

Matematičke metode fizike III

Petar Stipanović

Larisa Zoranić

2023/24

Bilješke s predavanja

7	Obične diferencijalne jednačbe (ODJ)	7-1
7.1	Uvod u diferencijalne jednačbe	7-1
7.1.1	Rješenja diferencijalnih jednačbi	7-1
7.1.2	Homogena linearna diferencijalna jednačba	7-2
7.1.3	Nehomogena linearna diferencijalna jednačba	7-3
7.1.4	Jednostavni harmonijski oscilator	7-4
7.1.5	Prigušeni harmonijski oscilator	7-5
7.1.6	Prisilni harmonijski oscilator	7-5
7.2	Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi	7-6
7.2.1	Eulerova metoda	7-7
7.2.2	Prediktor-korektor metoda	7-8
7.2.3	Runge-Kutta (RK) metode	7-8
7.3	Numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi višeg reda	7-9
A	Rješenja za matematičko njihalo	A - I

Nastavni materijal nije za objavu, već samo služi za internu upotrebu kako bi se studentima olakšalo praćenje nastave.

Literatura

- [1] Morten Hjorth-Jensen: *Computational Physics*, University of Oslo, 2007, 2010, 2015.
- [2] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, SE, Cambridge University Press, USA, 2002.
- [3] Podsjetnici iz programiranja: *C++ Language*, URL: <https://cplusplus.com/doc/tutorial/>;
Programiz: *Learn C Programming*, URL: <https://cplusplus.com/doc/tutorial/>;
Programiz: *Learn Python Programming*, URL: <https://www.programiz.com/python-programming/>;
Tutorials Point: *Python Tutorial*, URL: <https://www.tutorialspoint.com/python/index.htm>;
W3Schools: *Python Tutorial*, URL: <https://www.w3schools.com/python/>.

- [4] NumPy: *The fundamental package for scientific computing with Python*, NumPy documentation, URL: <https://numpy.org/doc/stable/index.html>; Linear algebra `numpy.linalg.solve` URL: <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html>.
- [5] SciPy: *Fundamental algorithms for scientific computing in Python*, URL: <https://scipy.org/>.
- [6] V. Hari i dr: *Numerička analiza*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF, 2004.
- [7] Leandra Vranješ Markić: *Matematičke metode fizike 1*, skripta, Sveučilište u Splitu, PMFST, 2009.
- [8] Saša Krešić-Jurić: *Parcijalne diferencijalne jednačbe*, skripta, Sveučilište u Splitu, PMFST, 2014.
- [9] Ivica Smolić: *Matematičke metode fizike*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF 2020.
- [10] W. Kolos i L. Wolniewicz, J. Chem. Phys. **43**, 2429 (1965); Chem. Phys. Lett. **24**, 457 (1974).
- [11] M. J. Jamieson, A. Dalgarno i L. Wolniewicz, Phys. Rev. A **61**, 042705 (2000).
- [12] I. Bešlić, L. Vranješ Markić i J. Boronat, Phys. Rev. B **80**, 134506 (2009).
- [13] Zong-Chao Yan, James F. Babb, A. Dalgarno i G. W. F. Drake, Phys. Rev A **54**, 2824 (1996).
- [14] Angela B. Shiflet & George W. Shiflet: *Introduction to Computational Science - Modeling and Simulation for the Sciences*, 2. izdanje, Princeton University Press, New Jersey, USA, 2014.
- [15] *Hrvatska enciklopedija*, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020.
URL: <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=18092> te ID=46397, 30418 i 17886 (pristupljeno 3. 5. 2020)
- [16] J. N. Hays: *Epidemics and pandemics: their impacts on human history*, ABC-CLIO, 2005.
- [17] P. van den Driessche: *Reproduction numbers of infectious disease models*, Infectious Disease Modelling, sv. 2, izd. 3, str. 288–303, kol. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002>
- [18] Worldometers.info *COVID-19 Coronavirus Pandemic*, Dover, Delaware, USA.
URL: <https://www.worldometers.info/coronavirus/> (pristupljeno 17. 5. 2020)
- [19] World Health Organization: *WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19 - 3 March 2020*.
URL: <https://www.who.int/dg/speeches/detail/who-director...on-covid-19—3-march-2020> (pristupljeno 17. 5. 2020)

7 Obične diferencijalne jednačbe (ODJ)

Diferencijalne jednačbe prirodno se javljaju kao modeli koji opisuju ponašanje različitih sustava (fizikanih, bioloških, ekonomskih...) pa je ključno poznavanje matematičkog alata kako bismo razumjeli ponašanje tih sustava. Stoga je u sljedećem poglavlju dan vrlo kratki uvod u obične linearne diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima, a koje su ključne za rješavanje problema vezanih uz titranje.

