



ELEKTRONIK-PRAKTIKUM

---

# V1: Messen elektrischer Größen und Passive Schaltungen

---

*Autoren:*

[REDACTED]  
[REDACTED]

[REDACTED]  
[REDACTED]

Versuchszeitraum: [REDACTED]

Versuchsgruppe: [REDACTED]

Abgabedatum: [REDACTED]

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Materialien und Methoden</b>	<b>2</b>
1.1	Verwendete Messgeräte . . . . .	2
1.2	Funktionsweisen . . . . .	2
1.3	Spannungsmessungen . . . . .	2
1.4	Sollwertanzeige am Generator . . . . .	3
1.4.1	Spannungen und Pegel . . . . .	3
1.4.2	Leistungsanpassung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Auswertung und Diskussion</b>	<b>4</b>
2.1	Hochohmiger Spannungsteiler . . . . .	4
2.2	Frequenzabhängiger Spannungsteiler (RC-Glied) . . . . .	5
2.3	Simulation verschiedener Vierpolkombinationen . . . . .	8
2.3.1	RC-Glied mit verschiedenen Lastwiderständen . . . . .	8
2.3.2	RC-Glied und zwei Spannungsteiler . . . . .	9
2.3.3	Tiefpass 3. Ordnung . . . . .	10
2.3.4	Tiefpass 3. Ordnung mit verbessertem Lastverhalten . . . . .	11
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>15</b>

# 1 Materialien und Methoden

## 1.1 Verwendete Messgeräte

- Generator AFG-2005 (Hersteller G<sup>W</sup>INSTEK)
- Oszilloskop GDS-1022 (Hersteller G<sup>W</sup>INSTEK)
- DMM EX 330 (Hersteller EXTECH)
- Multimeter GS6510 (Hersteller Voltcraft)

Zu den Geräten befanden sich am Versuchsplatz die entsprechenden Bedienungsanleitungen, aus denen auch die im Folgenden gemachten Angaben zu Leistungscharakteristika entnommen wurden.

## 1.2 Funktionsweisen

Multimeter sind Messgeräte, mit denen elektrische Größen wie Stromstärken, Spannungen und Widerstände gemessen werden können. Es kann dabei zwischen Analogmultimeter und Digitalmultimeter (DMM) unterschieden werden. Analogmultimeter funktionieren mit Hilfe eines Drehspulmesswerks, welches Stromstärken misst. Bei Spannungsmessungen wird der Strom gemessen, der über den bekannten Innenwiderstand des Analogmultimeters fließt. In Digitalmultimetern hingegen wird das Signal mit Hilfe eines Analog-Digital-Umsetzers aufgenommen und mit einem intern gespeicherten Spannungswert verglichen. Umstellungen des Messbereichs, werden in beiden Bauarten durch Umschalten interner Spannungsteiler realisiert.

Oszilloskope können zusätzlich den zeitlichen Verlauf eines elektronischen Signals darstellen. Analoge Oszilloskope verwenden eine Kathodenstrahlröhre, während digitale Oszilloskope mit Hilfe einer Analog-Digital-Wandlung funktionieren. Die Abtastrate des verwendeten Oszilloskops beträgt 250 MSa/s.

## 1.3 Spannungsmessungen

Zunächst wurden verschiedene mit dem Generator erzeugte Wechsel- und Gleichspannungen direkt mit den beiden Multimetern, sowie mit dem Oszilloskop gemessen. Das Messprotokoll hierzu befindet sich im Anhang.

Hierbei ist auffällig, dass die am Generator angezeigte Spannung nur halb so groß ist, wie die mit den Multimetern bzw. mit dem Oszilloskop gemessenen. Dies ist damit zu erklären, dass der Generator einen Innenwiderstand hat. Laut Bedienungsanleitung ist die Ausgangsimpedanz  $R_i = 50 \Omega$ . Die vom Generator angezeigte Spannung ist richtig für den Fall, dass der Lastwiderstand  $R_L$  gleich  $R_i$  ist. Falls der Generator an einen vergleichsweise großen Lastwiderstand angelegt wird, ist die tatsächliche Spannung doppelt so groß, wie die am Generator angezeigte.

Dies kann mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel verstanden werden. Für die angelegte Spannung gilt  $U = U_i + U_L$ , wobei  $U_i$  der Spannungsabfall am Innenwiderstand und  $U_L$  der Spannungsabfall an der Last ist. Falls der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand ist, dann gilt

$$U_i = U_L \Rightarrow U = U_i + U_L = 2U_L. \quad (1)$$

Wenn jedoch der Lastwiderstand sehr viel größer als der Innenwiderstand ist, dann gilt

$$U_i \ll U_L \Rightarrow U = U_i + U_L \approx U_L. \quad (2)$$

Die Schwankungen zwischen den Messungen mit verschiedenen Messgeräten sind klein und im Wesentlichen auf die unterschiedlichen Innenwiderstände zurück zu führen.

## 1.4 Sollwertanzeige am Generator

### 1.4.1 Spannungen und Pegel

Die Peak-to-Peak-Spannung ( $V_{pp}$ ) ist die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten Spannung während einer Periode einer Wechselspannung. Für eine harmonische Wechselspannung  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$  gilt  $V_{pp} = 2V_0$ .

Die Root-Mean-Square-Spannung berechnet sich durch

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |V(t)|^2 dt}. \quad (3)$$

Für eine harmonische Wechselspannung  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$  gilt  $V_{rms} = V_0/\sqrt{2}$ .

