



GRUNDPRAKTIKUM

F7: Statistik und Radioaktivität

Autor:

[REDACTED]

Partner:

[REDACTED]

Versuchsdatum: [REDACTED]

Versuchsplatz: [REDACTED]

Abgabedatum: [REDACTED]

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	2
2	Messwerte und Auswertung	2
2.1	Häufigkeitsverteilung des radioaktiven Zerfalls	2
2.2	γ -Absorption von Blei	5
3	Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung	7
A	Anhang	9

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch F7: Statistik und Radioaktivität beinhaltet zwei Teile. Der erste Versuch hat zum Ziel, den Zerfall zweier radioaktiver Präparate zu untersuchen. Im Besonderen soll mit Hilfe des χ^2 -Tests ermittelt werden, ob die Häufigkeitsverteilungen einer Poisson- oder Normalverteilung genügen. Der zweite Versuch dient der experimentellen Bestimmung der Absorptionseigenschaften von Blei. Zu den physikalischen und mathematischen Hintergründen der Versuche finden sich detaillierte Darstellungen im Skript [Mü 12], deswegen soll hier nur ein kurzer Überblick folgen.

Im ersten Versuch wird der Zerfall der Isotope ^{60}Co und ^{137}Cs mit einem Geiger-Müller-Zählrohr untersucht. Es werden hierzu die Impulse pro Zeitintervall je 500 mal gemessen. Nach einer Einteilung der Messwerte in Klassen werden dann mit Hilfe des χ^2 -Tests zwei Nullhypothesen überprüft. Dabei wird erwartet, dass der Cäsiumzerfall als "seltenes" Ereignis eher einer Poissonverteilung genügt, während der Zerfall von ^{60}Co einen größeren Mittelwert aufweist und somit eher durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann.

Im zweiten Versuch wird die Zerfallsrate von ^{137}Cs bestimmt, und dann das Geiger-Müller-Zählrohr sukzessive mit Bleiplatten zunehmender Dicke abgeschirmt. Aus dem funktionalen Zusammenhang (14)¹ kann mit Hilfe einer linearen Regression eine Abhängigkeit zwischen gemessener Impulszahl und der Dicke des Bleis bestimmt werden. Über den Koeffizienten μ lässt sich dann auch die Halbwertsdicke d_h bestimmen. Da die Absorptionseigenschaften eines Materials abhängig von der Energie sind wird letztlich noch die Photonenenergie E abgeschätzt.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Häufigkeitsverteilung des radioaktiven Zerfalls

Messung mit Cäsium

Die Versuchsdurchführung erfolgte streng nach den im Skript beschriebenen Anweisungen. Im Falle des Cäsium (Präparat 7, hohe Schale, Fach 3) lagen die beobachteten Impulsraten im Zeitintervall von $t = 1\text{ s}$ alle zwischen 0 und 8. Folglich wurden die $n = 500$ Messungen manuell in 9 Klassen (Klassenmitte k_j) mit einer Breite von $d_k = 1$ eingeteilt, wobei die Intervallgrenzen halbzahlig sind, d.h. für gemessene Impulszahlen $k(x_j)$ in k_1 gilt zum Beispiel $-0,5 \leq I \leq 1,5$.

Im nächsten Schritt wurde nach Formel (1) für jede Klasse die Wahrscheinlichkeit P_j und ein Erwartungswert $h_j = P_j \cdot n$ bezüglich einer angenommenen Poissonverteilung berechnet (vgl. Tab. 1). Das entsprechende Histogramm (vgl. Abb. 1) zeigt, dass die Häufigkeitsverteilung dem theoretischen Verlauf rein graphisch recht genau entspricht. Die Fehlerbalken um die einzelnen Klassen im Histogramm wurden nach [Hi 11] mit $\sigma_k \approx \sqrt{k(x_j)}$ abgeschätzt (vgl. Anhang). Um die Übereinstimmung zu quantifizieren sollte der χ^2 -Test verwendet werden. Dies ist laut Skript erst dann

¹Verweise in runden Klammern beziehen sich auf die Versuchsbeschreibung auf den Seiten 10-21 im gelben Skript [Mü 12].

sinnvoll möglich, wenn für jede Klasse einzeln $h_j \geq 5$ gilt. Also wurden zur Berechnung der χ^2 -Werte die oberen drei Klassen zu einer Klasse mit Breite $d_k = 3$ zusammengefasst (vgl. Anhang).

