



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Messwerte und Auswertung</b>	<b>2</b>
2.1	Bestimmung der Erdbeschleunigung $g$ . . . . .	2
2.2	Korrektur des gefundenen $g$ für Luftauftrieb und Amplitudenabhängigkeit . . . . .	5
2.3	Überprüfung der Amplitudenabhängigkeit von $T$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung</b>	<b>7</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>

# 1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Der Versuch M9 erlaubt es aus der Periodendauer eines Reversionspendels die Erdbeschleunigung  $g$  zu bestimmen. Die physikalischen Grundlagen und der Versuchsaufbau sind detailliert im gelben Skript [4, S. 51-54] beschrieben, deswegen erfolgt hier nur eine kurze Übersicht.

Zunächst wird die Länge des verwendeten Pendels vermessen. Nun können durch Lageänderungen der angebrachten Massen und wiederholte Messung zwei Punkte gefunden werden, an denen die Periodendauer des Reversionspendels der eines physikalischen Pendel gleicher Länge entspricht. Von den zwei Punkten wird einer ausgewählt, in dessen Nähe mit Hilfe einer Präzisionsmessung die gesuchte Periodendauer möglichst genau bestimmt wird. Aus ihr kann dann die Fallbeschleunigung  $g$  ermittelt werden.

In einem zweiten Versuch soll untersucht werden, ob ein gegebener Zusammenhang zwischen der maximalen Auslenkung des Pendels und der Periodendauer experimentell bestätigt werden kann. Dazu werden die Periodendauern des Pendels bei gleicher Einstellung aber unterschiedlicher Grundausslenkung gemessen. Die gefundenen Wertepaare können nun einer linearen Regression unterzogen werden, die Aufschluss über die Aussagekraft der gegebenen Formel für den beobachteten Verlauf gibt.

## 2 Messwerte und Auswertung

### 2.1 Bestimmung der Erdbeschleunigung $g$

Zuerst soll die für die weiteren Rechnungen notwendige reduzierte Pendellänge  $l_r$  bestimmt werden, die beim vorliegenden Reversionspendel dem Schneidenabstand entspricht. Zu dem aus  $n = 10$  Einzelwerten ermittelten Mittelwert  $\bar{l}_i$  wird noch die Gabeldicke  $d_{gab} = (10,03 \pm 0,03) \text{ mm}$  des Messschiebers addiert.

$$l_r = (983,16 \pm 0,08) \text{ mm}$$

Die Unsicherheit von  $l_r$  ergibt sich aus der Unsicherheit der Längenmessungen selbst  $u_{l_i}$  sowie der Unsicherheit der Messgabel des Schiebers  $u_{gab}$ , die als unabhängige Fehlerquellen betragsweise addiert werden. Die  $u_{l_i}$  sind mit  $(0,02 \pm 5 \cdot 10^{-5} \text{ l}_i/\text{mm}) \text{ mm} \approx 0,07 \text{ mm}$  für alle Messwerte im signifikanten Bereich gleich groß und reproduzieren sich so in der Berechnung für  $u_{l_r}$ . Zusätzlich fließt in  $u_{l_r}$  noch der statistische Fehler in Form des Vertrauensbereiches  $\bar{s}$  ein, der sich aus  $n$  und der Standardabweichung  $\sigma_{l_r}$  ergibt und zu den anderen pythagoräisch addiert wird.

$$u_{l_r} = \sqrt{(u_{gab} + u_{l_i})^2 + \left(\frac{\sigma_{l_r}}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

Im zweiten Schritt wird nun die Lage der zwei Massen am Pendel stückweise verändert. Die absolute Lage der Massestücke ist hier irrelevant, die relative Lage wird über Ringmarken am Stab angegeben. Die Ringmarken wurden dabei von der Schneide, die sich auf der Seite des fixierten Gewichtes befindet, hier  $S1$  genannt, gezählt. Es wurden alle möglichen Konfigurationen der Massen für je zwei Perioden gemessen,

wobei jeweils einmal um  $S1$  und um die gegenüberliegende Schneide  $S2$  gependelt wurde. So ergeben sich Wertepaare zu jeder Massenposition  $x$  (in Ringmarken), die hier graphisch dargestellt sind. Auf Fehlerbalken wurde hier verzichtet, da es sich um eine reine Überblicksmessung handelt.

