



GRUNDPRAKTIKUM

M5: Oberflächenspannung

Autor:

■■■■■■■■■■

Partner:

■■■■■■■■■■

Versuchsdatum: ■■■■■■

Versuchsplatz: ■■■■■■■■■■

Abgabedatum: ■■■■■■

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	2
2	Messwerte und Auswertung	2
2.1	Bügelmethode	2
2.2	Kapillarsteighöhenmethode	4
2.3	Vergleich der Ergebnisse bei Zimmertemperatur	5
3	Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung	6
A	Anhang	8

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch M5: Oberflächenspannung hat zum Ziel, mit Hilfe zweier Messmethoden die Oberflächenspannung destillierten Wassers zu bestimmen. Eine detaillierte Darstellung der physikalischen Grundlagen und des Versuchsaufbaus befindet sich in [Müller 2012, S. 45-47], deswegen folgt hier nur ein kurzer Überblick.

Die erste Messmethode beruht gemäß Formel (2)¹ auf der Proportionalität der Oberflächenspannung σ und der Arbeit, die notwendig ist, um die Oberfläche zu vergrößern. Ein Metallbügel wird in Wasser getaucht, so dass sich eine Wasserlamelle bildet. Beim Herausziehen des Bügels vergrößert sich die Oberfläche des Wassers so lange, bis die Oberflächenspannung nicht mehr ausreicht, um die Lamelle zusammen zu halten - der Wasserfilm reißt. Dann kann über den in Formel (2) dargestellten Zusammenhang σ ermittelt werden.

Die zweite Messmethode nutzt die Eigenschaften von benetzenden Flüssigkeiten in Kapillaren. Im Kräftegleichgewicht stellt sich eine bestimmte Steighöhe von Wasser h in Kapillaren mit unterschiedlichem Radius r ein. Diese Höhe wird ermittelt und gemäß Formel (6) in einen linearen Zusammenhang mit der Dichte des Wassers ρ , der Erdbeschleunigung g und dem gesuchten σ gebracht. Aus mehreren Messwerten für h lässt sich dann per linearer Regression die Oberflächenspannung ermitteln.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Bügelmethode

Der Versuchsaufbau erfolgte nach der im Skript angegebenen Anleitung. Im ersten Schritt wurde die Federwaage mit Hilfe eines Reiters der Masse $m = (1,3 \pm 0,002) \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ kalibriert, indem die Auslenkung der Feder a'_i bei verschiedenen Belastungen, d.h. verschiedenen Positionen des Reiters p auf dem Balken der Waage mit der resultierenden Kraft $F_i = (p \cdot 0,1) \cdot m \cdot g$, gemessen wurde (Tabelle im Anhang).

Die Unsicherheit der F_i ist dabei gleich der Unsicherheit von m , da $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ als fehlerfrei angenommen wird. Die Unsicherheit der Auslenkung $a'_i = a_i - a_0$ setzt sich aus dem doppelten (systematischen) Gerätefehler der Bügelmessschraube $u = \pm 5 \mu\text{m} + l \cdot 10^{-5}$ und dem (statistischen) Ablesefehler für die Gleichgewichtsstellung der Waage zusammen. Dieser Ablesefehler wurde abgeschätzt, indem die Waage bei einer festen Belastung acht Mal ins Gleichgewicht gebracht und von den so ermittelten Werten eine Standardabweichung berechnet wurde. Alle Einzelfehler wurden schließlich zu u_{a_i} betragsweise addiert.

Die so gefundene Abhängigkeit der Federauslenkung a'_i von der Belastung F_i wurde mit Hilfe einer linearen Regression (Abb. 1) im Softwarepaket *OriginPro 8* quantifiziert, gewichtet nach u_{a_i} mit der Instrumental-Methode. Aus dem Anstieg der gefundenen Geraden lässt sich die Federkonstante d berechnen. Ihre Unsicherheit

¹ Formeln, die in runden Klammern angegeben sind, stammen aus der Versuchsbeschreibung im gelben Skript [Müller 2012].

