der Experimentatoren alle signifikanten Fehlerquellen. Eine gleiche Aussage über die Ergebnisse der anderen Methoden zu treffen ist deutlich schwieriger: gerade im Bereich der nicht-linearen Fits sind Konvergenz- und Gewichtungseinstellungen überaus empfindlich und mathematisch komplex. Daher wurde bewusst darauf verzichtet, Methoden zu verwenden, die vom Protokollanten nicht vollständig verstanden werden, um z.B. größere Fehlerintervalle der Fitparameter zu erreichen, und stattdessen auf einfache aber überschaubare Herangehensweisen vertraut.

Letztlich konnte im Versuch O11 die auf den Maxwell-Gleichungen basierende Theorie der Polarisierung an reflektierenden Medien bestätigt werden. Bis auf den oben erwähnten systematischen Abweichungen, die aber aus dem Aufbau des Experiments erklärt werden konnten, stimmen die gemessenen Kurven klar mit den theoretischen Voraussagen überein. Insbesondere konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe der Reflexionstheorie weitere Informationen über ein Material gewonnen werden können, ohne dieses z.B. invasiv zu untersuchen, was die hier verwendete Methodik auch in der Praxis interessant machen dürfte.

## Literatur

- [1] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.
- [2] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Elektrodynamik und Optik*. 2010.
- [3] Polyanskiy, M. *Refractive Index Database*. Abgerufen am 15. März 2013 unter <http://refractiveindex.info/?group=PLASTICS&material=PMMA>

## A Anhang

Tabelle 2: Bestimmung der maximalen Spannungen  $U_0$  und des statistischen Fehlers der Spannungsmessungen

$U_{0s}$ [V]	$U_{0p}$ [V]
4,54	4,81
4,39	4,84
4,53	4,82
4,37	4,73
4,49	4,81
4,42	4,86

Tabelle 3: Messreihen  $U^{(k)}$  zur Untersuchung der zu hohen Spannungen für  $\alpha_e < 20^\circ$

$\alpha_e$ [°]	$U^{(1)}$ [V]	$U^{(2)}$ [V]	$U^{(3)}$ [V]	$U^{(4)}$ [V]
0,0	0,158	0,153	0,150	0,155
5,0	0,167	0,163	0,163	0,170
7,5	0,176	0,169	0,171	0,174
10,0	0,178	0,169	0,166	0,178
12,5	0,170	0,168	0,172	0,171
15,0	0,173	0,169	0,180	0,174
17,5	0,179	0,179	0,186	0,181

Tabelle 4: Interpolation zur Bestimmung der Unsicherheiten von  $U \in M$  bei der TE-Messung

Interpolationsgerade für TE-Messung					
Anstieg					0,092
Achsenabschnitt					0,147
$\alpha_e$ [°]	$U$ [V]	$u_U$ nach (4)	$u_U$ nach (5)	$U_I$ [V]	$\Delta$ [V]
5,0	0,155	0,002	0,002	0,155	0
7,5	0,170	0,002	0,011	0,159	-0,011
10,0	0,174	0,002	0,011	0,163	-0,011
12,5	0,178	0,002	0,011	0,167	-0,011
15,0	0,171	0,002	0,002	0,171	0

Tabelle 5: Interpolation zur Bestimmung der Unsicherheiten von  $U \in M$  bei der TM-Messung

Interpolationsgerade für TM-Messung					
Anstieg					-0,080
Achsenabschnitt					0,161
$\alpha_e$ [°]	$U$ [V]	$u_U$ nach (4)	$u_U$ nach (5)	$U_I$ [V]	$\Delta$ [V]
5,0	0,154	0,002	0,002	0,154	0
7,5	0,166	0,002	0,016	0,151	-0,016
10,0	0,162	0,002	0,016	0,147	-0,015
12,5	0,156	0,002	0,016	0,144	-0,013
15,0	0,140	0,002	0,002	0,140	0

Tabelle 6: Interpolation zur Bestimmung der Unsicherheit von  $f(5^\circ) \approx f(0^\circ)$  bei der TM-Messung

Interpolationsgerade für TM-Messung			
Anstieg			-0,048
Achsenabschnitt			0,183
$\alpha_e$ [°]	$f(\alpha_e)$ [-]	$u_f$ nach (7)	$u_f$ nach (17)
5	0,179	0,001	0,005

Tabelle 7: Interpolation zur Bestimmung der Unsicherheit von  $f(5^\circ) \approx f(0^\circ)$  bei der TE-Messung

Interpolationsgerade für TE-Messung			
Anstieg			0,054
Achsenabschnitt			0,182
$\alpha_e$ [°]	$f(\alpha_e)$ [-]	$u_f$ nach (7)	$u_f$ nach (17)
5	0,186	0,001	0,005

