

Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna

Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna

HENRY RICARDO



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

A Modern Introduction to Differential Equation

Edición original en lengua inglesa:

Houghton Mifflin, Boston, Massachusetts, United States of America.

Modern Introduction to Differential Equations, 1st edition, Copyright © 2003 by Houghton Mifflin Company.

All rights reserved.

Versión española traducida por:

M^a Aránzazu Pargada Getino

Licenciada en Filología Inglesa

Revisada por:

Manuel Pargada Gil

Dr. Ingeniero Industrial

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Profesor Agregado de la Universidad de Navarra

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

Fax: (34) 93 419 51 89

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A., 2008

ISBN: 978-84-291-5162-6

Impreso en España - *Printed in Spain*

Depósito Legal: B-857-2008

Impreso por Alvagraf, S. L.

La Llagosta (Barcelona)

RICARDO, Henry.

[A Modern Introduction to Differential Equation. Español]

Ecuaciones diferenciales : una introducción moderna / Henry Ricardo ; [versión española traducida por M^a Aránzazu Pargada Getino ; revisada por Dr. Manuel Pargada Gil]. – Barcelona : Reverté, 2008

XVII, 445 p. : gráf. ; 24 cm.

Traducción de: A Modern Introduction to Differential Equation. – Índice

DL-B 857-2008. - ISBN 978-84-291-5162-6

1. Ecuaciones diferenciales. I. Pargada Getino, M^a Aránzazu, trad. II. Pargada Gil, Manuel, rev. III. Título.

517.9

Para Catherine, mi *sine qua non*,
y para Cathy, Christine, Henry y Marta,
y Tomás Agustín.

PREFACIO

Filosofía

Durante más de una década ha habido un movimiento tangible para reformar el modo en que se enseñan ciertos temas de matemáticas. Éste tuvo su inicio con el cálculo y se ha ampliado con el objeto de incluir cursos antes y después, en la típica secuencia matemática. La enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha experimentado una gran evolución, tanto en términos pedagógicos como de contenido. Lo que una vez se pudo considerar como una “colección de ‘métodos’ especiales”¹ ha sufrido un desarrollo gradual con la finalidad de proporcionar al alumno experiencias más valiosas: experiencias que un autor y matemático prominente ha denominado *conceptualización, exploración y resolución de problemas de dificultad superior*.² Éste es el espíritu que ha marcado la elaboración de este libro.

El manual presenta una introducción sólida y, no obstante, muy accesible a las ecuaciones diferenciales, ya que los conceptos se desarrollan desde una perspectiva de los sistemas dinámicos y se recurre a las herramientas tecnológicas para abordar los temas desde un punto de vista gráfico, numérico y analítico. Está ideado con la intención de resultar adecuado para una amplia variedad de estudiantes y de servir como sucesor natural de cualquier secuencia moderna de cálculo.

En particular, en el libro se admite que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver en forma cerrada, y se realiza un amplio uso de los métodos cualitativos y numéricos para analizar las soluciones. A fin de adecuar este cambio de enfoque, se ha omitido o se le ha restado importancia a una parte del material tradicional. El manual incluye discusiones acerca de diversos modelos matemáticos significativos, aunque no se ha pretendido enseñar el arte del modelado.³ De igual modo, el texto sólo introduce la mínima cantidad de álgebra lineal necesaria para un análisis de sistemas.

Este libro pretende ser el manual de estudio para un curso semestral de ecuaciones diferenciales ordinarias, típicamente ofertado para estudiantes de segundo y penúltimo año, pero con algunas diferencias. El estudio del cálculo durante dos semestres es un requisito previo para el curso. No es necesario poseer ningún conocimiento previo de cálculo multivariable ni de álgebra lineal, ya que en el mismo libro se abordan conceptos esenciales de estos temas. Este manual está principalmente dirigido a estudiantes especializados en matemáticas, en ciencias de la naturaleza y en ingeniería. No obstante, con la preparación necesaria, también resultará muy útil para estudiantes de Económicas, Empresariales y Ciencias Sociales.

1. S. L. ROSS. *Ordinary Differential Equations*, 3ª ed., 25. Wiley, Nueva York, 1984.

2. W. E. BOYCE, “New Directions in Elementary Differential Equations”, en *College Mathematics Journal*, 364 (noviembre 1994).

3. Véase D. A. Sánchez, “Review of Ordinary Differential Equations Texts”, en *American Mathematical Monthly* 105, segundo párrafo de la pág. 382 (1998).

Uso de herramientas tecnológicas

Este libro da por supuesto que el lector tiene acceso a un sistema de álgebra computacional (SAC), o quizá a algún tipo de software especializado que le permitirá construir las gráficas requeridas –curvas solución, diagramas de fases, etc.– y las aproximaciones numéricas. Por ejemplo, para implementar el método de Euler de la aproximación de soluciones, se puede utilizar de un modo efectivo un programa de hojas de cálculo. Aunque yo utilizo *Maple*® en mi propio curso, no se adopta ninguna plataforma de software o hardware para este manual. En gran medida, incluso una calculadora gráfica será suficiente.

Características pedagógicas y estilo de escritura

Este libro está ciertamente ideado para ser *leído* por los estudiantes. El estilo es accesible, sin un excesivo formalismo matemático o material extraño, aunque proporciona una sólida base en la que los profesores –con la ayuda de la *Guía del profesor* adjunta– se pueden preparar a su gusto a nivel individual y conforme a las necesidades de los alumnos. Todos los capítulos disponen de una *Introducción* informal que establece el tono y que presenta el material que se va a tratar en cada capítulo. He intentado de varias maneras motivar la introducción de nuevos conceptos, incluyendo referencias a cursos de matemáticas anteriores y más elementales, en los que el alumno haya tomado parte. Cada capítulo concluye con un *Resumen* narrativo que recuerda al lector los conceptos importantes de tal capítulo. Dentro de las secciones hay figuras y tablas que facilitarán a los alumnos la visualización o el resumen de los conceptos. Se dan muchos ejemplos y ejercicios resueltos tomados de la biología, la química y la economía, así como de las matemáticas puras tradicionales, de la física y la ingeniería. En el mismo manual van guiando al alumno a través de análisis cualitativos y numéricos de problemas, que habrían resultado difíciles de abordar antes de la omnipresencia de las calculadoras graficadoras y de los ordenadores. Los ejercicios que aparecen al final de cada sección de contenidos abarcan desde lo rutinario hasta lo desafiante, y los últimos problemas requieren, a menudo, algún tipo de exploración o justificación teórica (“prueba”). Algunos ejercicios presentan a los alumnos conceptos suplementarios –frecuentemente tradicionales–. He facilitado las respuestas a los problemas de numeración impar al final del libro, con soluciones más detalladas a estos problemas en el adicional *Manual de soluciones del alumno*. Todos los capítulos tienen por lo menos un proyecto después del *Resumen*.

He redactado el libro en el modo en el que imparto el curso, empleando un estilo coloquial e interactivo. Al alumno se le insta con frecuencia a realizar determinadas acciones con frases del tipo “reflexione acerca de esto”, “compruebe aquello” o “cerciórese de que lo ha entendido”. En general, no hay demostraciones de teoremas, salvo para aquellas formulaciones matemáticas que se puedan justificar mediante una secuencia bastante obvia de manipulaciones algebraicas o cálculos. De hecho, no hay una designación formal de los resultados como teoremas, aunque los resultados clave se escriben en cursiva o son compartimentados en el libro. Además, a lo largo del manual se han ido insertando breves aclaraciones históricas relacionadas con un concepto concreto, sin dificultar el flujo informativo. Éste no es un tratado matemático, sino una moderna, informativa y amistosa introducción a las herramientas requeridas por los alumnos en muchas disciplinas. He disfrutado impartiendo el curso, y

creo que mis alumnos han sacado provecho de la experiencia. Sinceramente, espero que el usuario de este libro también se pueda hacer una idea de la teoría y las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales modernas.

Principales características del contenido

Los **capítulos 1-3** introducen *conceptos básicos* y se centran en los aspectos analíticos, numéricos y gráficos de las ecuaciones de primer orden. En capítulos posteriores, estos aspectos –el *principio de superposición* inclusive– se generalizan de manera natural a las ecuaciones de orden superior y a los sistemas de ecuaciones. El capítulo 1 contiene una sección informal acerca del papel de las *herramientas tecnológicas* en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

El **capítulo 4** comienza con métodos para la resolución de las importantes *ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes*. Así mismo analiza las aplicaciones a los circuitos eléctricos y a los problemas de masa-resorte. El punto principal del capítulo es la demostración de que cualquier ecuación diferencial de orden superior es equivalente a un *sistema* de ecuaciones de primer orden. Se introduce al alumno en el análisis *cualitativo* de los sistemas (*diagramas de fases*), la *existencia y unicidad* de las soluciones de los sistemas y la extensión de los *métodos numéricos* para ecuaciones de primer orden a los sistemas de ecuaciones de primer orden. Entre los ejemplos abordados en este capítulo, hay dos formas para un sistema *depredador-presa* –uno lineal, otro no lineal–, una ilustración de una *carrera armamentística* y varios sistemas de *masa-resorte* –incluido uno que muestra el fenómeno de la *resonancia*–.

El **capítulo 5** comienza con una breve introducción a los conceptos del *álgebra matricial* necesarios para la presentación sistemática de los *sistemas bidimensionales de ecuaciones lineales autónomas* que se estudian a continuación. (Este tratamiento se suplementa mediante el Apéndice B). Se enfatiza la importancia de la linealidad y se vuelve a comentar el *principio de superposición*. La *estabilidad* de tales sistemas está completamente caracterizada por medio de los *valores propios* de la matriz de coeficientes. Los sistemas de *masa-resorte* se analizan en términos de sus valores propios. Asimismo, hay una breve introducción a las complejidades de los sistemas *no homogéneos*. Finalmente, mediante ejemplos de 3×3 y 4×4 , se le muestra al alumno cómo las ideas previamente desarrolladas se pueden extender a las *ecuaciones de enésimo orden* y a sus sistemas equivalentes.

El **capítulo 6** aborda la *transformada de Laplace* y sus aplicaciones a la solución de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Éste es probablemente el tema más tradicional del libro, que se incluye debido a su utilidad en muchas áreas aplicadas. En particular, permite a los alumnos tratar más fácilmente las ecuaciones lineales *no homogéneas* y los *sistemas*, así como manejar las *fuerzas impulsoras discontinuas*. La transformada de Laplace se aplica a los problemas de circuitos eléctricos, a la deflexión de las vigas –un problema de valores en la frontera– y a los sistemas de masa-resorte. Sin embargo, siguiendo el estilo del resto del libro, la sección 6.6 muestra la aplicabilidad de la transformada de Laplace a un análisis *cualitativo* de las ecuaciones diferenciales lineales.

El **capítulo 7** trata con los sistemas de ecuaciones *no lineales* de un modo sistemático. Se analiza la *estabilidad* de los sistemas no lineales. Se desarrolla la importante noción de *aproxi-*

mación lineal a una ecuación o sistema no lineal, incluyendo el uso de un resultado cualitativo que debemos a Poincaré y Liapunov. Se abordan detalladamente algunos ejemplos importantes de sistemas no lineales, incluyendo las *ecuaciones de Lotka-Volterra*, el *péndulo no amortiguado* y el *oscilador de Van der Pol*. Asimismo, se discuten acerca de los *ciclos límite*.

Los **Apéndices A–C** presentan un importante material que es prerrequisito, o correquisito, del *cálculo –de una variable y multivariable–*, *el álgebra vectorial o matricial* y los *números complejos*, respectivamente. El **Apéndice D** es un suplemento del manual que introduce las *soluciones en serie de las ecuaciones diferenciales ordinarias*.

