Matematičke metode fizike III

Petar Stipanović
Larisa Zoranić

2023/24

Bilješke s predavanja

4 Sustav linearnih jednadžbi **4-1**

4.1 Gauss-Jordanova metoda eliminacija . . . 4-1

4.1.1 Matrice i osnovne operacije . . . 4-1

4.1.2 Sustavi linearnih jednadžbi . . . 4-3

4.2 Tridijagonalni linearni sustav . . . 4-7

Literatura

[1] Morten Hjorth-Jensen: *Computational Physics*, University of Oslo, 2007, 2010, 2015.

[2] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, SE, Cambridge University Press, USA, 2002.

[3] Podsjetnici iz programiranja: *C++ Language*, URL: https://cplusplus.com/doc/tutorial/;
Programiz: *Learn C Programming*, URL: https://cplusplus.com/doc/tutorial/;
Programiz: *Learn Python Programming*, URL: https://www.programiz.com/python-programming;
Tutorials Point: *Python Tutorial*, URL: https://www.tutorialspoint.com/python/index.htm;
W3Schools: *Python Tutorial*, URL: https://www.w3schools.com/python/.

[4] NumPy: *The fundamental package for scientific computing with Python*,
NumPy documentation, URL: https://numpy.org/doc/stable/index.html;
Linear algebra numpy.linalg.solve URL: https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html.

[5] SciPy: *Fundamental algorithms for scientific computing in Python*, URL: https://scipy.org/.

[6] V. Hari i dr: *Numerička analiza*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF, 2004.

[7] Leandra Vranješ Markić: *Matematičke metode fizike 1*, skripta, Sveučilište u Splitu, PMFST, 2009.

[8] Saša Krešić-Jurić: *Parcijalne diferencijalne jednadžbe*, skripta, Sveučilište u Splitu, PMFST, 2014.

[9] Ivica Smolić: *Matematičke metode fizike*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF 2020.

[10] W. Kolos i L. Wolniewicz, J. Chem. Phys. **43**, 2429 (1965); Chem. Phys. Lett. **24**, 457 (1974).

[11] M. J. Jamieson, A. Dalgarno i L. Wolniewicz, Phys. Rev. A **61**, 042705 (2000).

[12] I. Bešlić, L. Vranješ Markić i J. Boronat, Phys. Rev. B **80**, 134506 (2009).

[13] Zong-Chao Yan, James F. Babb, A. Dalgarno i G. W. F. Drake, Phys. Rev A **54**, 2824 (1996).

[14] Angela B. Shiflet & George W. Shiflet: *Introduction to Computational Science - Modeling and Simulation for the Sciences*, 2. izdanje, Princeton University Press, New Jersey, USA, 2014.

[15] *Hrvatska enciklopedija*, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020.
URL: http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=18092 te ID=46397, 30418 i 17886 (pristupljeno 3. 5. 2020)

[16] J. N. Hays: *Epidemics and pandemics: their impacts on human history*, ABC-CLIO, 2005.

[17] P. van den Driessche: *Reproduction numbers of infectious disease models*, Infectious Disease Modelling, sv. 2, izd. 3, str. 288–303, kol. 2017. DOI: hhttps://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002

[18] Worldometers.info *COVID-19 Coronavirus Pandemic*, Dover, Delaware, USA.
URL: https://www.worldometers.info/coronavirus/ (pristupljeno 17. 5. 2020)

[19] World Health Organization: *WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19 - 3 March 2020*.
URL: https://www.who.int/dg/speeches/detail/who-director...on-covid-19—3-march-2020 (pristupljeno 17. 5. 2020)