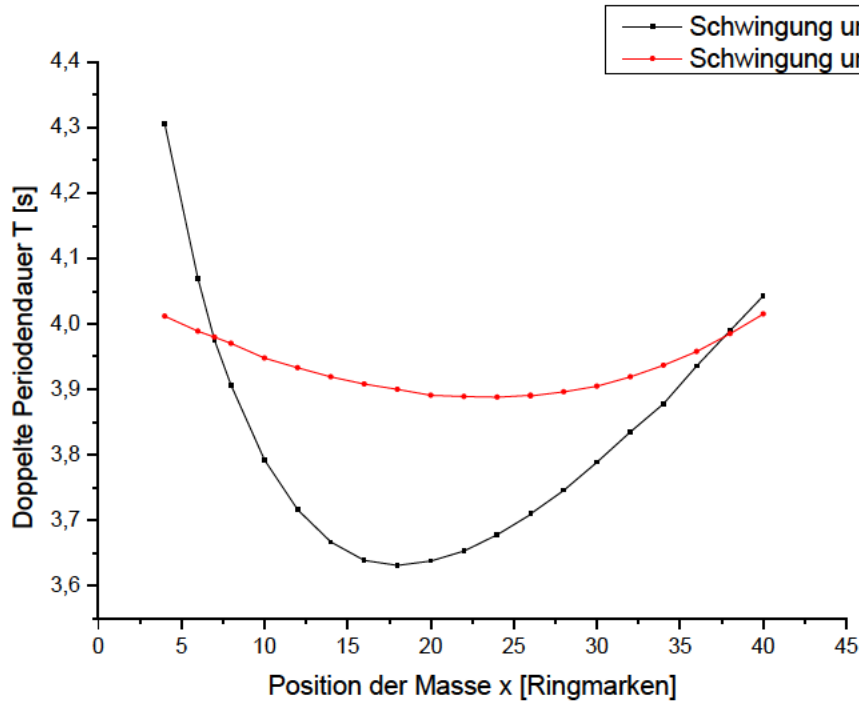


Abbildung 1: Graphische Bestimmung der Punkte gleicher Periodendauer

Die beiden Punkte gleicher Periodendauer liegen um  $x_l = 6,9$  und  $x_r = 37,6$ , wobei für den weiteren Versuchsverlauf der erste Punkt interessanter ist, da sich hier die Kurven steiler schneiden und somit eine genauere Bestimmung des tatsächlichen Schnittpunktes  $x_s$  möglich ist.

Nun wurde die verschiebbare Masse in die Nähe der Position  $x_l = 6,9$  gebracht. Durch das Auf- und Zuschrauben des Massezylinders konnte nun das Trägheitsmoment des Pendels kleinschrittig verändert werden. Es ist experimentell sehr schwierig, den Punkt gleicher Periodendauern direkt zu treffen. Deswegen wurden zwei Messpaare aufgenommen, die nur eine einzige Umdrehung der Zylinderschraube auseinanderliegen, und die den tatsächlichen Schnittpunkt einschließen, der so rechnerisch relativ genau bestimmt werden kann.

Im Folgenden bezeichnen die Punkte  $T_{ij}$  die Messungen bei der Pendelbewegung um die  $i$ -te Schneide in der  $j$ -ten Massenlage, die Schwingung um  $S2$  bei Massenlage  $x_1$  heißt also beispielsweise  $T_{21}$ . Gemessen wurden je 10 Perioden (siehe Tab. 1).

Da es sich um ein sehr kleines Intervall handelt, wird davon ausgegangen, dass die polynomialen Kurven der Schwingungen um  $S1$  und  $S2$  durch zwei Geraden

Tabelle 1: Bestimmung des Punktes gleicher Periodendauer

	$10 \cdot T \text{ [s]}$	$u_{10 \cdot T} \text{ [s]}$
$T_{11}$	19,879	0,001
$T_{12}$	19,902	0,001
$T_{21}$	19,892	0,001
$T_{22}$	19,890	0,001

angenähert werden können:

$$f_1(x) = T_{12} + \frac{T_{22} - T_{12}}{x_2 - x_1} \cdot x$$

$$f_2(x) = T_{11} + \frac{T_{21} - T_{11}}{x_2 - x_1} \cdot x$$

Der gesuchte Schnittpunkt  $x_s$  befindet sich bei

$$x_s = \frac{(T_{12} - T_{11}) \cdot (x_2 - x_1)}{T_{21} - T_{11} - T_{22} + T_{12}}$$