Suplementos

- **Guía del profesor con soluciones.** Incluye soluciones a todos los ejercicios del manual, comentarios capítulo por capítulo, sugerencias de *Maple* –y también referencias a otro software–, ejemplos y problemas adicionales y una extensa bibliografía. Esta guía está disponible de modo gratuito para los profesores que adquieran el libro.
- **Manual de soluciones del alumno.** Facilita las soluciones completas a todos los ejercicios del libro con numeración impar.
- **SMARTHINKING® Live On-Line Tutoring** (*Tutoría online en directo*) Houghton Mifflin se ha asociado con SMARTHINKING para proporcionar un servicio de tutoría online eficaz y de fácil manejo. Una **función de calculadora gráfica** y **whiteboard** (pizarra electrónica compartida) permite a los alumnos y tutores online colaborar fácilmente. SMARTHINKING ofrece tres niveles de servicios:
 - **Text-specific Tutoring (Tutoría basada en texto):** proporciona una enseñanza individual en tiempo real, con un tutor online especialmente cualificado.
 - **Questions Any Time (Preguntas en cualquier momento):** permite a los alumnos realizar preguntas al profesor fuera de horario y recibir una respuesta en 24 horas.
 - **Independent Study Resources (Recursos para el estudio independiente)** conecta a los alumnos, con acceso de 24 horas, a servicios educativos adicionales; entre otros, los sitios web interactivos, los test de diagnóstico y “Preguntas realizadas frecuentemente (FAQ)” planteadas a los tutores online de SMARTHINKING.
- **Un sitio web basado en texto** Contiene enlaces a sitios web de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como algunos laboratorios Maple y otros materiales útiles. Visite <http://math.college.hmco.com> y siga los vínculos a este libro de texto.

Agradecimientos

El enfoque y contenido de este libro ha recibido principalmente la influencia de tres fuentes: (1) el proyecto sobre ecuaciones diferenciales de la Universidad de Boston; (2) el Consorcio para experimentos con ecuaciones diferenciales ordinarias (**C·ODE·E**), y (3) el **número especial sobre ecuaciones diferenciales** *College Mathematics Journal*, vol. 25, n.º. 5, (noviembre de 1994). También me ha animado la valiosa crítica de textos recientes sobre ecuaciones diferenciales ordinarias⁴ llevada a cabo por David Sánchez, y me ha inspirado el reciente volumen de

4. Sánchez, loc. cit.

MAA Notes, *Revolutions in Differential Equations: Exploring ODEs with Modern Technology*, que tuve el honor de revisar antes de su publicación.

Me he dado cuenta de que, verdaderamente, cuesta lo suyo escribir un manual de matemáticas. He disfrutado de la cooperación y la franqueza de los asistentes a varias clases del Medgar Evers College, que aprendieron de este libro mientras aún se estaba escribiendo. Destaco a Tamara Battle, Hibourahima Camara, Lenston Elliott y Ayanna Moses como representantes de estos pacientes estudiantes. Agradezco sinceramente los útiles comentarios de mi colega Tatyana Flesher sobre una versión anterior de este libro. Agradezco a mi coordinador, Darius Movasseghi, sus ánimos y su ayuda en áreas tan esenciales como la programación del curso y la garantía de la disponibilidad de herramientas tecnológicas. Expreso asimismo mi agradecimiento a mi colega Mahendra Kawatra por sus continuas muestras de aliento y constante apoyo.

En lo que respecta a Houghton Mifflin, quisiera mostrar mi agradecimiento a Jack Shira, que fue el primero en manifestar la confianza depositada en la filosofía y el estilo de este libro, y que ha continuado respaldando el proyecto de muchas maneras. Aprecio las aportaciones de Paul Murphy mientras fue mi redactor jefe. Transmito mi gratitud a Marika Hoe y Cecilia Molinari, por su profesionalidad, paciencia y sentido del humor mostrados al orientarme en las etapas de redacción, edición y producción del libro. Agradezco también los exitosos esfuerzos de Beverly Fusfield de Techsetters, Inc. y del director artístico George McLean por transformar mis muchas –y a menudo complicadas– figuras en profesionales obras artísticas. William Hoston realizó un excelente trabajo como corrector de estilo. Saqué un gran provecho de los comentarios y sugerencias de mis correctores: Bill Goldbloom Bloch (Wheaton College), Beth Bradley (University of Louisville), Robert Bradshaw (Ohlone College), Martin Brown (Jefferson Community College), Dean Burbank (Gulf Coast Community College), Thomas W. Cairns (University of Tulsa), Benito Chen-Charpentier (University of Wyoming), Mark Farris (Midwestern State University), John H. Jaroma (Gettysburg College), Matthias Kowski (Arizona State University), Kevin Kreider (University of Akron), P. Gavin LaRose (Nebraska Wesleyan University), Michael A. McDonald (Occidental College), Douglas B. Meade (University of South Carolina), Roger Pinkham (Stevens Institute), Lila F. Roberts (Georgia Southern University), Bhagat Singh (University of Wisconsin-Manitowoc), Ann Sitomer (Portland Community College), Allan Struthers (Michigan Technological University), Ted J. Suffridge (University of Kentucky), Hossein T. Tehrani (University of Nevada), Luis Valdez-Sanchez (University of Texas en El Paso) y David Voss (Western Illinois University). Doy la bienvenida a cualquier pregunta, comentario adicional y sugerencia para una mejora. Se puede contactar conmigo por e-mail en **henry@mec.cuny.edu**.

Sobre todo, agradezco a mi esposa Catherine el amor, constante estímulo, apoyo y paciencia que ha desplegado durante la redacción de este libro, y en todos los demás momentos. Le expreso asimismo mi gratitud por su activa ayuda en la corrección y la crítica del manuscrito a lo largo de todas sus etapas.

Henry Ricardo

ÍNDICE

Prefacio vii

1 Introducción a las ecuaciones diferenciales 1

1.0 Introducción 1

1.1 Terminología básica 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias 2

El orden de una ecuación diferencial ordinaria 3

Forma general de una ecuación diferencial ordinaria 3

Ecuaciones en derivadas parciales 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias 5

1.2 Soluciones de ecuaciones diferenciales 7

Nociones básicas 7

Soluciones implícitas 8

Familias de soluciones I 9

Problemas de valor inicial (PVI) 10

Una forma integral de una solución de un PVI 11

Familias de Soluciones II 12

Problemas de contorno o de valores en la frontera 13

Soluciones generales 16

Soluciones de sistemas de EDO 16

1.3 La tecnología y las ecuaciones diferenciales 24

1.4 Resumen 26

PROYECTO 1-1 27

2 Ecuaciones diferenciales de primer orden 29

2.0 Introducción 29

2.1 Ecuaciones separables 30

2.2 Ecuaciones lineales 41

El principio de superposición 42

El factor integrante 43

Análisis razonado 44

Problemas de compartimento 47

	2.3 Campos de direcciones	56
	Ecuaciones autónomas y no autónomas	60
	2.4 Líneas de fases y diagramas de fases	67
	La ecuación logística	67
	2.5 Puntos de equilibrio: sumideros, fuentes y nodos	72
	Un test para puntos de equilibrio	73
	Test de la derivada	73
	2.6 Bifurcaciones	78
	Conceptos básicos	78
	Aplicación a las ecuaciones diferenciales	79
	2.7 Existencia y unicidad de las soluciones	85
	Un teorema de existencia y unicidad	87
	2.8 Resumen	92
	PROYECTO 2-1	94
	PROYECTO 2-2	94
3	La aproximación numérica de las soluciones	97
	3.0 Introducción	97
	3.1 El método de Euler	98
	Ecuaciones diferenciales rígidas	107
	3.2 Algunas cosas más sobre los errores	112
	3.3 El método de Euler mejorado	115
	3.4 Métodos numéricos más sofisticados:	
	Runge-Kutta y otros	119
	3.5 Resumen	123
	PROYECTO 3-1	124
4	Ecuaciones de segundo orden y de orden superior	126
	4.0 Introducción	126
	4.1 Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes	126
	La ecuación característica y los valores propios	127
	Valores propios reales y distintos	128
	Valores propios reales e iguales	129
	Valores propios complejos conjugados	130
	Resumen	131
	4.2 Ecuaciones lineales no homogéneas, de segundo orden, con coeficientes constantes	134
	La estructura de las soluciones	134
	La variación de parámetros	137

4.3 Ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes	142
4.4 Ecuaciones de orden superior y sus sistemas equivalentes	146
Técnica de conversión I: conversión de una ecuación de orden superior en un sistema	147
Técnica de conversión II: conversión de un sistema en una ecuación de orden superior	151
Una mirada hacia delante	152
4.5 Análisis cualitativo de los sistemas autónomos	154
Los diagramas de fases para los sistemas de ecuaciones	154
Otras representaciones gráficas	158
Un modelo depredador-presa: las ecuaciones de Lotka-Volterra	162
Otras representaciones gráficas	164
Problemas de masa-resorte	166
Movimiento armónico simple	166
Movimiento libre amortiguado	170
Diferentes tipos de amortiguación	173
Movimiento forzado	173
Resonancia	177
Sistemas tridimensionales	179
4.6 Existencia y unicidad	182
Un teorema de existencia y unicidad	183
Muchas soluciones	184
Ninguna solución	184
Exactamente una solución	184
4.7 Soluciones numéricas	186
El método de Euler aplicado a sistemas	186
El método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas	188
4.8 Resumen	194
PROYECTO 4-1	197

5 **Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales** 199

5.0 Introducción	199
5.1 Sistemas y matrices	200
Matrices y vectores	200
La representación matricial de un sistema lineal	201
Algo de álgebra matricial	202
5.2 Sistemas bidimensionales de ecuaciones lineales de primer orden	205
Valores propios y vectores propios	205
Interpretación geométrica de los vectores propios	207
El problema general	208
El comportamiento geométrico de las soluciones	211

5.3 Estabilidad de los sistemas lineales:	
valores propios reales distintos	217
Valores propios reales distintos	218
<i>La imposibilidad de vectores propios dependientes</i>	219
<i>Valores propios positivos distintos</i>	219
<i>Valores propios negativos distintos</i>	222
<i>Valores propios distintos con signos opuestos</i>	223
<i>Valores propios distintos, un valor propio igual a cero</i>	225
5.4 Estabilidad de los sistemas lineales:	
valores propios reales iguales	229
Valores propios iguales y no nulos, dos vectores propios independientes	229
<i>Valores propios iguales y no nulos, un único vector propio independiente</i>	231
<i>Ambos valores propios nulos</i>	234
5.5 Estabilidad de los sistemas lineales:	
valores propios complejos	235
Valores propios complejos y vectores propios complejos	235
5.6 Sistemas no homogéneos	243
La solución general	243
El método de los coeficientes indeterminados	244
5.7 Generalizaciones: el caso $n \times n$ ($n \geq 3$)	252
La representación matricial	252
<i>Valores propios y vectores propios</i>	252
<i>Independencia lineal y dependencia lineal</i>	254
<i>Sistemas no homogéneos</i>	259
<i>Generalización a los sistemas de $n \times n$</i>	259
5.8 Resumen	267
PROYECTO 5-1	269
PROYECTO 5-2	270

6 La transformada de Laplace 271

6.0 Introducción	271
6.1 La transformada de Laplace	
de algunas funciones importantes	272
6.2 La transformada inversa y la convolución	277
La transformada inversa de Laplace	277
La convolución	281
<i>Ecuaciones integrales y ecuaciones integro-diferenciales</i>	283
La transformada de Laplace y las herramientas tecnológicas	285

6.3 Transformadas de funciones discontinuas	287
La función (escalón unidad) de Heaviside	287
6.4 Transformadas de funciones impulso: la función Delta de Dirac	294
6.5 Transformadas y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	298
6.6 Análisis cualitativo mediante la transformada de Laplace	303
Ecuaciones homogéneas	303
Estabilidad	304
Ecuaciones no homogéneas	306
Funciones de transferencia y funciones de respuesta al impulso	307
6.7 Resumen	309
PROYECTO 6-1	311

7 **Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales** 313

7.0 Introducción	313
7.1 Equilibrios de los sistemas no lineales	313
7.2 Aproximación lineal en los puntos de equilibrio	318
Sistemas cuasilineales	320
El teorema de Poincaré-Liapunov	324
7.3 Dos importantes ejemplos de ecuaciones y sistemas no lineales	332
Ecuaciones de Lotka-Volterra	332
El péndulo no amortiguado	334
7.4 La ecuación de Van der Pol y los ciclos límite	342
La ecuación de Van der Pol	342
Ciclos límite	344
7.5 Resumen	351
PROYECTO 7-1	353
Apéndice A Algunos conceptos y resultados de cálculo	354
Apéndice B Vectores y matrices	364
Apéndice C Números complejos	376
Apéndice D Soluciones en serie de ecuaciones diferenciales	380
Respuestas y sugerencias para ejercicios con numeración impar	393
Índice alfabético	437

1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

1.0 INTRODUCCIÓN

¿Qué tienen en común las siguientes situaciones?