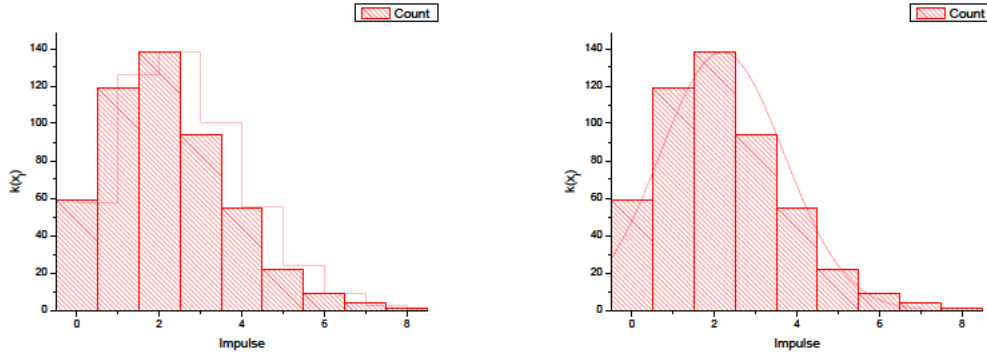


Abbildung 1: Beobachteter ^{137}Cs -Zerfall und Poisson- bzw. Gaussverteilung

Die Übereinstimmung mit einer angenommenen Normalverteilung ist quantitativ deutlich schlechter, auch wenn sie rein graphisch relativ passend erscheint (vgl. Abb. 2). Um die Nullhypothese zu verifizieren wurde analog zu oben vorgegangen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P_j wurde nun die Formel (13) aus dem blauen Skript [Mü 07, S. 27] verwendet. Die zur Berechnung der Normalverteilung notwendigen Parameter $\bar{x} = 2,19$ (Mittelwert) und $\sigma = 1,50$ (Standardabweichung), wurden nach den Formeln (7) aus den neun Klassenmitten und ihren absoluten Häufigkeiten berechnet. Die theoretisch ermittelten Erwartungswerte für die einzelnen Klassen erforderten wieder die Zusammenlegung der drei obersten Klassen um eine sinnvolle Berechnung des χ^2 -Wertes zu erlauben (zusammengefasste Klassen vgl. Anhang).

Tabelle 1: Homogene Klasseneinteilung für die Untersuchung des Cs-Zerfalls

k_j	d	$k(x_j)$	P_j Poisson	h_j Poisson	P_j Gauss	h_j Gauss
0	1	59	1,12E-01	56	9,19E-02	46
1	1	119	2,45E-01	123	1,94E-01	97
2	1	137	2,68E-01	134	2,63E-01	132
3	1	94	1,96E-01	98	2,29E-01	115
4	1	55	1,07E-01	54	1,29E-01	64
5	1	22	4,70E-02	23	4,63E-02	23
6	1	9	1,71E-02	9	1,07E-02	5
7	1	4	5,37E-03	3	1,60E-03	1
8	1	1	1,47E-03	1	1,53E-04	0

Eine manuelle Berechnung des χ^2 -Wertes für eine angenommene Poisson- und Normalverteilung nach Formel (8), und ein Abgleichen in Tabelle 1 im Skript [Mü 12, S.14] für die Irrtumswahrscheinlichkeit α liefert:

Poissonverteilung	Normalverteilung
$\chi_P^2 = 0,95$	$\chi_N^2 = 23,7$
$f = 5$	$f = 4$
$\alpha_P \gtrapprox 0,95$	$\alpha_N < 0,001$

Es liegt damit eine gute Übereinstimmung der gemessenen Häufigkeitsverteilung mit den theoretisch vorhergesagten Werten für eine angenommene Poissonverteilung vor; für die angenommene Gaussverteilung liefert der Test eine fehlende Übereinstimmung.