Um Verstärkungen von Leistungen  $P$  oder Spannungen  $U$  zu messen wird die logarithmische Einheit Dezibel (dB) verwendet.

$$\frac{P_1}{P_0} [dB] = 10 \cdot \log \left| \frac{P_1}{P_0} \right| \quad (4)$$

$$\frac{U_1}{U_0} [dB] = 20 \cdot \log \left| \frac{U_1}{U_0} \right| \quad (5)$$

Um Leistungspegel zu berechnen, wird die Einheit Dezibel Milliwatt (dBm) verwendet, welche die Leistung 1 mW als Bezugspunkt verwendet.

$$\frac{P}{1 \text{ mW}} [dBm] = 10 \cdot \log \left| \frac{P}{1 \text{ mW}} \right| \quad (6)$$

### 1.4.2 Leistungsanpassung

Die Leistung  $P_L$ , welche ein Generator an einen Lastwiderstand abgeben kann, hängt vom Innenwiderstand  $R_i$ , der angelegten Spannung  $U$  und dem Lastwiderstand  $R_L$  ab. Der Strom berechnet sich dann nach dem Ohmschen Gesetz durch

$$I = \frac{U}{R_i + R_L}. \quad (7)$$

Mit der Spannung  $U_L = R_L \cdot I$ , welche am Lastwiderstand abfällt, berechnet sich die abgegebene Leistung durch

$$P_L = U_L \cdot I = R_L \cdot I^2 = R_L \cdot \left( \frac{U}{R_i + R_L} \right)^2 = \frac{U^2}{R_i^2/R_L + 2R_i + R_L}. \quad (8)$$

Mit der Spannung  $U = U_i + U_L = (R_i + R_L) \cdot I$  kann die Leistung des Generators berechnet werden.

$$P = U \cdot I = (R_i + R_L) \cdot I^2 \quad (9)$$

Daraus ergibt sich mit (4), dem Innenwiderstand  $R_i = 50 \, \Omega$  des Generators und einem Lastwiderstand von  $R_L = 560 \, \Omega$  ein absoluter Leistungspegel von

$$\frac{P_L}{P} [dB] = 10 \cdot \log \left| \frac{P_L}{P} \right| = 10 \cdot \log \left| \frac{R_L}{R_i + R_L} \right| = -0,37 \, dB, \quad (10)$$

welcher auf die Leistung  $P$  bezogen ist, die der Generator aus dem Stromnetz entnimmt.

Dazu gehört der absolute Spannungspegel

$$\frac{U_L}{U} [dB] = 20 \cdot \log \left| \frac{U_L}{U} \right| = 20 \cdot \log \left| \frac{R_L}{R_i + R_L} \right| = -0,74 \, dB. \quad (11)$$

Die an den Lastwiderstand abgegebene Leistung wird maximal, wenn der Nenner in (8) minimal wird.

$$\frac{d}{dR_L} (R_i^2/R_L + 2R_i + R_L) = -R_i^2/R_L^2 + 1 = 0 \Rightarrow R_i = R_L, \quad (12)$$

Dies ist also genau dann der Fall wenn der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist.

## 2 Auswertung und Diskussion

### 2.1 Hochohmiger Spannungsteiler

Für diesen Versuchsteil wurde die Schaltung gemäß der Versuchsanleitung aufgebaut (dort befindet sich auch ein Schaltplan) und dann zunächst mit dem DMM und anschließend mit dem parallel dazu geschalteten Oszilloskop gemessen. Das Messprotokoll hierzu befindet sich im Anhang. Der errechnete Wert auf dem Protokollblatt wurde mit der naiven Annahme von idealen Spannungsmessern ( $R_i = \infty$ ) und Spannungsquellen ( $R_i = 0 \, \Omega$ ) berechnet:

$$U_{n:m} = U \frac{R_n}{R_n + R_m}. \quad (13)$$

In unserem Fall ist  $R_n = n \cdot 1 \, M\Omega$  und  $n + m = 8$ . Dass die naive Annahme in der Praxis nicht haltbar ist wird bereits dadurch deutlich, dass die mit dem DMM gemessenen Spannungen abhängig davon sind, ob zusätzlich das Oszilloskop parallel geschaltet ist. Die Innenwiderstände der verwendeten Messgeräte sind  $R_i = 1 \, M\Omega$  (Oszilloskop) bzw.  $R_i = 10 \, M\Omega$  (DMM).

Die Spannungsteilerformel stimmt also nur, falls der Innenwiderstand der Spannungsquelle sehr viel kleiner als die Widerstände der Spannungsteiler und der Innenwiderstand des Messgeräts sehr viel größer als selbiger ist. Erstere Annahme ist hier gegeben, da der Innenwiderstand der Spannungsquelle  $R_i = 50 \, \Omega$  beträgt. Die zweite Annahme ist nicht gegeben, da die Innenwiderstände von DMM und Oszilloskop in der Größenordnung der Spannungsteilerwiderstände sind.

In einem Messaufbau müssen diese beiden Kriterien also immer beachtet werden. Falls Messgeräte und Widerstände nicht frei wählbar sind muss die Berechnung für den Spannungsteiler korrigiert werden.

## 2.2 Frequenzabhängiger Spannungsteiler (RC-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines RC-Glieds ohne Last lautet:

$$T = \frac{|U_{aus}|}{|U_{ein}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (14)$$

Die Grenzfrequenz ist definiert als der Wert der Frequenz  $f = \omega/2\pi$ , für den gilt  $\omega RC = 1$ . An diesem Punkt ist die Übertragungsfunktion also  $T = 1/\sqrt{2}$ , d.h. hier sinkt die Leistung  $P \propto U^2$  um die Hälfte und die Phasenverschiebung beträgt genau 45 Grad. Eine Umrechnung in Dezibel ergibt eine Verstärkung an diesem Punkt von  $-3 \text{ dB}$ .

Das aufgebaute RC-Glied (siehe Anhang, Abb. 9) ist ein Tiefpass, d.h. es wird verwendet, um hohe Frequenzen zu dämpfen. Die Grenzfrequenz gibt daher einen charakteristischen Wert an, ab dem das RC-Glied signifikant dämpft.