- Una carrera armamentista entre naciones.
- El seguimiento de la rapidez con la que llegan a manifestar el sida los pacientes con VIH positivo.
- La dinámica de la oferta y la demanda en un sistema económico.
- La interacción entre dos o más especies de animales en una isla.

La respuesta es que cada una de estas áreas de investigación se puede modelar con ecuaciones diferenciales. Esto significa que las características esenciales de esos problemas se pueden representar mediante el uso de una o varias ecuaciones diferenciales, y las soluciones de los problemas matemáticos permiten intuir el futuro comportamiento de los sistemas estudiados.

Este libro trata del *cambio*, el *flujo*, el *movimiento* y, en particular, de la rapidez a la que las variaciones tienen lugar. Cada ser viviente experimenta cambios. Las mareas fluctúan a lo largo del día. Los países aumentan y disminuyen sus reservas de armas. El precio del aceite sube y baja. El marco de trabajo de este curso en particular es la **dinámica**, el estudio de los sistemas que evolucionan con el paso del tiempo.

El origen de la dinámica (inicialmente un área de la física) y de las ecuaciones diferenciales se remonta a los primeros trabajos del científico y matemático inglés Isaac Newton (1642-1727) y del filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), basados en el desarrollo de la nueva ciencia del cálculo en el siglo XVII. A Newton en concreto le preocupaba la determinación de las leyes que gobiernan el movimiento, ya sea el de una manzana cayéndose de un árbol, o el de los planetas moviéndose dentro de sus órbitas. Le interesaba la *rapidez de cambio*. Sin embargo, no se debe pensar que las ecuaciones diferenciales sólo abordan temas relacionados con la física. El mismo tipo de ecuaciones y de análisis de los sistemas dinámicos se puede utilizar para ilustrar y comprender situaciones en biología, economía, química o estrategias militares, por ejemplo. A lo largo de este libro se encontrarán aplicaciones de este tipo.

En la siguiente sección haremos una introducción al lenguaje de las ecuaciones diferenciales y hablaremos de algunas de sus aplicaciones.

1.1 TERMINOLOGÍA BÁSICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Ecuaciones diferenciales ordinarias

En general, una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** es una ecuación que implica la existencia de una función desconocida o incógnita de una única variable (la variable independiente) y una o más de sus derivadas.

EJEMPLO 1.1.1 Una ecuación diferencial ordinaria

He aquí una típica EDO elemental en la que se indican algunos de sus componentes:

$$\begin{array}{c} \text{función desconocida, } y \downarrow \\ 3 \frac{dy}{dt} = y \\ \text{variable independiente, } t \uparrow \end{array}$$

Esta ecuación describe una función desconocida de t que es igual a tres veces su propia derivada. Dicho de otro modo: esta ecuación diferencial describe una función cuya razón de cambio es proporcional a su propio tamaño (valor) en cualquier tiempo dado, siendo $1/3$ la constante de proporcionalidad. ♦

En muchas aplicaciones dinámicas, la variable independiente es el tiempo, designado por t , y se pueden representar las funciones derivadas mediante la notación de puntos¹ de Newton, como en la ecuación $\ddot{x} + 3t\dot{x} + 2x = \sin(\omega t)$. Tendría que resultar fácil el reconocer una ecuación diferencial sin que importen las letras usadas para las variables dependiente e independiente, ni la notación empleada para las derivadas. El contexto determinará el significado de las diversas letras. Es la *forma* de la ecuación la que se debería reconocer. Por ejemplo, debería hacérsenos fácil poder ver que las dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(A) \frac{d^2u}{dt^2} - 3 \frac{du}{dt} + 7u = 0 \quad \text{y} \quad (B) \frac{d^2y}{dx^2} = 3 \frac{dy}{dx} - 7y$$

son la misma; es decir, que ambas describen un mismo comportamiento matemático o físico. En la ecuación (A), la función desconocida u depende de t , mientras que, en la ecuación (B), la función y es una función de la variable independiente x . Sin embargo, ambas ecuaciones describen la misma relación e implican la función desconocida, sus derivadas y la variable independiente. Cada una de estas dos ecuaciones describe una función cuya segunda derivada es igual a tres veces su primera derivada, menos siete veces ella misma.

1. En esta notación, $\dot{x} = dx/dt$ y $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

Es útil la notación de Leibniz para una derivada, $\frac{d()}{d()}$, porque la variable independiente (la cantidad fundamental, cuyo cambio es causante de otros cambios) aparece en el denominador, y la variable dependiente está en el numerador. Las tres ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 2xy &= e^{-x^2} \\ x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x-1)}\end{aligned}$$

no dejan duda acerca de la relación entre las variables independiente y dependiente. Sin embargo, en una ecuación como $(w')^2 + 2t^3w' - 4t^2w = 0$, debemos *inferir* que la función desconocida w es realmente $w(t)$, una función de la variable independiente t .

El orden de una ecuación diferencial ordinaria

Un modo de clasificar ecuaciones diferenciales ordinarias es según su **orden**. Diremos que una ecuación diferencial ordinaria es de **orden n** , o que es una **ecuación de n -ésimo orden**, si la derivada de mayor orden de la función desconocida en la ecuación es la derivada *enésima*. Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 2xy &= e^{-x^2} \\ (w')^2 + 2t^3w' - 4t^2w &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x-1)}\end{aligned}$$

son ecuaciones diferenciales *de primer orden* porque la derivada de mayor orden en cada una de ellas es la derivada primera. Las ecuaciones

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

y

$$\ddot{x} + 3t\dot{x} + 2x = \text{sen}(\omega t)$$

son ecuaciones de segundo orden y $e^{-x}y^{(5)} + (\text{sen } x)y''' = 5e^x$ es de orden 5.

Forma general de una ecuación diferencial ordinaria

Si y es la función desconocida de una sola variable independiente x , una ecuación diferencial ordinaria de orden n se puede expresar matemáticamente de un modo conciso mediante la relación

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

o a menudo como

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}).$$

donde $y^{(k)}$ representa la derivada de y de orden k .

El siguiente ejemplo muestra la apariencia que adopta esta forma en la práctica.

EJEMPLO 1.1.2 Forma general para una EDO de segundo orden

Si y es una función desconocida de x , la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\frac{dy}{dx} = y + \sin x \text{ se puede escribir en la forma}$$

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\frac{dy}{dx} - y - \sin x = 0$$

o como

$$\underbrace{2y'' + e^xy' - y - \sin x}_{F(x, y, y', y'')} = 0$$

Observemos que F designa una expresión matemática que comprende la variable independiente x , la función desconocida y , y la primera y segunda derivadas de y .

Alternativamente, podríamos recurrir al álgebra ordinaria para despejar la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial original. Entonces la ecuación se escribiría en la forma

$$y'' = \underbrace{\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}e^xy'}_{G(x, y, y')}$$

**Ecuaciones en derivadas parciales**

Si tratamos con funciones de *varias* variables y las derivadas que aparecen son derivadas parciales, entonces tenemos una **ecuación en derivadas parciales (EDP)**. (Consulte el apéndice A.7 si no está familiarizado con las derivadas parciales.) Por ejemplo, la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, que recibe el nombre de *ecuación de onda*, es de vital importancia en muchas áreas de la física y la ingeniería. En esta ecuación suponemos que $u = u(x, t)$, una función de dos variables, x y t . Sin embargo, cuando en este libro usamos el término *ecuación diferencial* nos estamos refiriendo a una ecuación diferencial *ordinaria*. A menudo escribiremos únicamente *ecuación*, si por el contexto resulta evidente que se trata de una ecuación diferencial ordinaria.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales

Otra forma importante de clasificar las ecuaciones diferenciales es en términos de si son lineales o no lineales. Si y es una función de x , entonces la forma general de una **ecuación diferencial lineal ordinaria** de orden n es

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1.1.1)$$

donde $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ y $f(x)$ son funciones de x . Lo importante aquí es que cada función coeficiente $a_i(x)$ depende únicamente de la variable independiente x , y no contiene ni la variable dependiente y , ni cualquiera de sus derivadas. En particular, la ecuación (1.1.1) no contiene productos o cocientes de y o de sus derivadas.

EJEMPLO 1.1.3 Una ecuación lineal de segundo orden

La ecuación $x'' + 3tx' + 2x = \sin(\omega t)$, donde ω es una constante, es lineal. Podemos contemplar la forma de esta ecuación así:

$$\underbrace{a_2(t)}_{1} \cdot x'' + \underbrace{a_1(t)}_{3t} \cdot x' + \underbrace{a_0(t)}_{2} \cdot x = \underbrace{f(t)}_{\sin(\omega t)}$$

Los coeficientes de las diversas derivadas de la función incógnita x son únicamente funciones (eventualmente constantes) de la variable independiente t . ♦

El siguiente ejemplo muestra que no todas las ecuaciones de primer orden son lineales.

**EJEMPLO 1.1.4 Una ecuación no lineal de primer orden
(un modelo para la infección por VIH)**

La ecuación $\frac{dT}{dt} = s + rT\left(1 - \frac{T}{T_{\max}}\right) - \mu T$ modela el crecimiento y la muerte de las células T, un importante componente del sistema inmunológico.² En dicha ecuación, $T(t)$ representa el número de células T existentes en el momento t . Si reescribimos la ecuación sin los paréntesis, obtenemos $\frac{dT}{dt} = s + rT - \left(\frac{r}{T_{\max}}\right)T^2 - \mu T$. De este modo, vemos que hay un término que contiene el cuadrado de la función incógnita. Por consiguiente, no es una ecuación lineal. ♦

En general, existen más métodos sistemáticos de análisis de las ecuaciones lineales que de las ecuaciones no lineales, algunos de los cuales los estudiaremos en los capítulos 2, 5 y 6. Sin embargo, las ecuaciones no lineales son importantes y aparecerán a lo largo del libro. En concreto, el capítulo 7 está dedicado a su análisis.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En cursos anteriores de matemáticas habrá observado que a veces es necesario tratar con *sistemas* de ecuaciones algebraicas, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -2 \\ -5x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Del mismo modo, al trabajar con ecuaciones diferenciales, podemos encontrarnos frente a **sistemas de ecuaciones diferenciales**, como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y \end{aligned}$$

2. E. K YEARGERS, R. W. SHONKWILER y J. V. HEROD. *An Introduction to the Mathematics of Biology: With Computer Algebra Models*, 341. Birkhäuser, Boston, 1996.

o

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -sx + sy \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

donde b , r y s son constantes. (Recordemos que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ y $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$.) El último sistema surgió en un famoso estudio sobre condiciones meteorológicas.