4 Sustav linearnih jednadžbi

Često probleme u matematici i fizici svodimo na sustav linearnih jednadžbi. Obično takve sustave rješavamo Gauss-Jordanovom (GJ) metodom eliminacije ili postupkom LU dekompozicije koji zahtijevaju $\mathscr{O}(N^3)$ operacija [2]. Ako je matrica sustava simetrična ili ima puno iščezavajućih elemenata, spomenuti su nam postupci „vremenski preskupi" pa ih optimiziramo reducirajući broj operacija. Primjerice pri konstrukciji kubičnog interpolacijskog splajna javlja se tridijagonalna matrica, tj. matrica $A = [a_{ij}]$ tipa $n \times n$ gdje iščezavaju svi $a_{ij} = 0$ na položajima $|i - j| < 1$. Slikovito rečeno svi su elementi tridijagonalne matrice, osim onih na glavnoj dijagonali i njenim dvjema susjednim dijagonalama, jednaki 0. Stoga ćemo u poglavlju 4.2 konstruirati algoritam, analogan GJ postupku kojeg se podsjećamo u uvodnom poglavlju 4.1, a koji bi nakon $\mathscr{O}(N)$ operacija omogućio procjenu rješenja, dakle direktno iz ulaznih koeficijenata.

4.1 Gauss-Jordanova metoda eliminacija

4.1.1 Matrice i osnovne operacije

Matricu A tipa $m \times n$ zapisujemo kao uređenu tablicu elemenata posloženih u m redaka i n stupaca,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

a zbog praktičnosti, često se koristi i simbolički zapis

$$A = [a_{ij}] \tag{4.2}$$

ili $A = (a_{ij})$. U programskom jeziku C najjednostavnije je matricu deklarirati kao dvodimenzionalno polje (niz)

$$\textit{tip} \;\; a[m+1][n+1]; \tag{4.3}$$

da ne moramo usklađivati indekse obzirom na uobičajeni matematički zapis te obavit inicijalizaciju

$$\begin{aligned} &\forall i \in [1, m] \\ &\quad \forall j \in [1, n] \\ &\qquad a[i][j] = a_{ij}; \end{aligned} \tag{4.4}$$

odnosno ignorirati elemente polja gdje je $i = 0$ ili $j = 0$. Radi jednostavnosti u tekstu prilikom pisanja algoritama koristimo uobičajenu matematičku notaciju u kojoj a_{ij} predstavlja element matrice $[a_{ij}]$ u i-tom retku i j-tom stupcu. Alternativno, odnosno optimalnije možemo koristiti dinamičku alokaciju, a ideja za matrice u C-u dana je u uvodnim podsjetnicima.

Ako je A nulmatrica, tada su svi

$$a_{ij} = 0, \tag{4.5}$$

a ako je kvadratna ($m = n$) matrica reda n $A \in \mathscr{M}_n$:

- jedinična, svi su

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \tag{4.6}$$

- dijagonalna,

$$a_{ij} = 0 \text{ za } j \neq i, \tag{4.7}$$

- gornja trokutasta,

$$a_{ij} = 0 \text{ za } i < j, \tag{4.8}$$

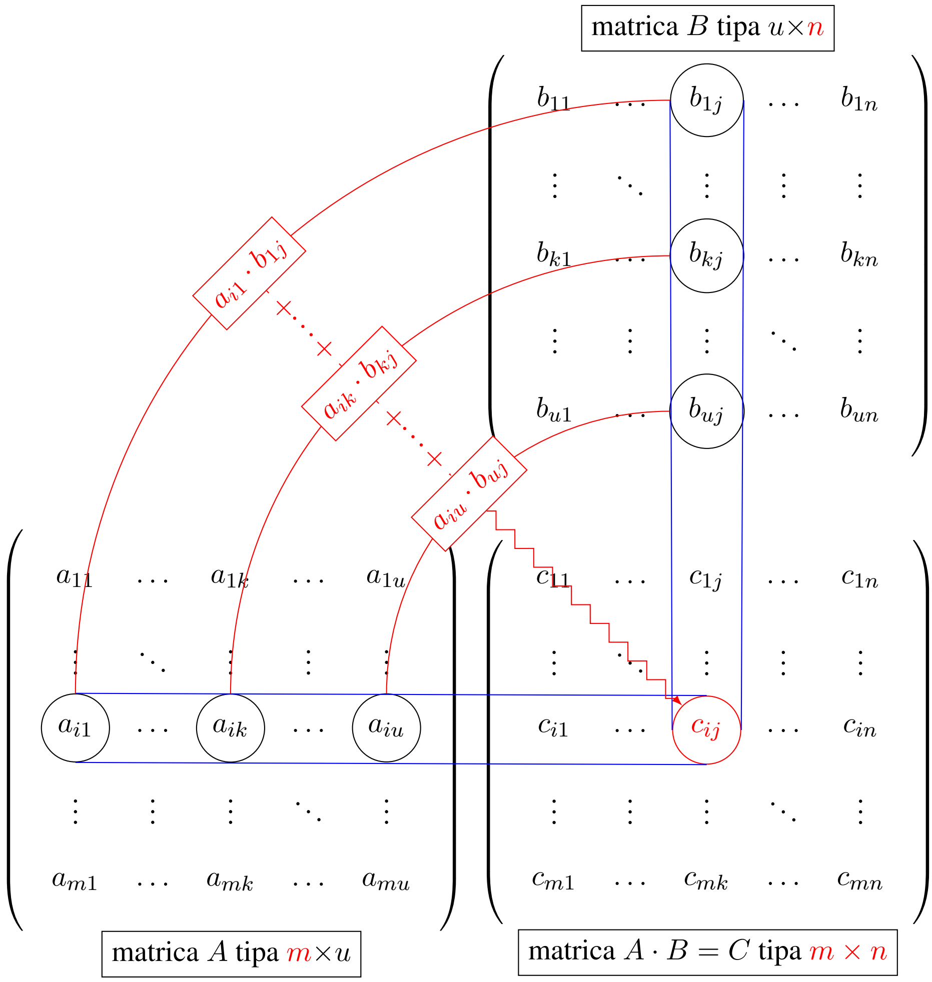
- donja trokutasta,

$$a_{ij} = 0 \text{ za } i > j. \tag{4.9}$$

Osnovne operacije s matricama možemo algoritamski zapisati ovako:

Algoritam operacija s matricama: $Z = A \pm B$, $D = \beta \cdot B$, $T = A^\tau$, $C = A \cdot B$

zadani $\beta,\ a_{ij},\ b_{ij}$
$\forall i \in [1, m]$
  $\forall j \in [1, n]$
    $z_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
    $d_{ij} = \beta \cdot b_{ij}$
    $t_{ij} = a_{ji}$
    $c_{ij} = 0$
    $\forall k \in [1, u]$
      $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$



4.1.2 Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav od M linearnih jednadžbi $j = 1 \cdots M$, s N nepoznanica $x_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & a_{13} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{1N} \cdot x_N & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & a_{23} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{2N} \cdot x_N & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & a_{33} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{3N} \cdot x_N & = & b_3 \\ & & & & & & \vdots & & & & \\ a_{M1} \cdot x_1 & + & a_{M2} \cdot x_2 & + & a_{M3} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{MN} \cdot x_N & = & b_M \end{array} \tag{4.10}$$

možemo zapisati u matričnom oblik

$$A \cdot X = B \tag{4.11}$$

gdje je $A = [a_{ij}]$ matrica sustava, $X = [x_j]$ matrica nepoznanica te $B = [b_i]$ matrica slobodnih koeficijenata. Radi jednostavnosti često koristimo zapis pomoću proširene matrice sustava

$$A_\mathrm{p} = A|B. \tag{4.12}$$

Sustav linearnih jednadžbi može biti:

- nerješiv;
- rješiv (Kronecker-Capelli TM) $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A_\mathrm{p}) = \mathrm{rang}(A)$, posebno
  - ako je $\mathrm{rang}(A) = M \Rightarrow$ sustav je rješiv;
  - Cramerov sustav ($\mathrm{rang}(A) = N = M$) ima jedinstveno rješenje (numerički prezahtjevno)

    $$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \tag{4.13}$$

    gdje A_i dobijemo tako da i-ti stupac od A zamijenimo s B;
  - $\mathrm{rang}(A) < N \Rightarrow \infty$ rješenja koja se mogu izraziti preko $N - \mathrm{rang}(A)$ parametara.

Elementarne transformacije:

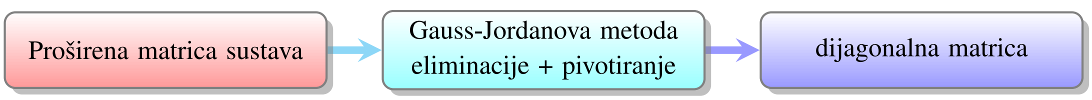
- zamjene poretka jednadžbi (redaka proširene matrice),
- množenje jednadžbe (retka) skalarom,
- dodavanje jedne jednadžbe drugoj (retka retku).

ne mijenjaju rješenje.

