1. Тип 15 № 14704

Сколько существует целых значений числа A, при которых формула

$$((x < 6) \rightarrow (x^2 < A)) \wedge ((y^2 \le A) \rightarrow (y \le 6))$$

тождественно истинна при любых целых неотрицательных x и y?

Решение. Раскрывая импликацию по правилу А → В = ¬А + В, заменяя логическую сумму совокупностью, а логическое произведение системой соотношений, определим значения параметра A, при котором система совокупностей

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 6, \\ x^2 < A, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y^2 > A, \\ y \leqslant 6 \end{array}\right. \end{cases}$$

будет иметь решениями для любых целых неотрицательных чисел.

Заметим, что переменные не связаны между собой уравнением или неравенством, поэтому необходимо и достаточно, чтобы решениями первой совокупности были все неотрицательные x, а решениями второй совокупности были все неотрицательные y.

Решениями неравенства $x \geqslant 6$ являются числа 6, 7, 8, ... Чтобы совокупность выполнялась для всех целых неотрицательных чисел, числа 0, 1, 2, ... 5 должны быть решениями неравенства $x^2 < A$. Значит, $A > 25$.

Аналогично, решениями неравенства $y \leqslant 6$ являются числа 0, 1, ... 6. Следовательно, числа 7, 8, 9, ... должны быть решениями неравенства $y^2 > A$. Поэтому $A < 49$.

Тем самым, $25 < A < 49$. Искомое количество целых значений параметра равно 23.

Ответ: 23.

Приведём другое решение на языке Python.

```
count = 0
for a in range(1, 300):
    k = 0
    for x in range(0, 300):
        for y in range(0, 300):
            if ((x < 6) <= (x**2 < a)) and ((y**2 <= a) ‹
                k += 1
```

if k ==count print(count)
90_000: += 1

2. Тип 15 № 9321

Обозначим через **ДЕЛ**(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg\text{ДЕЛ}(x, 21) \wedge \neg\,\text{ДЕЛ}(x, 35))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

(Задание М. В. Кузнецовой)

Решение. Введём обозначения: A = **ДЕЛ**(x, A), D_{21} = **ДЕЛ**(x, 21), D_{35} = **ДЕЛ**(x, 35) и D_N = **ДЕЛ**(x, N).

Введём множества:

A — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A,

D_{21} — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{21},

D_{35} — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{35},

…

Тогда исходное выражение

$\neg$**ДЕЛ**(x, A) → ($\neg$**ДЕЛ**(x, 21) ∧¬ **ДЕЛ**(x, 35))

принимает вид $\overline{A} \rightarrow (\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}})$, откуда в силу правила $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ получаем:

$\overline{A} \rightarrow (\overline{D_{21} + D_{35}}) = A + \overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}$.

Заметим, что второе слагаемое принимает значение 0 для чисел кратных 21 или 35, то есть для чисел вида 21k и 35n, где k и n натуральные. Чтобы логическая сумма была тождественно истинной, для чисел указанного вида первое слагаемое должно обращаться в 1. Следовательно, число А должно быть таким, чтобы любое из чисел 21k и 35n делилось на него нацело. Общие делители чисел 21k и 35n, не зависящие от k и n, — суть числа 1 и 7. Наибольшее из них равно 7.

Ответ: 7.

Примечание.

Если бы требовалось определить наименьшее натуральное A, обеспечивающее истинность исходного выражения для всех чисел X, можно было бы начать анализ с наименьшего натурального числа — с числа 1, и убедиться, что оно и является искомым: посылка импликации для числа 1 ложна, а значит, сама импликация истинна.

Приведём другое решение на языке Python.

```
for a in range(100, 0, -1):
    k = 0
    for x in range(1, 1000):
        if (x % a != 0) <= ((x % 21 != 0) and (x % 35 != 0)):
            k += 1
    if k == 999:
        print(a)
        break
```

3. Тип 15 № 13364

На числовой прямой даны два отрезка: P = [130; 171] и Q = [150; 185]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$

истинна при любом значении переменной x, т. е. принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение. Раскроем дважды импликацию, получим: $\neg(x \in P) \vee (\neg((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \vee \neg(x \in P))$.

Используем Законы де Моргана, имеем: $\neg(x \in P) \vee \neg(x \in Q) \vee (x \in A)$.

