Matematičke metode fizike III

Larisa Zoranić

2023/2024

Bilješke s predavanja

3 Rješavanje nelinearnih jednadžbi **3-1**

3.1 Metoda zatvorene domene 3-2

3.2 Metoda otvorene domene 3-3

Nastavni materijal nije za objavu, već samo služi za internu upotrebu kako bi se studentima olakšalo praćenje nastave.

Literatura

[1] Morten Hjorth-Jensen: *Computational Physics*, University of Oslo, 2007, 2010, 2015.

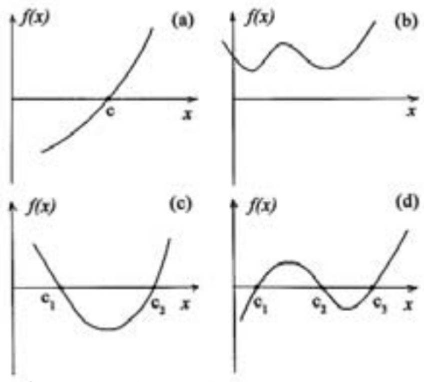
[2] V. Hari i dr: *Numerička analiza*, skripta, Sveučilište u Zagrebu PMF, 2004.

[3] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, SE, Cambridge University Press, USA, 2002.

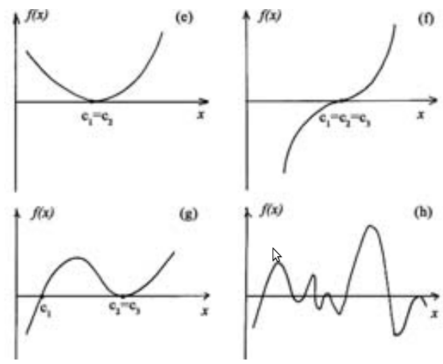
[4] Leandra Vranješ Markić: *Matematiče metode fizike 1*, skripta, Sveučilište u Splitu PMFST, 2009.

3 Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Riješiti jednadžbi znači za neku funkciju $f(x)$ izračunati vrijednost $x = s$ takvu da vrijedi $f(s) = 0$. Numeričke metode je uobičajeno primjeniti za npr. rješavanje složenih algebarskih i transcedentalnih jednadžbi, u postupku rješavanja diferencijalnih jednadžbi ili općenito, za probleme koji se mogu svesti na traženje nultočaka, odnosno oblik $f(x) = 0$.
Na slikama je prikazano nekoliko primjera te neki od njih ilustriraju moguće poteškoće u izračunu:



(a) Funkcije s a) jednim rješenjem; b) nema realnih rješenja (moguća komplesna rješenja); c) dva rješenja; d) tri rješenja.



(b) Funkcije s e) dva jednaka rješenja; f) tri jednaka rješenja, g) jedno različito i dva jednaka rješenja; h) više različitih rješenja.

Općenito, za zadanu nelineranu funkciju $f : I \to R$ pri čemu je I neki interval, sve točke $x \in I$ za koje vrijedi $f(x) = 0$ nazivamo nultočke funkcije f ili rješenja (korijeni) jednadžbe $f(x) = 0$. Izračun se radi uz pretpostavke da je funcija f neprekidna na intervalu I te da su nultočke izolirane.
Sam postupak uključuje analizu toka funkcije da osiguramo dobru primjenjivost numeričke metode, odnosno izolaciju jedne ili više točki, definiranjem intervala I za koji pretpostavljamo da sadrži barem jednu točku. Nakon što su osigurani uvjeti primjenjivosti, nultočke tražimo metodom iteracije.

Iterativnim metodama se koristimo za računanje približnih numeričkih rješenja za određene matematičke probleme, pri čemu ponavljamo neki postupak (blok naredbi) određeni broj puta dok ne zadovoljimo uvjet definiran za točnost rješenja. Da bi se izbjegla beskonačna petlja u iterativni blok se postavlja i uvjet maksimalnog broja iteracija.