Messung mit Cobalt

Für die Messung mit Cobalt (Präparat 5, hohe Schale, Fach 1) wurde analog vorgegangen. Die Messungen fanden über eine Zeit von $t = 9\text{ s}$ statt, da die verwendete Cobalt-Probe - vermutlich aufgrund ihres hohen Alters - bereits weniger stark radioaktiv war als angenommen, und nur so die geforderte Impulszahl von ≥ 60 erreicht werden konnte. Die Messwerte streuten zwischen 38 und 102 pro Zeitintervall, was nach Abschätzung nach Formel (6) insgesamt 13 Klassen mit einer Klassenbreite von $d_k = 5$ ergab.

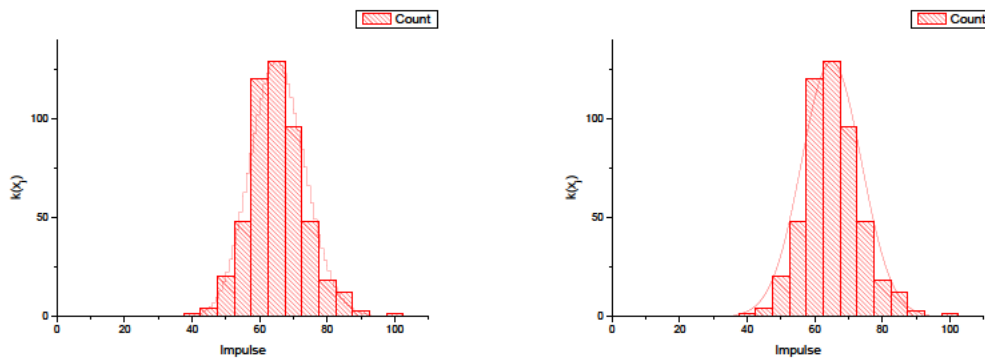


Abbildung 2: Beobachteter ^{60}Co -Zerfall und Poisson- bzw. Gaussverteilung

Nach dem bekannten Verfahren wurden nun für jede der 13 Klassen die entsprechenden Poisson- und Gausswahrscheinlichkeiten inklusive der Erwartungswerte errechnet, wobei die P_j zur Normierung mit der Klassenbreite d_k multipliziert wurden (vgl. Tab. 2). Die zur Berechnung der Normalverteilung nötige Standardabweichung beläuft sich auf $\sigma = 8,21$ bei einem Mittelwert von $\bar{x} = 65,19$. Die sich ergebenden Histogramme sind in Abb. 2 zu finden, wiederum mit durch $\sigma_k \approx \sqrt{k(x_j)}$ abgeschätzten Fehlerbalken.

Die errechneten Erwartungswerte pro Klasse erforderten diesmal, im Falle der Poissonhypothese die untersten drei und die obersten vier Klassen zusammen zu fassen. Zur Überprüfung der Gausshypothese wurden die ersten zwei und die letzten vier Klassen zusammengefasst, um den χ^2 -Wert sinnvoll berechnen zu können (zusammengefasste Klassen im Anhang). Die zugehörigen χ^2 -Werte können nun in Tabelle 1 im Skript [Mü 12, S.14] einer Irrtumswahrscheinlichkeit α zugeordnet werden.

Tabelle 2: Homogene Klasseneinteilung für die Untersuchung des Co-Zerfalls

k_j	d	$k(x_j)$	P_j Poisson	h_j Poisson	P_j Gauss	h_j Gauss
40	5	1	1,10E-03	1	2,20E-03	1
45	5	4	8,86E-03	4	1,18E-02	6
50	5	20	4,10E-02	21	4,39E-02	22
55	5	48	1,16E-01	58	1,12E-01	56
60	5	120	2,08E-01	104	1,99E-01	99
65	5	129	2,47E-01	124	2,43E-01	121
70	5	96	2,00E-01	100	2,05E-01	102
75	5	48	1,14E-01	57	1,19E-01	60
80	5	18	4,65E-02	23	4,78E-02	24
85	5	12	1,39E-02	7	1,32E-02	7
90	5	3	3,10E-03	2	2,53E-03	1
95	5	0	5,25E-04	0	3,35E-04	0
100	5	1	6,85E-05	0	3,05E-05	0

Die Übereinstimmung mit der Nullhypothese ist also in beiden Fällen laut χ^2 -Test nicht gegeben, der beobachtete Zerfall folgt damit weder einer Poisson- noch einer Normalverteilung.

