GRUNDPRAKTIKUM

M6: Innere Reibung

Autor:
[redacted]

Partner:
[redacted]

Versuchsdatum: [redacted]
Versuchsplatz: [redacted]
Abgabedatum: [redacted]

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Im Versuch M6: Innere Reibung wird die dynamische und kinematische Viskosität von Rizinusöl untersucht. Detaillierte Hinweise zu den verwendeten physikalischen Grundlagen und dem Versuchsaufbau finden sich im Skript [Müller 2012, S. 48-50], deswegen soll hier nur ein kurzer Überblick gewährt werden.

Im ersten Versuch werden Metallkugeln von unterschiedlichen Radien und Dichten in einen mit Rizinusöl gefüllten Zylinder geworfen und ihre Fallgeschwindigkeit gemessen. Über die Aufstellung des Kräftegleichgewichts nach Gleichung (9)[1] der Versuchsbeschreibung lässt sich dann die dynamische Viskosität η nach Formel (10) bzw. ein für den endlichen Zylinderradius korrigierten Wert η_k nach Formel (12) berechnen. Auf der Basis von η_k wird dann die kinematische Viskosität ν nach (2) bestimmt.

Im zweiten Versuch wird die Aufstiegsgeschwindigkeit von Luftbläschen im Öl gemessen, die dazu am unteren Ende des Zylinders herein gelassen werden. Über den Zusammenhang (9) kann dann durch Umstellen der Radius der Luftblase abgeschätzt werden. Aufgrund des Versuchsaufbaus und der Durchführung müssen hier diverse physikalische Effekte vernachlässigt werden, was dem Ergebnis nur Beispielcharakter gibt.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Bestimmung der Viskosität von Rizinusöl

Vor dem Versuch wurde abgeschätzt, ab welchem Punkt die Metallkugeln eine konstante Fallgeschwindigkeit im Öl besitzen, das in (9) angesprochene Kräftegleichgewicht also entstanden ist. Dann wurde eine Fallstrecke von etwa 30cm ausgewählt, und die Fallzeit darin von vier verschiedenen Metallkugeln je zehn Mal gestoppt. Dabei wurde strikt nach den Hinweisen zur Versuchsdurchführung aus dem Skript vorgegangen.

Zur Bestimmung der Fallstrecke d wurde der Abstand zwischen zwei Ringmarkierungen auf dem Zylinder gemessen. Es wurden drei Wertepaare aus den Abständen zwischen den äußeren und inneren Rändern der Markierungsringe aufgenommen. Aus den Wertepaaren einer Messung wurde dann ein Mittelwert gebildet, und aus ihnen wiederum ein Mittelwert für den durchschnittlichen Abstand zwischen zwei Ringen L. Da die Zeit für den Fall zwischen drei Ringen gemessen wurden ergibt sich $d = 3 \cdot L$ als Fallstrecke. Die Unsicherheit u_d bestimmt sich aus dem Dreifachen der systematischen Unsicherheit der Noniusmessungen mit (je $\pm\ 50\mu m + L \cdot 10^{-4}$) und der statistischen Unsicherheit, die hier als ΔL abgeschätzt wurde.

$$d = (29,88 \pm 0,41) \cdot 10^{-2} m$$

Die Fallgeschwindigkeit v ermittelt sich direkt aus der Fallstrecke d und der gemessenen Zeit t. Die Zeitmessung ist ihrerseits mit einem Fehler u_t behaftet, der sich aus

[1]Formeln in runden Klammern finden sich in der o.g. Versuchsbeschreibung.

der systematischen Unsicherheit der verwendeten Stoppuhr $\pm 0,01s + t \cdot 5 \cdot 10^-4$ ergibt. Eine Größtfehlerabschätzung nach Formel (31) im blauen Skript [Müller 2007] liefert dann u_v für jeden Messwert.