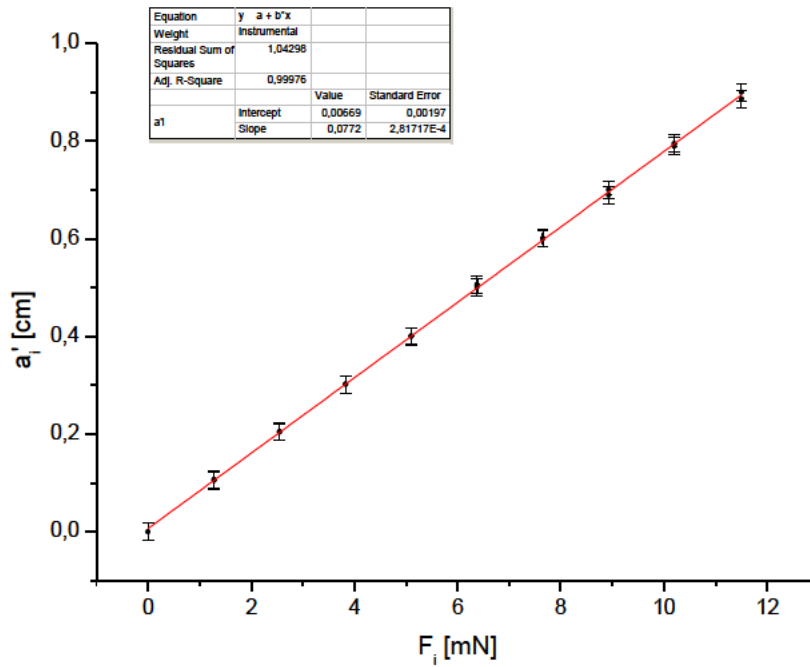


Abbildung 1: Abhängigkeit der Federauslenkung a_i' von der wirkenden Kraft F

ergibt sich aus der relativen Unsicherheit des Anstiegs multipliziert mit d :

$$d = \frac{1}{b} = (12,95 \pm 0,04) \cdot 10^{-1} \frac{N}{m}$$

Um nun die Oberflächenspannung zu bestimmen wurde der Abreisspunkt a_i der Wasserlamelle für zwei Temperaturbereiche T_1 und T_2 je $n = 6$ Mal gemessen. Die im Versuch vorgesehene Messung bei Zimmertemperatur wurde bei $T_1 \approx 25,8^\circ C$ durchgeführt, die Messung nahe des Nullpunktes bei $T_2 : 5,4^\circ C \leq T \leq 8,3^\circ C$. Nun wurde die Differenz zum jeweiligen Nullpunkt der Waage $a_i' = a_i - a_0$ gebildet (Tabelle im Anhang). Der Mittelwert aller Messungen eines Temperaturbereiches

$$\bar{a}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0)$$

kann nun genutzt werden, um die Kraft $F = d \cdot \bar{a}'$ zu berechnen, die beim Abreißen durchschnittlich wirkt.

Zur Bestimmung der Unsicherheit von \bar{a}' wurde zuerst ein Mittelwert über die Unsicherheiten der a_i und a_0 gebildet, die wie schon bei der Kalibrierung aus dem Gerätefehler der Bügelmessschraube und dem per Standardabweichung ermittelten Ablesefehler der Gleichgewichtsstellung bestehen. Beim Ablesefehler handelt es sich zwar genau genommen um einen statistisch ermittelten Fehler, der allerdings eine systematische Unsicherheit des Messgerätes beschreibt, weswegen die Bildung eines Mittelwertes möglich ist. Die statistische Komponente der Unsicherheit von \bar{a}' ist die Standardabweichung der einzelnen Differenzwerte, die mit den oben genannten

Fehlern betragsweise addiert wurde. Die Unsicherheit von F ergibt sich aus der betragsweisen Addition der relativen Fehler der Federkonstante d und der durchschnittlichen Auslenkung \bar{a}' , die mit dem Wert von F multipliziert werden (vgl. Tabelle 1).

