



GRUNDPRAKTIKUM

M2: Trägheitsmomente

Autor:

■■■■■■■■■■

Partner:

■■■■■■■■■■

Versuchsdatum: ■■■■■■

Versuchsplatz: ■■■■■■■■■■

Abgabedatum: ■■■■■■

Inhaltsverzeichnis

1	Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	2
2	Messwerte und Auswertung	2
2.1	Bestimmung des Drehmoments des Drehtisches	2
2.2	Bestimmung des Zylinderdrehmoments	3
2.3	Verifizierung des Modells des Trägheitsellipsoiden	4
3	Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung	5
A	Anhang	6
A.1	Fehlerrechnung	6
A.1.1	Unsicherheit für J_Z	6
A.1.2	Unsicherheit für T^2	6
A.1.3	Unsicherheit für J_γ	7
A.1.4	Unsicherheit für $\sin^2 \gamma$	7
A.1.5	Unsicherheit für $J_{\gamma=0^\circ}$ und $J_{\gamma=90^\circ}$ als theoretische Größen . . .	8
A.2	Regressionsgraph zu Aufgabe 1	8

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch M2 hat zum Ziel, das Trägheitsmoment eines Drehtisches und eines Zylinders zu bestimmen. Detaillierte Angaben zum Versuchsaufbau und den verwendeten physikalischen Grundlagen, finden sich im gelben Skript [Müller 2012, S. 37-40]. Beides soll hier aufgrund der gebotenen Kürze nur überblicksartig dargestellt werden. Die verwendeten Formeln zum Versuch werden in runden Klammern aus [Müller 2012] zitiert, Formeln für die Fehlerrechnung in eckigen Klammern geschrieben und aus dem blauen Skript [Müller 2007] entnommen. Die Rechnungen zu den Unsicherheiten befinden sich im Sinne der Übersichtlichkeit im Anhang.

Zuerst wird das Drehmoment eines Drehtisches (Abb. 4a im Skript) unter Verwendung der Formel (9) berechnet. Der Drehtisch ermöglicht dabei über die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators aus der messbaren Periodendauer T das gesuchte Drehmoment herzuleiten: Das Gesamtdrehmoment des Aufbaus J_A wird hierzu sukzessive um bekannte Drehmomente erhöht, so dass sich eine Beziehung zwischen dem hinzugefügten Moment J_Z und dem unbekannten Drehmoment des Tisches J_T herstellen lässt (11). Ist nun T bekannt, so kann J_T über eine lineare Regression bestimmt werden.

Im zweiten Schritt wird das ermittelte Drehmoment des Drehtisches genutzt, um das Drehmoment eines im Raum geneigten Zylinders zu berechnen. Dazu wird der Zylinder in der Mitte des Tisches angebracht und schrittweise gekippt (Abb. 4b im Skript). Durch erneute Anwendung der Beziehung (11) kann nun bei bekannten J_T und T das auftretende Zusatzdrehmoment J_γ bestimmt werden. Im Anschluss werden zur Überprüfung die gefundenen mit theoretisch errechneten Werten exemplarisch verglichen.

Letztlich werden die gewonnenen Messergebnisse verwendet, um das Modell des Trägheitsellipsoiden zu verifizieren. Dazu werden die Messwerte für J_γ gegen $\sin^2 \gamma$ gemäß der aus (5) und (7) hergeleiteten Beziehung (12) aufgetragen. Eine gute Korrelation zwischen den Größen kann dann als Bestätigung der verwendeten Funktion (12), und damit auch der zugrunde gelegten Beziehung (7), aufgefasst werden.

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Bestimmung des Drehmoments des Drehtisches

Der erste Versuch wurde gemäß der im Skript gegebenen Anleitung durchgeführt: eine Scheibe mit der Masse $m_s = (245,3 \pm 0,01)g$ und dem Durchmesser $d = (4,80 \pm 0,01)cm$ wurde im Abstand s vom Mittelpunkt des Drehtellers befestigt. Die Unsicherheiten ergeben sich hier rein aus den systematischen Fehlern der Messung mit dem Nonius ($u = \pm 5 \cdot 10^{-5} + L \times 10^{-4}$) bzw. sind im Falle der Masse am Arbeitsplatz angegeben, und wurden nach [30-32] betragsweise addiert. Der Aufbau wurde dann in Schwingung versetzt und die Dauer von 10 Perioden je zwei Mal pro Konfiguration gemessen.