Первое и второе выражения принимают значение 0 тогда, когда x лежит в обоих отрезках. Поэтому подходят все значения переменной такие, что 150<=x<=171. Таким и нужно задать отрезок A, его длина 21.

Примечание.

В отрезке [150; 171] содержится 22 целых числа. Длина этого отрезка 21.

Приведём другое решение задачи на языке Python.

```
s = []
for a1 in range(1,200):
    for a2 in range(1,200):
        fl= True
        for x in range(1,200):
            if not((130<=x<=171)<=(((150<=x<=185)and (not(a1<=x<=a2)))<= (not(1
                fl = False
                break
        if fl:
            s.append(a2-a1)
print(min(s))
```

Приведём решение задачи Ивана Гладких на языке Python.

```
m = 10**6
    P = [i for i in range(130, 172)]
    Q = [i for i in range(150, 186)]
for Amin in range(1, 200):
    for Amax in range(Amin + 1, 200):
        check = 1
        A = [i for i in range(Amin, Amax)]
        for x in range(-300, 300):
            f = (x in P) <= (((x in Q) and (x not in A)) <= (x not in P))
            if not f:
                check = 0
                break
        if check == 1:
            m = min(m,Amax - Amin)
print(m-1)
```

4. Тип 15 № 36870

Обозначим через m & n поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n.
Так, например, $14 \,\&\, 5 = 1110_2 \,\&\, 0101_2 = 0100_2 = 4$. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x \,\&\, 49 = 0 \rightarrow (x \,\&\, 28 \neq 0 \rightarrow x \,\&\, A \neq 0)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение. Решим задание с помощью языка программирования PascalABC методом перебора:

```
var
    A, x: integer;
    B: boolean;
begin
    for A := 0 to 1000 do begin
        B := True;
        for x := 0 to 1000 do begin
            if ((x and 49) = 0) and ((x and 28) <> 0) and ((x and A) = 0) then
                B := False;
        end;
        if B then begin
            writeln(A);
            break;
        end;
    end;
end.
```

Ответ: 12.

Приведём другое решение на языке Python.

```
for A in range(128):
    B = True
    for x in range(128):
        if (x & 49 != 0 or (x & 28 == 0 or x & A != 0)) == 0:
            B=False
    if B:
        print(A)
        break
```

5. Тип 15 № 40990

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [19; 84]$ и $Q = [4; 51]$. Укажите **наименьшую** возможную длину такого отрезка A, для которого формула

$$(x \in P) \rightarrow (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg((x \in P) \wedge \neg(x \in A)))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом значении переменной x).

Решение. Введем обозначения:

$$(x \in A) \equiv A;\ (x \in P) \equiv P;\ (x \in Q) \equiv Q.$$

Применив преобразование импликации, получаем:

$$P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg(P \wedge \neg A)) = \neg P \vee Q \vee \neg P \vee A = \neg P \vee Q \vee A.$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условие $\neg P \vee Q$ истинно на множестве $(-\infty, 51] \cup (84, +\infty)$. Тогда A должно быть истинным на множестве $(51; 84]$. Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна $84 - 51 = 33$.

Ответ: 33.

Примечание.
О длине отрезка написано в примечании к задаче 11119.

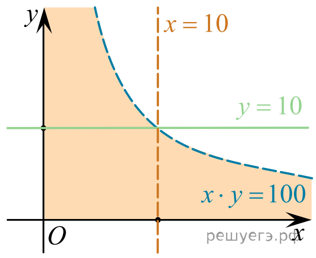
6. Тип 15 № 27017

Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(x \cdot y < 100) \vee (y \geq A) \vee (x > A)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

Решение. Решим задачу графически. Условие ($x \cdot y < 100$) задаёт множество, отмеченное на рисунке закрашенной областью. Чтобы исходное выражение было тождественно истинно для любых целых и неотрицательных x и y, прямые $y = A$ и $x = A$ должны проходить через точку (10; 10). Таким образом, наибольшее целое неотрицательное A, удовлетворяющее условию задачи — это A равное 10.



Ответ: 10.