Poissonverteilung	Normalverteilung
$\chi_P^2 = 13,1$	$\chi_N^2 = 18,5$
$f = 6$	$f = 6$
$0,025 \leq \alpha_P \leq 0,05$	$0,01 \leq \alpha_N \leq 0,001$

2.2 γ -Absorption von Blei

Der Versuch zum Absorptionsvermögen von Blei für γ -Strahlung wurde wieder entsprechend der Versuchsbeschreibung durchgeführt. Dazu wurde zuerst ohne Präparat und Bleiplatte der Nulleffekt \bar{x}_N gemessen, und dann nacheinander Messungen mit der Cäsium-Probe (Präparat 7, tiefe Schale, Fach 2) ohne (\bar{x}_0) und mit (\bar{x}_i) Bleiplatten unterschiedlicher Dicke (jeweils in Fach 1) durchgeführt. Die vollständigen Mess- und Zwischenergebnisse sind im Anhang zu finden.

Der Absorptionskoeffizient μ wurde mit Hilfe von Formel (14) und einer linearen Regression bestimmt: Dazu wurde (14) zuerst logarithmiert, und $\ln(\frac{I}{I_0})$ dann gegen z aufgetragen. Die Wertepaare wurden dann mit Hilfe von *OriginPro 8* geplottet und einer linearen Regression, gewichtet mit dem y-Fehler nach der Instrumentalmethode, unterzogen (Abb. 3).

Der y-Fehler ergibt sich aus der Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Größen auf die logarithmierte Form von Gleichung (14):

$$y = -\mu \cdot z = \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \ln \left(\frac{x - x_N}{x_0 - x_N} \right)$$

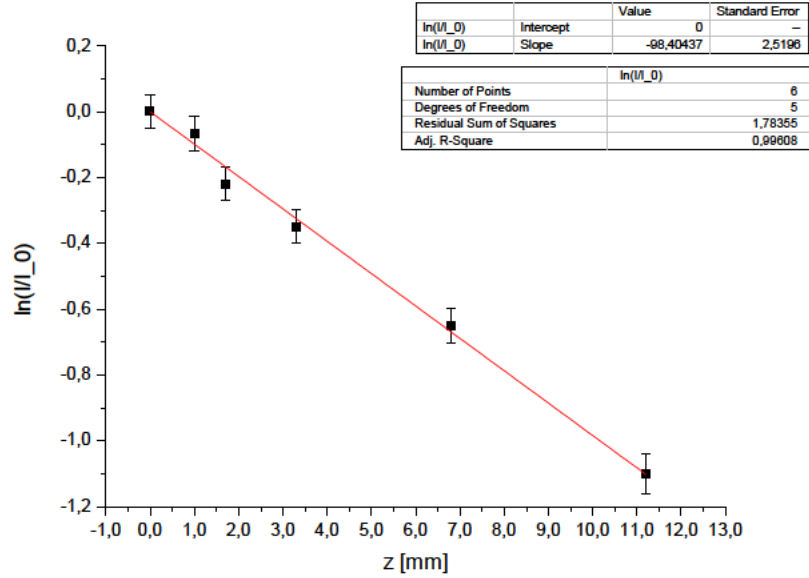


Abbildung 3: Ermittlung von μ aus dem neg. Anstieg der Regressionsgeraden

Hierbei bezeichnet x die gemessene Impulszahl pro Sekunde $\bar{x}/\Delta t$ (*Counts per Second, CPS*), x_0 die Impulse pro Sekunde für die Messung mit *Cs*-Präparat und ohne Bleiplatte, und x_N den ermittelte Nulleffekt pro Sekunde. Da im vorherigen Versuch bestätigt werden konnte, dass der Cäsiumzerfall einer Poissonverteilung genügt, wurden die Unsicherheiten für x_0, x_N und x_i wie folgt berechnet:

$$u_x = \frac{\sqrt{\bar{x}}}{\Delta t}$$

Die Unsicherheiten für die Dicke der Bleiplatten und die Zeitmessung wurden aufgrund ihres sehr geringen Einflusses auf das Endergebnis vernachlässigt.