und die zugehörige Periodendauer  $T_s$  ergibt sich durch einsetzen von  $x_s$  in eine der Geradengleichungen. Dabei muss noch durch die Anzahl der Perioden  $n = 10$  dividiert werden, um den Wert für eine einzige Periode zu erhalten:

$$T_s = \frac{f_1(x_s)}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{(T_{12} - T_{11}) \cdot (T_{22} - T_{12})}{T_{21} - T_{11} - T_{22} + T_{12}}$$

Die Unsicherheit für  $T_s$  entspricht der am Arbeitsplatz vorgegebenen Fehler der Zeitmessung. Sie beträgt 1 ms plus einem Laufzeitfehler von 1s pro Tag, ist also für alle vier Messwerte im signifikanten Bereich identisch. Der statistische Fehler wurde vernachlässigt. Das Messergebnis für die Periodendauer<sup>1</sup> lautet also:

$$T_s = (1,98910 \pm 0,00013) \text{ s}$$

Nun ist es möglich, die Erdbeschleunigung nach der Formel aus [4] zu berechnen:

$$g = \left( \frac{2\pi}{T(\phi_0)} \right)^2 \cdot l_r \quad (4)$$

Die Unsicherheit des Ergebnisses ergibt sich dann aus der Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf diese Funktion zu:

$$u_g = \sqrt{\left( -\frac{8\pi^2 l_r}{T^3} \cdot u_T \right)^2 + \left( \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot u_{l_r} \right)^2}$$

Damit lautet das vollständige Messergebnis:

<sup>1</sup>Die Rundung der Unsicherheit und damit auch des Messwertes selbst wurde - eventuell von der Praktikumskonvention abweichend - nach den in [1] vorgeschlagenen Regeln vorgenommen. Zur Lokalisierung der Rundungsstelle bei Messunsicherheiten steht dort: "Von links beginnend ist die erste von Null verschiedene Ziffer zu suchen. Ist diese eine der Ziffern 3 bis 9, so ist sie die Rundestelle; ist die erste von Null verschiedene Ziffer eine 1 oder 2, so ist die Stelle rechts daneben die Rundestelle."

$$g = (9,8100 \pm 0,0016) \frac{m}{s^2}$$

Diese Rechnung vernachlässigt allerdings den Luftauftrieb und die Abhängigkeit der Periodendauer von der Amplitude. Der so ermittelte Messwert unterschätzt also die tatsächliche Erdbeschleunigung.

## 2.2 Korrektur des gefundenen $g$ für Luftauftrieb und Amplitudenabhängigkeit

Das gefundene Messergebnis für  $g$  lässt sich noch nach der im Skript angegebenen Formel für den Luftauftrieb und die Amplitudenabhängigkeit von  $T$  korrigieren:

$$g_c = \left( \frac{2\pi}{T(\phi_0)} \right)^2 \cdot l_r \cdot \left( 1 + \frac{\phi_0^2}{8} + \frac{\rho_L}{\rho} \right) \quad (10)$$

Hier bezeichnet  $\phi_0$  die Anfangsauslenkung des Pendels, die vom Experimentator für diesen Versuch möglichst konstant bei

$$\phi_0 = \sin \frac{d}{l_r} \approx \frac{d}{l_r} \approx 0,02 \text{ rad}$$

gehalten wurde, wobei  $d$  die Auslenkung vom Pendelnullpunkt ist. Die beiden Terme  $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$  und  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  bezeichnen die Dichte der vom Pendel verdrängten Luft bzw. des Pendels selbst, und waren im Skript [4] als fehlerfrei angegeben.