Die Radien r_k und Dichten ρ_k der vier verwendeten Metallkugeln waren am Arbeitsplatz 1 vorgegeben, ebenso die entsprechenden Unsicherheiten u_{r_k} und u_{ρ_k}. Die Dichte des Rizinusöls ρ_f wurde mit einem Aräometer vor Ort gemessen, wobei die Unsicherheit u_{ρ_f} mit einem halben Skalenteil abgeschätzt wurde. Die verwendete Erdbeschleunigung ($g = 9,813\frac{m}{s^2}$) ist gleich dem offiziellen Wert für Berlin und wurde als fehlerfrei angenommen.

Die dynamische Viskosität η berechnet sich nun nach Formel (10) im Skript. Dabei wurde zunächst ein Wert für η für jede Messung berechnet. Die Unsicherheit u_η ergibt sich nun aus Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Funktion (10). Eine Übersicht der Ableitungen findet sich im Anhang.

Um nun einen Gesamtwert für η auszurechnen wurde ein gewichtetes Mittel über alle Messwerte nach der Methode des blauen Skriptes [Müller 2007, S. 47-48] durchgeführt. Es ergibt sich:

$$\eta = (9,09 \pm 0,03) \cdot 10^{-1}\frac{N \cdot s}{m^2}$$

Die Bestimmung des korrigierten Wertes η_k erfolgt analog zur Rechnung für η, nun allerdings im Bezug auf die Formel (12).

Der hinzugekommene Faktor r_z bezeichnet den Radius des Zylinders, in dem das Fallexperiment durchgeführt wurde. Er wurde durch sechs Messungen des Innendurchmessers mit dem Nonius bestimmt, worüber dann ein Mittelwert gebildet und halbiert wurde. Die Unsicherheit u_{r_z} ergibt sich hier aus der statistischen Unsicherheit der Messung $\frac{s}{\sqrt{6}}$, wobei s die Standardabweichung der Messwerte bezeichnet, und dem systematischen Fehler der Noniusmessung, der bereits oben beschrieben wurde. Beide Fehler wurden pythagoräisch zu u_{r_z} addiert.

$$r_z = (31,79 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}m$$

Nun kann auch η_k mit der Unsicherheit nach der bereits oben skizzierten Methode berechnet werden. Das gewichtete Mittel mit seinem Fehler lautet nun:

$$\eta_k = (8,31 \pm 0,03) \cdot 10^{-1}\frac{N \cdot s}{m^2}$$

Die dynamische Viskosität ν von Rizinusöl ergibt sich nach Formel (2) direkt aus dem gefundenen Wert für η_k und der Dichte des Öls ρ_f. Für die Fehlerbestimmung wurde wieder auf die oben verwendete Methode zurückgegriffen, wobei bei der Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes für η die Formel (12) eingesetzt wurde. Es ergibt sich als gewichtetes Mittel mit Fehler:

$$\nu = (8,75 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}\frac{m^2}{s}$$

Letztlich wird noch die jeweilige Reynolds-Zahl der Kugeln bestimmt. Kenntnis über Re erlaubt es zu verifizieren, dass die angewendeten Gesetze der inneren Reibung und Strömung für die vorliegenden Fälle tatsächlich in guter Näherung gelten.

Das dimensionslose Re errechnet sich aus Formel (5) mit der korrigierten Viskosität η_k. Die Unsicherheit u_{Re} wird durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Formel (5) bestimmt. Die Ableitungen dazu befinden sich im Anhang.

Über die Werte für die Messung bezüglich eines Kugelradius wurde dann ein gewichtetes Mittel gebildet. Für die vier Kugelradien $r_1 = 2,0 \cdot 10^{-3}m$, $r_2 = 1,5 \cdot 10^{-3}m$, $r_3 = 1,0 \cdot 10^{-3}m$, $r_4 = 0,5 \cdot 10^{-3}m$ ergibt sich so:

$$\begin{aligned} Re_{r_1} &= (1,40 \pm 0,01) \cdot 10^{-1} \\ Re_{r_2} &= (6,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} \\ Re_{r_3} &= (1,96 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \\ Re_{r_4} &= (2,71 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

2.2 Bestimmung des Radius aufsteigender Luftblasen

Im zweiten Versuch wurden durch die Auslassöffnung am Boden des Zylinders fünf kleine Luftbläschen in das Öl gelassen, und die Aufstiegsdauer zwischen auch oben verwendeten drei Ringabständen gemessen.