Tabelle 8: Messdaten und Zwischenergebnisse zur TE-Messung

$\alpha_e$ [rad]	$u_{\alpha_e}$ [rad]	$U$ [V]	$u_U$	$\sqrt{R_s}$ [-]	$u_{\sqrt{R_s}}$	rel. Fehler [%]
0,087	0,009	0,155	0,002	0,186	0,001	2,7
0,131	0,009	0,170	0,011	0,195	0,006	3,3
0,175	0,009	0,174	0,011	0,198	0,006	3,2
0,218	0,009	0,178	0,011	0,200	0,006	3,2
0,262	0,009	0,171	0,002	0,196	0,001	0,7
0,305	0,009	0,174	0,002	0,198	0,001	0,7
0,349	0,009	0,181	0,002	0,202	0,001	0,7
0,393	0,009	0,191	0,002	0,207	0,001	0,6
0,436	0,009	0,204	0,002	0,214	0,001	0,6
0,480	0,009	0,218	0,002	0,221	0,001	0,6
0,524	0,009	0,230	0,002	0,227	0,001	0,6
0,567	0,009	0,247	0,002	0,235	0,001	0,6
0,611	0,009	0,266	0,003	0,244	0,001	0,6
0,654	0,009	0,285	0,003	0,253	0,002	0,6
0,698	0,009	0,318	0,003	0,267	0,002	0,6
0,742	0,009	0,351	0,003	0,281	0,002	0,6
0,785	0,009	0,390	0,003	0,296	0,002	0,6
0,829	0,009	0,433	0,004	0,312	0,002	0,6
0,873	0,009	0,473	0,004	0,326	0,002	0,6
0,916	0,009	0,537	0,004	0,347	0,002	0,6
0,960	0,009	0,581	0,005	0,361	0,002	0,6
1,004	0,009	0,678	0,005	0,390	0,002	0,5
1,047	0,009	0,765	0,006	0,414	0,002	0,5
1,091	0,009	0,907	0,007	0,451	0,002	0,5
1,134	0,009	1,015	0,008	0,477	0,003	0,5
1,178	0,009	1,176	0,009	0,514	0,003	0,5
1,222	0,009	1,350	0,010	0,550	0,003	0,5
1,265	0,009	1,541	0,012	0,588	0,003	0,5
1,309	0,009	1,818	0,014	0,639	0,003	0,5
1,353	0,009	2,094	0,016	0,685	0,004	0,5
1,396	0,009	2,389	0,018	0,732	0,004	0,5
1,440	0,009	2,743	0,021	0,785	0,004	0,5
1,484	0,009	3,032	0,023	0,825	0,004	0,5



Tabelle 9: Messdaten und Zwischenergebnisse zur TM-Messung

$\alpha_e$ [rad]	$u_{\alpha_e}$ [rad]	$U$ [V]	$u_U$	$\sqrt{R_p}$ [-]	$u_{\sqrt{R_p}}$	rel. Fehler [%]
0,087	0,009	0,154	0,002	0,179	0,001	2,3
0,131	0,009	0,166	0,016	0,186	0,009	4,7
0,175	0,009	0,162	0,016	0,183	0,009	4,8
0,218	0,009	0,156	0,016	0,180	0,009	5,0
0,262	0,009	0,140	0,002	0,171	0,001	0,6
0,305	0,009	0,134	0,001	0,167	0,001	0,6
0,349	0,009	0,130	0,001	0,164	0,001	0,6
0,393	0,009	0,123	0,001	0,160	0,001	0,6
0,436	0,009	0,114	0,001	0,154	0,001	0,7
0,480	0,009	0,108	0,001	0,150	0,001	0,7
0,524	0,009	0,099	0,001	0,143	0,001	0,7
0,567	0,009	0,089	0,001	0,136	0,001	0,8
0,611	0,009	0,078	0,001	0,127	0,001	0,9
0,654	0,009	0,068	0,001	0,119	0,001	0,9
0,698	0,009	0,056	0,001	0,108	0,001	1,1
0,742	0,009	0,045	0,001	0,097	0,001	1,3
0,785	0,009	0,032	0,001	0,082	0,001	1,7
0,829	0,009	0,021	0,001	0,066	0,002	2,6
0,873	0,009	0,012	0,001	0,050	0,002	4,3
0,916	0,009	0,005	0,001	0,032	0,003	10,2
0,934	0,009	0,003	0,001	0,025	0,004	16,8
0,951	0,009	0,001	0,001	0,014	0,007	50,2
0,960	0,009	0,001	0,001	0,014	0,007	50,2
0,969	0,009	0,001	0,001	0,014	0,007	50,2
0,986	0,009	0,001	0,001	0,014	0,007	50,2
1,004	0,009	0,002	0,001	0,020	0,005	25,2
1,004	0,009	0,002	0,001	0,020	0,005	25,2
1,047	0,009	0,013	0,001	0,052	0,002	4,0
1,091	0,009	0,031	0,001	0,080	0,001	1,8
1,134	0,009	0,074	0,001	0,124	0,001	0,9
1,178	0,009	0,129	0,001	0,164	0,001	0,6
1,222	0,009	0,228	0,002	0,218	0,001	0,5
1,265	0,009	0,359	0,002	0,273	0,001	0,4
1,309	0,009	0,561	0,003	0,341	0,001	0,4
1,353	0,009	0,831	0,005	0,416	0,002	0,4
1,396	0,009	1,241	0,007	0,508	0,002	0,4
1,440	0,009	1,719	0,009	0,598	0,002	0,4
1,484	0,009	2,241	0,011	0,682	0,002	0,4