Tabelle 1: Berechnung von σ in zwei Temperaturbereichen

		Wert	syst. Fehler	stat. Fehler	Unsicherheit
T_1	$\bar{a}' [m]$	6,20E-03	0,16E-03	0,03E-03	0,18E-03
T_1	$F [N]$	8,03E-03			0,27E-03
T_1	$\sigma_{T_1} [kg/s^2]$	7,98E-02			0,28E-02
T_2	$\bar{a}' [m]$	5,24E-03	0,16E-03	0,13E-03	0,28E-03
T_2	$F [N]$	6,79E-03			0,39E-03
T_2	$\sigma_{T_2} [kg/s^2]$	6,75E-02			0,40E-02

Über den Zusammenhang $F = 2 \cdot l \cdot \sigma$ ergibt sich so die Oberflächenspannung, wobei l die Länge des Bügels bezeichnet, die am Arbeitsplatz mit $l = (5,03 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} m$ angegeben war. Für die Temperaturbereiche $T_1 : T \approx 25,8^\circ C$ und $T_2 : 5,4^\circ C \leq T \leq 8,3^\circ C$ folgt:

$$\sigma_{T_1} = (7,98 \pm 0,28) \cdot 10^{-2} \frac{kg}{s^2}$$

$$\sigma_{T_2} = (6,75 \pm 0,40) \cdot 10^{-2} \frac{kg}{s^2}$$

2.2 Kapillarsteighöhenmethode

Für die zweite Messmethode wurde wie in der Versuchsanleitung beschrieben vorgegangen. Zuerst wurde der Durchmesser der verwendeten Kapillaren mit Hilfe eines Mikroskops je $n = 6$ Mal gemessen. Der benötigte Wert für den Radius r ergibt sich für jede der vier Kapillaren aus dem halbierten Mittelwert über diese Messungen.

Die Unsicherheiten der Radien addieren sich betragsweise aus dem systematischen Ablesefehler des Mikroskops, der mit einem halben Skalenteil auf etwa $1,25 \cdot 10^{-5} m$ abgeschätzt wurde, und dem statistischen Fehler der sechs Messungen des Durchmessers, berechnet aus der Standardabweichung geteilt durch \sqrt{n} .

Tabelle 2: Ermittelte Steighöhen in den vier Kapillaren

Kapillare	Radius [$10^{-4} m$]	Steighöhe [$10^{-4} m$]
1	$2,33 \pm 0,17$	$60,75 \pm 7,14$
2	$3,21 \pm 0,15$	$38,58 \pm 8,75$
3	$6,01 \pm 0,16$	$12,43 \pm 9,29$
4	$1,98 \pm 0,15$	$58,08 \pm 9,90$

Nun wurde in jeder Kapillare die Steighöhe mindestens $n = 6$ Mal gemessen, und aus diesen Messwerten wiederum ein Mittelwert gebildet. Die Unsicherheit der Steighöhe