Bei der Regression wurde die Funktion $y = a \cdot x$ verwendet: Da der Nulleffekt ja bereits abgezogen wurde, ist für die resultierende Kurve kein verschobener y-Achsenabschnitt zu erwarten. Aus dem negativen Anstieg a lässt sich so der gesuchte Koeffizient μ und seine Unsicherheit einfach ablesen. Die ebenfalls gesuchte Halbwertsdicke d_h kann nach Formel (15) einfach berechnet werden, wobei sich ihr Fehler aus dem relativen Fehler von μ multipliziert mit dem Mittelwert d_h ergibt.

$$\mu = (98,4 \pm 2,5) \frac{1}{m}$$

$$d_h = (7,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} m$$

Mit Hilfe des ermittelten μ kann nun bei bekannter Dichte von reinem Blei von $\rho_{Pb} = (11340 \pm 1) \text{ kg/m}^3$ mit Hilfe der im Skript bereitgestellten Graphen Abb. 5 und Abb. 6 [Mü 12, S. 20-21] die Photonenenergie je als $E = E(\mu/\rho)$ und $E = E(d_h)$ graphisch abgeschätzt werden:

$$E(d_h) = (0,82 \pm 0,2) \text{ MeV}$$

$$E(\mu/\rho) = (0,81 \pm 0,2) \text{ MeV}$$

3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Im ersten Versuch konnte für den ^{137}Cs -Zerfall eine Poissonverteilung sehr gut nachgewiesen werden, wie die sehr hohe Irrtumswahrscheinlichkeit zeigt. Eine Aussage bezüglich des ^{60}Co -Isotops zu treffen gestaltet sich dagegen schwieriger, denn beide Nullhypothesen müssen aufgrund sehr kleiner α -Werte verworfen werden. Verschiedene Versuche, durch neue Klasseneinteilungen zu besseren Ergebnissen zu kommen, schlugen fehl, so dass tatsächlich davon auszugehen ist, dass die beobachtete Verteilung den theoretischen Modellen nicht genügt.

Die wahrscheinlichste Erklärung lautet, dass das Präparat im Laufe der Zeit bereits stark an Radioaktivität eingebüßt hat. Ein Indikator für diese Vermutung ist zweifelsfrei dass eine sehr lange Intervallzeit von 9s gewählt werden musste, um auf die geforderten Impulszahlen ≥ 60 zu kommen. Der Zerfall findet im Präparat also scheinbar seltener statt als bei Versuchsbeginn angenommen: es hätten folglich deutlich mehr Messungen gemacht werden müssen, um eine gute Übereinstimmung mit der Gaussverteilung zu finden. Für eine Poissonverteilung hingegen waren die Impulszahlen schon zu hoch, d.h. die Ereignisse waren nicht mehr "selten" genug. Da der Versuchsaufbau relativ wenige Freiheiten zur Durchführung lässt, und alle entsprechenden Parameter schon optimal (1. Fach für das Cobalt-Präparat) bzw. streng nach Vorgabe (500 Messungen, Impulsraten von ≥ 60) gewählt waren, ist ein signifikant besseres Versuchsergebnis vermutlich nur durch Austausch des Präparats zu erreichen.

Die Messergebnisse des zweiten Versuches, insbesondere der Absorptionskoeffizient μ , sind abhängig von der Photonenenergie. Es ist daher schwierig, einen Literaturwert zum Vergleich heran zu ziehen. Die Größenverhältnisse stimmen jedoch, und ein informeller Vergleich mit den Ergebnissen der anderen Gruppen beim gleichen Versuch zeigt, dass sich die Werte in einem glaubhaften Rahmen bewegen und die Fehlerintervalle als zufriedenstellend einzuschätzen sind. Eine Analyse der einzelnen Fehlerbeiträge zeigt außerdem, dass keiner der beteiligten Werte einen signifikant größeren Beitrag zur Unsicherheit des Endergebnisses leistet, d.h. es gibt keine offensichtlich besonders relevanten Fehlerquellen, die gesondert diskutiert werden müssten (vgl. Tab. 3).