7.1 Uvod u diferencijalne jednačbe

7.1.1 Rješenja diferencijalnih jednačbi

Za razliku od algebarskih jednačbi, koje opisuju vezu među varijablama, **diferencijalne jednačbe** opisuju vezu neke funkcije $x(t)$ i njenih derivacija $x^{(n)}(t)$

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.1)$$

pa je rješenje takve jednačbe na intervalu I svaka realna (ili kompleksna) dovoljno glatka funkcija $x : I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ čijim uvrštavanjem u jednačbu (7.1) dobivamo istinitu jednakost za svaku vrijednost varijable $t \in I$. U fizici je ta **nepoznata funkcija** najčešće neka vremenski ovisna veličina $x(t)$. **Red** n diferencijalne jednačbe određen je redom najviše derivacije nepoznate funkcije $x^{(n)}$ koja se pojavljuje u njoj. Oblik od (7.1) u kojem je ona razriješena po n -toj derivaciji

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (7.2)$$

nazivamo njenim kanonskim oblikom. Osnovna tehnika rješavanja diferencijalnih jednačbi jest integriranje. Rješenje, odnosno n -parametarska familija funkcija

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (7.3)$$

ili

$$\Phi(t, x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (7.4)$$

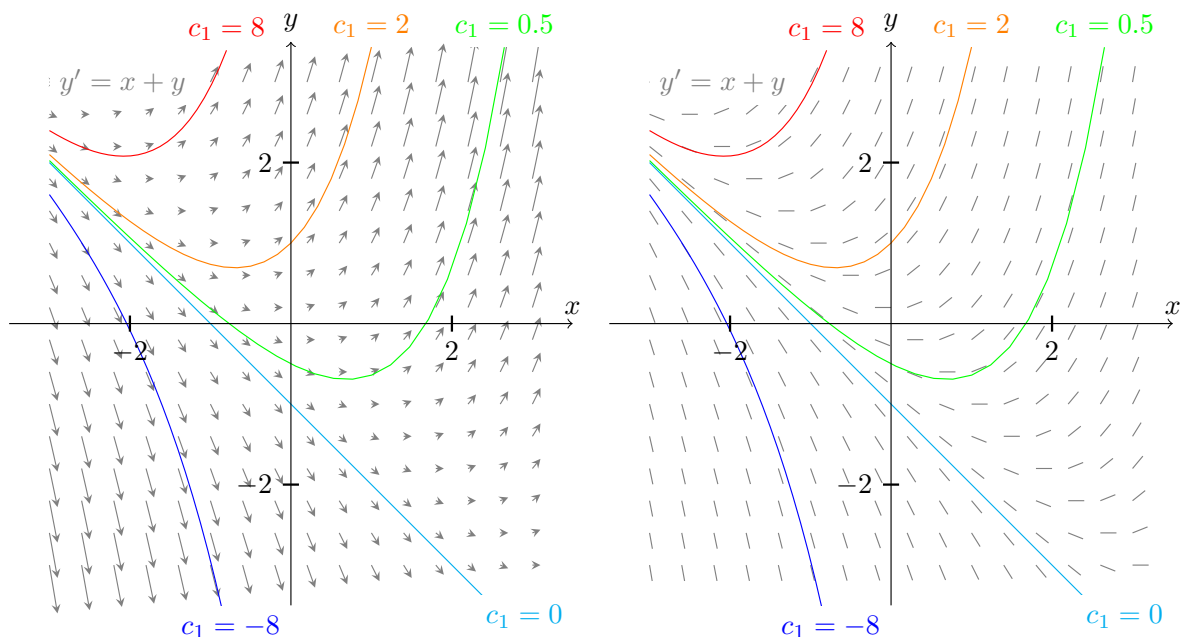
koja sadrži n proizvoljnih konstanti C_i i koja identično zadovoljava (7.1) i (7.2) naziva se **opće rješenje** ili opći integral. **Partikularno** je **rješenje** ono rješenje koje se dobiva iz općega specijalnim izborom konstanti C_1, C_2, \dots, C_n . Konstante C_1, C_2, \dots, C_n često određujemo iz početnih/rubnih uvjeta koji nam daju vrijednosti nepoznate funkcije i njenih derivacija u $t = 0$. Rješenja koja se ne mogu dobiti iz općeg ni za jedna izbor konstanti nazivaju se **singularna**.

Ako se u (7.1) varijabla t pojavljuje samo kao argument funkcije $x(t)$ i njenih derivacija, kažemo da je jednačba **homogena**. Ako se funkcija $x(t)$ i njene derivacije pojavljuju kao prve potencije, kažemo da je diferencijalna jednačba **linearna**.