Weiterhin ist zu beachten, dass hier im idealisierten Aufbau gearbeitet wird, d.h. der Innenwiderstand der Stromquelle wird mit  $R_I = 0 \Omega$  und der Lastwiderstand mit  $R_L = \infty$  angenommen. Sind diese beiden Widerstände jedoch endlich ändert sich auch die Übertragungsfunktion. Folglich muss der Lastwiderstand groß gegenüber dem Widerstand im Vierpol sein, um mit den hier verwendeten Formeln rechnen zu können. Neben den durch die Übertragungsfunktion dargestellten Eigenschaften eines Vierpols ist also auch das Gesamtnetzwerk entscheidend, in welches dieser eingebaut wird.

Nach der Messung der Eingangsspannung  $U_{ein}$  und Ausgangsspannung  $U_{aus}$  für verschiedene Frequenzen  $f$  konnte folgendes Bodediagramm erstellt werden.

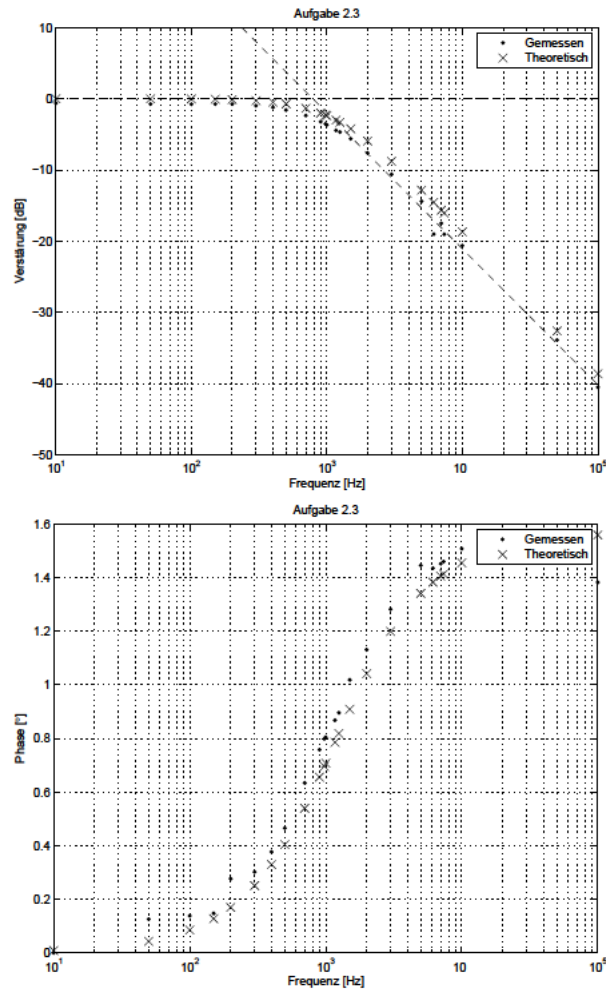


Abbildung 1: Bodediagramm für den frequenzabhängigen Spannungsteiler mit  $R = 68 \text{ k}\Omega$  und  $C = 2 \text{ nF}$ . Die Grenzfrequenz wurde zu  $f_g = 787 \text{ Hz}$  bestimmt.

Zum Vergleich wurden auch die theoretisch zu erwartenden Messergebnisse für die nominalen Angaben der verwendeten Bauteile

$$\begin{aligned} R &= 68 \text{ k}\Omega \\ C &= 2 \text{ nF} \end{aligned}$$

nach Versuchsanleitung errechnet und mit eingezeichnet. Mit diesen Werten ergibt sich eine Grenzfrequenz von

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} = 1170 \text{ Hz}.$$

Die Grenzfrequenz wurde aus den tatsächlichen Messwerten mit Hilfe eines linearen Fits an den logarithmierten Werten für Verstärkungen kleiner  $-5 \text{ dB}$  bestimmt:

$$f_g = 787 \text{ Hz}.$$

Offenbar liegen die real gemessenen Werte durchgehend unter den theoretisch erwarteten, daraus folgt auch eine kleinere Grenzfrequenz. Eine Ursache liegt in den Fertigungstoleranzen der verwendeten Bauteile, insbesondere des Kondensators: eine Messung mit einem

DMM ergab hier einen tatsächlichen Wert von etwa  $C = 2,42 \text{ nF}$ , für den Widerstand  $R = 67,6 \text{ k}\Omega$ . Die Grenzfrequenz beträgt so  $f_g = 973 \text{ Hz}$ . Bereits kleinere Abweichungen der tatsächlichen Eigenschaften der Bauteile erzeugen also Schwankungen der Grenzfrequenz um mehrere hundert Hertz.

### Untersuchungen mit einem Rechtecksignal

Wir statt einem sinusförmigen Signal ein Rechtecksignal verwendet, so entstehen Verzerrungen. Da nur lineare Bauteile verwendet wurden handelt es sich um eine lineare Verzerrung. Diese ist dadurch charakterisiert, dass am Eingangssignal beteiligte Frequenzen gedämpft werden, aber durch die Schaltung keine neuen Frequenzen erzeugt werden. Dies kann zum Beispiel in der folgenden Abbildung beobachtet werden, welche dem Eingangs- das Ausgangssignal bei einer Frequenz nahe der Grenzfrequenz gegenüberstellt.