Nach (10) kann das durch die Scheibe auftretende Zusatzdrehmoment J_Z berechnet werden, wobei die Dämpfung der Spiralfeder vernachlässigt wird. Die Anwendung von [29] bringt je eine Unsicherheit von u_{J_Z} , die aus den nur systematischen Fehlern der Radius-, Massen- und Abstandsbestimmung besteht (vgl. Anhang).

Es wird nun der Mittelwert $\overline{T_S^2}$ über den zwei Messungen von je 10 Perioden pro Konfiguration gebildet. Die Unsicherheiten u_{T^2} setzen sich hier aus dem statistischen Fehler, wegen $n = 2$ hier durch $\frac{\Delta T}{2}$ abgeschätzt, und dem systematischen Fehler der digitalen Stoppuhr zusammen (vgl. Anhang).

Die lineare Regression wurde mit QtiPlot unter Verwendung der Funktion $y = a \cdot x + a \cdot b$ und mit Gewichtung nach den Fehlern von T^2 mit der Instrumental-Methode durchgeführt. So kann die Problematik einer korrelierten Fehlerberechnung umgangen werden, die unweigerlich auftritt wenn das Endergebnis mit $\frac{b}{a}$ berechnet werden muss. Das gesuchte Drehmoment des Tisches J_T ergibt sich bei dieser Variante nämlich direkt als Achsenabschnitt b der Regressionsgeraden und beträgt:

$$\begin{aligned} b = J_T &= (5,65 \pm 0,09) \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ \frac{\chi^2}{DoF} &= 0,881 \\ R^2 &= 0,999 \end{aligned}$$

Ein Plot der Regression befindet sich im Anhang.

2.2 Bestimmung des Zylinderdrehmoments

Im zweiten Versuch wird ein Zylinder der Masse $m_s = (1352,0 \pm 0,01)g$, Höhe $h = (10,0 \pm 0,01)cm$ und dem Durchmesser $d = (4,40 \pm 0,01)cm$ auf der Mitte des Drehtisches positioniert. Die Unsicherheiten ergeben sich wie bei der Vermessung der Scheibe oben aus einer Addition der Absolutbeträge.

Der Zylinder wird in Schritten von $\Delta\gamma = (15 \pm 3)^\circ$ (Unsicherheit rein systematisch aus Ablesefehler, hier abgeschätzt) von 0 bis 90 Grad geneigt, und jedes Mal wieder die Dauer von 10 Schwingungsperioden des Drehtisches gemessen. Nach Berechnung des Mittelwertes $\overline{T_Z^2}$ und der Unsicherheiten u_T^2 (vgl. Anhang) kann nun J_γ bestimmt werden.

$\gamma [^\circ]$	$\Delta\gamma [^\circ]$	J_γ	uJ_γ
0	3	3,53E-04	2,079E-05
15	3	4,20E-04	2,511E-05
30	3	6,44E-04	2,369E-05
45	3	7,95E-04	2,157E-05
60	3	1,02E-03	2,721E-05
75	3	1,18E-03	2,459E-05
90	3	1,28E-03	2,955E-05

Abbildung 1: Messergebnisse für J_γ

Dazu wird (11) nach $J_Z = J_\gamma$ umgestellt und die Werte aus der obigen Regression eingesetzt: für J_T der Achsenabschnitt b , und für den Vorfaktor $\frac{D}{4\pi^2}$ das Inverse der Steigung a^{-1} . Das Trägheitsmoment J_γ wird also mit Hilfe von zwei korrelierten Messgrößen berechnet, wodurch die Anwendung von Formel [39] notwendig wird. Der Fehler für J_γ besteht nun aus den Unsicherheiten der Regressionsparameter $\frac{1}{a}$ und $b = J_T$ und dem dazugehörigen Kovarianzterm, sowie dem Fehler der Zeitmessung (vgl. Anhang). Alle Terme enthalten dabei sowohl statistische als auch systematische Komponenten, was eine scharfe Trennung schwierig macht.