Приведём другое решение на языке Python.

```
for A in range(300, -1, -1):
    k = 0
    for x in range(300):
        for y in range(300):
            if (x * y < 100) or (y >= A) or (x > A):
                k += 1
    if k == 90_000:
        print(A)
        break
```

7. Тип 15 № 34516

Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n.
Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.
Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$((x\&28 \neq 0) \vee (x\&45 \neq 0)) \to ((x\&48 = 0) \to (x\&A \neq 0))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение. Преобразуем выражение по законам алгебры логики:

$(\neg X + \neg Y) \to (W \to \neg Z) = \neg(\neg X + \neg Y) + (\neg W + \neg Z) = XY + \neg(WZ) = WZ \to XY.$

Далее применяем обозначения и реализуем способ решения, изложенный К. Ю. Поляковым в теоретических материалах (см., например, раздел «Теория» на нашем сайте), без дополнительных пояснений.

Имеем импликацию $Z_{48}Z_A \to Z_{28}Z_{45}$ или $Z_{(48 \text{ or } A)} \to Z_{(28 \text{ or } 45)}$. Поскольку $28_{10} = 11100_2$, $45_{10} = 101101_2$, для побитовой дизъюнкции имеем: 28or45 = 111101. Тогда $Z_{(48 \text{ or } A)} = Z_{61}$.

Импликация принимает вид $Z_{(48 \text{ or } A)} \to Z_{61}$. Единичные биты двоичной записи числа 61, должны являться единичными битами левой части. Поэтому в побитовой дизъюнкции 48orA единицы должны стоять на нулевой, второй, третьей, четвертой и пятой позициях (как обычно, считая справа налево, начиная с нуля). Запишем числа 48, A и 61 в двоичной системе счисления, и выясним, что наименьшее число, дающее при поразрядной дизъюнкции единицы на указанных позициях:

48: 110000
A: ??1101
61: 111101

В записи наименьшего числа, дающего при поразрядной дизъюнкции с числом 48 единицы в необходимых разрядах, на месте знаков ? должны стоять нули. Тем самым, искомым числом является $A = 1101_2 = 13_{10}$.

Приведём другое решение.

Решим задание с помощью языка программирования PascalABC методом перебора:

```
var
    A, x: integer;
    B: boolean;
begin
    for A := 0 to 63 do begin
        B := True;
        for x := 0 to 63 do
            if not (((x and 28) = 0) and ((x and 45) = 0) or ((x and 48) <> 0)
                B := False;
        if B then begin
            writeln(A);
            break;
        end;
    end;
end.
```

Приведём другое решение на языке Python.

```
for A in range(64):
    B = True
    for x in range(64):
        if ((x&28==0) and (x&45==0) or (x&48!=0) or (x&A!=0))==0:
            B=False
    if B:
        print(A)
        break
```

Заметим, что можно не перебирать числа, большие 63, поскольку для записи чисел 28, 45 и 48 хватит шести разрядов. Программа выведет ответ 13.

Ответ: 13.

8. Тип 15 № 33094

Обозначим через **ДЕЛ(*n*, *m*)** утверждение «натуральное число *n* делится без остатка на натуральное число *m*».

Для какого наибольшего натурального числа *A* формула

(*A* < 50) ∧ (¬ДЕЛ(*x*, *A*) → (ДЕЛ(*x*, 10) → ¬ДЕЛ(*x*, 18)))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?

Решение. Рассмотрим такие *x*, при которых скобка (ДЕЛ(*x*, 10) → ¬ДЕЛ(*x*, 18)) будет ложной. Это *x*, которые делятся без остатка одновременно на 10 и на 18. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 90.

Следовательно, для x = 90 выражение ¬ДЕЛ(*x*, A) должно быть ложным, то есть число 90 должно делиться на *A* < 50. Наибольшим таким *A* является число 45. Это и будет ответ.

Ответ: 45.

Приведём другое решение на языке Python.

```
for a in range(100, 0, -1):
    k = 0
    for x in range(1, 1000):
        if (a < 50) and ((x % a != 0) <= ((x % 10 == 0) <= (x % 18 != 0))):
            k += 1
    if k == 999:
        print(a)
        break
```

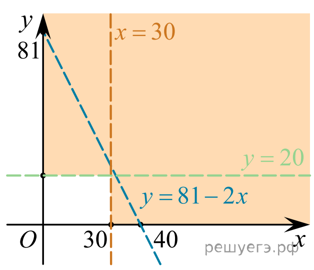
9. Тип 15 № 15634

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

(y + 2x < A) ∨ (x > 30) ∨ (y > 20)

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

Решение. Решим задачу графически. Условия (*x* > 30) и (*y* > 20) задают множество, отмеченное на рисунке закрашенной областью. Чтобы исходное выражение было тождественно истинно для любых целых и неотрицательных *x* и *y*, прямая (*y* + 2*x* < *A*) должна находиться правее незакрашеной области. Следовательно, она должна проходить через точки (30, 21) и (30,5, 20). Таким образом, наименьшее целое неотрицательное *A* равно 81.



