Partie 2.1

Question préli : Cette équation s'appelle ainsi car elle décrit le déplacement d'une quantité de matière dans un espace.

existence : Soit u / $\forall x, t$, $u(t,x) = u_0(x - \beta t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta u_0' = -\beta \frac{\partial u}{\partial x}$$ Donc u est solution de (1)

unicité : Soit u une solution de (1)

On considère $\forall t$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_0 + \beta t)$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

$= 0$ car u est solution de (1)

Ainsi le fait de connaître la solution en 0 fixe toutes les valeurs de la solution (unicité)

Question 1.1

$$\begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_M^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h\beta}{h} & & (0) \\ \frac{h\beta}{h} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \frac{h\beta}{h} & 1 - \frac{h\beta}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_M^n \end{pmatrix}$$

On écrit $U_{NEW} = A \, U_{OLD}$

Question 2.2 cf cvt1.m

Question 1.3 On observe un affaissement de la solution approché par rapport à la solution exacte.
pour $r = 3.0$ la courbe sort de $[a, b]$

Question 1.4 A partir de $h = 0{,}021$ ça diverge.
pour $h = 0{,}02$ la solution approchée fit très bien la solution exacte.

En effet $h = \frac{2}{100} = 0{,}02$ Donc $\frac{k}{h} = 1$

Il ne reste donc plus que le terme β comme dans le model exact.

Question 1.5 cf code cvt1error.m

Question 1.6 Le schéma ne fonctionne pas pour $\beta = -1$

Partie 2.2

Question 2.1

$$U_{NEW} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta^2 k^2}{h^2} - 1 & \frac{\beta^2 k^2}{2h^2} - \frac{\beta k}{2h} & & (0) \\ \frac{\beta^2 k^2}{2h^2} + \frac{\beta k}{h} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{\beta^2 k^2}{2h^2} - \frac{\beta k}{2h} \\ (0) & & \frac{\beta^2 k^2}{2R^2} + \frac{\beta h}{h} & -\frac{\beta^2 k^2}{h^2} - 1 \end{pmatrix} U_{OLD} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\frac{\beta^2 k^2}{2h^2} - \frac{\beta h}{2h}\right) U^n_{m+1} \end{pmatrix}$$

cf cvt2d.m

Question 2.2 On voit la courbe approximée qui se creuse devant la courbe exacte et prend un peu de retard.

Question 2.3 cf cvt2derror.m

Partie 2.3

Question 3.1

$$U_{NEW} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} - \frac{\beta k}{2h} & & (0) \\ \frac{1}{2} + \frac{\beta k}{2h} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} - \frac{\beta k}{2h} \\ (0) & & \frac{1}{2} + \frac{\beta k}{2h} & 0 \end{pmatrix} U_{OLD} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta k}{2h}\right) U^n_{M+1} \end{pmatrix}$$

cf cvt3d.m

Question 3.2

On observe un affaissement de la courbe approchée.

Question 3.3

cf cvt3d error.m

Partie 2.4

Question 4.1

$$U_{NEW} = A\, U_{OLD} + U_{OLD\,OLD} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{k\beta}{h} U^n_{M+1} \end{pmatrix}$$

avec $U_{OLDOLD} = \left(U_1^{n-1}, \dots, U_M^{n-1} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k\beta}{h} & & (0) \\ \frac{k\beta}{h} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{k\beta}{h} \\ (0) & & \frac{k\beta}{h} & 0 \end{pmatrix}$$

Question 4.2 On observe une perturbation derrière la courbe approchée.

Question 4.3 cf cot4 erreur.m

Partie 2.5

Question 5.1 On a $AU_{NEW} = BU_{OLD}$

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{h} & \frac{\beta}{4h} & & (0) & & 0 \\ -\frac{\beta}{4h} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \frac{\beta}{4h} & & \\ & (0) & -\frac{\beta}{4h} & \frac{1}{h} & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \\ M \\ M+1 \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccccc} 1/h & -\frac{\beta}{4h} & & (0) & 0 \\ \frac{\beta}{4h} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\beta}{2h} & \\ & (0) & \frac{\beta}{4h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & \cdots & & \frac{\beta}{4h} & -\frac{\beta h}{h} \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \\ M \\ M+1 \end{array}$$

cf cot5d.m

Question 5.2 On voit la courbe se creuser légèrement avant le pic

Question 5.3 cf cvt5derror.m

Comparaison des 5 schémas :

Stabilité et convergence : Le schéma de Lax Wendroff semble montrer une meilleure convergence vers la solution exacte, comme en témoigne la diminution significative de l'erreur avec l'augmentation de M

Précision : Le schéma de Lax - Wendroff est aussi celui qui arrive à la solution la plus précise

Les schémas de Crank - Nicholson, Leap - Frog et Lax - Friedrich ont des résultats similaires