Često se kao nezavisna varijabla koristi x pa tražimo $y(x)$. Tako jednačbu

$$y' = f(x, y), \quad (7.5)$$

gdje je $y' = dy/dx$, zovemo običnom diferencijalnom jednačbom 1. reda. Ako je y rješenje jednačbe (7.5) i Γ_y njezin graf, onda je jednačbom (7.5) određen koeficijent smjera tangente na Γ_y u svakoj točki (x, y) , odnosno zadan je koeficijent smjera $y' = f(x, y)$ tangente na rješenje. Stoga kažemo da je jednačbom (7.5) zadano **polje smjerova**, a na slici 7.1 prikazano je za $y' = x + y$ čije je opće rješenje $y(x) = c_1 \exp(x) - x - 1$.



Slika 7.1: Polje smjerova za $y' = x + y$ prikazano je lijevo strelicama, čije su duljine proporcionalne iznosu nagiba, a desno segmentima tangenti (nagibima) jednake duljine. Obojenim linijama izdvojena su rješenja $y(x) = c_1 \exp(x) - x - 1$ za odabrane konstante c_1 .

7.1.2 Homogena linearna diferencijalna jednadžba

Homogena linearna diferencijalna jednadžba n -tog reda s konstantnim koeficijentima $a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$ glasi

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = 0. \quad (7.6)$$

Opće rješenje od (7.6) možemo zapisati u obliku

$$x = \sum_{i=1}^n C_i x^i \quad (7.7)$$

gdje su C_i proizvoljne konstante te x^i linearno nezavisna partikularna rješenja koja određujemo prema rješenjima (korijenima) $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ karakteristične jednadžbe

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (7.8)$$

U ovisnosti o prirodi rješenja λ_i uzimamo različite oblike za partikularna rješenja x^i :

(H1) za relani λ_i kratnosti 1

$$x^i = \exp(\lambda_i t) \quad (7.9)$$

(H2) za relani λ_i kratnosti p

$$x_1^i = \exp(\lambda_i t) \quad (7.10)$$

$$x_2^i = t \exp(\lambda_i t) \quad (7.11)$$

\vdots

$$x_p^i = t^{p-1} \exp(\lambda_i t) \quad (7.12)$$

(H3) za konjugirano kompleksni par ($\lambda_i = \alpha + \beta\mathbb{I}$, $\bar{\lambda}_i = \alpha - \beta\mathbb{I}$) kratnosti 1

$$x_1^i = \exp(\alpha t) \cos(\beta t) \quad (7.13)$$

$$x_2^i = \exp(\alpha t) \sin(\beta t) \quad (7.14)$$

(H4) za konjugirano kompleksni par ($\lambda_i = \alpha + \beta\mathbb{I}$, $\bar{\lambda}_i = \alpha - \beta\mathbb{I}$) kratnosti s

$$x_1^i = \exp(\alpha t) \cos(\beta t) \quad (7.15)$$

$$x_2^i = t \exp(\alpha t) \cos(\beta t) \quad (7.16)$$

$$\vdots$$

$$x_s^i = t^{s-1} \exp(\alpha t) \cos(\beta t) \quad (7.17)$$

$$x_{s+1}^i = \exp(\alpha t) \sin(\beta t) \quad (7.18)$$

$$x_{s+2}^i = t \exp(\alpha t) \sin(\beta t) \quad (7.19)$$

$$\vdots$$

$$x_{2s}^i = t^{s-1} \exp(\alpha t) \sin(\beta t) \quad (7.20)$$

7.1.3 Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba

Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba n -tog reda s konstantnim koeficijentima

$$a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0, \quad (7.21)$$

glasi

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f(t). \quad (7.22)$$

Opće rješenje od (7.22)

$$x = x_H + x_P \quad (7.23)$$

možemo zapisati kao zbroj općeg rješenja x_H (7.7) pridružene homogene jednadžbe (7.6) i nekog partikularnog rješenja x_P dane nehomogene jednadžbe (7.22). Ako je

$$f(t) = \exp(\alpha t) [P_n(t) \cos(\beta t) + Q_m(t) \sin(\beta t)] \quad (7.24)$$

onda x_P možemo naći metodom neodređenih koeficijenata pretpostavljajući ga u obliku

$$x_P = t^s \exp(\alpha t) [T_k(t) \cos(\beta t) + R_k(t) \sin(\beta t)] \quad (7.25)$$

gdje su P, Q, R, T polinomi naznačenog stupnja (n, m, k, k) s tim da je

$$k = \max(m, n) \quad (7.26)$$

Za s uzimamo kratnost korijena $\lambda = \alpha \pm \beta\mathbb{I}$ karakteristične jednadžbe (7.8), odnosno $s = 0$ ako $\alpha \pm \beta\mathbb{I}$ nije korijen karakteristične jednadžbe. Ako je

$$f(t) = \sum_{i=1}^l b_i f_i(t) \quad (7.27)$$

koristimo princip superpozicije za pronalaženje partikularnog rješenja

$$x_P = \sum_{i=1}^l b_i x_{P_i} \quad (7.28)$$

gdje je x_{p_i} partikularno rješenje jednadžbe

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f_i(t), \quad i = 1, \dots, l. \quad (7.29)$$

Primjenu ćemo demonstrirati kroz sljedeća potpoglavlja gdje slijedi podsjetnik na različite tipove titranja, što je detaljnije obrađivano kroz Opću fiziku 3 (OF3).