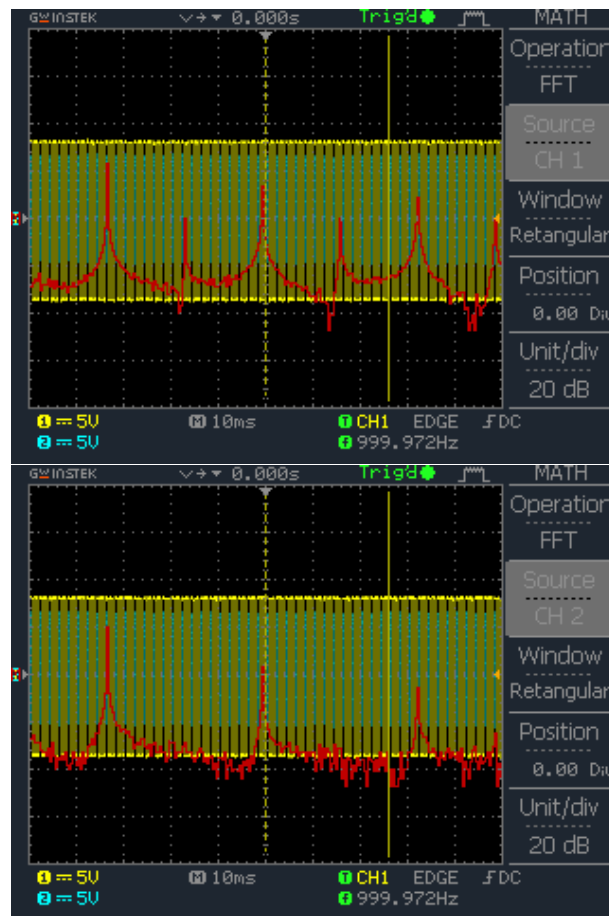


Abbildung 2: Dämpfung von Frequenzen des Rechtecksignals in der Nähe der Grenzfrequenz der Schaltung. Die gelbe und blaue Kurve sind die Ein- und Ausgangssignale. Die rote Kurve stellt die Fouriertransformierte des Eingangs- (Source: CH1) bzw. Ausgangssignals (Source: CH2) der Schaltung dar.

Durch die Tiefpasswirkung werden Rechtecksignale mit geringen Frequenzen, die aus langsamen Schwingungen zusammengesetzt sind, nicht verändert, während bei höheren Frequenzen zunehmend Oberschwingungen des Signals weggedämpft werden und sich die Signalform folglich ändert. Bei Frequenzen nahe bei und höher der Grenzfrequenz wird durch den Auf- und Entladevorgang am Kondensator das ursprüngliche Rechtecksignal so in ein Dreiecksignal gewandelt. Der Tiefpass wirkt hier näherungsweise als Integrator.



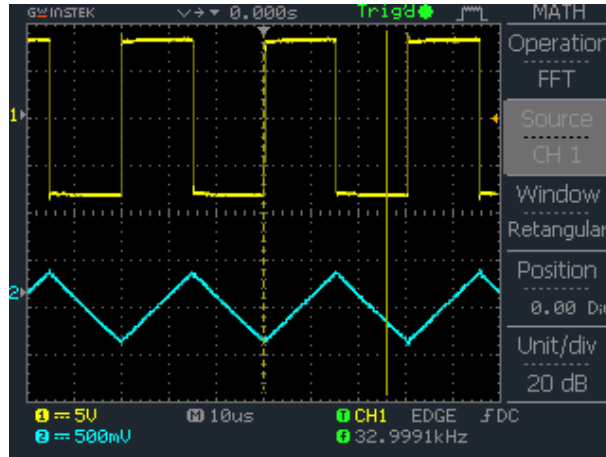


Abbildung 3: Umwandlung des Rechteck- in ein Dreieckssignal durch das RC-Glied bei  $33\text{kHz} \gg f_g$ .

## 2.3 Simulation verschiedener Vierpolkombinationen

### 2.3.1 RC-Glied mit verschiedenen Lastwiderständen

Wird nun das RC-Glied an einen endlichen Lastwiderstand  $R_L$  angeschlossen (siehe Anhang, Abb. 10), ändert sich die Übertragungsfunktion wie folgt:

$$T = \frac{|U_{aus}|}{|U_{ein}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{R_L} + 1\right)^2 + (\omega RC)^2}} \quad (15)$$

Offenbar wird das Signal konstant stärker gedämpft als im Fall ohne Last. Hierdurch verschiebt sich auch die Grenzfrequenz zu höheren Frequenzen.

Eine Simulation mit Hilfe der Software Multisim 13.0 von National Instruments mit und ohne verschiedenen Lastwiderständen ergibt die folgenden Bodeplots:

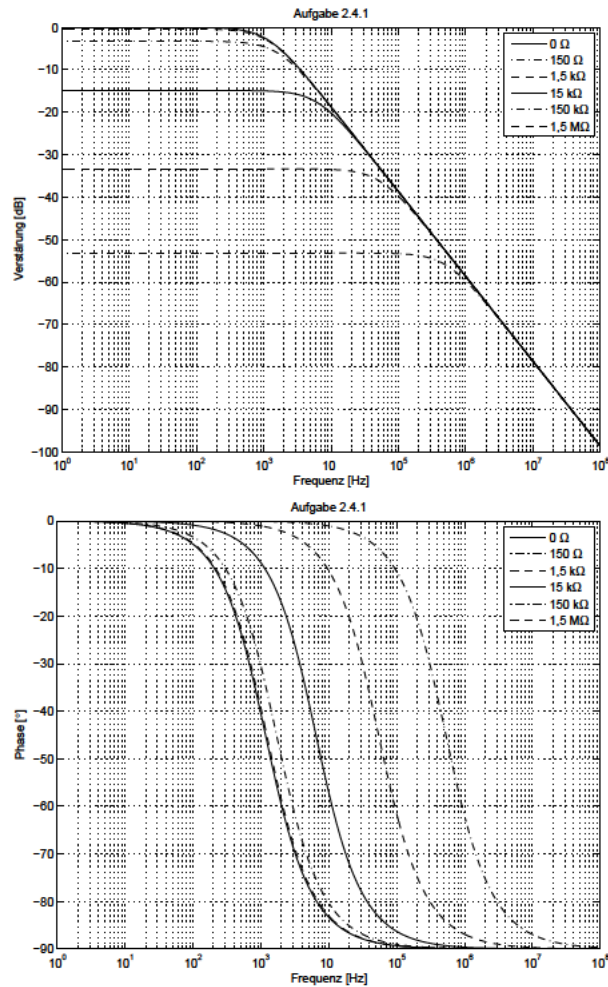


Abbildung 4: Bodeplot der Simulation eines einfachen RC-Glieds mit verschiedenen Lastwiderständen  $R_L$ .