Tabelle 3: Fehlerbeiträge zum y-Fehler der Regression

z [mm]	$(\partial_{x_N}(y) \cdot u_{x_N})^2$	$(\partial_{x_0}(y) \cdot u_{x_0})^2$	$(\partial_x(y) \cdot u_x)^2$	u_y
-	-	1,28E-03	1,28E-03	5,07E-02
1,0	4,18E-07	1,30E-03	1,28E-03	5,09E-02
1,7	5,35E-06	1,36E-03	1,28E-03	5,15E-02
3,3	1,55E-05	1,41E-03	1,28E-03	5,21E-02
6,8	7,42E-05	1,57E-03	1,28E-03	5,42E-02
11,2	3,51E-04	1,95E-03	1,28E-03	5,99E-02

Literatur

[Hi 11] Hinrichsen, H. *Histogramme und Fehlerbalken*. 2011. Aufgerufen am 03. Juni 2012. Online verfügbar unter

<http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~hinrichsen/teaching/CP/Material/Tutorien/histogramme.pdf>.

[Mü 07] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.

[Mü 12] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik*. 2012.

Verwendete Software: *OriginPro 8*, *Microsoft Excel 2010*, *TeXMakerX 2.1*

A Anhang

Tabelle 4: Zusammengefasste Klassen für den χ^2 -Test für ^{137}Cs

k_j	d	$k(x_j)$	P_j Poisson	h_j Poisson	P_j Gauss	h_j Gauss
0	1	59	1,12E-01	56	9,19E-02	46
1	1	119	2,45E-01	123	1,94E-01	97
2	1	137	2,68E-01	134	2,63E-01	132
3	1	94	1,96E-01	98	2,29E-01	115
4	1	55	1,07E-01	54	1,29E-01	64
5	1	22	4,70E-02	23	4,63E-02	23
7	3	14	2,40E-02	12	1,25E-02	6

Tabelle 5: Zusammengefasste Klassen für den Poisson- χ^2 -Test für ^{60}Co

k_j	d	$k(x_j)$	P_j Poisson	h_j Poisson
45	15	25	5,10E-02	26
55	5	48	1,16E-01	58
60	5	120	2,08E-01	104
65	5	129	2,47E-01	124
70	5	96	2,00E-01	100
75	5	48	1,14E-01	57
80	5	18	4,65E-02	23
92,5	20	16	1,76E-02	9

Tabelle 6: Zusammengefasste Klassen für den Gauss- χ^2 -Test für ^{60}Co

k_j	d	$k(x_j)$	P_j Gauss	h_j Gauss
42,5	10	5	1,40E-02	7
50	5	20	4,39E-02	22
55	5	48	1,12E-01	56
60	5	120	1,99E-01	99
65	5	129	2,43E-01	121
70	5	96	2,05E-01	102
75	5	48	1,19E-01	60
80	5	18	4,78E-02	24
92,5	20	16	1,61E-02	8

Tabelle 7: Fehlerbalken der Histogramme

Cäsium		Cobalt	
k_j	u_{k_j}	k_j	u_{k_j}
0	7,7	40	1,0
1	10,9	45	2,0
2	11,7	50	4,5
3	9,7	55	6,9
4	7,4	60	11,0
5	4,7	65	11,4
6	3,0	70	9,8
7	2,0	75	6,9
8	1,0	80	4,2
		85	3,5
		90	1,7
		95	0,0
		100	1,0

Tabelle 8: Messdaten zum Absorptionsversuch

	z [mm]	Im	Δt [s]	CPS	y	u_y
x_N		200	747,1	0,27		
x_0	0,0	1000	438,7	2,28	0,00	0,051
1	1,0	1000	465,1	2,15	-0,07	0,051
2	1,7	1000	531,1	1,88	-0,22	0,051
3	3,3	1000	593,0	1,69	-0,35	0,052
4	6,8	1000	758,8	1,32	-0,65	0,054
5	11,2	1000	1063,2	0,94	-1,10	0,060

Erläuterung zu Tab. 8: z ist die Bleiplattendicke, Im die in der Zeit Δt beobachteten Impulse, CPS die auf eine Sekunde normierte Impulszahl, $y = \ln(I/I_0)$ und u_y der entsprechende Fehler.