7.1.4 Jednostavni harmonijski oscilator

Diferencijalna jednadžba, koja opisuje gibanje linearnog harmonijskog oscilatora,

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x(t)} \quad (7.30)$$

obična je homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda, odnosno oblika (7.6)

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \quad (7.31)$$

čija je karakteristična jednadžba prema (7.8)

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (7.32)$$

Rješenja te karakteristične jednadžbe

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 \mathbb{I} \quad (7.33)$$

oblika su (H3) gdje je $\alpha = 0$ i $\beta = \omega_0$ pa opće rješenje (7.7) pišemo kao općenitu linearnu kombinaciju partikularnih rješenja (7.13) i (7.14)

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (7.34)$$

što možemo radi jednostavnosti zapisati i kao

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (7.35)$$

Naime, određeno rješenje dobivamo primjenom početnih uvjeta pomoću kojih određujemo konstante C_1 i C_2 u (7.34), odnosno amplitudu oscilacija A i početnu fazu φ u (7.35). Međutim, iz jednakosti rješenja (7.35) i (7.34)

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (7.36)$$

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi) \quad (7.37)$$

slijedi jedinstvena veza parova tih konstanti

$$C_1 = A \cos(\varphi) \quad (7.38)$$

$$C_2 = -A \sin(\varphi) \quad (7.39)$$

pa ćemo radi jednostavnosti, kada dobijemo diferencijalnu jednadžbu (7.30), njeno rješenje pisati u obliku (7.35).

7.1.5 Prigušeni harmonijski oscilator

Diferencijalna jednačina, koja opisuje gibanje prigušenog harmonijskog oscilatora,

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -2\delta \frac{dx(t)}{dt} - \omega_0^2 x(t)} \quad (7.40)$$

obična je homogena linearna diferencijalna jednačina 2. reda (7.6)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (7.41)$$

čija je karakteristična jednačina (7.8)

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (7.42)$$

Rješenja te karakteristične jednačine

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \equiv -\delta \pm \omega' \quad (7.43)$$

oblika su (H3) gdje je $\alpha = -\delta$ i $\beta = -\omega'$ pa opće rješenje (7.7) pišemo kao općenitu linearnu kombinaciju partikularnih rješenja (7.13) i (7.14)

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} \cos(\omega' t) + C_2 e^{-\delta t} \sin(\omega' t) \quad (7.44)$$

što možemo kao (7.35) radi jednostavnosti zapisati u obliku

$$\boxed{x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \varphi)} \quad (7.45)$$

Prema tome ubuduće, čim dobijemo oblik diferencijalne jednačine (7.40), možemo kao rješenje pisati (7.45).

7.1.6 Prisilni harmonijski oscilator

Diferencijalna jednačina, koja opisuje gibanje prisilnog harmonijskog oscilatora pogonjenog nekom vanjskom oscilirajućom silom $F_0 \cos(\omega t)$,

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -2\delta \frac{dx(t)}{dt} - \omega_0^2 x(t) + F_0 \cos(\omega t)} \quad (7.46)$$

obična je nehomogena linearna diferencijalna jednačina 2. reda (7.22)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (7.47)$$

čije je opće rješenje (7.23). Njoj je pridružena homogena diferencijalna jednačina (7.40) pa prema (7.45) uzimamo

$$x_H(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \varphi). \quad (7.48)$$

rješenje. Usporedbom nehomogenog člana $F_0 \cos(\omega t)$ i (7.24) zaključujemo: $\alpha = 0, \beta = \omega, P_n(t) = F_0, Q_m(t) = 0 \Rightarrow n, m, k, s = 0$ pa partikularno rješenje pretpostavljamo u obliku

$$x_P(t) = C_T \cos(\omega t) + C_R \sin(\omega t) \quad (7.49)$$

odnosno, analogno prethodim rješenjima, možemo ga pisati u obliku

$$x_P(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.50)$$

te uvrštavanjem u početnu diferencijalnu jednačinu zaključiti

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \quad A_0 = \frac{F_0}{\text{masa}} \quad (7.51)$$

$$\varphi = \arctg \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.52)$$

Amplituda oscilacija u $x_H(t)$ eksponencijalno opada pa nakon dovoljno dugo vremena možemo zanemariti taj član u općem rješenju $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ i pisati

$$\boxed{x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)} . \quad (7.53)$$

Prema tome ubuduće, čim dobijemo oblik diferencijalne jednačine (7.46), te nakon dovoljno velikog t , možemo kao rješenje pisati (7.53).