Wie erwartet ändert sich die Flanke der Dämpfung für hohe Frequenzen nicht, allerdings ist die Übertragungskurve insgesamt nach unten verschoben und die Grenzfrequenzen steigen.

### 2.3.2 RC-Glied und zwei Spannungsteiler

Wird das RC-Glied mit einem rein ohmschen Spannungsteiler des Verhältnisses 10:1 so kombiniert, dass zuerst der ohmsche Spannungsteiler und danach das RC-Glied durchlaufen wird (siehe Anhang, Abb. 11), so ergibt sich für unterschiedliche Werte des Widerstands  $R_{12}$  (und entsprechend  $R_{11}$ ) das folgende Bild:

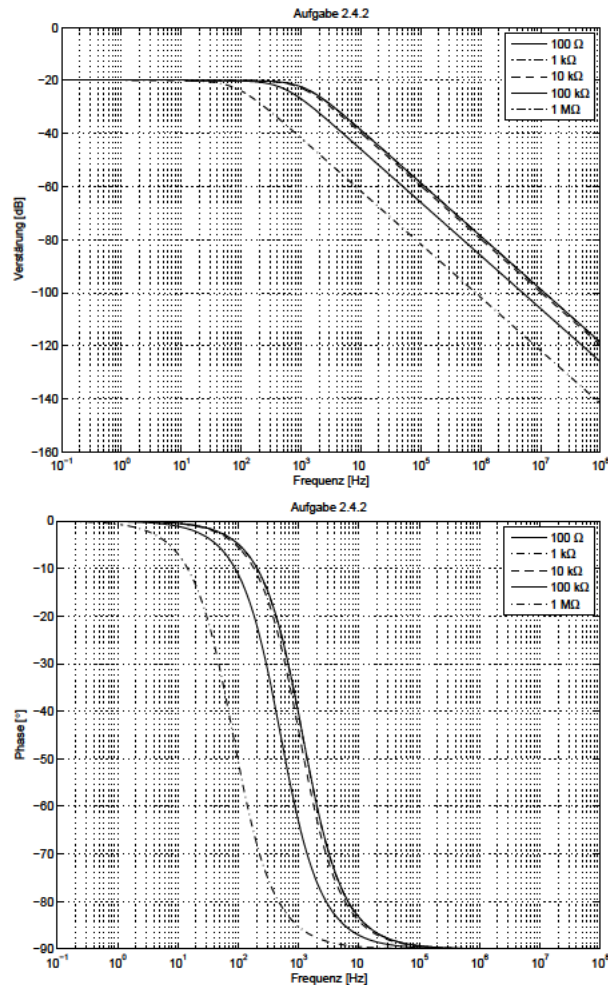


Abbildung 5: Bodediagramm für einen ohmschen Spannungsteiler mit nachgeschaltetem RC-Glied. Die unterschiedlichen Kurven gehören zu verschiedenen Werten von  $R_{12}$ , wobei  $R_{11}$  stets so gewählt wurde, dass der ohmsche Spannungsteiler im Verhältnis 10:1 arbeitet.

Für die Kombination ohmsche Spannungsteiler mit nachgeschaltetem RC-Glied verhält sich die Übertragungsfunktion im Limes für kleine Frequenzen immer gleich, unabhängig von der Größe von  $R_{12}$ . Für große Frequenzen wird die Kurve jedoch durch die Wahl von  $R_{12}$  beeinflusst: je höher der Widerstand, desto stärker die Dämpfung. Die Grenzfrequenz des Systems sinkt damit für größere Widerstände.

Werden nun RC-Glied und ohmscher Spannungsteiler getauscht, ergibt sich ein anderes Bild: nun ist das Verhalten bei großen Frequenzen unabhängig von  $R_{12}$ , die Dämpfung bei kleinen Frequenzen steigt hingegen mit dem Widerstand. Hierdurch steigt die Grenzfrequenz mit höheren  $R_{12}$  an.

Unabhängig von der Schaltungsreihenfolge bleibt die Flankensteilheit von der Wahl von  $R_{12}$  unberührt.

### 2.3.3 Tiefpass 3. Ordnung

Nun werden drei gleichartige RC-Glieder hintereinander geschaltet, es ergibt sich ein sogenannter Tiefpass 3. Ordnung (siehe Anhang, Abb. 12). Hier ist das Ausgangssignal des ersten RC-Glieds das Eingangssignal des zweiten Glieds usw. Wie oben bereits angespro-

chen ist das Verhalten der einzelnen Glieder nicht unabhängig von der nachfolgenden Last. Die Übertragungskurven weichen bei endlichen Widerständen von der Idealsituation mit  $R_L = \infty$  ab. Wie aus Formel (15) ersichtlich sinkt insbesondere die Grenzfrequenz falls eine endliche Last anliegt.