Die Aufstiegsgeschwindigkeit v_a ergibt sich als Quotient der Strecke $-d$ der gemessenen Zeit t. Nun kann durch Umstellen der Formel (12) der Blasenradius r_{bl} bestimmt werden. Dabei wird für η_k das oben ermittelte gewichtete Mittel verwendet, $\rho_l = 1,1839\frac{kg}{m^3}$ bezeichnet die Luftdichte bei etwa 25°C.

$$r_{bl} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\eta_k \cdot v}{(\rho_l - \rho_f)} \cdot \frac{2,1}{r_z \cdot g} \pm \sqrt{\left[\frac{9}{4} \cdot \frac{\eta_k \cdot v}{(\rho_l - \rho_f)} \cdot \frac{2,1}{r_z \cdot g}\right]^2 + \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta_k \cdot v}{(\rho_l - \rho_f)} \cdot \frac{1}{g}}$$

Für die so ermittelten Radien kann auch eine Reynolds-Zahl nach Formel (5) bestimmt werden, wobei die charakteristische Länge $l = r_{bl}$ gesetzt wird, für η wieder der Wert von η_k, und für v der Betrag der ermittelten Geschwindigkeit v_a genutzt wird.

Die Ergebnisse sind im Folgenden zusammengefasst:

Tabelle 1: Bestimmung der Blasenradien

	t $[ss,00]$	v $[\frac{m}{s}]$	r_{bl} $[m]$	Re
1	42,09	7,10E-03	1,79E-03	0,15E-01
2	27,94	1,07E-02	2,22E-03	0,27E-01
3	16,35	1,83E-02	2,96E-03	0,62E-01
4	15,09	1,98E-02	3,10E-03	0,70E-01
5	9,09	3,29E-02	4,10E-03	1,54E-01

Da die Rechnung die physikalischen Gegebenheiten übermäßig vereinfacht und so stark signifikante Fehlerquellen unberücksichtigt bleiben würden, wird hier von einer expliziten Fehlerrechnung abgesehen. Stattdessen sollen die möglichen Fehlerquellen im nächsten Abschnitt qualitativ diskutiert werden.

3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die im ersten Versuch ermittelten Werte $\eta_k = (8,31 \pm 0,03) \cdot 10^{-1} \frac{N \cdot s}{m^2}$ und $\eta = (9,09 \pm 0,03) \cdot 10^{-1} \frac{N \cdot s}{m^2}$, die bei Öltemperaturen zwischen 23°C und 24°C bestimmt wurden, liegen zwischen den Literaturwerten von $\eta_{20°C} = 0,986$ und $\eta_{30°C} = 0,451$. Das Messergebnis für $\nu = (8,75 \pm 0,03) \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$ liegt deutlich unter dem Literaturwert für 20°C von $\nu = 19,3 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$, leider fehlt ein Vergleichswert nach oben.

Um die Ergebnisse einschätzen zu können ist es notwendig, neben der Analyse der rechnerisch berücksichtigten Fehler auch die unkontrollierten Fehlerquellen zu diskutieren.

3.1 Berücksichtigte Unsicherheiten

Um die rechnerisch berücksichtigten Fehlerquellen zu analysieren ist es hilfreich, die Beiträge zum Gesamtfehler zu betrachten, die nach Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die jeweilige Funktion entstehen. Dabei wird neben der Größe des Fehlers nämlich vor allem deutlich, wie stark die Fehler in die vorliegende Funktion einfließen. Die einzelnen Beiträge sind hier exemplarisch für den ersten Messwert aufgeführt, die Größenverhältnisse bleiben bei den weiteren Messungen weitestgehend gleich.