Pretpostavimo da je točno rješenje veličina s. Metodom iteracije se približavamo točnom rješenju tako da vrijedi:

$$s(tocno\_rjesenje) = x(numericko\_rjesenje) + \varepsilon(numericka\_greska)$$

Uvjet koji definiramo jest da je odstupanje numeričkog rješenja od točnog rješenja u granici zadanoj veličinom ε koja definira preciznost numeričkog rješenja. Ispitivanje ovog uvjeta se može definirati na različite načine, a najčešći su:
a) da apsolutna razlika između dva rješenja iteracije jest manja od ε ili,
b) da relativna greška jest manja od ε.

Postoji više različitih metoda traženja nultočaka, te je jedna od podjela na:

- metode zatvorene domene - definira se interval na kojem tražimo rješenje;

- metode otvorene domene - definira se početno rješenje.

3.1 Metoda zatvorene domene

Metode zatvorene domene zahtjevaju definiciju zatvorenog intervala $[a, b]$ za koji pretpostavljavamo da sadrži nultočku (ili više njih). Primjetimo da ako su vrijednosti funkcije $f(a)$ i $f(b)$ suprotnog predznaka, sigurno je da postoji bar jedna nultočka funkcije na tom intervalu. Najpoznatije metode ovog tipa su:

- metoda bisekcije - raspolavljanje intervala;
- metoda netočnih položaja - regula falsi.

Ove metode su robusne, ako postoji rješenje na zadanom intervalu, gotovo je sigurno, da će se naći. Mana ovih metoda jest što mogu biti vrlo spore.

Metoda raspoljavanja intervala je najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka funkcije, ali ima i najlošiju procjenu greške. Uvjeti primjenjivosti ove metodu su da za funkciju $f(x)$ za koju tražimo nultočku vrijedi:

- funkcija $f(x)$ je neprekidna na zadanom intervalu $[a, b]$;
- za zadani interval vrijedi $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Metoda bisekcije

podijelimo interaval $[a, b]$ na dva jednaka dijela $c = \dfrac{a+b}{2}$
uspoređujemo vrijednosti $f(a) \cdot f(c)$
ako je $f(a) \cdot f(c) < 0$ odabremo interval $[a, c]$ znači $a = a$ i $b = c$
ako je $f(a) \cdot f(c) > 0$ odaberemo interval $[c, b]$ znači $a = c$ i $b = b$
ponavljamo postupak dok se ne ispuni uvjet $f(c) \approx 0$
rješenje je vrijednost c

Rješenje je prihvatljivo kada je ispunjen uvjet zadan s preciznosti ε:

- $f(c_i) \approx 0 \Longrightarrow f(c_i) \leq \varepsilon$
- $\mid a_i - b_i \mid \leq \varepsilon$

gdje indeks i označava broj iteracije.

U svakom koraku u ovoj metodi se zadani interval djeli na pola. Nakon n iteracija na intervalu $[a, b]$ dobijemo interval duljine $\frac{(b-a)}{2^n}$. Metoda će se ponavljati dok $\frac{(b-a)}{2^n} \leq \varepsilon$, te za zadanu preciznost može se procjeniti broj koraka iteracije n. Na primjer za vrijednosti $b = 10$ i $a = 5$ te preciznost $\varepsilon = 10^{-6}$ vrijedi:

$$2^n \geq \frac{(b-a)}{\varepsilon} = 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n \geq log_2(5 \cdot 10^6)$$

Primjer 3.1.
Nađite nultočku funkcije $f(x) = 7x^2 + 15x - 32$.
Rješenje:

a) Interval $a = -2.0$ i $b = 2.0$

b) Preciznost $\varepsilon = 10^{-6}$ i maksimalni broj iteracija $Nmax = 200$

Nultočke: $x_1 = \frac{1}{14}(-15 - \sqrt{1121}) \approx 3.46295272$ i $x_2 = \frac{1}{14}(-15 + \sqrt{1121}) \approx 1.320095578$.