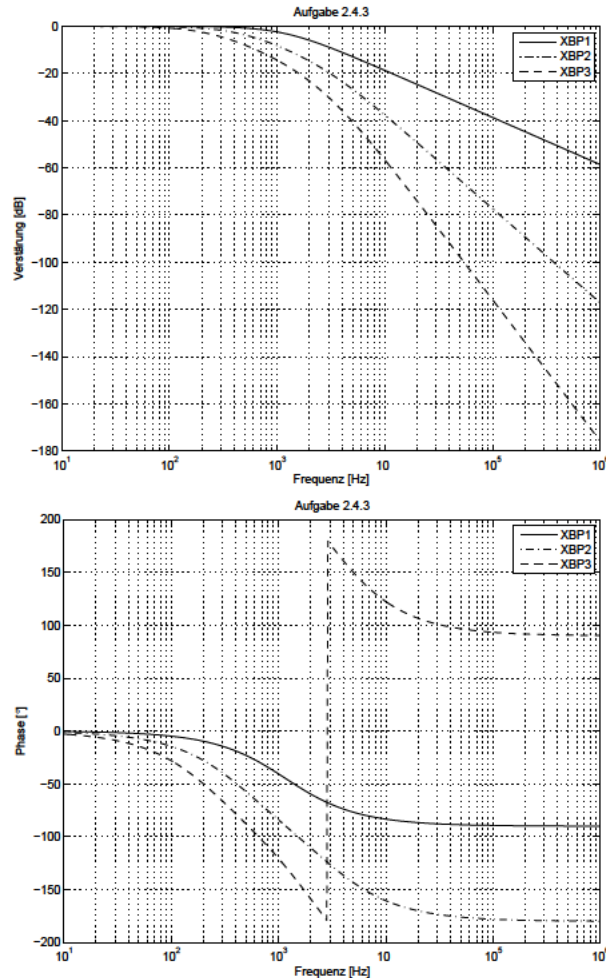


Abbildung 6: Bodediagramme nach der ersten (XBP1), zweiten (XBP2) und dritten (XBP3) Filterstufe im Filter 3. Ordnung. Deutlich erkennbar ist, dass sich die RC-Glieder gegenseitig beeinflussen und die Grenzfrequenz des Gesamtviertpols verschoben wird.

### 2.3.4 Tiefpass 3. Ordnung mit verbessertem Lastverhalten

Um der oben geschilderten Problematik entgegenzuwirken können die RC-Glieder unterschiedlich dimensioniert werden. Hier wurden bei gleichbleibendem  $\tau = RC$  die ohmschen Widerstände pro RC-Glied um eine Größenordnung vergrößert (siehe Anhang, Abb. 13).

Diese Verbesserung der Schaltung erlaubt es, die Näherung  $R_L = \infty$  zu machen. Die Übertragungsfunktionen der einzelnen RC-Glieder können nun als näherungsweise ideal angenommen und zur Gesamtübertragungsfunktion multipliziert werden. Im logarithmischen Plot entspricht dies einer Addition.

Damit bleibt die Grenzfrequenz des Gesamtviertpols gleich den Grenzfrequenzen der einzelnen RC-Glieder. Nun lassen sich auch die Phasenverschiebungen (45 Grad bei der Grenzfrequenz) einfach addieren.

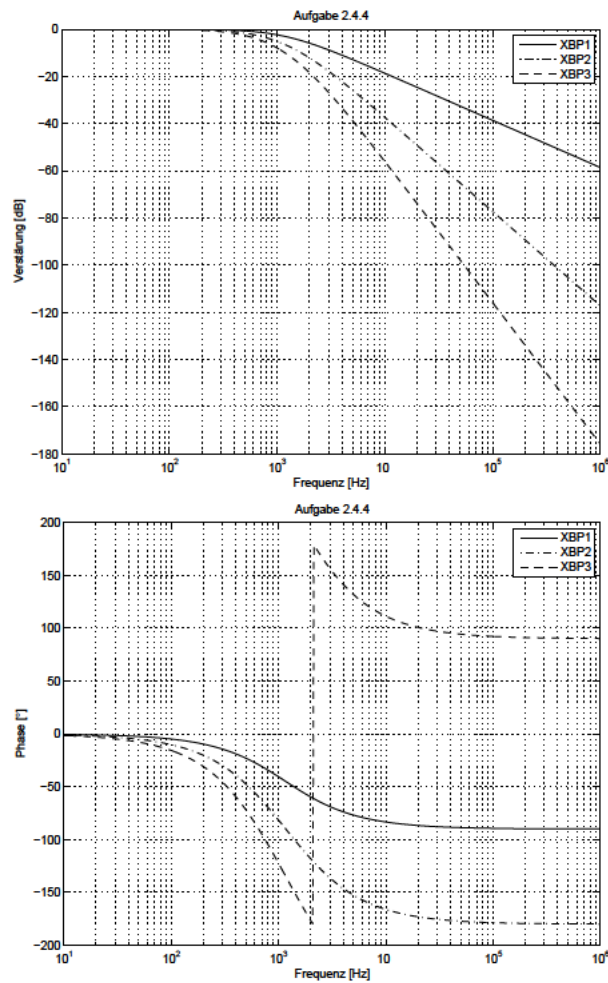


Abbildung 7: Bodediagramme nach der ersten (XBP1), zweiten (XBP2) und dritten (XBP3) Filterstufe im Filter 3. Ordnung mit verbesserter Lastanpassung. Hier beeinflussen sich die einzelnen RC-Glieder weniger als in der ursprünglichen Schaltung und die Grenzfrequenz des Gesamtviertpols bleibt konstant.

In den folgenden Plots sind die Übertragungsfunktionen der einzelnen Stufen für den ursprünglichen Filter 3. Ordnung und die verbesserte Schaltung zum Vergleich eingezeichnet. Offenbar erlaubt es die verbesserte Schaltung, die ursprüngliche Grenzfrequenz beizubehalten.

Ein weiterer Effekt betrifft die Krümmung der Kurve: in der unangepassten Schaltung wächst der Krümmungsradius um die Grenzfrequenz mit jedem zusätzlichen Glied, so dass das Einsetzen der Dämpfung zunehmend unschärfer wird. In der verbesserten Schaltung bleibt der Krümmungsradius auf seinem ursprünglichen Niveau.