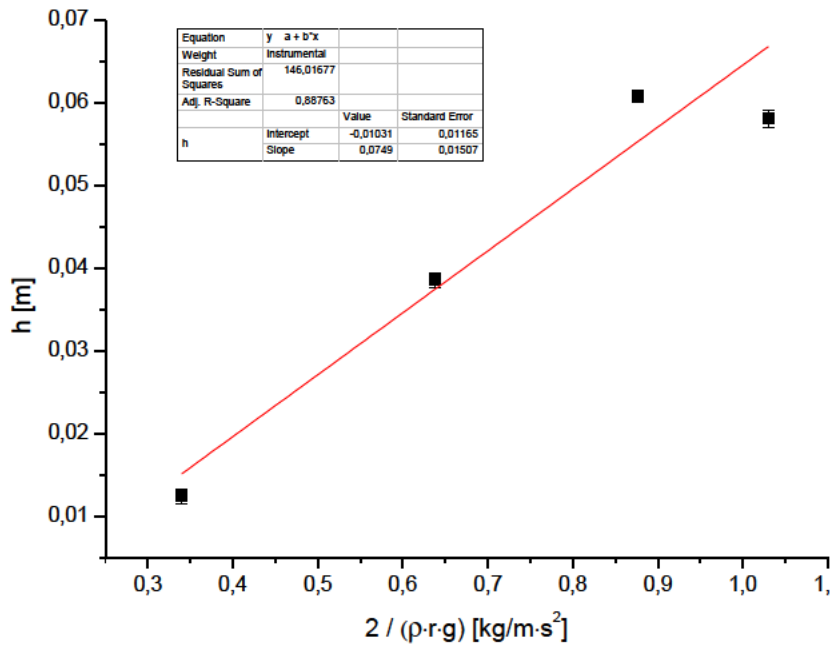


Abbildung 2: Ermittlung von σ_k als Anstieg der Regressionsgeraden

ergibt sich aus der betragsweisen Addition des Gerätefehler des Messgerätes, der mit einem halben Skalenteil auf etwa $5,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ abgeschätzt wurde, und des statistischen Fehlers der n Messungen, der als Standardabweichung geteilt durch \sqrt{n} ermittelt wurde.

Die so gewonnenen vier Wertepaare zwischen Radius r und Steighöhe h wurden daraufhin gemäß Formel (6) einer linearen Regression in *OriginPro 8*, gewichtet mit den Fehlern der Steighöhen, unterzogen (Abb. 2).

Aus dem Anstieg der Geraden lässt sich dann $\sigma_k = b$ ermitteln. Die nach oben abgeschätzte Unsicherheit u_{σ_k} berechnet sich aus der Addition der relativen Messfehler des Anstiegs und dem separat ermittelten relativen Fehler der Dichte $u_\rho = 0,07 \text{ kg/m}^3$ multipliziert mit σ_k . So ergibt sich mit der Steighöhenmethode eine Oberflächenspannung von

$$\sigma_k = (7,49 \pm 1,51) \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

2.3 Vergleich der Ergebnisse bei Zimmertemperatur

Ein Vergleich der gefundenen Werte für die Oberflächenspannung bei Zimmertemperatur zeigt, dass die Messergebnisse erheblich vom Literaturwert σ_L [B-L 1996] für Wasser bei etwa 25°C abweichen.

$$\sigma_L = 7,20 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$\sigma_k = (7,49 \pm 1,51) \cdot 10^{-2} \frac{kg}{s^2}$$

$$\sigma_{T_1} = (7,98 \pm 0,28) \cdot 10^{-2} \frac{kg}{s^2}$$

Die Ergebnisse widersprechen hier den Erwartungen: eine Überschätzung der Oberflächenspannung sollte bei Messung mit der Bügelmethode eigentlich fast unmöglich sein, trotzdem liegt der ermittelte Wert deutlich über dem Referenzwert. Der per Kapillarmethode ermittelte Wert liegt war näher am Literaturwert, weist aber eine sehr große Unsicherheit auf. Auf beides wird bei der Fehleranalyse noch genauer eingegangen.

Es steht fest, dass bei den vorliegenden Messergebnissen keine der beiden Methoden als deutlich geeigneter erscheint. Da dies aber wohl, wie im nächsten Abschnitt erläutert, auf externe Faktoren zurück zu führen ist, ist die Aussagekraft unserer Ergebnisse für eine generelle Bewertung der Messmethoden sehr begrenzt.

Allgemein gesprochen scheint die Bügelmethode tendenziell geeigneter zur Messung der Oberflächenspannung, vor allem aufgrund zweier genereller Unzulänglichkeiten der Kapillarmethode: Erstens geht die Kapillarmethode von einer vereinfachten physikalischen Situation einer ideal benetzenden Flüssigkeit aus. Zweitens ist ihr Versuchsaufbau anfälliger für systematische Fehler durch Verunreinigungen. Die Hauptfehlerquelle der Bügelmethode ist hingegen das Ablesen, ein Fehler der grundsätzlich durch Wiederholung minimiert werden kann, sowie seitliche Scherkräfte (siehe unten), die aber durch einen raffinierteren mechanischen Aufbau minimiert werden können.