Ответ: 81.

Приведём другое решение на языке Python.

```
for a in range(0, 300):
    k = 0
    for x in range(0, 300):
        for y in range(0, 300):
            if (y + 2 * x < a) or (x > 30) or (y > 20):
                k += 1
    if k == 90_000:
        print(a)
        break
```

10. Тип 15 № 33187

Обозначим через **ДЕЛ(*n*, *m*)** утверждение «натуральное число *n* делится без остатка на натуральное число *m*». Для какого наибольшего натурального числа *A* формула

$$\text{ДЕЛ}(90, A) \land (\neg\text{ДЕЛ}(x, A) \to (\text{ДЕЛ}(x, 15) \to \neg\text{ДЕЛ}(x, 20)))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?

Решение. Рассмотрим такие *x*, при которых скобка (ДЕЛ(*x*, 15) → ¬ДЕЛ(*x*, 20)) будет ложной. Это *x*, которые одновременно делятся без остатка на 15 и на 20. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 60.

Следовательно, для x = 60 выражение ¬ДЕЛ(*x*, А) должно быть ложным, то есть число 60 должно делиться на *A*, также на *A* должно делиться число 90. Наибольшим таким *A* является число 30. Это и будет ответ.

Ответ: 30.

Приведём другое решение на языке Python.

```
for a in range(100, 0, -1):
    k = 0
    for x in range(1, 1000):
        if (90 % a == 0) and ((x % a != 0) <= ((x % 15 == 0) <= (x % 20 != 0)))
            k += 1
    if k == 999:
        print(a)
        break
```

11. Тип 15 № 34508

Обозначим через *m* & *n* поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел *m* и *n*. Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа *A* формула

$$x \& 29 \neq 0 \to (x \& 12 = 0 \to x \& A \neq 0)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной *x*)?

Решение. Преобразуем выражение по законам алгебры логики:

$\neg X \to (Y \to \neg Z) = X + (Y \to \neg Z) = X + \neg Y + \neg Z = X + \neg(YZ) = YZ \to X.$

Далее применяем обозначения и реализуем способ решения, изложенный К. Ю. Поляковым в теоретических материалах (см., например, раздел «Теория» на нашем сайте), без дополнительных пояснений.

Имеем импликацию $Z_{12}Z_A \to Z_{29}$ или $Z_{(12 \text{ or } A)} \to Z_{29}$. Запишем число 29 в двоичной системе счисления: $29_{10} = 11101_2$. Единичные биты, стоящие в правой части, должны являться единичными битами левой. Поскольку $12_{10} = 01100_2$, двоичная запись искомого числа А должна содержать единичные биты в нулевом и четвертом разрядах (как обычно, считая справа налево, начиная с нуля).

Тем самым, наименьшее $A = 10001_2 = 17_{10}$.

Приведём другое решение.

Решим задание с помощью языка программирования PascalABC методом перебора:

```
var
    A, x: integer;
    B: boolean;
begin
    for A := 0 to 31 do begin
        B := True;
        for x := 0 to 31 do
            if not (((x and 29) = 0) or ((x and 12) <> 0) or ((x and A) <> 0))
                B := False;
        if B then begin
            writeln(A);
            break;
        end;
    end;
end.
```

Приведём другое решение на языке Python.

Заметим, что можно не перебирать числа, большие 31, поскольку для записи чисел 29 и 12 хватит пяти разрядов. Программа выведет ответ 17.

Ответ: 17.

12. Тип 15 № 34535

На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 40], Q = [5, 15] и R = [35, 50]. Какова наименьшая возможная длина промежутка A, что формула

((x ∈ A) ∨ (x ∈ P)) ∨ ((x ∈ Q)→ (x ∈ R))

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение. Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Введем обозначения:

(x ∈ A) ≡ A; (x ∈ P) ≡ P; (x ∈ Q) ≡ Q; (x ∈ R) ≡ R.

Применив преобразование импликации, получаем:

(A ∨ P) ∨ (Q → R) = A ∨ P ∨ ¬Q ∨ R.