Eine Überprüfung der gefundenen Werte für J_γ ist schließlich mit Hilfe der theoretischen Formel für das Trägheitsmoment (13) möglich. Dazu werden exemplarisch die Werte für $\gamma = 0^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ berechnet und verglichen:

Theoretisch	Experimentell
$J_{\gamma=0^\circ} = (3,27 \pm 0,01) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_{\gamma=0^\circ} = (3,53 \pm 0,21) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_{\gamma=90^\circ} = (0,13 \pm 0,02) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_{\gamma=90^\circ} = (0,13 \pm 0,30) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Die Unsicherheiten der theoretischen Werte werden durch Anwendung von [29] berechnet (vgl. Anhang). Es handelt sich um einen rein systematischen Fehler, der für $\gamma = 0^\circ$ aus der Unsicherheit der Radius- und der Massemessungen besteht, und für $\gamma = 90^\circ$ zusätzlich noch die Unsicherheit der Höhenmessung enthält.

2.3 Verifizierung des Modells des Trägheitsellipsoiden

Um die Beziehung (7) zu verifizieren, und so das Modell des Trägheitsellipsoiden zu bestätigen, werden die nun berechneten Werte für J_γ gegen $\sin^2\gamma$ aufgetragen. Mit Hilfe von QtiPlot wird eine lineare Regression mit der Funktion $y = a \cdot x + b$ durchgeführt, die mit dem Fehler J_γ nach der Instrumental-Methode gewichtet wird.

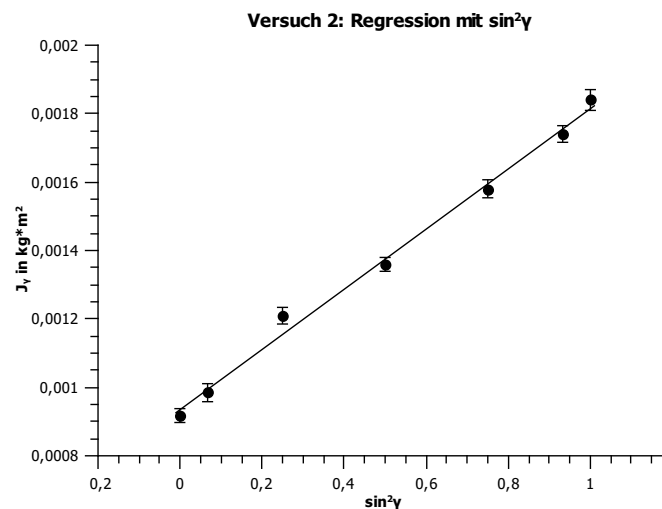


Abbildung 2: Regression im Versuch 2

Der Korrelationskoeffizient um 1, und das Verhältnis von χ^2 zu den Freiheitsgraden

nahe 1, deuten auf eine gute Übereinstimmung des Modells mit den gemessenen Werten, und damit auf die Gültigkeit des angenommenen Zusammenhanges hin:

$$R^2 = 0,9938$$

$$\frac{\chi^2}{DoF} = 1,622$$

3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die Messergebnisse für J_Z lieferten eine aussagekräftige Regression, und der gefundene Wert für J_T konnte im zweiten Versuch als Basis für die Berechnung einer dann auch theoretisch verifizierten Größe dienen. Dabei wurden außer der Dämpfung der Spiralfeder alle bekannten signifikanten Einflüsse mathematisch berücksichtigt. Die Dämpfung führt real zu einem Energieverlust, d.h. kleinerer Amplitude und kürzerer Periodendauer. Der Fehler u_{J_T} ist wesentlich von der Unsicherheit der Abstandsmessung zwischen den Befestigungspunkten auf der Drehscheibe bestimmt. Eine Verbesserung der Ergebnisse könnte also relativ leicht durch eine genauere Bestimmung von s erreicht werden.