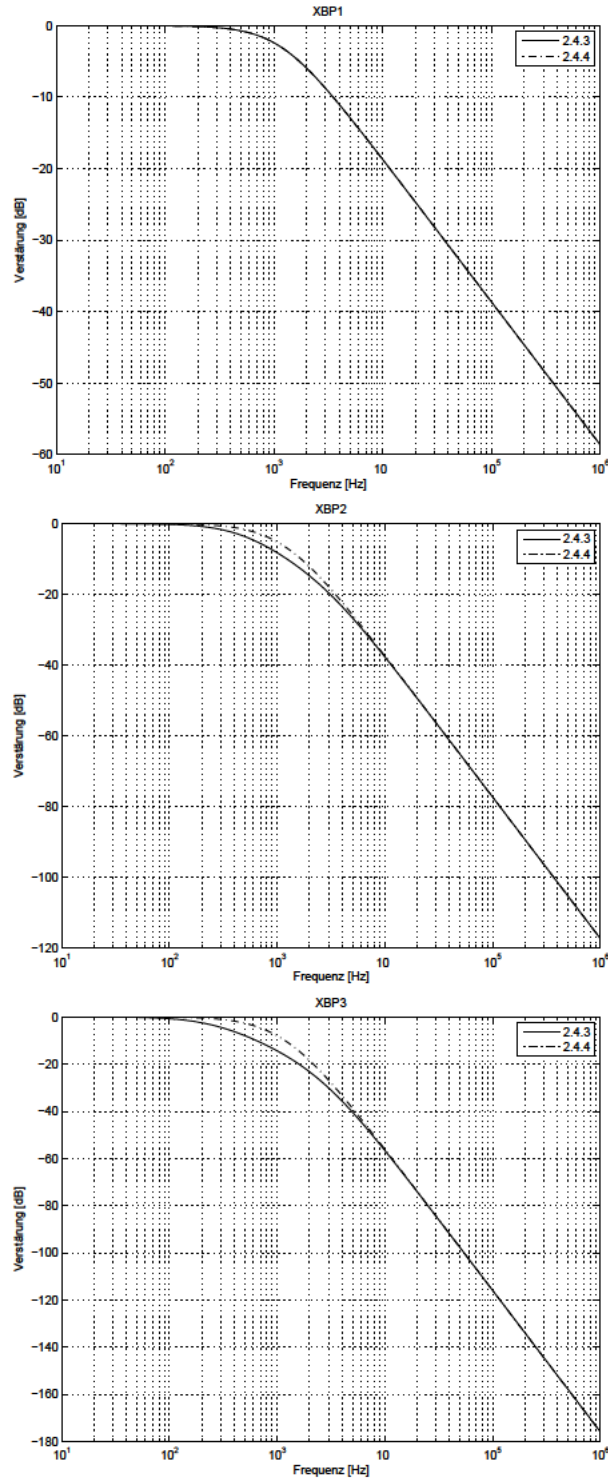


Abbildung 8: Gegenüberstellung des Verhaltens des Filters 3. Ordnung mit (2.4.4) und ohne (2.4.3) verbesserter Lastanpassung nach dem ersten (XBP1), zweiten (XBP2) und dritten (XBP3) Glied. Die im Text diskutierten Auswirkungen der Verbesserung auf Stabilität der Grenzfrequenz und Krümmungsradius der Übertragungsfunktion im Grenzfrequenzbereich werden deutlich.

Unabhängig von der Anpassung des Tiefpasses 3. Ordnung bleibt das Verhalten der Gesamtschaltung für sehr große und sehr kleine Frequenzen gleich, auch die Flankensteilheit ist von der Verbesserung nicht betroffen.

Für hohe Frequenzen werden in beiden Fällen die Übertragungsfunktionen multipliziert, d.h. im logarithmischen Plot addiert. Demnach addiert sich die Flankensteilheit. Also ist die Ordnung des Tiefpasses ein Maß für die Stärke der Dämpfung: pro Ordnung beträgt die Dämpfung 20 dB pro Dekade, ein Tiefpass 3. Ordnung filtert also mit 60 dB pro Dekade.

## A Anhang

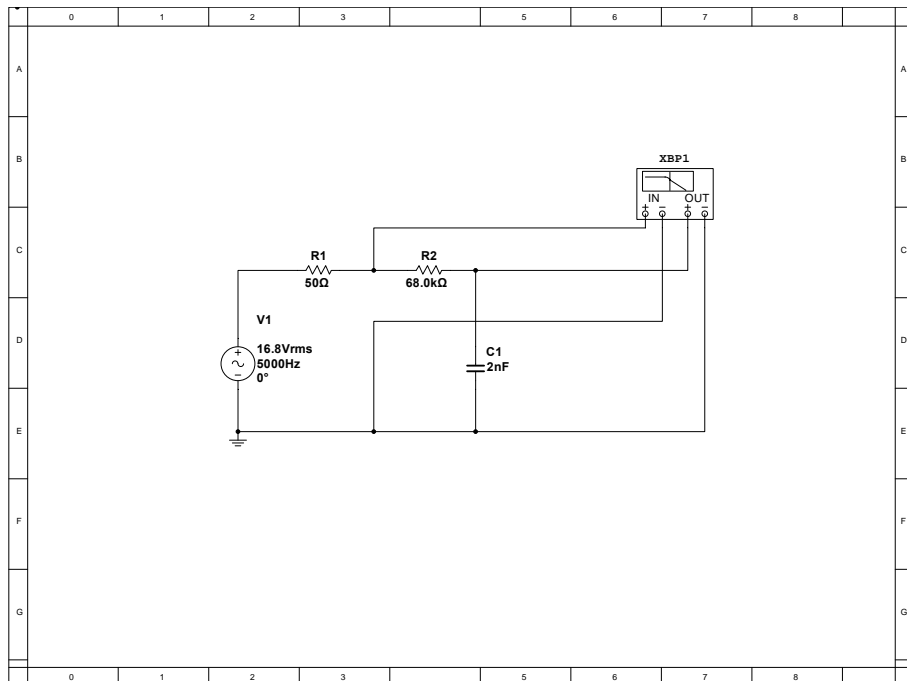


Abbildung 9: Schaltplan für das einfache RC-Glied.