Advertimos que cada uno de estos dos sistemas de ecuaciones diferenciales consta de un número diferente de ecuaciones y que cada ecuación del primer sistema es *lineal*, mientras que las dos últimas ecuaciones del segundo sistema son *no lineales*, porque contienen productos $-xz$ en la segunda ecuación y xy en la tercera— de algunas de las funciones desconocidas. Lógicamente denominaremos **sistema lineal** a un sistema en el que todas las ecuaciones son lineales, y **sistema no lineal** a un sistema que contenga al menos una ecuación no lineal. En los capítulos 4, 5, 6 y 7 veremos cómo se originan los sistemas de ecuaciones diferenciales y aprenderemos a analizarlos. Por ahora, tratemos simplemente de comprender la *idea* de un sistema de ecuaciones diferenciales.

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1-10, (a) identifique la variable dependiente y la variable independiente de cada ecuación; (b) indique el orden de cada ecuación diferencial, y (c) determine si la ecuación es lineal o no lineal. Si responde en (c) que es no lineal, explique por qué.

1. $y' = y - x^2$

2. $xy' = 2y$

3. $x'' + 5x = e^{-x}$

4. $(y')^2 + x = 3y$

5. $xy'(xy' + y) = 2y^2$

6. $\frac{d^2r}{dt^2} = 3\frac{dr}{dt} + \text{sent } t$

7. $y^{(4)} + xy''' + e^x = 0$

8. $x^{(7)} + t^2x^{(5)} = xe^t$

9. $e^{y'} + 3xy = 0$

10. $t^2R''' - 4tR'' + R' + 3R = e^t$

11. ¿Para qué valor o valores de la constante a es lineal la siguiente ecuación diferencial?

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a^2 - a)x\frac{dx}{dt} = te^{(a-1)x}$$

12. Clasifique cada uno de los siguientes sistemas como lineal o no lineal:

a. $\frac{dy}{dt} = x - 4xy$

b. $Q' = tQ - 3t^2R$

$$\frac{dx}{dt} = -3x + y$$

$$R' = 3Q + 5R$$

c. $\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy + z \\ \dot{y} &= -2x + y - yz \\ \dot{z} &= 3x - y + z\end{aligned}$

d. $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - ty + t^2z \\ \dot{y} &= -2tx + y - z \\ \dot{z} &= 3x - t^3y + z\end{aligned}$

1.2 SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

NOCIONES BÁSICAS

En cursos anteriores de matemáticas, siempre que nos encontrábamos con una ecuación probablemente se nos invitaba a *resolverla* o a obtener una *solución*. La **solución** de una ecuación diferencial es simplemente una función que *satisface* a la ecuación: al sustituir esta función en la ecuación diferencial, se obtiene una afirmación matemática cierta, una *identidad*. Antes de comenzar a estudiar métodos resolutivos formales en el capítulo 2, podemos *intuir* o *conjeturar* las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales sencillas. El siguiente ejemplo muestra cómo intuir las de un modo lógico.

EJEMPLO 1.2.1 Conjetura y comprobación de una solución a una EDO.

La ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dB}{dt} = kB$, donde k representa una constante positiva determinada, es un simple ejemplo de un saldo bancario $B(t)$ al cabo de t años tras la inversión inicial a un interés compuesto. La razón de cambio de B en cualquier instante es proporcional al valor de B en ese momento, siendo k la constante de proporcionalidad. Esta ecuación expresa que cuanto mayor sea el saldo en cualquier momento t , más rápidamente aumentará su valor.

Si suponemos conocidas las funciones elementales y sus derivadas, podremos intuir qué tipo de función describe $B(t)$. ¿Qué tipo de función tiene una derivada que es un múltiplo de sí misma por una constante? Deberíamos concluir que $B(t)$ debe ser una función *exponencial* de la forma ae^{kt} , donde a es una constante. Si se sustituye $B(t) = ae^{kt}$ en la ecuación diferencial original, comprobaremos si la conjetura es correcta. El lado izquierdo de la ecuación se convierte en $\frac{d(ae^{kt})}{dt}$, que es igual a kae^{kt} , y el lado derecho es $k(ae^{kt})$. El lado izquierdo es igual que el lado derecho y nos proporciona una identidad.

Anticipando una idea que estudiaremos después dentro de esta sección, podemos hacer que $t = 0$ en nuestra función solución, para concluir que $B(0) = ae^{k(0)} = a$; es decir, que la constante a debe ser igual a la inversión inicial. Finalmente, podemos expresar la solución en la forma $B(t) = B(0)e^{kt}$. ♦

Expuesto de un modo más formal, una **solución** de la ecuación diferencial:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \text{ o bien } y^{(n)} = G(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

en un intervalo (a, b) es una función real $y = y(x)$, tal que existen todas las derivadas necesarias de $y(x)$ en ese intervalo e $y(x)$ satisface la ecuación para cada valor de x en el intervalo. **Resolver** una ecuación diferencial significa encontrar todas las soluciones posibles de la misma.

Advierta que decimos “una” solución en vez de “la” solución. Una ecuación diferencial, si es que tiene alguna solución, normalmente tiene más de una. Además, deberíamos estar atentos al intervalo en el que podría definirse la solución. Más tarde en esta sección y

en la sección 2.7, analizaremos con más detalle las cuestiones de la existencia y la unicidad de las soluciones. De momento se trata simplemente de aprender a reconocer cuándo una función es una solución de una ecuación diferencial, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.2 Comprobación de una solución de una ecuación de segundo orden

Supongamos que alguien afirma que $x(t) = 5e^{3t} - 7e^{2t}$ es una solución de la ecuación lineal de segundo orden $x'' - 5x' + 6x = 0$ en toda la recta real; es decir, para todos los valores de t en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Podremos comprobar que esta afirmación es correcta si calculamos $x'(t) = 15e^{3t} - 14e^{2t}$ y $x''(t) = 45e^{3t} - 28e^{2t}$ y sustituimos estas expresiones en la ecuación original:

$$\begin{aligned} x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) &= \overbrace{(45e^{3t} - 28e^{2t})}^{x''(t)} - 5\overbrace{(15e^{3t} - 14e^{2t})}^{x'(t)} + 6\overbrace{(5e^{3t} - 7e^{2t})}^{x(t)} \\ &= 45e^{3t} - 28e^{2t} - 75e^{3t} + 70e^{2t} + 30e^{3t} - 42e^{2t} \\ &= -30e^{3t} + 42e^{2t} + 30e^{3t} - 42e^{2t} = 0 \end{aligned}$$

Como $x(t) = 5e^{3t} - 7e^{2t}$ satisface la ecuación original, entendemos que $x(t)$ es una solución. Sin embargo, ésta no es la única solución de la ecuación diferencial dada. Por ejemplo, también lo es: $x_2(t) = -\pi e^{3t} + \frac{2}{3}e^{2t}$. (Compruebe esto.) Más adelante hablaremos más detalladamente sobre este tipo de situaciones. ♦

Soluciones implícitas

Volvamos a considerar el concepto de *funciones implícitas* en el cálculo. La idea aquí es que a veces las funciones no están claramente (explícitamente) definidas mediante una fórmula en la que la variable dependiente (en un lado) esté expresada en términos de la variable independiente y algunas constantes (en el otro lado), como en la solución $x = x(t) = 5e^{3t} - 7e^{2t}$ del ejemplo 1.1.2. Por ejemplo, se nos podría plantear la *relación* $x^2 + y^2 = 5$, que puede escribirse en la forma $G(x, y) = 0$, donde $G(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. La gráfica de esta relación es un círculo de radio $\sqrt{5}$ centrado en el origen y no representa una función. (¿Por qué?) Sin embargo, esta relación *define implícitamente* dos funciones: $y_1(x) = \sqrt{5 - x^2}$ e $y_2(x) = -\sqrt{5 - x^2}$, ambas con dominio $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. En cursos de análisis más avanzados se estudia cuándo una relación define realmente una o más funciones implícitas. De momento recordemos únicamente que incluso si no podemos resolver una *relación* con objeto de obtener una fórmula explícita para cada función, podemos hacer uso de la diferenciación implícita para hallar derivadas de cualquier función que pueda estar oculta en la relación.

Al tratar de resolver ecuaciones diferenciales, con frecuencia no podremos hallar una solución explícita y deberemos conformarnos con una solución definida de un modo implícito.

EJEMPLO 1.2.3 Comprobación de una solución implícita

Queremos demostrar que cualquier función y que satisfaga la relación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

En primer lugar, derivamos implícitamente la relación, tratando a y como $y(x)$, una función de la variable independiente x , definida implícitamente:

$$(1) \quad \frac{d}{dx}G(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 5) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

Regla de la cadena

$$(2) \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(5) = 0$$

$$(3) \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

Si ahora despejamos $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (3), se obtiene $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$. Así se demuestra que cualquier función definida implícitamente por la relación anterior es una solución de nuestra ecuación diferencial. ♦

FAMILIAS DE SOLUCIONES I

A continuación, analizaremos cuántas soluciones puede tener una ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación $(y')^2 + 1 = 0$ *no* tiene una solución real (*reflexione sobre esto*), mientras que la ecuación $|y'| + |y| = 0$ tiene exactamente una solución, la función $y \equiv 0$. (*¿Por qué?*) Como ya vimos en el ejemplo 1.2.2, la ecuación diferencial $x'' - 5x' + 6x = 0$ tiene al menos dos soluciones.

La situación aún puede ser más complicada, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.4 Una familia infinita de soluciones

Supongamos que dos estudiantes, Lenston y Jennifer, observan la sencilla ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x) = x^2 - 2x + 7$. Una solución de esta ecuación es una función de x cuya primera derivada es igual a $x^2 - 2x + 7$. Lenston cree que la solución es $\frac{x^3}{3} - x^2 + 7x$, mientras que Jennifer piensa que es $\frac{x^3}{3} - x^2 + 7x - 10$. Ambas respuestas parecen correctas.

Resolver este problema es sencillamente una cuestión de integración de los dos miembros de la ecuación

$$y = \int dy = \int \frac{dy}{dx} dx = \int (x^2 - 2x + 7) dx.$$

Puesto que estamos utilizando una integral *indefinida*, existe siempre una constante de integración que no debemos olvidar. La solución a nuestro problema es realmente una *familia infinita de soluciones*, $y(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x + C$, donde C representa cualquier cons-

tante real. Cada valor concreto de C da lugar a otro miembro de la familia. ¡Acabamos de resolver nuestra primera ecuación diferencial de este curso sin conjeturas! Cada vez que efectuábamos una integración indefinida (hallábamos una antiderivada) en la clase de cálculo, estábamos resolviendo una sencilla ecuación diferencial. ♦

Al describir el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden como la mostrada en el ejemplo anterior, normalmente nos referimos a dicho conjunto como una **familia uniparamétrica de soluciones**. El *parámetro* es la constante C . Cada valor concreto de C nos proporciona lo que se denomina una **solución particular** de la ecuación diferencial. En el ejemplo anterior, Lenston y Jennifer hallaron soluciones particulares, una correspondiente a $C = 0$ y la otra para $C = -10$. Una solución particular se denomina a veces una **integral** de la ecuación, y su gráfica recibe el nombre de **curva integral** o **curva solución**. La figura 1.1 muestra tres de las curvas integrales de la ecuación $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 7$, las correspondientes a $C = 15, 0$ y -10 (de arriba a abajo).

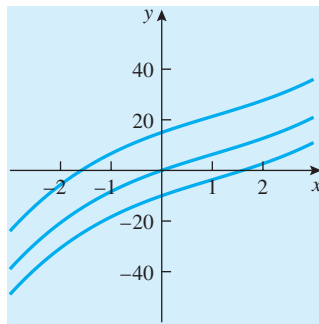


Figura 1.1

Curvas integrales de $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 7$
con parámetros respectivos 15, 0 y -10

La curva que pasa por el origen es la solución particular de Lenston; la curva solución que pasa por el punto $(0, -10)$ es la de Jennifer.