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение. Условию P ∨ R = 1 удовлетворяет отрезок [10; 50], условие P ∨ ¬Q ∨ R = 1 истинно на множестве (−∞; 5) ∪ [10; ∞). Поскольку выражение A ∨ P ∨ ¬Q ∨ R должно быть тождественно истинным, выражение A должно быть истинно на полуинтервале [5; 10). Значит, наименьшая возможная длина интервала A равна 10 − 5 = 5.

Ответ: 5.

Примечание 1.
О длине отрезка написано в примечании к задаче 11119.

Примечание 2.
Предостерегаем читателей от решения этой и подобных задач с помощью программ, реализующих метод перебора. В программах, которые предлагают наши читатели, в качестве границ отрезка используются целые числа, и длина отрезка определяется как разность между ними. Такие программы будут давать неверный результат, если интервал A не является отрезком, то есть одна или обе из его границ ему не принадлежат.

13. Тип 15 № 15113

Сколько существует целых значений числа A, при которых формула

$((x < A) \to (x^2 < 100)) \land ((y^2 \leq 64) \to (y \leq A))$

тождественно истинна при любых целых неотрицательных x и y?

Решение. Раскрывая импликацию по правилу A → B = ¬A + B, заменяя логическую сумму совокупностью, а логическое произведение системой соотношений, определим значения параметра A, при котором система совокупностей

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant A, \\ x^2 < 100, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y^2 > 64, \\ y \leqslant A \end{array}\right. \end{cases}$$

будет иметь решения для любых целых неотрицательных чисел.

Заметим, что переменные не связаны между собой уравнением или неравенством, поэтому необходимо и достаточно, чтобы решениями первой совокупности были все неотрицательные x, а решениями второй совокупности были все неотрицательные y.

Решениями неравенства $x^2 < 100$ являются числа из отрезка [0; 9]. Чтобы совокупность выполнялась для всех целых неотрицательных чисел, числа из луча $[10; +\infty)$ должны быть решениями $x \geqslant A$. Значит, $A \in [0; 10]$.

Аналогично, решениями неравенства $y^2 > 64$ являются числа из луча $[9; +\infty)$. Следовательно, числа из отрезка [0; 8] должны быть решениями неравенства $y \leqslant A$. Поэтому $A \in [8; +\infty)$.

Тем самым, $8 \leqslant A \leqslant 10$. Искомое количество целых значений параметра равно 3.

Ответ: 3.

Приведём другое решение на языке Python.

```
count = 0
for a in range(1, 300):
    k = 0
    for x in range(0, 300):
        for y in range(0, 300):
            if ((x < a) <= (x**2 < 100)) and ((y**2 <= 64) <= (y <= a)):
                k += 1
    if k == 90_000:
        count += 1
print(count)
```

14. Тип 15 № 9170

На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 35] и Q = [17, 48].
Укажите наибольшую возможную длину отрезка A, для которого формула

$$((x \in A) \to \neg(x \in P)) \to ((x \in A) \to (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

Решение. Преобразуем данное выражение.

$$((x \in A) \to \neg(x \in P)) \to ((x \in A) \to (x \in Q))$$
$$((x \notin A) \vee (x \notin P)) \to ((x \notin A) \vee (x \in Q))$$
$$\neg((x \notin A) \vee (x \notin P)) \vee ((x \notin A) \vee (x \in Q))$$

Верно, что A ∧ B ∨ ¬A = ¬A ∨ B. Применим это здесь, получим:

$$(x \in P) \vee (x \notin A) \vee (x \in Q)$$

То есть либо точка должна принадлежать Q, либо принадлежать P, либо не принадлежать A. Это значит, что A может покрывать все точки, которые покрывают P и Q. То есть A = P ∪ Q = [10, 35] ∪ [17, 48] = [10; 48]. |A| = 48 - 10 = 38.

15. Тип 15 № 56515

Обозначим через *m&n* поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел *m* и *n*. Например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа *A* формула

$$(x\&35 \neq 0 \vee x\&22 \neq 0) \to (x\&15 = 0 \to x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной *x*)?

Решение. Приведём решение на языке Python.

```
for a in range(0, 300):
    flag = True
    for x in range(0, 1000):
        if not(((x&35 != 0) or (x&22 != 0)) <= ((x&15 == 0) <= (x&a != 0))):
            flag = False
    if flag == True:
        print(a)
        break
```

Ответ: 48.