Ostale zamjene:

- zamjene stupaca j i k odgovaraju zamjeni rješenja $x_j \leftrightarrow x_k$.

Ideja GJ metode eliminacije sastoji se od primjene elementarnih transformacija kako bismo dobili jediničnu matricu. Na taj način dobivamo sustav koji je ekvivalentan zadanome nakon čega je trivijalno pročitati rješenja. Cilj pri rješavanju sustava možemo sažeti dijagramom



Primjer 4.1.

Primjer sustava od 4 linearne jednadžbe s 4 nepoznanice:

$$\begin{aligned} x_2 + 2\,x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= 2 \\ 2\,x_2 + 3\,x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Rješenje:

- Matrica sustava A i matrica stupac b su

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- Proširena matrica sustava je

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right). \tag{4.14}$$

- Primjenom elementarnih transformacija, matricu sustava svodimo na gornju trokutastu (Gaussova metoda eliminacije),

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{zamjena redaka}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R1+R2}\to\text{R2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{R4}-2\,\text{R2}\to\text{R4}]{\text{R3}-\text{R2}\to\text{R3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R4}-\text{R3}\to\text{R4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{R2}-\text{R3}\to\text{R2}]{\text{R1}-\text{R3}\to\text{R1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Je li moguće svesti na dijagonalnu matricu (Gauss-Jordanova metoda eliminacije)?
- Je li sustav rješiv numerički?
- Što su rješenja?

Dakle, transformaciju sustava (4.10)

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N = b_1 \\ \cdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \cdots + a_{NN}x_N = b_N \end{gathered}$$

u gornji trokutasti

$$\begin{aligned} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3 + \cdots + g_{1N}x_N &= y_1 \\ g_{22}x_2 + g_{23}x_3 + \cdots + g_{2N}x_N &= y_2 \\ g_{33}x_3 + \cdots + g_{3N}x_N &= y_3 \\ &\vdots \\ g_{NN}x_N &= y_N \end{aligned}$$

možemo provesti iterativno kao u primjeru 4.1., krenuvši od prvog retka $i = 1$ prema zadnjem $i = N$, sortiramo donje retke tako da je dijagonalni $a_{ii} \neq 0$, dijeleći i-ti s a_{ii} i dodajući pomnožen s $-a_{ki}$ svim ostalim retcima $k < i$. Ponavljajući postupak od zadnjeg prema prvome retku za svaki $k > i$ dolazimo do dijagonalnog sustava s jediničnom matricom sustava

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= r_1 \\ x_2 \qquad\qquad &= r_2 \\ &\vdots \\ x_N &= r_N. \end{aligned}$$

Skicirajte algoritam za Gauss-Jordanov postupak eliminacije.

Kako numeričke greške svesti na minimum? Promotrimo neke specifične slučajeve:

- Što ako je na dijagonali 0 kao u prethodnom primjeru u (4.14)?
- Mogu li nastati numerički problemi ako, nakon „nuliranja" elemenata ispod prvog elementa na dijagonali, dobijemo sustav sličan ovome

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 10^{-8} & 358 & 27 \\ 0 & -91 & 55 & 9 \\ 0 & 7 & 76 & 923 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

  - Numerički stabilniji proračuna postižemo pivotiranjem, odnosno dovođenjem največeg preostalog elementa na dijagonalu. Ako samo sortiramo retke radi se o parcijalnom pivotirnju dok potpuno postižemo zamjenom redaka i stupaca.
  - Dakle, prije „nuliranja" elementa ispod 2. elementa na dijagonali, možemo transformirati sustav zamjenom 2. i 3. retka proširene matrice što odgovara zamjenama istih redaka u matrici sustava A i matrici slobodnih koeficijenata $B = [y_i]$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -91 & 55 & 9 \\ 0 & 10^{-8} & 358 & 27 \\ 0 & 7 & 76 & 923 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

    ili zamjenom 2. i 3. stupca proširene matrice što odgovara zamjeni stupaca u A i redaka u rješenju X

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 358 & 10^{-8} & 27 \\ 0 & 55 & -91 & 9 \\ 0 & 76 & 7 & 923 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

  - Može li još bolje?