Die Ergebnisse des zweiten Versuchs decken sich mit den theoretischen Werten, unter den berücksichtigten Fehlern sticht keiner durch besonders hohes Gewicht hervor. Zwei Fehlerquellen wurden vernachlässigt:

1. Der Messfehler für den Winkel wird bei der Regression ignoriert, die Unsicherheit wird damit insgesamt unterschätzt. Eine Berücksichtigung dieser Fehler hätte allerdings auch zu einer geringeren Gewichtung der mittleren Ergebnisse geführt, da eine bestimmte absolute Abweichung des Winkels innerhalb der \sin^2 -Funktion bei Winkeln um 45° zu einer größeren Variation führt als bei Winkeln um 0° und 90° . Die testweise Berechnung des Fehlers um verschiedene Winkel zeigt, dass der Fehler um etwa eine Größenordnung schwankt. Einen Überblick über die genaue Rechnung und den gefundenen absoluten Fehler findet sich im Anhang.
2. Das Trägheitsmoment der Halterung, in welche der Zylinder eingespannt wird, wurde nicht beachtet, d.h. J_γ wurde über alle Messwerte leicht zu niedrig angegeben. Dies führt zu einer Verschiebung der dargestellten Kurve, die aber nichts am grundsätzlichen Befund hoher Korrelation ändert.

Der Vergleich zwischen den theoretischen und experimentellen Werten für $J_{\gamma=0^\circ}$ und $J_{\gamma=90^\circ}$ zeigt, dass sich die Intervalle von einer Standardabweichung nur im ersten Fall überlappen. Es ist zu erwarten, dass sich bei Berücksichtigung der Winkelunsicherheit und der dadurch größeren Unsicherheit für die experimentellen Werte die Intervalle beider Paare überlappen würden. Doch auch ohne diese Überlegung stimmen die Ergebnisse gut mit den Erwartungen überein, und ein Überschneiden findet in beiden Fällen innerhalb von zwei Standardabweichungen statt.

A Anhang

A.1 Fehlerrechnung

A.1.1 Unsicherheit für J_Z

Die Formel (10) liefert die Basis für die Fehlerfortpflanzungsberechnung:

$$u_{J_Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R^2 + s^2\right)^2 \cdot u_m^2 + (m \cdot R)^2 \cdot u_R^2 + (2 \cdot m \cdot s)^2 \cdot u_s^2}$$

s [m]	u _s [m]	J _Z [kg*m ²]	d _m (f)*u _m	d _R (f)*u _R	d _s (f)*u _s	u _{JZ} [kg*m ²]
0,00E+00	0,00E+00	7,06E-05	2,88E-08	1,61E-07	0,00E+00	1,64E-07
1,48E-02	1,02E-04	1,24E-04	5,07E-08	1,61E-07	7,42E-07	7,61E-07
2,96E-02	2,04E-04	2,86E-04	1,16E-07	1,61E-07	2,97E-06	2,97E-06
4,44E-02	3,06E-04	5,54E-04	2,26E-07	1,61E-07	6,67E-06	6,68E-06
5,92E-02	4,09E-04	9,30E-04	3,79E-07	1,61E-07	1,19E-05	1,19E-05
7,40E-02	5,11E-04	1,41E-03	5,76E-07	1,61E-07	1,85E-05	1,86E-05

Abbildung 3: Fehlerbestimmung für J_Z

A.1.2 Unsicherheit für T^2

Für die Bestimmung der Unsicherheit der Zeitmessung wurde bei beiden Versuchen gleich vorgegangen. Dabei wurde zunächst ein Mittelwert aus den 2 Messungen der je 10 Perioden gebildet, und durch 10 geteilt um den Mittelwert einer Periode \bar{T} zu erhalten.

Dann werden der statistische (hier wegen $n = 2$ mit $\frac{\Delta T}{2}$ abgeschätzt) und der systematische (Stoppuhrfehler: $0,01s + T \cdot 5 \times 10^{-4}$) Fehler betragsweise zu u_T addiert. Letztlich wird der Fehler $u_{T^2} = \frac{2 \cdot u_T}{T} \cdot \bar{T}^2$ berechnet.