Bei der Berechnung der Unsicherheit  $u_{g_c}$  muss nun also neben  $u_T$  und  $u_{l_r}$  auch  $u_{\phi_0}$  berücksichtigt werden, die sich wiederum aus der Unsicherheit der Auslenkungsmessung  $u_d$  und der Längenmessung  $u_{l_r}$  zusammensetzt. Der Wert für  $u_d$  wurde aufgrund des verwendeten Zollstocks mit einem Ablesefehler von 1 mm pro Messung grob abgeschätzt, eventuelle Eichunsicherheiten sind dagegen vernachlässigbar. Da es sich bei  $d$  um eine Differenz zum ebenfalls gemessenen Nullpunkt handelt, wurde der Ablesefehler noch verdoppelt.

$$u_{\phi_0} = \sqrt{\left( \frac{1}{l_r} \cdot u_d \right)^2 + \left( -\frac{d}{l_r^2} \cdot u_{l_r} \right)^2}$$

Die Unsicherheit für  $g_c$  errechnet sich nach Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes wie folgt:

$$u_{g_c} = \sqrt{\left( -\frac{8\pi^2 l_r}{T^3} \cdot \gamma \cdot u_{T(\phi_0)} \right)^2 + \left( \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \gamma \cdot u_{l_r} \right)^2 + \left( -\frac{\pi^2 l_r}{T^2} \cdot \gamma \cdot u_{\phi_0} \right)^2}$$

mit  $\gamma = 1 + \frac{\phi_0^2}{8} + \frac{\rho_L}{\rho}$

Letztlich ergibt sich als vollständiges korrigiertes Messergebnis für  $g$ :

$$g_c = (9,8121 \pm 0,0016) \frac{m}{s^2}$$

## 2.3 Überprüfung der Amplitudenabhängigkeit von T

Im letzten Versuch sollte die im Skript genannte Formel für die Amplitudenabhängigkeit von  $T$  verifiziert werden. Dazu wurde das Pendel durch Verschieben der Masse unten maximal belastet und in Schritten von  $\Delta d = 1 \text{ cm}$  ausgelenkt. Für jede der sieben Auslenkungen, die aufgrund der Geometrie des Versuchsaufbaus möglich waren, wurden 10 Perioden gemessen (Messwerte im Anhang).

Um den genannten Zusammenhang zu überprüfen wurde die im Skript angegebene Formel vereinfacht:

$$T(\phi_0) = T \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \dots\right) \approx T \cdot \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16}\right) \quad (5)$$

Nun wurden die verschiedenen Werte für die Auslenkungen  $\phi_0$  quadriert und gegen die gemessenen  $T_i$  aufgetragen. Die Unsicherheiten auf der x-Achse sind hier die Unsicherheiten des Auslenkungswinkels  $u_{\phi_0^2}$ , die Fehlerbalken auf der y-Achse sind hingegen wie schon bei den vorigen Versuchen mit dem Fehler der Zeitmessung abgeschätzt, der hier etwa  $u_{T_i} \approx 0,1 \text{ ms}$  für eine Periode beträgt.

$$u_{\phi_0^2} = \sqrt{\left(\frac{2d}{l_r^2} \cdot u_d\right)^2 + \left(-\frac{2d^2}{l_r^3} \cdot u_{l_r}\right)^2}.$$

Die Aussagekraft der Formel (5) für die gemessenen Periodendauern in Abhängigkeit von  $\phi_0^2$  wurde nun mit einem linearen Fit in OriginPro überprüft. Zur Anwendung kam der Ansatz  $y = A \cdot (1 + x/16)$ , gewichtet mit der Instrumental-Methode nach dem y-Fehler. Eine gute Übereinstimmung der Messwerte mit der Theorie schlug sich dann in einem passenden Fit nieder, d.h. bei sehr guter Übereinstimmung in  $R^2 \approx 1$  und  $\chi^2/dof \ll 1$ . Die aus der Regression entnommenen Werte lauten allerdings:

$$R^2 = 0,74361$$

$$\frac{\chi^2}{dof} = 5,24542$$

Schon rein graphisch (vgl. Abb. 2) wird deutlich, dass der gewählte Fit unpassend scheint. Alternative Versuche die vorhandenen Messdaten mit anderen, auf (5) basierenden Funktionen zu fitten schlugen ebenfalls fehl, allein das Hinzufügen eines weiteren freien Parameters sorgt für bessere Ergebnisse, kann aber aus der Formel nicht begründet werden.

Die Messdaten zeigen deutlich, dass in der Tat eine Amplitudenabhängigkeit besteht, doch die Übereinstimmung der experimentellen Werte mit der gegebenen Formel (5) kann hier zumindest nicht ohne weitere Diskussion festgestellt werden (siehe Ergebniseinschätzung).