Zadatak 4.1. Napišite kod prema donjim smjernicama, koristeći funkcije iz *Numerical Recipes* [2] ili biblioteke NumPy [4], za rješavanje više sustava linearnih jednadžbi s istom matricom sustava A i testirajte na primjeru za tri sustava $A \cdot X_i = B_i$, $i = 1, 2, 3$, [7]

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

za vektore B

$$B_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -25 \\ 32 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 22 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Rješenja bi trebala biti

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0.312 \\ -0.038 \\ 2.677 \end{pmatrix}, \ X_3 \begin{pmatrix} 2.319 \\ -2.965 \\ 4.790 \end{pmatrix}.$$

Osmislite algoritam za provjeru rješenja u slučaju kada ista nisu poznata.

Smjernice: U mapi `2 GJ-NR` priloženi su kodovi iz *Numerical Recipes* [2]. `GJ.c` sadrži funkciju

```
/* Funkcija koja izvodi Gauss-Jordanovu eliminaciju */
// Ulazni elementi:  ai - sadrzi koeficijente uz nepoznanice = A
//                   n  - dimenzija matrice ai
//                   x  - slobodni koeficijenti = b
//                   m  - broj rjesenja
gaussj(ai,n,x,m);
// Izlazni elementi: ai - inverzna matrica od ulazne
//                   x  - vrijednosti nepoznanica
```

koja GJ metodom eliminacije rješava m sustava od n linearnih jednadžbi,

$$A \cdot X_i = B_i, \quad i = 1 \cdots m. \tag{4.15}$$

- Doradite `start_GJ.c` prema komentarima u kodu, odnosno:
  - Učitajte broj sustava jednadžbi m i red matrice sustava n iz datoteke `jednadzbe.txt`.
  - Koristeći funkciju matrix iz *Numerical Recipes* [2] kreirajte dvodimenzionalna polja, odnosno matrice a i ai tipa $n \times n$ te x i b matrice tipa $n \times m$. Detaljnije upute o funkcijama iz NR za polja dane su u uvodnom C-podsjetniku.
  - Inicijalizirajte polja a i b s elementima zapisanima u datoteci `jednadzbe.txt`.
  - Kopirajte polje a u polje ai te polje b u polje x.
  - Pozovite gasussj.
  - Rješenja i inverznu matricu pohranite u datoteku `rjesenja.txt`.
- Obavite provjeru rješenja. Definirajte nove potrebne nizove. Ispitajte

$$A \cdot A^{-1} = I, \tag{4.16}$$
$$A \cdot X_i = B_i. \tag{4.17}$$

- Upišite podatke iz zadatka u datoteku `jednadzbe3.txt`
- Razmislite može li se Gauss-Jordanova metoda iskoristit za proračun inverzne matrice $A^{-1} = [ai_{ij}]$. Podsjetnik: $A \cdot A^{-1} = I$.

4.2 Tridijagonalni linearni sustav

Sustav od n linearnih jednadžbi

$$b_1x_1 + c_1x_2 \quad = d_1, \qquad i = 1; \tag{4.18}$$

$$a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i, \qquad i = 2, \ldots, n-1; \tag{4.19}$$

$$a_nx_{n-1} + b_nx_n \quad = d_n, \qquad i = n, \tag{4.20}$$

u kojem su $a_1 = 0$ i $c_n = 0$, u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

ima tridijagonalnu matricu sustava. Postupak eliminacije elemenata ispod glavne dijagonale provodimo krećući od prvog stupca pa u prvom koraku trebamo poništiti prvi element u 2. retku (R2). To možemo postići elementarnim transformacijama, primjerice

$$\begin{aligned} (\text{R2})' &= (\text{R2}) \cdot b_1 - (\text{R1}) \cdot a_2 \\ (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3)b_1 - (b_1x_1 + c_1x_2)a_2 &= d_2b_1 - d_1a_2 \\ \underbrace{(b_2b_1 - c_1a_2)}_{b_2'}x_2 + \underbrace{c_2b_1}_{c_2'}x_3 &= \underbrace{d_2b_1 - d_1a_2}_{d_2'} \end{aligned}$$

u kojem smo radi jednostavnosti uveli nove crtkane pokrate te zaključujemo $a_2' = 0$. Postupak nastavljamo dalje, u trećem retku (R3) trebamo eliminirati koeficijent ispod glavne dijagonale, npr.