Tabelle 2: Fehlerbeiträge

	$f = \eta$	$f = \eta_k$	$f = \nu$	$f = Re$
$\partial \rho_k \cdot u_{\rho_k}$	4,15E-03	3,66E-03	3,86E-06	-
$\partial \rho_f \cdot u_{\rho_f}$	6,91E-04	6,11E-04	5,92E-06	7,59E-04
$\partial r_k \cdot u_{r_k}$	2,35E-03	1,95E-03	2,06E-06	-
$\partial r_z \cdot u_{r_z}$	-	1,35E-04	1,42E-07	-
$\partial v \cdot u_v$	1,51E-02	1,34E-02	1,41E-05	2,33E-03
$\partial l \cdot u_l$	-	-	-	1,80E-04
$\partial \eta_k \cdot u_{\eta_k}$	-	-	-	2,44E-03

Es ist sofort ersichtlich, dass die Fehler der Geschwindigkeitsmessung bei der Berechnung der Unsicherheiten der Viskositäten deutlich stärker eingehen als die Fehler der anderen Größen. Da u_v wie oben erwähnt aus den Unsicherheiten der Zeitmessung und der Längenmessung errechnet wird, kann man also z.B. durch eine Verbesserung der Messmethoden für diese zwei Größen die Unsicherheit des Endergebnisses effektiv verkleinern. Neben u_v spielt auch u_{r_k} eine relative große Rolle.

3.2 Unkontrollierte Fehlerquellen

Um die Güte der Versuchsergebnisse einschätzen können, müssen neben den oben diskutierten Unsicherheiten auch Faktoren berücksichtigt werden, die rechnerisch nicht in das Ergebnis einfließen.

Zuerst muss die in Formel (4) beschriebene Temperaturabhängigkeit der Viskosität beachtet werden. Die Temperatur im Öl wurde mit einem Thermometer jeweils zu Beginn einer neuen Messreihe aufgenommen. Bei Versuchsbeginn herrschte eine Temperatur von $T = (23,0 \pm 0,25)°C$ im Öl, im Laufe der Messungen stieg die Temperatur um etwa ein Grad an. Dies führt in der Praxis zu einer abfallenden Viskosität des Öls. Die pro Messreihe (d.h. mit Kugeln des gleichen Durchmessers) ermittelten Durchschnittswerte für η und η_k illustrieren das Phänomen:

Tabelle 3: Temperaturabhängigkeit der Viskositäten

Messreihe	T [$°C$]	η [$\frac{N \cdot s}{m^2}$]	η_k [$\frac{N \cdot s}{m^2}$]
1	23	0,95	0,84
2	23-23,5	0,92	0,84
3	23,5-24	0,88	0,83
4	24	0,81	0,79

Die Ergebnisse entsprechen insofern den Erwartungen, bedeuten aber auch, dass die ermittelte gewichteten Mittelwerte für η und η_k nur bedingte Aussagekraft besitzen, auch wenn die errechneten Unsicherheiten anderes vermuten lassen.

Eine zweite potentielle Fehlerquelle ist das unterschiedliche Strömungsverhalten des Öls bei steigendem Kugelradius. Die Gültigkeit der verwendeten Gesetzmäßigkeiten hängt, wie im Skript erwähnt, von der Reynolds-Zahl des Testkörpers ab. Es ist zwar in allen vier Fällen $Re << 1$ erfüllt, doch liegt der Wert für den größten Kugelradius schon in der kritischen Größenordnung. Die wesentlich kleineren Werte der kleineren Kugeln deuten also an, dass hier das Kriterium der Turbulenzfreiheit tendenziell besser erfüllt ist, was diese Messungen genauer machen sollte.

Ein weiterer (kleiner) Effekt, für den nicht kontrolliert wurde, ist die Endlichkeit der Zylinderlänge. Die im Skript besprochene Methode zur Korrektur der Viskosität trägt nur dem endlichen Zylinderradius Rechnung. Es ist folglich zu vermuten, dass die Messergebnisse mit den kleineren Kugeln tendenziell genauer sind, da hier das Verhältnis von Kugelradius zu Zylinderlänge besser ist.