7.2 Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačina

Cilj nam je odrediti rješenje $y(t)$ diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (7.54)$$

na intervalu $t \in [t_0, t_N]$ uz početni uvjet

$$y(t_0) = y_0 . \quad (7.55)$$

Prvi korak u numeričkom rješavanju je diskretizacija prostora koju na najjednostavniji način možemo obaviti podjelom domene na N jednakih segmenata, odnosno vremenskih intervala duljine

$$h = \frac{t_N - t_0}{N} \quad (7.56)$$

koje biramo proizvoljno pa se svaki put moramo uvjeriti da su tako malo da ne unose pristranost u numerički postupak, odnosno da ne mijenjaju konačno rješenje! Time problem svodimo na određivanje N vrijednosti

$$y_i \equiv y(t_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (7.57)$$

gdje je

$$t_i \equiv t_0 + ih = t_{i-1} + h . \quad (7.58)$$

Rješenje u trenutku $t_{i+1} = t_i + h$ možemo zapisati u obliku

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt \quad (7.59)$$

što znači da počevši od početnog rubnog uvjeta y_0 nakon j sukcesivnih koraka možemo dobiti y_j . Podintegralna funkcija može ovisiti o $y(t)$ čije nam je ponašanje nepoznato tijekom intervala $[t_i, t_{i+1}]$ pa nije trivijalno obaviti integraciju. Stoga je cilj pronaći pravilo koje na osnovu poznatih vrijednosti procjenjuje vezu između y_{i+1} i y_i , odnosno na osnovu poznatih vrijednosti aproksimira spomenuti integral.

Koristeći pohranjenih $N + 1$ podataka, procjenu rješenja u međutočkama možemo, po potrebi, odrediti interpolacijom ili fitanjem funkcije kroz dobiveni skup točaka.

7.2.1 Eulerova metoda

Diferencijalnu jednačbu (7.54) najjednostavnije možemo prebaciti u diskretni oblik koristeći pravilo za numeričko deriviranje. Prisjetimo se numeričkog deriviranja prateći oznake na slici 7.2. Neka je $h \equiv \Delta t$ prirast argumenta u točki t_i , tada je pripadni prirast funkcije

$$\Delta y \equiv \Delta y(t_i) = y(t_i + h) - y(t_i).$$

Derivacija od f u točki $t = t_i$ je limes

$$f(t_i, y_i) = y'(t_i) \equiv \frac{dy}{dt}(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t_i)}{h} \quad (7.60)$$

ako isti postoji. Kada $B \rightarrow A$ ($h \rightarrow 0$) sekanta \overline{AB} postaje tangenta na graf od y u točki A

$$y = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i).$$

Ako je y diferencijabilna funkcija u t_i , tada je

$$\Delta y = y'(t_i)h + \epsilon h = f(t_i, y_i)h + \mathcal{O}(h) \quad (7.61)$$

gdje $\epsilon \rightarrow 0$ kada $h \rightarrow 0$ pa vrijedi linearna aproksimacija $\Delta y \approx y'(t_i)h$, tj. diferencijal $dy(t_i) = y'(t_i)dt \stackrel{(7.54)}{=} f(t_i, y_i)dt$ pa za dovoljno male h rekurzija (7.59) postaje

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{f(t_i, y_i)}_{k_1} \cdot h \equiv y_i + k_1 h \quad (7.62)$$

aproksimacija izraza (7.61). Ekvivalentno bismo dobili promatrajući izraz za numeričku aproksimaciju derivacije za mali h ,

$$f(t_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (7.63)$$

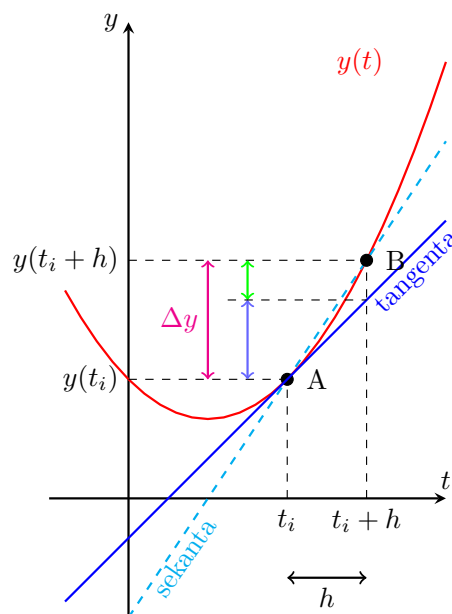
ili odrezujući članove višeg reda u Taylorovom razvoju