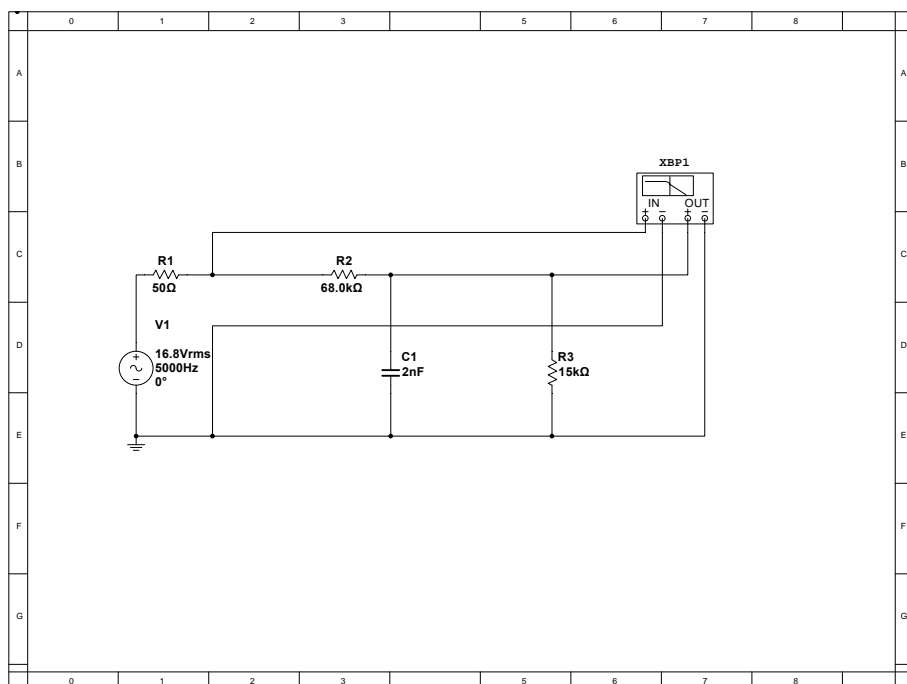


Abbildung 10: Schaltplan für das RC-Glied mit Lastwiderstand.



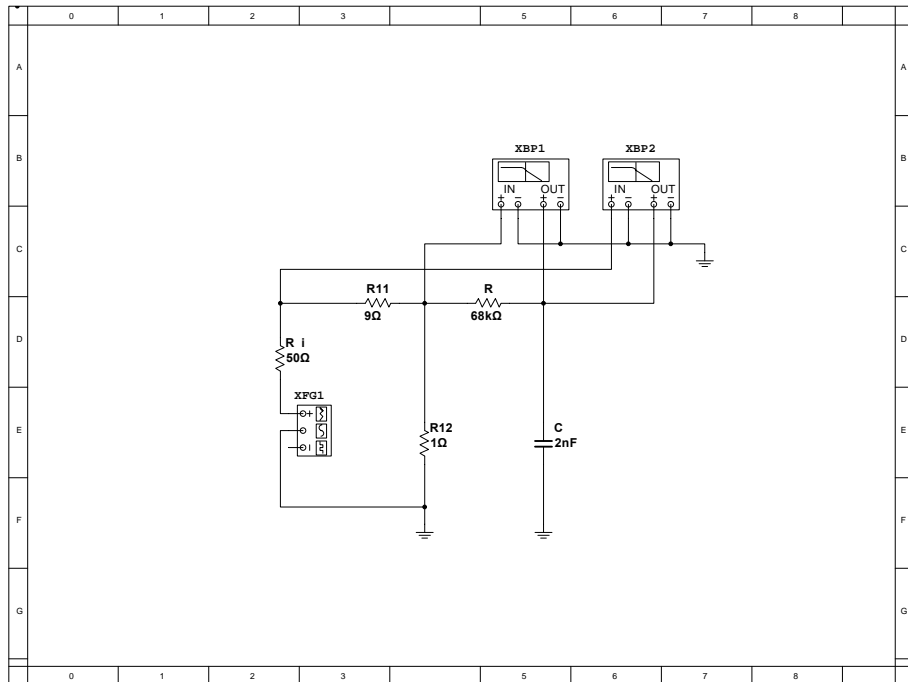


Abbildung 11: Schaltplan für ohmschen Spannungsteiler mit nachgeschaltetem RC-Glied.

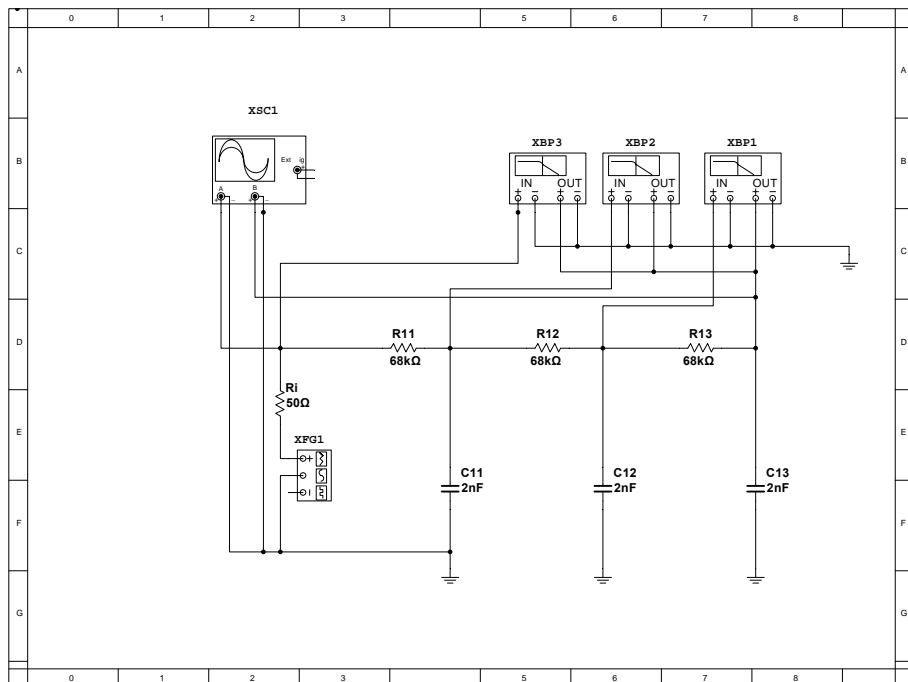


Abbildung 12: Schaltplan für Tiefpass 3. Ordnung.