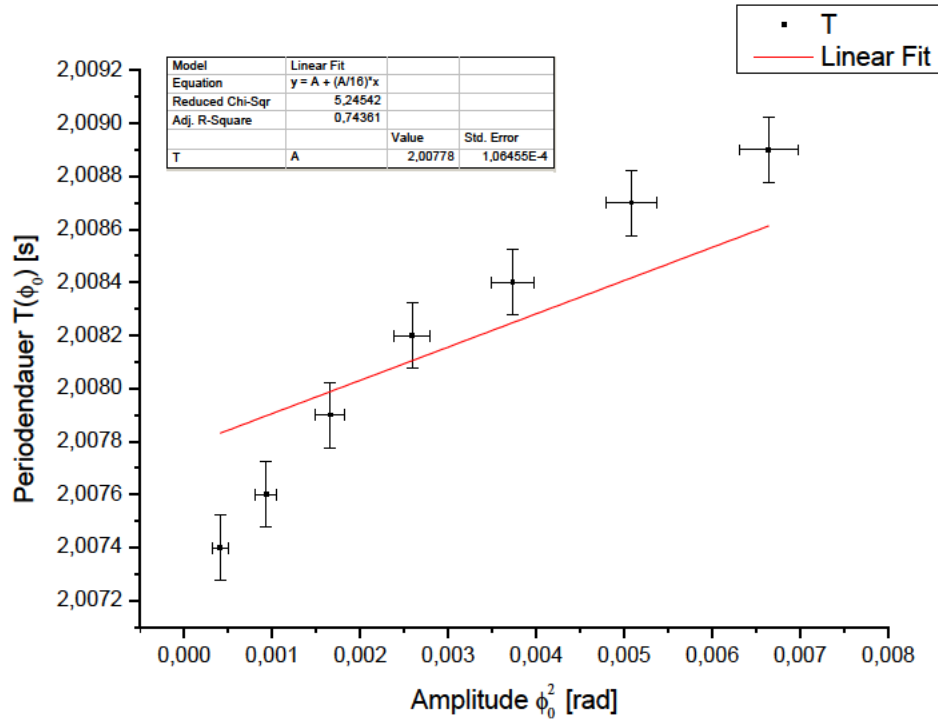


Abbildung 2: Überprüfung des theoretischen Zusammenhanges zwischen Periodendauer und Amplitude durch einen linearen Fit mit einer auf (5) basierenden Funktion

### 3 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Wie erwartet liegt der nach der vereinfachten Formel (4) berechnete Wert für die Erdbeschleunigung  $g$  etwas unter dem Referenzwert  $g_L$ , den die Physikalisch-Technische Bundesanstalt für Adlershof angibt [2]. Die korrigierte Form nach Gleichung (10) hingegen liegt nahe am Referenzwert und schließt diesen in der angegebenen Unsicherheit ein:

$$g = (9,8100 \pm 0,0016) \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = (9,8121 \pm 0,0016) \frac{m}{s^2}$$

$$g_L = (9,81267 \pm 0,00002) \frac{m}{s^2}$$

Die experimentelle Bestimmung der Erdbeschleunigung kann also mit diesem relativ einfachen Experiment recht genau erfolgen. Den größten Beitrag zur Gesamtunsicherheit von  $g_c$  liefert hier  $u_{T_s}$  (vgl. Tab. 2). Eine Verbesserung des Messergebnisses kann also am ehesten durch eine genauere Bestimmung des Schnittpunktes und seiner Periodendauer erfolgen, z.B. durch mehrmalige Messung. Der Fehler für die Bestimmung der Amplitude fließt auf der anderen Seite nur minimal in  $u_{g_c}$  ein.



Tabelle 2: Fehlerbeiträge zu  $u_{g_c}$ 

$(\frac{\partial g_c}{\partial T} \cdot u_T)^2$	1,47E-06
$(\frac{\partial g_c}{\partial \phi_0} \cdot u_{\phi_0})^2$	1,03E-08
$(\frac{\partial g_c}{\partial l_r} \cdot u_{l_r})^2$	9,79E-07

Der im Skript angegebene Zusammenhang (5) zwischen der Amplitude  $\phi_0$  und der Periodendauer  $T(\phi_0)$  konnte nicht überzeugend bestätigt werden. Auch wenn die erhaltenen Werte für  $R^2$  und  $\chi^2/dof$  eine Übereinstimmung von Experiment und Theorie nicht vollkommen ausschließen, legen sie doch nahe, dass weitere, unkontrollierte Effekte eine Rolle spielen. Ein weiterer freier Parameter, d.h. eine Regression der Form  $y = a \cdot x + b$  (statt  $y = a \cdot (1 + x)$ ) liefert ein besseres Ergebnis, kann aber (ausschließlich) aus Formel (5) nicht begründet werden.