Problemas de valor inicial (PVI)

Supongamos ahora que deseamos resolver una ecuación diferencial de primer orden, siendo y la función incógnita de la variable independiente t . Especificamos además que una de sus curvas integrales ha de pasar por un punto concreto (t_0, y_0) en el plano. Estamos imponiendo la condición $y(t_0) = y_0$, denominada **condición inicial**. El problema pasa entonces a llamarse un **problema de valor inicial (PVI)**. Advierta que, de este modo, estamos tratando de hallar una solución particular concreta. Encontramos esta solución si escogemos un valor específico de la constante de integración (el parámetro).

A continuación veremos cómo resolver un sencillo problema de valor inicial.

EJEMPLO 1.2.5 Un problema de valor inicial de primer orden

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo del eje x de tal modo que su velocidad instantánea en un tiempo t viene dada por $v(t) = 12 - t^2$. Primero encontraremos la posición x del objeto, medida desde el origen, en cualquier instante $t > 0$.

Como la función velocidad es la derivada de la función posición, podemos plantear la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dx}{dt} = 12 - t^2$ para describir nuestro problema.

La simple integración de los dos miembros de la ecuación da como resultado

$$x(t) = \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt = \int (12 - t^2) dt = 12t - \frac{t^3}{3} + C$$

Este último resultado significa que la posición del objeto en un momento arbitrario $t > 0$ puede ser descrita por cualquier miembro de la familia uniparamétrica $12t - \frac{t^3}{3} + C$, lo cual no es una conclusión muy satisfactoria. Pero si disponemos de información adicional, podemos encontrar un valor concreto para C y acabar con la incertidumbre.

Supongamos que sabemos, por ejemplo, que la posición del objeto es $x = -5$ cuando $t = 1$. Entonces podremos aplicar esta *condición inicial* para obtener

$$-5 = x(1) = 12(1) - \frac{1^3}{3} + C \text{ o bien } -5 = \frac{35}{3} + C$$

Esta última ecuación implica que $C = \frac{-50}{3}$, de modo que la posición del objeto en el tiempo t viene dada por la función particular $x(t) = 12t - \frac{t^3}{3} - \frac{50}{3} = 12t - \frac{(t^3 + 50)}{3}$.

La condición inicial $x(1) = -5$ había sido seleccionada aleatoriamente. Cualquier otra elección $x(t_0) = x_0$ nos habría conducido hasta un valor definido de C y a la obtención de una solución particular de nuestro problema. ♦

Una forma integral de una solución de un PVI

Si una ecuación de primer orden se puede escribir en la forma $y' = f(x)$ —siendo $f(x)$ una función continua (o continua por tramos)—, entonces podremos expresar siempre la solución del PVI $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ en un intervalo (a, b) en la forma

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0 \quad (1.2.1)$$

para x en (a, b) . Observemos que el valor x_0 de la condición inicial, es utilizado como el límite inferior de integración, y el valor y_0 de la condición inicial, como una particular constante de integración. Usamos t como una variable *ficticia* o “*muda*”. Dada la ecuación

(1.2.1), el *teorema fundamental del cálculo integral* (TFC) (apéndice A.4) implica que $y' = f(x)$, y vemos que $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt + y_0 = 0 + y_0 = y_0$, tal y como queríamos. Este modo de tratar con ciertos tipos de PVI es habitual en textos de física e ingeniería. En el ejemplo 1.2.4, la solución de la ecuación, con $y(-1) = 2$ como condición, es

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-1}^x (t^2 - 2t + 7) dt + 2 \\ &= \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 7t \right) \Big|_{t=-1}^{t=x} - \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 7t \right) \Big|_{t=-1}^{t=-1} + 2 \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 7x \right) - \left(\frac{-25}{3} \right) + 2 = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x + \frac{31}{3} \end{aligned}$$

Debería resolver también este problema del modo en que lo hemos hecho en el ejemplo 1.2.5; es decir, sin utilizar una fórmula integral definida.

FAMILIAS DE SOLUCIONES II

Aunque hemos visto ejemplos de ecuaciones de primer orden sin solución o de solución única, en general deberíamos esperar que una ecuación diferencial de primer orden tuviera un conjunto infinito de soluciones descritas por un parámetro único.

Si desarrollamos nuestro análisis anterior, estableceremos que una ecuación diferencial de orden n puede tener una **familia n -paramétrica de soluciones**, lo que implica la existencia de n constantes arbitrarias $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ (los parámetros). Por ejemplo, una solución de una ecuación de segundo orden $y'' = g(t, y, y')$ puede tener *dos* constantes arbitrarias. Si establecemos las **condiciones iniciales** $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$, podemos determinar valores específicos para estas dos constantes y obtener una solución *particular*. Observe que, para ambas condiciones, usamos el mismo valor, t_0 , de la variable independiente.

El siguiente ejemplo muestra cómo resolver un PVI de segundo orden.

EJEMPLO 1.2.6 Un PVI de segundo orden

En la sección 4.1 mostraremos que cualquier solución de la ecuación lineal de segundo orden $y'' + y = 0$ tiene la forma $y(t) = A \cos t + B \sin t$, siendo A y B constantes arbitrarias. (Debería comprobar que cualquier función con esa forma es una solución de la ecuación diferencial). Si una solución de esta ecuación representa la *posición* de un objeto en movimiento en relación con una referencia fija, entonces la derivada de la solución representa la *velocidad* de la partícula en el instante t . Si, por ejemplo, establecemos las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, estamos diciendo que queremos que la posición de la partícula al comienzo de nuestro estudio sea 1 unidad en la dirección positiva desde la referencia fija, y que queremos que su velocidad sea 0. Dicho de otro modo, nuestra partícula comienza estando en reposo a 1 unidad (en una dirección positiva) de la referencia fija.

Podemos usar estas condiciones iniciales para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial original:

1. $y(0) = 1$ implica que $1 = y(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A$.
2. $y'(0) = 0$ implica que $0 = y'(0) = -A \sin(0) + B \cos(0) = B$.

Si combinamos los resultados de (1) y (2), obtenemos la solución particular $y(t) = \cos t$. ♦

En general, si buscamos la solución particular de la ecuación de n -ésimo orden $F(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, de manera que $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, $y''(t_0) = y_2, \dots$ e $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$, donde y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes arbitrarias reales, decimos que estamos intentando resolver un problema de valor inicial (PVI). (Más adelante consideraremos los PVI para *sistemas* de ecuaciones diferenciales.) En este momento no podemos estar seguros de si podremos y cuándo podremos resolver un problema como éste pero, en los capítulos 2 y 4, hablaremos de la cuestión de la *existencia* y la *unicidad* de las soluciones.

Problemas de contorno o de valores en la frontera

Para ecuaciones diferenciales de segundo o mayor orden, también podemos determinar una solución particular si especificamos las denominadas **condiciones de contorno** o **frontera**. La idea aquí es dar las condiciones que deben satisfacer la función solución, o sus derivadas, en *dos puntos diferentes* del dominio de la solución. Los puntos seleccionados dependen de la naturaleza del problema que tratamos de resolver y de los datos del problema que se nos han proporcionado. Por ejemplo, si estamos analizando las tensiones en una viga de acero de longitud L , cuyos extremos están empotrados en hormigón, nos podría interesar hallar $y(x)$, el desplazamiento vertical en un punto situado a x unidades de un extremo, cuando se coloca una carga en algún lugar de la viga (figura 1.2). Observemos que el dominio de y es $[0, L]$. En este problema es lógico establecer que $y(0) = 0$ y que $y(L) = 0$, valores razonables en los extremos, o *fronteras*, del intervalo de la solución. Gráficamente, requerimos que la gráfica de $y = y(x)$ pase por los puntos $(0,0)$ y $(L, 0)$. (Consulte el problema 25 en la sección de Ejercicios 1.2. para ver la aplicación a un problema de este tipo.)

Si tratamos de encontrar una solución particular de una ecuación (o sistema) que tiene condiciones de frontera, decimos que estamos intentando resolver un **problema de valores en la frontera (PVF)**. El siguiente ejemplo muestra que, igual que en el caso de un problema de valor inicial, sin llevar a cabo un análisis más exhaustivo, no podemos estar seguros de si existen soluciones para un PVF en concreto, o de si cualquier solución que encontremos es única. En general, los PVF son más difíciles de resolver que los PVI. Aunque en este libro aparecerán PVF de vez en cuando, nos centraremos principalmente en los problemas de valor inicial.

Como muestra el siguiente ejemplo, algunos problemas de frontera o contorno carecen de solución, otros tienen una única solución y algunos tienen infinitas soluciones.

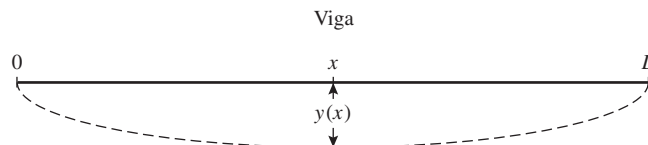


Figura 1.2

Una solución $y(x)$ que satisface las condiciones de frontera $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$

EJEMPLO 1.2.7 Un PVF puede tener una, varias o ninguna solución

Utilizaremos la ecuación diferencial de segundo orden del ejemplo 1.2.6, $y'' + y = 0$, que tiene la familia biparamétrica de soluciones $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

A continuación, veremos qué ocurre si imponemos las condiciones de frontera $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$. La primera condición implica que $1 = y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$, y la segunda nos dice que $1 = y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1$. Como no podemos hacer que c_1 sea igual a 1 y a -1 al mismo tiempo, esta contradicción implica que el problema de contorno no tiene solución.

Por otra parte, las condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y(2\pi) = 1$ nos llevan a extraer una conclusión diferente. Si aplicamos la primera condición, obtenemos $1 = y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$. La aplicación de la segunda condición da como resultado $1 = y(2\pi) = c_1 \cos(2\pi) + c_2 \sin(2\pi) = c_1$. El hecho de que no podamos obtener el valor de c_2 nos indica que *cualquier* valor es correcto. En otras palabras, el PVF presenta *una infinitud de soluciones* de la forma $y(t) = \cos t + c_2 \sin t$.

Finalmente, si requerimos que $y(0) = 1$ y que $y(\pi/4) = 1$, hallamos que $1 = y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$ y

$$\begin{aligned} 1 &= y\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1 \cos(\pi/4) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

lo que implica que $c_2 = \sqrt{2} - 1$.

Por eso, este PVF tiene la *solución única* $y(t) = \cos t + (\sqrt{2} - 1) \sin t$.

Debemos percatarnos de que para una ecuación general de orden n (o para un sistema de ecuaciones) existen multitud de posibilidades para especificar las condiciones de contorno, y no siempre en los extremos de los intervalos de la solución. La idea es disponer de unas cuantas condiciones que nos permitan resolver (determinar) un número adecuado de constantes arbitrarias.

El siguiente ejemplo muestra el modo en que el uso de condiciones de contorno puede facilitar la solución de un interesante problema.

EJEMPLO 1.2.8 Un PVF práctico

En la sección “Automóviles” de un diario, en el 2005, se informa que un modelo concreto pasará de 0 a 100 kilómetros por hora en 6 segundos. Suponiendo que la aceleración es constante, queremos saber la distancia, medida en metros, que ha recorrido el automóvil hasta alcanzar 100 km/h.

Si $s(t)$ indica la posición del automóvil después de t segundos, entonces debemos calcular $s(6) - s(0)$, la distancia total recorrida por el automóvil en el intervalo de los 6 segundos. Sabemos que la aceleración, una constante C en este problema, puede describirse como $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$. También sabemos que $s(0) = s'(0) = 0$, es decir, que nuestra posición inicial se considera $s = 0$, y también que la velocidad inicial es nula en el momento en que

pisamos el acelerador. El último dato que tenemos es que la velocidad $s'(6)$ al cabo de 6 segundos es de 100 km/h.