Unter Berücksichtigung dieser nicht kontrollierten Fehlerquellen ist die Aussagekraft der gebildeten gewichteten Mittelwerte für die Viskositäten zweifelhaft, immerhin findet keinerlei Gewichtung für die (funktional unbekannten) Zusammenhänge zwischen Viskosität und Temperatur, Reynolds-Zahl und Güte des Modells, sowie Verhältnis zwischen r_k und Zylinderlänge statt, obwohl gerade der erste Faktor signifikante Auswirkungen auf die Güte der Messergebnisse hat.

3.3 Fehlerquellen im Bläschenversuch

Auf eine detaillierte Fehlerrechnung musste im zweiten Versuch verzichtet werden. Der verwendete Formelapparat bildet die physikalische Wirklichkeit nämlich nur unzureichend ab. Maßgeblich dafür verantwortlich ist die nicht-konstante Geschwindigkeit der Luftbläschen, und die Abhängigkeit des Bläschenradius vom Druck des Öls, d.h. die Änderung von r_{bl} über den Weg. Für beide Effekte ist kein funktionaler Zusammenhang bekannt, sie können also nicht quantifiziert werden. Durch die geringe Zahl an Messungen - und die versuchsbedingt geringe Vergleichbarkeit der Messobjekte - sind außerdem große statistische Schwankungen zu erwarten.

Die berechneten Reynolds-Zahlen deuten darauf hin, dass die Strömung auch im zweiten Versuch größtenteils laminar verlaufen ist. Lediglich die größte Luftblase weist einen kritischen Wert auf, der mit dem der größten Metallkugel vergleichbar ist.

Literatur

[Müller 2007] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik.* 2007.

[Müller 2012] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik.* 2012.

A Anhang

A.1 Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

Berechnung von η:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v} \\
\frac{\partial \eta}{\partial \rho_k} &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{1}{v} \\
\frac{\partial \eta}{\partial \rho_f} &= -\frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{1}{v} \\
\frac{\partial \eta}{\partial v} &= -\frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v^2} \\
\frac{\partial \eta}{\partial r_k} &= \frac{4}{9} \cdot r_k \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v}
\end{aligned}$$

Berechnung von η_k:

$$\begin{aligned}
\eta_k &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}\right)} \\
\frac{\partial \eta_k}{\partial \rho_k} &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}\right)} \\
\frac{\partial \eta_k}{\partial \rho_f} &= -\frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}\right)} \\
\frac{\partial \eta_k}{\partial v} &= -\frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}\right)} \\
\frac{\partial \eta_k}{\partial r_k} &= \frac{2}{9} \cdot r_k \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v} \cdot \frac{2 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}}{\left(1 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}\right)^2} \\
\frac{\partial \eta_k}{\partial r_z} &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v \cdot r_z^2} \cdot \frac{2,1 \cdot r_k}{\left(1 + 2,1 \cdot \frac{r_k}{r_z}\right)^2}
\end{aligned}$$

Berechnung von ν:

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v} \\
\frac{\partial \nu}{\partial \rho_k} &= \frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \frac{1}{\rho_f} \cdot \cdot \frac{1}{v} \\
\frac{\partial \nu}{\partial \rho_f} &= -\frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{\rho_k}{\rho_f^2} \\
\frac{\partial \nu}{\partial v} &= -\frac{2}{9} \cdot r_k^2 \cdot g \frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v^2} \\
\frac{\partial \nu}{\partial r_k} &= \frac{4}{9} \cdot r_k \cdot g \frac{1}{\rho_f} \cdot \frac{\rho_k - \rho_f}{v}
\end{aligned}$$

Berechnung von Re:

$$\begin{aligned}
Re &= \frac{v \cdot l \cdot \rho_f}{\eta_k} \\
\frac{\partial Re}{\partial \eta_k} &= -\frac{v \cdot l \cdot \rho_f}{\eta_k^2} \\
\frac{\partial Re}{\partial \rho_f} &= \frac{v \cdot l}{\eta_k} \\
\frac{\partial Re}{\partial v} &= \frac{l \cdot \rho_f}{\eta_k} \\
\frac{\partial Re}{\partial l} &= \frac{v \cdot \rho_f}{\eta_k}
\end{aligned}$$

A.2 Messdaten

Die Messdaten befinden sich auf den nächsten Blättern.