Ein möglicher Kandidat für den unberücksichtigten Effekt ist die Luftreibung: in Abb. 2 wird deutlich, dass der lineare Ansatz mit einem freien Parameter die Pendeldauer bei größeren Auslenkungen überschätzt. Die Luftreibung ist eine Funktion der Geschwindigkeit und der Geometrie des Pendels, ihr Einfluss nimmt also bei größerer Auslenkung, d.h. größerer mittlerer Geschwindigkeit zu. Die durch die Reibung erzeugte Dämpfung verkürzt damit die Periodendauer, was bei großen Auslenkungen und einer Messung über viele Perioden einen stärkeren Effekt hat, d.h. die Periodendauer wird immer deutlicher überschätzt.

## Literatur

- [1] Herms, G. und Walter, G. *Einführung in die Behandlung von Messfehlern*. 2007. Online abrufbar unter [http://www.iop.ovgu.de/iop\\_media/grundpraktikum/pdf/Online\\_Script\\_Walter\\_und\\_Herms.pdf](http://www.iop.ovgu.de/iop_media/grundpraktikum/pdf/Online_Script_Walter_und_Herms.pdf) (Stand 24. Juni 2012).
- [2] Lindau, A. *Gravity Information System of PTB*. 2012. Online abrufbar unter <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php> (Stand 24. Juni 2012. Query: Longitude 13.540600°, Latitude 52.432000°, Height 26m.)
- [3] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. 2007.
- [4] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Mechanik und Thermodynamik*. 2012.

## A Anhang

Tabelle 3: Bestimmung des Schneidenabstandes

$l_i$ [mm]	$u_{l_i}$ [mm]
973,07	0,07
973,08	0,07
973,13	0,07
973,14	0,07
973,15	0,07
973,14	0,07
973,14	0,07
973,11	0,07
973,12	0,07
973,17	0,07
$\bar{l}_i$ [mm]	973,13
$\sigma_{l_r}$ [mm]	0,03
$\bar{s}$ [mm]	0,01
$d_{gab}$ [mm]	10,3
$u_{d_{gab}}$ [mm]	0,03
$l_r$ [m]	983,16
$u_{l_r}$ [m]	0,10

Tabelle 4: Messdaten der Übersichtsmessung zum Auffinden der Punkte gleicher Periodendauer

$x$ [Ringmarken]	$2 \cdot T$ um S1 [s]	$2 \cdot T$ um S1 [s]
4	4,305	4,012
6	4,069	3,989
7	3,975	3,980
8	3,906	3,970
10	3,792	3,948
12	3,716	3,933
14	3,667	3,919
16	3,639	3,908
18	3,631	3,900
20	3,638	3,891
22	3,653	3,889
24	3,678	3,888
26	3,709	3,891
26	3,710	3,890
28	3,746	3,896
30	3,789	3,905
32	3,835	3,919
34	3,878	3,937
36	3,936	3,958
38	3,990	3,985
40	4,043	4,015
Graphisch ermittelte Schnittpunktumgebungen:		
$x_l \approx 6,9$	$x_r \approx 37,6$	

Tabelle 5: Messwerte zur Amplitudenabhängigkeit von  $T$

$d$ [mm]	$u_d$ [mm]	$\phi^2$ [rad]	$u_{\phi^2}$ [rad]	$T$ [s]	$u_T$ [s]
20	2	4,14E-04	8,28E-05	2,0074	1,23E-04
30	2	9,31E-04	1,24E-04	2,0076	1,23E-04
40	2	1,66E-03	1,66E-04	2,0079	1,23E-04
50	2	2,59E-03	2,07E-04	2,0082	1,23E-04
60	2	3,72E-03	2,48E-04	2,0084	1,23E-04
70	2	5,07E-03	2,90E-04	2,0087	1,23E-04
80	2	6,62E-03	3,31E-04	2,0089	1,23E-04