Estamos, por tanto, ante una ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2s}{dt^2} = C$ y unas condiciones de frontera $s(0) = s'(0) = 0$, $s'(6) = 100$ km/h y debemos obtener la función desconocida $s(t)$.

Ahora, las reglas básicas del cálculo integral nos indican que, al hallar la integral indefinida de cada miembro de la ecuación diferencial anterior, se obtendrá:

$$\int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int C dt = Ct + C_1, \text{ es decir } \frac{ds}{dt} = Ct + C_1,$$

donde C_1 es una constante de integración. La integración de cada lado de esta última ecuación nos da como resultado:

$$s(t) = \frac{Ct^2}{2} + C_1t + C_2$$

Tenemos así una expresión para $s(t)$, pero ésta contiene tres constantes arbitrarias. Podemos usar ahora la condición inicial $s(0) = 0$ para escribir

$$0 = s(0) = \frac{C \cdot (0)^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2$$

que se reduce a $0 = C_2$. Por tanto podemos decir que:

$$s(t) = \frac{Ct^2}{2} + C_1t$$

Puesto que $s'(0) = 0$, podemos observar que $0 = s'(0) = (Ct + C_1)|_{t=0} = C_1$, luego $s(t) = \frac{Ct^2}{2}$.


En nuestra fórmula todavía tenemos una constante C desconocida. Pero sabemos que al acabar los 6 segundos, la velocidad es de 100 km/h. *Aquí hemos de tener cuidado con las unidades utilizadas.* No debemos mezclar segundos y horas. Para hacer consistentes todas las unidades, hemos de convertir los 6 segundos en 6/3600 horas. Entonces podemos afirmar que $100 = s'(6/3600) = C \cdot (6/3600)$, y tenemos por tanto:

$$C = \frac{100(3600)}{6} = 60\,000 \text{ (km/h}^2\text{)}$$

$$s(t) = \frac{Ct^2}{2} = 30\,000t^2 \quad (t \text{ en horas, } s \text{ en kilómetros})$$

y

$$s\left(\frac{6}{3600}\right) = 30\,000 \left(\frac{6}{3600}\right)^2 = \frac{1}{12} \text{ kilómetros} \approx 83,333 \text{ metros}$$

Hemos mostrado así que, para pasar de 0 a 100 km/h, el automóvil recorrerá 83,333 metros aproximadamente. 

Soluciones generales

Si *cada* solución en un intervalo (a, b) de una ecuación diferencial de orden n $F(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^n) = 0$ puede obtenerse desde una familia n -paramétrica, cuando se han escogido valores apropiados para las n constantes, diremos que la familia es la **solución general** de la ecuación diferencial. En este caso, necesitaremos n condiciones iniciales o n condiciones de frontera (o una combinación de n condiciones) para determinar las constantes arbitrarias.

Algunas veces, sin embargo, no podemos encontrar *cada* solución entre los miembros de una familia n -paramétrica. Por ejemplo, deberíamos comprobar que la ecuación diferencial no lineal de primer orden $2xy' + y^2 = 1$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones dada por $y = \frac{Cx - 1}{Cx + 1}$. Sin embargo, para cualquier valor de x , la función constante $y \equiv 1$ es también una solución, que no puede obtenerse de la familia si se elige un valor particular del parámetro C . Supongamos que *se pudiera* hallar un valor de C tal que $\frac{Cx - 1}{Cx + 1} = 1$. Entonces $Cx - 1 = Cx + 1$, de modo que $-1 = 1$!

Del mismo modo, $y(x) = kx^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ para cualquier constante k y para todos los valores de x ; pero lo es también $y(x) = x^2 \ln |x|$ para todo x diferente de 0. (*Compruebe estas afirmaciones.*) Naturalmente, dado que la ecuación es de segundo orden, deberíamos darnos cuenta de que una familia uniparamétrica no puede ser la solución general.

Una solución de una ecuación diferencial de orden n que no puede ser obtenida dando valores particulares a los parámetros en una familia n -paramétrica de soluciones recibe el nombre de **solución singular**. En el capítulo 2 veremos que algunas de esas soluciones singulares se obtienen tras realizar ciertas manipulaciones algebraicas en las ecuaciones diferenciales.

SOLUCIONES DE SISTEMAS DE EDO

Dado un *sistema* de dos ecuaciones con funciones incógnita $x(t)$ e $y(t)$, una solución en un intervalo (a, b) está formada por un *par* de funciones diferenciables $x(t)$ e $y(t)$, tales que ambas satisfacen, en todos los puntos del intervalo, las ecuaciones que conforman el sistema. Las condiciones iniciales se dan en la forma $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

EJEMPLO 1.2.9 Un PVI en un sistema

En el capítulo 4 veremos por qué la única solución del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y\end{aligned}$$

que satisface las condiciones $x(0) = 0$ e $y(0) = 7$ es $\left\{ x(t) = \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{7}{2}e^{-4t}, y(t) = \frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t} \right\}$. (*Compruebe que efectivamente se trata de soluciones del PVI.*) Por ahora, aceptemos como cierta la unicidad de la solución.

Podemos imaginar el par solución como las coordenadas de un punto $(x(t), y(t))$ en el espacio bidimensional R^2 . Al variar la variable independiente t , el punto describe una curva en el plano x - y que recibe el nombre de **trayectoria**. La dirección *positiva* sobre dicha curva es la que resulta cuando t crece.

En Cálculo tendríamos que haber visto la *representación paramétrica* de una curva. Por ejemplo, si hacemos que la variable t varíe de forma continua de 0 a 2π , los puntos $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ recorren la *circunferencia unidad* (centro = $(0, 0)$, radio = 1) en el plano en sentido contrario al de las agujas de un reloj a medida que t crece. También deberíamos saber usar una calculadora graficadora o un sistema algebraico computacional (SAC) para trazar la gráfica de una curva dada en forma paramétrica.

En la figura 1.3a se muestra en el plano $x - y$ la curva correspondiente a la solución del sistema dado anteriormente, junto con las flechas que indican su dirección. Se indica el punto inicial $(x(0), y(0)) = (0, 7)$. Si nos fijamos en las expresiones de la solución para $x(t)$ e $y(t)$, vemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, y por tanto la curva tiende hacia el origen a medida que t crece.

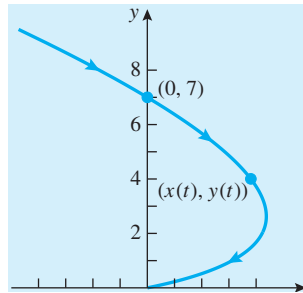


Figura 1.3a

Representación gráfica de $(x(t), y(t)) = (\frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{7}{2}e^{-4t}, \frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t})$
en el plano x - y , $-0,1 \leq t \leq 4$

La figura 1.3b muestra la representación gráfica de $x = x(t)$, y la figura 1.3c, la de $y = y(t)$.

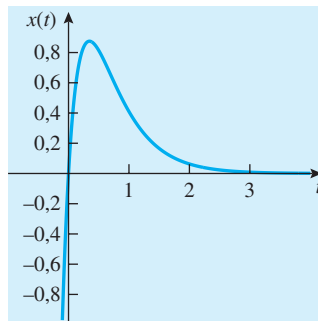


Figure 1.3b

Representación gráfica de $x(t) = \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{7}{2}e^{-4t}$, $-0,1 \leq t \leq 4$

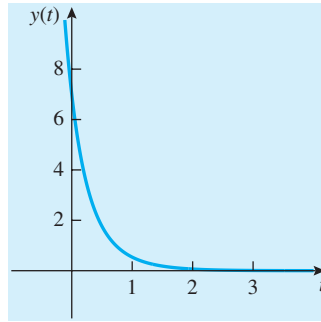


Figura 1.3c

Representación gráfica de $y(t) = \frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t}$, $-0,1 \leq t \leq 4$ 

Un modo *dinámico* muy importante de contemplar la situación en el último ejemplo es considerar la curva de la figura 1.3 como el camino (o trayectoria) de un objeto o una cantidad cuyo movimiento o cambio se rige por el sistema de ecuaciones diferenciales. Las condiciones iniciales especifican el comportamiento (el valor, razón de cambio, etc.) en un único punto sobre el camino del objeto en movimiento o la cantidad cambiante. La gráfica propia de la solución del sistema dado en el ejemplo 1.2.9 es una **curva en el espacio**, el conjunto de puntos $(t, x(t), y(t))$. Veremos más adelante, en el capítulo 4, más interpretaciones gráficas de soluciones de sistemas. Las condiciones de frontera también determinan ciertos aspectos sobre la trayectoria del fenómeno que se está estudiando.

De forma análoga, cada solución del sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -sx + sy \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

donde b , r y s son constantes, es una terna ordenada $(x(t), y(t), z(t))$, y las condiciones iniciales tienen la forma $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ y $z(t_0) = z_0$. Las condiciones de contorno en esta situación pueden adoptar diversas formas. La trayectoria en este caso es una *curva en el espacio*, un camino en el espacio tridimensional. La auténtica gráfica de la solución es el conjunto de puntos $(t, x(t), y(t), z(t))$ en el espacio tetradimensional. Estos puntos de vista, especialmente la idea de trayectoria, son muy útiles. Seguiremos usando estos conceptos en los capítulos 4, 5 y 7.

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1-11, compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Las letras a , b , c y d representan constantes.

1. $y'' + y = 0$; $y = \sin x$
2. $x'' - 5x' + 6x = 0$; $x = -\pi e^{3t} + \frac{2}{3}e^{2t}$

3. $\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0; \quad y = x^2$
4. $t\frac{dR}{dt} - R = t^2 \sin t; \quad R = t(c - \cos t)$
5. $\frac{d^4y}{dt^4} = 0; \quad y = at^3 + bt^2 + ct + d$
6. $\frac{dr}{dt} = at + br; \quad r = ce^{bt} - \frac{a}{b}t - \frac{a}{b^2}$
7. $xy' - 2 = 0; \quad y = \ln(x^2)$
8. $y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}; \quad y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$
9. $2y = xy' + \ln(y'); \quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$
10. $xy' - \sin x = 0; \quad y = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ [Piense en el teorema fundamental del cálculo integral.]
11. $y'' + 2xy' = 0; \quad y = \int_3^x e^{-t^2} dt$ [Piense en el teorema fundamental del cálculo integral.]
12. Escriba un párrafo explicando por qué razón una solución $B(t)$ de la ecuación diferencial $\frac{dB}{dt} = kB$ del ejemplo 1.2.1 no puede ser un polinomio, una función trigonométrica o una función logarítmica.
13. a. ¿Por qué la ecuación $(y')^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones en el campo real?
b. ¿Por qué la ecuación $|y'| + |y| = 0$ tiene únicamente una solución? ¿Cuál es esa solución?
14. Explique por qué la ecuación $\frac{dx}{dt} = \sqrt{-|x - t|}$ no tiene solución en el campo real.
15. Si c es una constante positiva, muestre que las dos funciones $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$ son ambas soluciones de la ecuación no lineal $y\frac{dy}{dx} + x = 0$ sobre el intervalo $-c < x < c$. Explique por qué las soluciones no son válidas fuera del intervalo abierto $(-c, c)$.
16. Considere la ecuación y la solución del ejercicio 4. Halle la solución particular que satisface la condición inicial $R(\pi) = 0$.
17. Considere la ecuación y la solución del ejercicio 5. Halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ e $y'''(0) = 6$. (Sugerencia: use las condiciones iniciales una a una, comenzando por la izquierda.)
18. Considere la ecuación y la solución del ejercicio 6. Halle la solución particular que satisface la condición inicial $r(0) = 0$. (Su respuesta debe contener únicamente las constantes a y b .)