Mittelw. 10*T [s]	Stat. Fehler [s]	Syst. Fehler [s]	Mittelwert T [s]	u _T [s]	T ² [s]	u _{T2} [s]
4,49E+00	1,50E-02	1,22E-02	4,49E-01	1,94E-03	2,01E-01	1,74E-03
4,70E+00	2,00E-02	1,24E-02	4,70E-01	2,35E-03	2,21E-01	2,21E-03
4,94E+00	3,00E-02	1,25E-02	4,94E-01	3,25E-03	2,44E-01	3,21E-03
5,53E+00	3,00E-02	1,28E-02	5,53E-01	3,26E-03	3,06E-01	3,61E-03
6,32E+00	4,00E-02	1,32E-02	6,32E-01	4,21E-03	3,99E-01	5,32E-03
7,29E+00	3,50E-02	1,36E-02	7,29E-01	3,76E-03	5,31E-01	5,47E-03
8,35E+00	0,00E+00	1,42E-02	8,35E-01	1,42E-03	6,97E-01	2,37E-03

Abbildung 4: Fehlerbestimmung für T^2 im Versuch 1

Mittelw. 10*T [s]	Stat. Fehler [s]	Syst. Fehler [s]	Mittelw. T [s]	u _T [s]	T ² [s]	u _{T2} [s]
5,69E+00	3,00E-02	1,28E-02	5,69E-01	4,28E-03	3,24E-01	4,88E-03
5,90E+00	4,50E-02	1,29E-02	5,90E-01	5,79E-03	3,48E-01	6,83E-03
6,53E+00	3,00E-02	1,33E-02	6,53E-01	4,33E-03	4,26E-01	5,65E-03
6,93E+00	1,50E-02	1,35E-02	6,93E-01	2,85E-03	4,80E-01	3,94E-03
7,47E+00	3,00E-02	1,37E-02	7,47E-01	4,37E-03	5,58E-01	6,53E-03
7,84E+00	1,50E-02	1,39E-02	7,84E-01	2,89E-03	6,14E-01	4,53E-03
8,06E+00	3,00E-02	1,40E-02	8,06E-01	4,40E-03	6,50E-01	7,10E-03

Abbildung 5: Fehlerbestimmung für T^2 im Versuch 2

A.1.3 Unsicherheit für J_γ

Die Fehlerbestimmung erfolgt für die wie folgt umgestellte Funktion (11):

$$J_\gamma = \frac{D}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2 - J_T$$

Das vollständig angepasste Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet dann:

$$u_{J_\gamma} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot T}{a}\right)^2 \cdot u_T^2 + \left(\frac{T^2}{a^2}\right)^2 \cdot u_a^2 + (-u_b)^2 + 2 \cdot \frac{T^2}{a^2} \cdot u_{ab}}$$

Der Kovarianzterm u_{ab} wurde gemäß Formel [38] berechnet als $u_{ab} = u_a \cdot u_b \cdot R^2$, wobei R^2 den aus der Regression entnommenen Korrelationskoeffizienten bezeichnet.

J_γ [kg*m ²]	$d_a(f)$	$d_b(f)$	$(u_b \cdot d_b(f))^2$	$(u_a \cdot d_a(f))^2$	$2 \cdot d_a(f) \cdot d_b(f) \cdot u_{ab}$	$d_T(f)$	$(u_{T2} \cdot d_{T2}(f))^2$	u_{J_γ} [kg*m ²]
3,53E-04	-2,60E-06	-1,00E+00	8,92E-11	3,70E-11	1,15E-10	3,23E-03	1,91E-10	2,08E-05
4,20E-04	-2,79E-06	-1,00E+00	8,92E-11	4,26E-11	1,23E-10	3,34E-03	3,75E-10	2,51E-05
6,44E-04	-3,43E-06	-1,00E+00	8,92E-11	6,41E-11	1,51E-10	3,70E-03	2,57E-10	2,37E-05
7,95E-04	-3,86E-06	-1,00E+00	8,92E-11	8,11E-11	1,70E-10	3,93E-03	1,25E-10	2,16E-05
1,02E-03	-4,49E-06	-1,00E+00	8,92E-11	1,10E-10	1,98E-10	4,24E-03	3,43E-10	2,72E-05
1,18E-03	-4,94E-06	-1,00E+00	8,92E-11	1,33E-10	2,18E-10	4,44E-03	1,65E-10	2,46E-05
1,28E-03	-5,22E-06	-1,00E+00	8,92E-11	1,49E-10	2,30E-10	4,57E-03	4,05E-10	2,96E-05