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \mathcal{O}(h^2). \quad (7.64)$$

Postupak iteracije opisuje

Eulerov algoritam

1. funkcijama definirati derivacije: $f(t, y)$
2. algoritam složiti unutar glavnog programa:
 - definirati vremensku skalu $t_0, t_N, N, h = (t_N - t_0)/N$
 - inicijalizirati početne uvjete $t = t_0, y = y_0$
 - ispis(t, y)
 - $\forall i = 1, \dots, N$
 - $y = y + f(t, y) \cdot h$
 - $t = t_0 + i \cdot h$
 - ispis(t, y)



Slika 7.2: Skica prirasta funkcije.

Koliko se dobro slaže rješenje dobiveno Eulerovom metodom s egzaktnim rješenjem $y_e(t)$ možemo procijeniti analizirajući grešku

$$\frac{y_e(t+h) - y_e(t)}{h} - f(t_i, y_e(t_i)) \quad (7.65)$$

koju radimo prilikom aproksimacije derivacije. Pretpostavimo da f ima dovoljno neprekidnih parcijalnih derivacija. Rješenje diferencijalne jednačbe $y_e(t)$ razvijmo u Taylorov red oko točke t_i ,

$$y_e(t_i + h) = y_e(t_i) + \frac{h}{1!} y_e'(t_i) + \frac{h^2}{2!} y_e''(t_i) + \dots + \frac{h^m}{m!} y_e^{(m)}(t_i + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1$$

pa je

$$\frac{y_e(t+h) - y_e(t)}{h} = y_e'(t) + \frac{h}{2} y_e''(t_i) + \dots + \frac{h^{m-1}}{m!} y_e^{(m)}(t_i + \vartheta h).$$

Kako je $y_e'(t) = f(t, y_e(t))$, uz oznake $f_t = \partial f / \partial t$ i slično vrijedi

$$y_e''(t) = f_t(t, y_e(t)) + f_y(t, y_e(t)) y_e'(t) = f_t(t, y_e(t)) + f_y(t, y_e(t)) f(t, y_e(t))$$

pa greška postaje

$$\frac{y_e(t+h) - y_e(t)}{h} - f(t, y_e(t)) = \frac{h}{2} [f_t(t, y_e) + f_y(t, y_e) f(t, y_e)] + \dots + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h).$$

Za Eulerovu metodu kažemo da je 1. reda jer se u ocjeni greške pojavljuje prva potencija od h . Ako se radi o sporim promjenama derivacije $y' = f(t, y)$ i nemamo velik broj koraka N , metoda je zbog jednostavnosti praktična. Međutim, ako se derivacije brzo mijenjaju, konvergencija će biti spora pa je potrebno koristiti dovoljno male h što povećava broj iteracija, a greška se propagira iz koraka u korak te metoda brzo postane neefikasna. Stoga nam je cilj konstruirati metode koje će brže konvergirati, odnosno čije će greške brže opadati, kao $\mathcal{O}(h^n)$.

7.2.2 Prediktor-korektor metoda

Prediktor-korektor metoda, koristeći Eulerovu metodu u međukoracima, aproksimira izraz (7.59) u 4 koraka:

1. nagib u $t_i \blacktriangleright k_1 = f(t_i, y_i)$;
2. predviđanje rješenja u t_{i+1} Eulerovom metodom $\blacktriangleright \tilde{y}_{i+1} = y_i + k_1 \cdot h$;
3. nagib u $t_{i+1} \blacktriangleright k_2 = f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$;
4. korekcija (srednjim nagibom) rješenja u $t_{i+1} \blacktriangleright y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot h + \mathcal{O}(h^2)$.

7.2.3 Runge-Kutta (RK) metode

RK2 metoda, koristeći Eulerovu metodu u međuintervalima, aproksimira izraz (7.59) u 4 koraka:

1. nagib u $t_i \blacktriangleright k_1 = f(t_i, y_i)$;
2. predviđanje rješenja u $t_{i+\frac{1}{2}}$ Eulerovom metodom $\blacktriangleright \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + k_1 \cdot \frac{h}{2}$;
3. nagib u $t_{i+\frac{1}{2}} \blacktriangleright k_2 = f(t_{i+\frac{1}{2}}, \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}})$;
4. korištenje novog nagiba za rješenje u $t_{i+1} \blacktriangleright y_{i+1} = y_i + k_2 \cdot h + \mathcal{O}(h^3)$.