19. Considere la ecuación y la solución del ejercicio 8. Obtenga la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
20. Sea $W = W(t)$ su peso en kilogramos, el día t de una dieta. Si usted consume C calorías cada día y su cuerpo quema EW calorías por día, donde E representa las calorías por kilogramo, entonces la ecuación $\frac{dW}{dt} = k(C - EW)$ modela su velocidad de cambio de peso.³ (Esta ecuación expresa que su velocidad de cambio de peso es proporcional a la diferencia entre las calorías consumidas y las calorías quemadas, siendo k la constante de proporcionalidad.)
- Demuestre que $W = \frac{C}{E} + \left(W_0 - \frac{C}{E}\right)e^{-kEt}$ es una solución de la ecuación, donde $W_0 = W(0)$ es su peso al comienzo de la dieta.
 - Dada la solución del apartado (a), ¿qué le sucede a $W(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$?
 - Si $W_0 = 80$ kg, $E = 45$ cal/kg, $k = 1/7875$ kg/cal y $C = 2500$ cal/día, ¿cuánto tardará en perder 10 kg? ¿Cuánto para 15 kg? ¿Y para 20 kg? ¿Qué sugieren sus respuestas acerca del proceso de pérdida de peso?
21. Una partícula se desplaza a lo largo del eje X de forma que su velocidad en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por $v(t) = 1/(t^2 + 1)$. Si se supone que la partícula está inicialmente en el origen, demuestre que nunca podrá llegar a sobrepasar a $x = \pi/2$.
22. Diana sale de su casa a mediodía y conduce su automóvil hasta la casa de su tía, llegando a las 15:20 h. Arrancó el automóvil que estaba estacionado y fue aumentando su velocidad uniformemente, de forma que cuando llegó a la casa de su tía conducía a una velocidad de 100 km/h. (La casa se había vuelto a pintar recientemente y Diana no la reconoció.) ¿Qué distancia hay desde la casa de Diana hasta la de su tía?
23. Un jet necesita alcanzar los 360 kilómetros/hora para despegar. Si el reactor puede acelerar de 0 a 360 kilómetros/hora en 30 segundos y si suponemos que la aceleración es constante, ¿qué longitud mínima debe tener la pista de aterrizaje?
24. En la sección “Automóviles” de un periódico se informa que un modelo de coche del año 2000 pasará de 0 a 100 kilómetros por hora en 5,2 segundos.
- Si se supone que la aceleración es constante, ¿qué espacio, medido en metros, recorrerá el automóvil cuando alcance los 100 km/h?
 - Cuando el automóvil llega a los 100 km/h, se aplican los frenos. Si se supone que la deceleración es constante, ¿cuánto tiempo tardará en detenerse el automóvil si esto ocurre a los 37,49 metros?
25. Resuelva la ecuación $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{W}{L}$ con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; $y(L) = 0$, $y'(L) = 0$. (Este problema aparece en el análisis de las tensiones

3. A. C. SEGAL. “A Linear Diet Model”, en *College Mathematics Journal*, 18, 44-45. 1987.

sobre una viga uniforme de longitud L y peso W , con ambos extremos empotrados en hormigón. La solución y describe la forma de la viga cuando se coloca un cierto tipo de carga sobre ella. Aquí E e I son constantes, y el producto EI es una constante llamada *rigidez a la flexión* de la viga.) (*Sugerencia:* integre sucesivamente introduciendo una constante de integración en cada etapa. Entonces utilice las condiciones de contorno para evaluar estas constantes de integración.)

26. Muestre que la ecuación no lineal de primer orden $(xy' - y)^2 - (y')^2 - 1 = 0$ tiene una solución general dada por $y = Cx \pm \sqrt{C^2 + 1}$, pero que cualquier función y definida implícitamente por la relación $x^2 + y^2 = 1$ también es una solución que no corresponde a ningún valor particular de C en la expresión de la solución general.
27. a. Compruebe que la función $y = \ln(|C_1x|) + C_2$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{x}$ por cada valor de los parámetros $C_1 (\neq 0)$ y C_2 .
- b. Muestre que se necesita un único parámetro esencial para y . En otras palabras, escriba $y = \ln(|C_1x|) + C_2$ con únicamente un parámetro C .
28. Para cada función, entre las siguientes, obtenga una ecuación diferencial a la que satisfaga tal función.
- a. $y = c + \frac{x}{c}$, donde c es una constante.
- b. $y = e^{ax} \sin bx$, donde a y b son constantes.
- c. $y = (A + Bt)e^t$, donde A y B son constantes.

En los ejercicios 29 y 30, la función y está definida implícitamente como una función de x por medio de la ecuación dada, donde C es una constante. En cada caso, use la técnica de diferenciación implícita para hallar una ecuación diferencial que tenga a y como una solución.

29. $xy - \ln y = C$
30. $y + \arctg y = x + \arctg x + C$
31. Halle una solución de $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$ de la forma $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, donde c_1 y c_2 son constantes.
32. Halle un polinomio $y(x)$ de segundo grado que sea una solución particular de la ecuación diferencial lineal $2y' - y = 3x^2 - 13x + 7$.
33. Considere la ecuación $xy'' - (x + n)y' + ny = 0$, donde n es un entero no negativo.
- a. Muestre que $y = e^x$ es una solución
- b. Muestre que $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ es una solución.
34. La ecuación logística $\frac{dy}{dt} = ky(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)$ se usa para describir el crecimiento de ciertos tipos de poblaciones humanas o animales. Aquí k y M representan constantes que describen características de la población que está siendo modelada.

- a. Muestre que la función $y(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$ satisface la ecuación logística con $y(0) = \frac{M}{1 + A}$.
- b. Un estudio de datos⁴ sobre la población de EE. UU. muestra que la solución dada en el apartado (a) proporciona un buen ajuste si $M = 387,9802$, $A = 54,0812$ y $k = 0,02270347$. Con tecnología adecuada, obtenga la gráfica de $y(t)$ utilizando estos valores de M , A y k . (Aquí t representa el tiempo en años desde 1790, el año del primer censo en EE. UU.)
- c. En 1790, la población de EE. UU. era de 3 929 214 habitantes. En 1980, la cifra ascendía a 226 545 805; en 1990, el número de habitantes era 248 709 873. Evaluando la función representada en la gráfica del apartado (b), para los valores de $t = 0, 190$ y 200 , compare los valores (en millones) dados por $y(t)$ con las verdaderas poblaciones.
- d. Según el modelo con los parámetros dados en el apartado (b), ¿qué le sucedería a la población de EE. UU. si $t \rightarrow \infty$?
35. a. Demuestre que las funciones $x(t) = (A + Bt)e^{3t}$ e $y(t) = (3A + B + 3Bt)e^{3t}$ son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -9x + 6y \end{aligned}$$

para todos los valores de los parámetros A y B .

- b. Halle la solución del sistema del apartado (a) si $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.
36. Compruebe que las funciones $x(t) = e^{-t/10} \sin t$ e $y(t) = \frac{1}{10}e^{-t/10}(-10 \cos t + \sin t)$ son soluciones del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= (1,01)x - (0,2)y; \quad x(0) = 0, y(0) = -1 \end{aligned}$$

37. Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dT^*}{dt} &= kV_1T_0 - \delta T^* \\ \frac{dV_1}{dt} &= -cV_1 \end{aligned}$$

se usan para el modelado de infecciones por VIH-1.⁵ Aquí $T^* = T^*(t)$ representa el número de células infectadas; $T_0 = T(0)$, el número de células potencialmente infectadas

4. E. K. YEARGERS, R. W. SHONKWILER y J. V. HEROD. *An Introduction to the Mathematics of Biology: With Computer Algebra Models*, 117. Birkhäuser, Boston, 1996.

5. A. S. PERELSON, A. U. NEUMANN, M. MARKOVITZ, J. M. LEONARD y D. D. HO. "HIV-1 Dynamics in Vivo: Virion Clearance Rate, Infected Cell Life-Span, and Viral Generation Time", en *Science* 271, 1582-1586. 1996.

en el instante de inicio de la terapia; $V_1 = V_1(t)$, la concentración de partículas virales en plasma; k , el ritmo de infección; c , la constante de ritmo de eliminación de partículas virales; y δ , el ritmo de pérdida de células productoras de virus.

- a. Efectúe un análisis como el del ejemplo 1.2.1 y resuelva la segunda ecuación para $V_1(t)$, expresando la solución en términos de $V_0 = V_1(0)$.
- b. Con la solución hallada en el apartado (a), demuestre que la solución de la ecuación diferencial para T^* se puede escribir como

$$T^*(t) = T^*(0)e^{-\delta t} + \frac{kT_0V_0}{\delta - c}(e^{-ct} - e^{-\delta t})$$

- c. ¿Qué determina la solución del apartado (a) sobre el número de células infectadas cuando $t \rightarrow \infty$?

38. Un modelo matemático de una supuesta compañía está expresado por las ecuaciones:

$$\frac{du}{dt} = kau, u(0) = A$$

$$\frac{dw}{dt} = a(1 - k)u, w(0) = 0$$

donde $u(t)$ representa el capital invertido en la compañía en el instante t ; $w(t)$, el dividendo total pagado a los accionistas a lo largo del periodo $[0, t]$; y a y k , constantes con $a > 0$ y $0 \leq k \leq 1$.

- a. Resuelva la primera ecuación para $u(t)$. (Vea el ejemplo 1.2.1.)
 - b. Sustituya su respuesta del apartado (a) en la ecuación diferencial para w e integre para hallar $w(t)$. (Distinga entre $w(t)$ para $0 < k \leq 1$ y para $k = 0$.)
39. Considere la ecuación lineal $x^2y'' + xy' - 4y = x^3(*)$. Sea y_{GR} la solución *general* de la ecuación “reducida” (u homogénea) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$; e y_p , una solución particular de (*). Demuestre que $y_{GR} + y_p$ es la solución *general* de (*). (Para este problema, defina la solución general de una EDO de segundo orden como una solución que tiene dos constantes arbitrarias. Obviamente, una solución particular *no* tiene constantes arbitrarias.)
40. El matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quien dedicó gran parte de su tiempo a aplicar las leyes de la dinámica de Newton al movimiento de los planetas, defendía una visión más bien *determinista* del universo. Impresionado por el poder de las matemáticas para describir la naturaleza, esencialmente creía que resolver un problema de valor inicial siempre permitía comprender estados pasados de un sistema y la predicción de todos los estados futuros del mismo. La física moderna, sin embargo, ha demostrado que muchas leyes físicas son de hecho *estocásticas* (aleatorias, dependientes del azar) más que deterministas. Se ocupa de *probabilidades* más que de certezas.

Lea sobre la vida y el trabajo de Laplace y explique sus opiniones sobre las matemáticas y el universo. Algunos informes: *Men of Mathematics*, de E. T. Bell (Nueva

York, EE. UU.: Simon & Schuster, 1986); *The History of Mathematics*, de D. M. Burton (Boston, Mass.: McGraw-Hill, 1999); *A History of Mathematics*, de V. J. Katz (Reading, Mass.: Addison Wesley Longman, 1998); *Calculus Gems*, de G. F. Simmons (Nueva York: McGraw-Hill, 1992).

1.3 LA TECNOLOGÍA Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Los usuarios de este libro están viviendo una época maravillosa para la enseñanza y el aprendizaje. La disponibilidad y el coste relativamente bajo de las calculadoras, ordenadores y el software facilitan, más que nunca y en cualquier lugar, la introducción de la tecnología en la clase y en las mochilas y los hogares de los estudiantes.