$$\begin{aligned} (\text{R3})' &= (\text{R3}) \cdot b_2' - (\text{R2})' \cdot a_3 \\ (a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4)b_2' - (b_2'x_2 + c_2'x_3)a_3 &= d_3b_2' - d_2'a_3 \\ \underbrace{(b_3b_2' - c_2'a_3)}_{b_3'}x_3 + \underbrace{c_3b_2'}_{c_3'}x_4 &= \underbrace{d_3b_2' - d_2'a_3}_{d_3'} \end{aligned}$$

gdje smo podesili $a_3' = 0$. Možemo uočiti da da se u novouvedenim pokratama b_3', c_3' i d_3' do na pomak indeksa za $+1$ ponavlja isti uzorak kao što smo dobili za (R2)$'$. Stoga možemo zaključiti što se događa u nastavku eliminacije elemenata ispod glavne dijagonale, odnosno kakve su rekurzivne veze među koeficijentima. U konačnoj matrici sustava nestaju elementi ispod glavne dijagonale a', a na glavnoj dijagonali imamo b', iznad glavne dijagonale c' te u stupcu desno slobodne koeficijente d',

$$\begin{aligned} & & b_1' &= b_1, & c_1' &= c_1, & d_1' &= d_1, \\ a_i' &= 0, & b_i' &= b_ib_{i-1}' - c_{i-1}'a_i, & c_i' &= c_ib_{i-1}', & d_i' &= d_ib_{i-1}' - d_{i-1}'a_i, \end{aligned} \tag{4.21}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} b_1' & c_1' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2' & c_2' & & \\ 0 & 0 & b_3' & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1}' \\ 0 & & & 0 & b_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ \vdots \\ d_n' \end{bmatrix}.$$

Radi jednostavnosti podijelit ćemo i-ti redak (svaki element proširene matrice sustava u tom retku) s b'_i čime se na dijagonali pojavljuju samo jedinice. Primjerice

$$c''_3 = \frac{c'_3}{b'_3} = \frac{c_3 b'_2}{b_3 b'_2 - c'_2 a_3} = \frac{c_3}{b_3 - (c'_2/b'_2)a_3} = \frac{c_3}{b_3 - c''_2 a_3}$$

Dakle, imamo

$$a''_i = 0, \quad i = 2 \cdots n; \tag{4.22}$$
$$b''_i = 1, \quad i = 1 \cdots n; \tag{4.23}$$
$$c''_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad c''_i = \frac{c_i}{b_i - c''_{i-1} a_i}, \quad i = 1 \cdots n-1; \tag{4.24}$$
$$d''_1 = \frac{d_1}{b_1}, \quad d''_i = \frac{d_i - d''_{i-1} a_i}{b_i - c''_{i-1} a_i}, \quad i = 1 \cdots n. \tag{4.25}$$

Preostaje nam riješiti sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & c''_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c''_2 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c''_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d''_1 \\ d''_2 \\ d''_3 \\ \vdots \\ d''_n \end{bmatrix}$$

što je zbog rekurzivnih veza trivijalno izvedivo krenemo li rješavati unatrag od zadnje jednadžbe prema prvoj

$$x_n = d''_n, \tag{4.26}$$
$$x_i = d''_i - c''_i x_{i+1}, \quad i = n-1, \cdots, 1. \tag{4.27}$$