RK4 metoda, koristeći Eulerovu metodu u međuintervalima za procjenu rješenja na osnovi prethodno izračunatog k_i , aproksimira izraz (7.59) u 5 koraka:

1. nagib u $t_i \triangleright k_1 = f(t_i, y_i)$;
2. nagib u $t_{i+\frac{1}{2}}$ koristeći $k_1 \triangleright k_2 = f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_i + k_1 \frac{h}{2})$;
3. nagib u $t_{i+\frac{1}{2}}$ koristeći $k_2 \triangleright k_3 = f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_i + k_2 \frac{h}{2})$;
4. nagib u t_{i+1} koristeći $k_3 \triangleright k_4 = f(t_{i+1}, y_i + k_3 h)$;
5. korištenje srednjeg nagiba za rješenje u $t_{i+1} \triangleright y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot h + \mathcal{O}(h^4)$.

Zadatak 7.1 Skicirajte na papiru algoritam za Eulerovu, prediktor-korektor, RK2 i RK4 metodu. Optimizirajte upotrebu memorije i reducirajte broj operacija potreban za dobivanje rješenja. Napišite kod prema skiciranom algoritmu. ◀

Zadatak 7.2 Simulirajte radioaktivni raspad $N(0) = 10000$ nestabilnih jezgri čiji je broj opisan diferencijalnom jednačbom

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\ln 2}{2 \text{ s}} N.$$

Rješenja odredite koristeći Eulerovu metodu, prediktor-korektor i RK2. Na log-lin grafu usporedite dobivena rješenja s analitičkim rješenjem $N(t) = N(0)e^{-\ln 2 \cdot t / (2 \text{ s})}$. Testirajte kako diskretizacija (broj točaka) utječe na rješenje. ◀

Geometrijska interpretacija dana je u dodatku [7 ODJ-geometrijski.pdf](#).

7.3 Numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi višeg reda

Obradene metode možemo prilagoditi za rješavanje diferencijalnih jednačbi višeg reda uvođenjem pokrata za derivaciju i tako slijedom snižavamo red do prvoga. Primjerice ako poznajemo sile na tijelo, problem gibanja svodi se na rješavanje Newtonovih jednačbi koja za tijelo konstantne mase glasi

$$\ddot{x} = \frac{F(t, x, v)}{m}. \quad (7.66)$$

Uvođenjem pokrate, odnosno definicije brzine $\dot{x} = v$, problem se svodi na paralelno rješavanje sustava vezanih diferencijalnih jednačbi prvoga reda

$$\dot{v} = \frac{F(t, x, v)}{m} \quad (7.67)$$

$$\dot{x} = v \quad (7.68)$$

pri čemu moramo voditi pažnju koje vrijednosti uzimamo za računanje u međukoracima.

Zadatak 7.3 Napišite diferencijalne jednačbe koje opisuju kutne oscilacije metalne kuglice mase $m = 200 \text{ g}$ obješene o nerastezljivu nit duljine $l = 0.2484902028828339 \text{ m}$, nakon što je u početnom trenutku $t = 0$ odmaknuta za kut $y(0) = 4^\circ$ i puštena. Ako je $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ i $\pi = 3.141592653589793$, odredite $y(t)$ bez aproksimacije malih kuteva pri numeričkom rješavanju.

- a) Napišite analitičko rješenje $y_a(t)$ koristeći aproksimacije malih kuteva [\[link\]](#).
- b) Tijekom 1. i 20. titraja ispitajte kako diskretizacija vremena, odnosno broj N vremenskih intervala, utječe na odstupanja rješenja $y(t)$ procijenjenog Eulerovom metodom od $y_a(t)$. Mijenjaju li se greške nakon 19 titraja? Koji je N optimalan?
- c) Tijekom 20. titraja, koristeći procijenjeni N i $\lfloor N/10 \rfloor$, grafički usporedite rješenja dobivena s:
 - c.1 Eulerovom metodom;
 - c.2 RK4 metodom.

Optimizirajte kodove da zauzimaju što manje memorije. Koja je metoda optimalnija?

- d) Kako se tijekom prvih 7 titraja slažu $y_a(t)$ i $y(t)$ procijenjen RK4 metodom za različite početne maksimalne kutne pomake kuglice iz ravnotežnog položaja $y_0 = 4^\circ, 8^\circ, 16^\circ, 32^\circ, 64^\circ$?

Primjeri izvršavanja simulacija iz prethodnog zadatka prikazani su na slikama u mapi [7 ODJ-HO](#), odnosno u dodatku [A](#).