Se supone que en este curso tendrá la posibilidad de acceso a potentes calculadoras gráficas o a sistemas de álgebra computacional (SAC). Incluso los programas con hojas de cálculo pueden realizar ciertos cálculos que resultarían tediosos si se hicieran a mano. (Consulte las secciones 3.1, 3.3 y 3.4.) Debería intentar duplicar las figuras y las tablas del texto utilizando su propia tecnología. Para ello está a su disposición *software* matemático de propósito general como *Derive*[®], *Macysma*[®], *Maple*[®], *Mathematica*[®] y *MATLAB*[®], así como programas especializados de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo *Differential Systems*, *ODE Solver*, *Phaser*, *ODE Toolkit* y *MDEP*. Su profesor o profesora puede incluso disponer de sus propios programas para utilizar en clase. Incluso sin ordenador, puede tratar de resolver algunas ecuaciones diferenciales y sistemas de EDO con calculadoras gráficas tan potentes a nivel algebraico (y programables) como la HP-48G/X y la TI-92.

Al principio de este curso, deberá aprender a aplicar la tecnología para realizar cálculos básicos y para representar gráficamente las soluciones de varios tipos de ecuaciones. A medida que avance con el material, tendrá que aprender instrucciones y procedimientos específicamente relativos a las ecuaciones diferenciales. El uso de la tecnología le liberará de la carga de realizar tediosos cálculos y le permitirá centrarse en la conveniencia de las entradas o datos y lo razonable de las salidas o resultados. Una calculadora gráfica o SAC le permitirá pensar los problemas de un modo diferente, debido a sus funcionalidades analíticas, gráficas y numéricas. Con ayuda de la tecnología, podrá analizar problemas de mayor complejidad que la abordable hace tan sólo una o dos generaciones universitarias. Sin embargo, es importante que los usuarios de calculadoras gráficas y ordenadores se den cuenta de que estas potentes herramientas tecnológicas pueden llevarles por un mal camino.

Los sofisticados aparatos tecnológicos pueden *errar* al facilitar la respuesta a un problema. Por otro lado, las calculadoras y los ordenadores pueden proporcionar *resultados incorrectos, incompletos o engañosos*, incluso cuando se haya introducido correctamente toda la información preliminar sobre un problema y cuando las teclas se hayan pulsado en el orden correcto. Por ejemplo, un SAC corriente no facilita ningún resultado si se le solicita que resuelva la ecuación de primer orden $y' = \ln(x^2 + y^2)$. Y, sin embargo, el mismo SAC puede proporcionar soluciones *numéricas exactas* (consulte el capítulo 3). El mismo procedimiento de resolución de EDO del programa, aplicado a la ecuación no lineal de primer orden $2xy' + y^2 = 1$, da como resultado la familia uniparamétrica $y = \frac{e^{-C}x + 1}{-1 + e^{-C}x}$,

que no es exactamente igual que la solución proporcionada en la sección 1.2, pero las *gráficas* de estas familias serán idénticas. Además, el SAC no ofrece la solución singular $y \equiv 1$. Sobre todo, dado que la integración indefinida es importante para resolver muchas ecuaciones diferenciales, resultaría molesto que el *software* computacional proporcionase el valor de $\int 1/x \, dx$ como $\ln x$ en vez de la respuesta que podríamos esperar, $\ln|x| + C$. En este caso, el ordenador es correcto porque interpreta el logaritmo en términos de un *número complejo* x . Sin embargo, ya que en este curso estamos interesados en soluciones reales, debemos integrar $1/x$ como lo hacemos habitualmente en cálculo. (Compruebe el resultado de los ejemplos mostrados en este párrafo usando su propio SAC.)

A una escala más general, cualquiera puede utilizar los recursos de internet (la *World Wide Web*, WWW) para encontrar información. En el caso de ecuaciones diferenciales, esta exploración puede adoptar la forma de búsqueda de herramientas online (como las *applet Java*) para dibujar gráficas o para realizar cálculos numéricos, de recogida de datos reales para un proyecto de modelado o, simplemente, de utilización de tutoriales u hojas de cálculo SAC facilitadas por profesionales fuera de su propia institución. En esta actividad, deberá tener cuidado al utilizar una calculadora o un SAC. La Web es famosa por proporcionar información que puede resultar imprecisa. Explore (o “navegue por”) la red de un modo inteligente, y refuerce su intuición acerca de la fiabilidad de los datos con los que se encuentra. Finalmente, ni el profesor ni los alumnos deberían obsesionarse con la tecnología de tal modo que se acabe por eliminar toda interacción humana. Los profesores y los alumnos deberían conversar y escucharse con atención.

La conclusión de esta breve sección es que las calculadoras gráficas y los ordenadores son estupendos, pero también es necesario el conocimiento de la teoría matemática y de las técnicas de análisis. Intente siempre centrarse en la ciencia y en las matemáticas subyacentes que hay bajo los números y las gráficas. Internet puede ayudarnos a aprender mucho sin abandonar nuestra clase, biblioteca o casa, pero hemos de ser cautelosos y no creer todo lo que vemos. Utilicemos la tecnología sabiamente, recordando que sólo los seres humanos pueden pensar y emitir juicios... hasta ahora.

EJERCICIOS 1.3

1. Busque reseñas de algún *software* computacional de matemáticas generales, científico o específicamente para EDO, especialmente alguno al que tenga acceso desde su casa o escuela. Intente conseguir en Internet o en revistas de informática artículos sobre ese *software*. Incluso si no entiende todos los conceptos matemáticos de las reseñas, podrá obtener una idea general de los puntos fuertes y flacos de estos programas.
2. Lea las instrucciones necesarias para resolver sencillas EDO con el *software* al que tenga acceso. Intente aplicar estos conocimientos a la EDO no lineal de primer orden $y' + y = y^3 \sin x$, cuya familia de soluciones es $y(x) = \left[Ce^{2x} + \frac{2}{5}(\cos x + 2 \sin x) \right]^{-1/2}$,

donde C es una constante, y tiene $y \equiv 0$ como una solución singular. (*Compruebe esto a mano.*) ¿Se parece a éste el resultado proporcionado por su ordenador? Si no es así, utilice algo de álgebra. ¿Le es posible obtener la solución singular con su ordenador? Observe también lo que hace su ordenador con la ecuación $|y'| + |y| = 0$.

1.4. RESUMEN

El estudio de las ecuaciones diferenciales es tan antiguo como el desarrollo del cálculo por Newton y Leibniz a finales del siglo XVII. Suscitaron una gran motivación importantes preguntas como el cambio y el movimiento en la tierra y el cielo.

Una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** es una ecuación que implica una función desconocida o incógnita, su variable independiente y una o más de sus derivadas:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Una ecuación como ésta puede ser descrita en términos de su **orden**, el orden más alto de derivación de la función incógnita en la ecuación.

Las ecuaciones diferenciales también se pueden clasificar en **lineales** o **no lineales**. Las **ecuaciones lineales** se pueden escribir de esta forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

donde cada función coeficiente $a_i(x)$ sólo depende de x y no implica a y ni a ninguna de sus derivadas. Las **ecuaciones no lineales** habitualmente contienen productos, cocientes o combinaciones más elaboradas de la función desconocida y sus derivadas.

Una **solución** de una EDO es una función real de una variable real que, al ser sustituida en la ecuación, la satisface idénticamente en algún intervalo. Puede ocurrir que una EDO dada de orden n no tenga *ninguna* solución, que tenga una *única* solución o una *infinitud de soluciones*. Una *familia infinita de soluciones* puede caracterizarse por n constantes (parámetros). Estas constantes arbitrarias, si es que hay alguna, pueden ser evaluadas mediante la imposición de **condiciones iniciales** apropiadas (normalmente un número n de ellas, incluyendo el comportamiento de la solución en un único punto de su dominio) o de **condiciones de frontera** (en dos o más puntos). Nos referimos a la resolución de una ecuación diferencial con condiciones iniciales como, por jemplo, la resolución de un **problema de valor inicial (PVI)**. La resolución de una ecuación diferencial con condiciones de frontera se denomina resolución de un **problema de valores en la frontera (PVF)** o **problema de contorno**. En general, los PVF son más difíciles de resolver que los PVI. El resultado de resolver tanto un PVI como un PVF recibe el nombre de **solución particular** de la ecuación o **integral** de la ecuación. A la gráfica de una solución particular se la llama **curva integral** o **curva solución**. En los capítulos 2 y 3 hablaremos de la cuestión de la *existencia* y *unicidad* de solución de los PVI. ¿Tiene la ecuación o el sistema una solución que satisfaga las condiciones iniciales? En caso afirmativo, ¿existe sólo una solución?

Si *cada una de* las soluciones de una EDO de orden n en un intervalo se puede obtener a partir de una familia de n parámetros, si se eligen valores apropiados para las n constantes, entonces decimos que la familia es la **solución general** de la ecuación dife-

rencial. En este caso, necesitamos n condiciones iniciales o n condiciones de frontera para determinar las constantes. Sin embargo, algunas veces existen **soluciones singulares** que no se pueden hallar simplemente eligiendo los valores particulares de las constantes.

Al igual que en las escuelas o las universidades el álgebra introduce los sistemas de ecuaciones algebraicas, el estudio de ciertos problemas nos conduce a menudo al manejo de **sistemas de ecuaciones diferenciales**. Cada uno de éstos puede clasificarse a su vez en **sistemas lineales** o **sistemas no lineales**. Podemos especificar las condiciones iniciales o de contorno para los sistemas. Independientemente de que consideremos ecuaciones únicas o sistemas de ecuaciones, estamos tratando con situaciones *dinámicas*: situaciones en las que los objetos y las cantidades se mueven y cambian. En dicha situación dinámica, a menudo resulta útil centrarse en una **trayectoria**; para una sola ecuación, la curva compuesta de puntos $(x(t), x'(t))$, donde x es una solución; para un sistema de dos ecuaciones, el conjunto de puntos $(x(t), y(t))$, donde x e y son soluciones de un sistema.

Finalmente, si se estudian las ecuaciones diferenciales utilizando la tecnología, siempre hemos de ser conscientes de que las calculadoras y los ordenadores no son infalibles. Aparte de los errores humanos cometidos cuando se introducen los datos para ejecutar alguna orden, está el hecho de que un aparato tecnológico puede no ofrecer *ninguna respuesta* u ofrecer una *respuesta incorrecta* como resultado de un problema dado. Internet puede ayudarnos a entender las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, pero esta herramienta debe ser utilizada cuidadosamente. La combinación verdaderamente poderosa es la tecnología junto con la inteligencia humana y la comprensión matemática.

PROYECTO 1-1

Extraiga sus propias conclusiones

Incluso antes de aprender técnicas para resolver ecuaciones diferenciales, usted podría ser capaz de analizar ecuaciones *cualitativamente*. A modo de ejemplo, observe la ecuación no lineal $\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$. A continuación, analice las soluciones y de esta ecuación sin haberlas hallado realmente.

Para los siguientes pasos, dibuje el eje t horizontalmente y el eje y verticalmente.

- ¿Para qué valores de y la gráfica de y es como la de una función de t creciente? ¿Para qué valores de y es decreciente?
- ¿Para qué valores de y la gráfica de y es cóncava hacia arriba? ¿Para qué valores de y es cóncava hacia abajo? (*¿Qué información se necesita para responder a una pregunta sobre concavidad? Recuerde que y es una función implícita de t .*)
- Supongamos que se le ha proporcionado la condición inicial $y(0) = 0.5$. Utilice la información hallada en los apartados (a) y (b) para dibujar la gráfica de y . ¿Cuál es el comportamiento *a largo plazo* de $y(t)$? Es decir, ¿cuál es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$?

- d. Supongamos que se le ha proporcionado la condición inicial $y(0) = 1,5$. Utilice la información hallada en los apartados (a) y (b) para dibujar la gráfica de y . ¿Cuál es el comportamiento *a largo plazo* de $y(t)$? Es decir, ¿cuál es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$?
- e. Dibuje la gráfica de y si $y(0) = 1$. (*Consulte la ecuación original.*)
- f. Si $y(t)$ representa la población de algunas especies de animales, y si las unidades sobre el eje y están en miles, interprete los resultados de los apartados (c), (d) y (e).