U numeričkoj linearnoj algebri takav je postupak poznat kao

Thomasov algoritam

definirati potrebne nizove a, b, c, d, c'', d'', x
inicijalizirati koeficijente a_i, b_i, c_i, d_i
$c''_1 = c_1/b_1$
$d''_1 = d_1/b_1$
$\forall i = 2, \cdots, n-1$

$$c''_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c''_{i-1}}$$

$$d''_i = \frac{d_i - a_i d''_{i-1}}{b_i - a_i c''_{i-1}}$$

$$d''_n = \frac{d_n - a_n d''_{n-1}}{b_n - a_n c''_{n-1}}$$

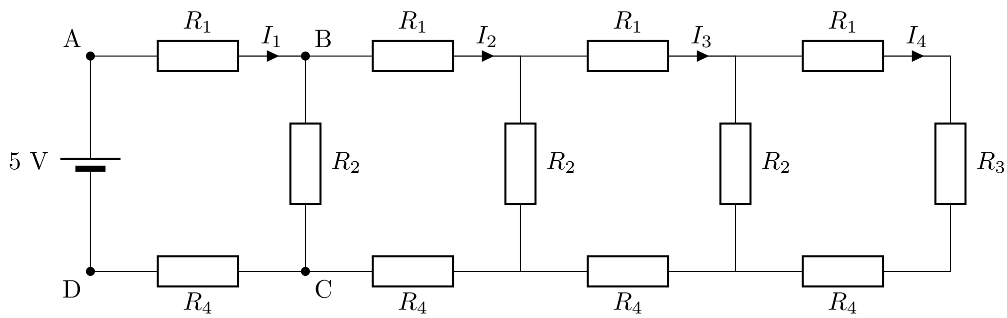
$x_n = d''_n$
$\forall i = n-1, \cdots, 1$
$x_i = d''_i - c''_i x_{i+1}$

Zadatak 4.2. Napišite kod prema Thomasovom algoritmu za proizvoljan sustav linearnih jednadžbi $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$, gdje je $a_1 = c_n = 0$ te $i = 1, \cdots, n$. Napišite kod tako da ulazne koeficijente a_i, b_i, c_i, d_i inicijalizirate direktno u kodu ili učitate iz datoteke, a rješenja ispišete na ekran i pohranite u datoteku. Kod može sadržavati jednu ili nijednu dodatnu funkciju. Testirajte kod za

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje: $X^\tau = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$. Radi jednostavnije provjere ispišite i $14 \cdot X$. ◀

Zadatak $\boxed{4.3.}$ Neka su otpornici $R_1 = R_4 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$ spojeni u strujni krug prikazan shemom



a) Problem određivanja nepoznatih struja $I_{1,2,3,4}$ opišite sustavom linearnih jednadžbi.

b) Riješite spomenuti sustav koristeći Thomasov algoritam, odnosno kod iz zadatka 4.2 te ispišite $94 \cdot I_{1,2,3,4}$.

Smjernice:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) + R_4 I_1 &= 5\text{ V} \\ R_1 I_2 + R_2[I_2 - I_3 - (I_1 - I_2)] + R_4 I_2 &= 0 \\ R_1 I_3 + R_2[I_3 - I_4 - (I_2 - I_3)] + R_4 I_3 &= 0 \\ R_1 I_4 + R_3 I_4 - R_2(I_3 - I_4) + R_4 I_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4) I_1 - R_2 I_2 &= 5\text{ V} \\ -R_2 I_1 + (R_1 + 2R_2 + R_4) I2 - R_2 I_3 &= 0 \\ -R_2 I_2 + (R_1 + 2R_2 + R_4) I3 - R_2 I_4 &= 0 \\ -R_2 I_3 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) I4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1\text{ A}}{94} \cdot \begin{bmatrix} 145 \\ 55 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.543 \\ 0.585 \\ 0.213 \\ 0.053 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Zadatak 4.4. Primijenite Thomasov algoritam za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$(i-1)^3 x_{i-1} + i^2 x_i + (i-n)((i-1)^3 - i^2)x_{i+1} = d_{i-1} + 2; \quad i = 1, \cdots, 20; \quad d_0 = -10.$$

Mogu li se izvući rekurzivne veze između nekih elemenata? ◀

Zadatak 4.5. Pronađite moment inercije homogene kocke mase M i stranice a pri rotaciji oko vrha u ishodištu duž proizvoljne osi. Svedite problem traženja glavne osi pridružene svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = Ma^2/6$ na sustav linearnih jednadžbi te ga riješite GJ metodom.
Rješenje: $\hat{e}_1 = 3^{-1/2}[1\ 1\ 1]^\tau$. ◀