Zadatak 7.4

- Konstruirajte algoritam za rješavanje diferencijalne jednačbe n -tog reda preko Eulerova algoritma (EN) ili iskoristite rješenja iz prethodnog zadatka.
- Konstruirajte algoritam za rješavanje jednačbi gibanja tako da gibanje tijekom malog vremenskog intervala aproksimirate jednoliko ubrzanim gibanjem (JUG).
- Za problem iz prethodnog zadatka, za početni pomak od 4° , od 17. do 20. titraja, usporedite rješenja dobivena metodama EN, JUG, RK4 za $N = 20\,000$ u faznom prostoru (ovisnost kutne brzine o kutu).

Zadatak 7.5 Konstruirajte algoritam za rješavanje diferencijalne jednačbe n -tog reda preko Eulerova algoritma. ◀

Zadatak 7.6 Numerički riješite Euler-Cauchyjevu jednačbu

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' - 5xy' - 15y = 0$$

uz samostalno odabrane početne uvjete. ◀

Zadatak 7.7 Neka je tijelo mase $m = 1$ kg privezano za 2 horizontalne opruge duljine L učvršćene u točkama $(\pm L, 0)$ te 2 vertikalne opruge duljine L učvršćene u točkama $(0, \pm L)$. Svaka vertikalna opruga ima konstantu elastičnosti $k_y = 2\text{ N/m}$, a svaka horizontalna $k_x = 0.5\text{ N/m}$. Koristeći RK4 metodu simulirajte gibanje tijela nakon što ga u početnom trenutku izmaknete iz ravnotežnog položaja u $(-2\text{ cm}, 2\text{ cm})$ i pustimo.

- Prikažite njegovu putanju grafički.
- Što bi sve trebalo promijeniti da krivulja bude kružnica? Napomena: Ako nemate ideje, podsjetite se Lissajouseovih krivulja:

<http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lissajous.htm>

<http://mathworld.wolfram.com/LissajousCurve.html>

◀

U nastavku se nalazi primjer koda koji demonstrira proširenje primjene Eulerove metode na rješavanje diferencijalne jednačbe n -tog reda. Ključni koraci su diskutirani kroz komentare koda:

```
#ifndef _WIN32
#define _CRT_SECURE_NO_DEPRECATE
#endif

/* EULEROVA metoda za diferencijalnu jednačbu M-tog reda
   yM(M)=f(t,yM(M-1),...,yM',yM',yM)
   - pokratama y2'(t)=y1(t), y3'(t)=y2(t),.... te k:=dy/dt
   dobivamo sustav od M dif. jed. 1. stupnja
   k1(t) = f(t,y1(t),y2(t),...)
   k2(t) = y1(t)
   k3(t) = y2(t)...
   kM(t) = y{M-1}(t)
```

```

- koristimo
  y = polje varijabli [t,y1(t),y2(t),...,yM(t)]
  k = polje derivacija [# ,y1'(t),y2'(t),...,yM'(t)]
*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>

/* primjena na sustav odj
  dy1/dt = -g/l*sin(y2); y1(0)=0
  dy2/dt = y1; y2(0)=4 deg
  ---> y2(t) za 0 < t < 20T?
*/
#define pi 3.141592653589793
#define l 0.2484902028828339 // m
#define g 9.81 // m/(s*s)

#define N 100000
#define t0 0.
#define tN (40.*pi*sqrt(l/g))
#define yM 4./180*pi

#define M 2 //broj varijabli: y1,... yM

void f(double *k, double *y) {
  int i;
  *(k + 1) = -g / l * sin(*(y + 2));
  for (i = 1; i < M; i++) *(k + i + 1) = *(y + i);
}

int main() {
  FILE *fp;
  int i, j;
  double y[] = { t0, 0., yM }; // t0, y1(t0), ..., yM(t0)
  double h, k[M + 1]; // k[n] = y'[n]
  h = (tN - t0) / N; // vremenski korak
  i = sizeof(y) / sizeof(y[0]);
  if ((i-1) != M) {
    printf("broj pocetnih uvjeta (%d) != broj odj (%d)\n", i-1, M);
    getchar();
    return 0;
  }
  fp = fopen("7__odj_ho_E_multi.txt", "w");
  fprintf(fp, "%lf %lf %lf\n", y[0], y[M], yM*cos(sqrt(g / l)*y[0]));
  for (i = 1; i <= N; i++) {
    f(k, y);
    for (j = 1; j <= M; j++)
      y[j] = y[j] + k[j] * h;
    y[0] = t0 + i * h;
    fprintf(fp, "%lf %lf %lf\n", y[0], y[M], yM*cos(sqrt(g / l)*y[0]));
  }
  fclose(fp);
  getchar();
  return 0;
}

```

Proučite optimizacijski Numerov algoritam u diplomskom radu Ivne Baković, *Skaliranje energije i širine maločestičnih sustava u 2D*, pgl. 2.3.

A. Rješenja za matematičko njihalo