Abbildung 6: Fehlerbestimmung für J_γ

A.1.4 Unsicherheit für $\sin^2 \gamma$

Um $u_{\sin^2 \gamma}$ zu bestimmen wurde die Funktion $\sin^2 \gamma$ abgeleitet, und dann jeweils an der Stelle $\sin^2(\gamma_0 + \Delta\gamma)$ ausgewertet, wobei $\Delta\gamma = 3^\circ$ und γ_0 den jeweiligen Messwert bezeichnet. Der Fehler ergibt sich dann wie folgt:

$$u_{\sin^2 \gamma} = |2 \cdot \sin(\gamma_0 + \Delta\gamma) \cdot \cos(\gamma_0 + \Delta\gamma)| \cdot (\Delta\gamma)^2$$

Die folgenden Werte wurden in der Regression nicht berücksichtigt, seien aber der Vollständigkeit halber aufgelistet, um einen Eindruck der Größenordnungen zu vermitteln.

Gamma [°]	Unsicherheit [°]	$\sin^2(\gamma)$	$u_{\sin^2(\gamma)}$
0	3	0,00E+00	2,87E-04
15	3	6,70E-02	1,61E-03
30	3	2,50E-01	2,50E-03
45	3	5,00E-01	2,73E-03
60	3	7,50E-01	2,22E-03
75	3	9,33E-01	1,12E-03
90	3	1,00E+00	2,87E-04

Abbildung 7: Testweise Fehlerbestimmung für \sin^2

A.1.5 Unsicherheit für $J_{\gamma=0^\circ}$ und $J_{\gamma=90^\circ}$ als theoretische Größen

Die Fehlerbestimmung basiert hier auf den Formeln (13) im Skript, und das Fehlerfortpflanzungsgesetz nimmt die folgende Form an:

$$u_{J_{\gamma=0^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R^2\right)^2 \cdot u_m^2 + (mR)^2 \cdot u_R^2}$$
$$u_{J_{\gamma=90^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2\right)^2 \cdot u_m^2 + \left(\frac{1}{2}mR\right)^2 \cdot u_R^2 + \left(\frac{1}{6}mh\right)^2 \cdot u_h^2}$$

A.2 Regressionsgraph zu Aufgabe 1

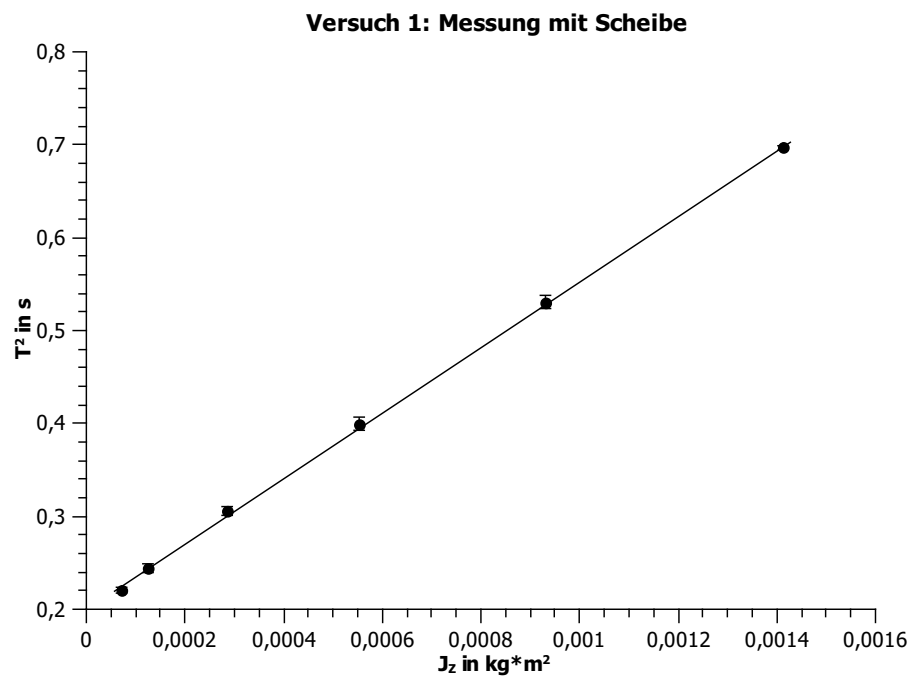


Abbildung 8: Regression im Versuch 1

Literatur

[Müller 2007] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.

[Müller 2012] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik*. 2012.