3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die Messung nach der Bügelmethode im niedrigen Temperaturbereich lieferte einen Wert, der deutlich unterhalb des Literaturwertes von $\sigma_{L_0} = 7,56 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{s^2}$ für etwa 5° [B-L 1996] liegt. Der offensichtliche Grund ist ein zu frühes Abreißen der Lamelle, was zu einer Unterschätzung der Oberflächenspannung führt. Prinzipiell gibt es mehrere Fehlerquellen, die das Ergebnis erklären können. Der wichtigste und wahrscheinlichste Effekt ist das Auftreten einer Scherspannung durch seitliche Bewegung des Bügels in der Flüssigkeit, die in diesem Fall vom gewählten Versuchsaufbau begünstigt wurde: Am Versuchstag herrschte eine hohe Raumtemperatur, was es schwierig machte, das Wasser auf die gewünschte Temperatur nahe $0^\circ C$ herunter zu kühlen. Deswegen entschlossen sich die Experimentatoren die Messschale mit dem destillierten Wasser mitsamt des umgebenden Eisbades auf die Messvorrichtung zu setzen, um eine kontinuierliche Kühlung zu gewährleisten. Im Laufe des Versuchs begann nun, das Eis im umgebenden Behälter zu schmelzen, und die Messschale konnte sich auf dem entstehenden Wasserfilm seitlich bewegen. Bei einer solchen seitlichen Bewegung treten zusätzliche Scher- und Reibungskräfte innerhalb der Wasserlamelle auf, wodurch die Lamelle schneller abreisst. Andere Faktoren, die das Messergebnis verfälscht haben könnten sind unberücksichtigte Auftriebseffekte des Bügels, die

trotz der Kühlung steigende Wassertemperatur über die Zeit, und auch Temperaturdifferenzen zwischen den Wasserschichten in der Messschale.

Die Messreihe mit der Bügelmethode bei Zimmertemperatur weist einen deutlich zu hohen Wert für die Oberflächenspannung auf. Dieses Ergebnis ist insofern das problematischste der drei hier präsentierten, da der Versuchsaufbau grundsätzlich eine Unterschätzung der Oberflächenspannung durch Nichtberücksichtigung der Scherkräfte fördert (siehe oben). Eine Überschätzung ist jedoch nur sehr schwierig zu erklären. Die Messreihe ist in sich konsistent, d.h. es liegen höchstwahrscheinlich keine statistischen Anomalien vor. Die potenziell größte Fehlerquelle im Versuchsaufbau, der Parallaxenfehler beim Ablesen der "Gleichgewichtsstellung" der Waage wurde gesondert adressiert und minimiert (siehe Versuchsbeschreibung), und wäre sowieso eher statistischer Natur. Ein falsches Aufnehmen der Messwerte, z.B. durch einen Zahlendreher, kann auch weitgehend ausgeschlossen werden, da die Messung mehrfach wiederholt und von zwei Experimentatoren durchgeführt wurde, die Ergebnisse aber alle systematisch abweichen. Es liegt also ein weiterer, nicht berücksichtigter systematischer Fehler vor, der vermutlich im Zusammenhang mit der mechanischen Vorrichtung des Versuchs steht und eine Größenordnung von etwa $0,07 \text{ kg/s}^2$ hat. Mögliche Fehlerquellen könnten eine deformierte Feder und somit nicht-lineare Federkonstante, oder aber Verunreinigungen des Wassers sein, oder aber (und sehr wahrscheinlich) ein weiterer, noch unentdeckter und unberücksichtigter externer Faktor.