3.2 Metoda otvorene domene

Metode otvorne domene nemaju unaprijed definirani interval na kojem tražimo nultočku. Iz tog razloga je moguće da ne nađemo rješenje, odnosno da metoda divergira.
Ove metode se najčešće koriste, jer uz dovoljno dobar odabir početnog rješenja, su puno brže u odnosu na metode zatvorene domene.
Najpoznatije metode ovog tipa su:

- Newton-Raphsonova metoda;
- metoda sekante.

Newton-Raphsonova metoda definirana je Taylorovim razvojem. Neka je funkcija $f(x)$ kontinuirana funkcija u okolini x, i vrijedi Taylorov razvoj:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + ...$$

Neka je $x = s$ rješenje $f(x = s) = 0$. Uz aproksimaciju do drugog člana u Taylorovom redu vrijedi:

$$f(x = s) = 0 = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + O((x - x_0)^2) \tag{3.1}$$

Iz gornje relacije dobije se izraz:

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3.2}$$

Newton-Raphsonova metoda

ulazne funkcije su $f(x)$ i $f'(x)$.
definiramo početno rješenje x_0
tražimo rješenje: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
postupak se ponavlja $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
do ispunjenja uvjeta zadane preciznosti $|x_{i+1} - x_i| = |\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}| \le \varepsilon$
rješenje je vrijednost x_i

Primjetimo da primjena ove metode zahtjeva nekoliko uvjeta:

- potrebno je znati analitički oblik prve derivacije funkcije.
- prva derivacija funkcije mora biti različita od nule i ne smije biti puno mala vrijednost na intervalu za koji tražimo rješenje.
- druga derivacija mora biti konačna.
- početna vrijednost mora biti blizu rješenja.

Metoda sekante je vrlo slična Newton-Rapshonovoj metodi. Metoda se primjenjuje kada nemamo analitički oblik prve derivacije funkcije, te se koristi numerički izraz za prvu derivaciju.
Za početno rješenje x_0, vrijedi:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\dfrac{f(x_0) - f(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}}}$$

i ponavlja se iteracija:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

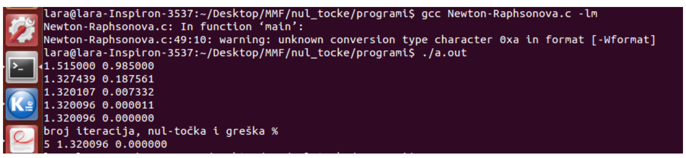
do konvergencije rezultata definirane preciznosti ε.

Primjer 3.2.
Nađite nultočku funkcije $f(x) = 7x^2 + 15x - 32$
Rješenje:

a) Derivacija funkcije $f'(x) = 14x + 15$

b) Početna vrijednost $x_0 = 2.5$

c) Preciznost $\varepsilon = 10^{-6}$ i maksimalni broj iteracija $Nmax = 200$



Nultočke: $x_1 = \frac{1}{14}(-15 - \sqrt{1}121) \approx 3.46295272$ i $x_2 = \frac{1}{14}(-15 + \sqrt{1}121) \approx 1.320095578$.

Zadatak $\boxed{3.1.}$ Neka je putanja jednog tijela dana jednadžbom $y_1(t) = yo_1 + Acos(Bt)$, a putanja drugog tijela jednadžbom $y_2(t) = y0_2 + Ce^{Dt}$. Oba tijela kreću u isom trenutku $t = 0$ s, te neka su početni položaji jednaki $yo_1 = 5$ m $yo_2 = 0,325$ m, a konstante $A = 1.0$ m, $B = 3.0\ s^{-1}$, $C = 2.0$ m i $D = 0.5\ s^{-1}$. Numeričkim metodama bisekcije i Newton-Raphson odredite vrijednost $y(t)$ za koju će se ova dva tijela sudariti.

a) Prilagodite problem za numerički izračun.

b) Napišite program za zadane metode i numerički pronađite rješenje. Sami odaberite parametre programa (početni interval, početno rješenje i preciznost).

c) Napišite rješenja te raspravite odabir početnog intervala (metoda bisekcije), odnosno početnog rješenja (NR metoda), te odabir preciznosti rješenja.