Das Ergebnis der Kapillarmethode liegt relativ nah am Literaturwert. Die ermittelte Unsicherheit ist jedoch sehr groß. Hier ist zu beachten, dass die Messung während der Versuchsdurchführung große Probleme bereitete, einige Messreihen mussten gar vollständig verworfen werden, da die Messwerte physikalisch unsinnig waren. Grundsätzlich sind die verwendeten Kapillaren wohl verunreinigt gewesen, ein Effekt der bei der Kapillare mit dem kleinsten Durchmesser den größten Schaden anrichtet: bei Betrachtung von Abb. 2 wird deutlich, dass der letzte Wert, der eben diese Kapillare repräsentiert, deutlich vom Verlauf der anderen Werte nach unten abweicht. Die Steigung der Regressionsgeraden ist deswegen kleiner, und die Gerade schneidet auch die Fehlerintervalle um die einzelnen Messwerte nicht mehr, was den statistischen Fehler der Regression sehr groß werden lässt. Der für σ_k ermittelte Fehler ist aber von diesem Fehler dominiert und wird folglich ebenfalls groß. Es ist zu erwarten, dass bei einer Wiederholung der Messungen mit sauberen Kapillaren die Unsicherheit für das Messergebnis deutlich sinkt. Eine weitere mögliche Fehlerquelle bei der Kapillarmethode ist die Annahme einer ideal benetzenden Flüssigkeit.

Literatur

- [Müller 2012] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik*. 2012.
- [B-L 1996] Baumgartner, A. und Liebscher, H.-J. (Hrsg.) *Allgemeine Hydrologie - Quantitative Hydrologie*. In: Lehrbuch der Hydrologie Bd. 1, 2. Auflage, Gebr. Bornträger, Berlin-Stuttgart. 1996.

A Anhang

Tabelle 3: Messdaten zur Waagenkalibrierung

p	F_i [N]	a'_i [m]	a'_i [m]
1	1,28E-03	1,07E-03	1,05E-03
2	2,55E-03	2,05E-03	2,04E-03
3	3,83E-03	3,02E-03	3,02E-03
4	5,10E-03	4,01E-03	4,00E-03
5	6,38E-03	5,06E-03	5,01E-03
6	7,65E-03	6,01E-03	6,00E-03
7	8,93E-03	7,00E-03	6,89E-03
8	1,02E-02	7,95E-03	7,89E-03
9	1,15E-02	8,86E-03	9,00E-03
$u_{a'_i} \simeq 8,41\text{E-}05 \ \forall a_i$			
$u_{F_i} \simeq 0,20\text{E-}05 \ \forall F_i$			

Tabelle 4: Auslenkungsdifferenzen bei der Bügelmethode

T [°C]	a'_i [m]	T [°C]	a'_i [m]
25,8	6,24E-03	5,4	4,95E-03
	6,12E-03	5,8	4,87E-03
	6,18E-03	6,4	5,16E-03
	6,27E-03	6,9	5,34E-03
	6,25E-03	8,1	5,46E-03
	6,13E-03	8,3	5,68E-03
$u_{(a'_i)} \simeq 0,16\text{E-}03 \ \forall (a'_i)$			

Tabelle 5: Radien und Steighöhen bei der Kapillarmethode

Kapillare 1		Kapillare 2		Kapillare 3		Kapillare 4	
r [m]	h [m]	r [m]	h [m]	r [m]	h [m]	r [m]	h [m]
2,31E-04	6,10E-02	3,19E-04	3,90E-02	6,00E-04	1,10E-02	2,00E-04	5,70E-02
2,25E-04	6,15E-02	3,25E-04	3,90E-02	6,06E-04	1,20E-02	1,94E-04	5,70E-02
2,38E-04	6,05E-02	3,19E-04	3,90E-02	5,94E-04	1,10E-02	2,00E-04	5,90E-02
2,38E-04	6,05E-02	3,25E-04	3,95E-02	6,00E-04	1,30E-02	2,00E-04	5,80E-02
2,31E-04	6,10E-02	3,19E-04	3,70E-02	6,00E-04	1,30E-02	2,00E-04	5,75E-02
2,38E-04	6,00E-02	3,19E-04	3,80E-02	6,06E-04	1,40E-02	1,94E-04	6,00E-02
					1,30E-02		
Mittelwerte und Unsicherheiten							
2,33E-04	6,08E-02	3,21E-04	3,86E-02	6,01E-04	1,24E-02	1,98E-04	5,81E-02
0,17E-04	0,07E-02	0,15E-04	0,09E-02	0,16E-04	0,09E-02	0,15E-04	0,10E-02