4. Equation de Laplace en dimension 1 en différences finies

(1) On a $-u''(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$
et $u(a) = u(b) = 0$

(a) $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pi \\ f = \sin \end{cases}$ Donc $u(x) = \sin(x) + C_1 x + C_2$
et $u(0) = C_2 = 0$ et $u(\pi) = C_1\pi = 0$

donc $u = \sin$

(b) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ f(x) = (x-a)(x-b) \ \forall x \in [a,b] \end{cases}$ Donc $-u(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + C_1 x + C_2$

et $\begin{cases} u(-1) = 0 \\ u(2) = 0 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} -\frac{3}{4} - C_1 + C_2 = 0 \\ -4 + 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$ cad $\begin{cases} C_1 = 1{,}08\bar{3} \\ C_2 = 1{,}8\bar{3} \end{cases}$

Donc $\forall x \in [a,b] \quad u(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 1{,}08\bar{3}x + 1{,}8\bar{3}$

(c) $\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \\ f(x) = -(x^2 + 4x)\exp(x) \end{cases}$ Donc $u(x) = e^x(x^2 - 2) + C_1 x + C_2$
et $\begin{cases} C_1\sqrt{2} + C_2 = 0 \\ -C_1\sqrt{2} + C_2 = 0 \end{cases}$ cad $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$

Donc $\forall x \in [a,b] \quad u(x) = e^x(x^2 - 2)$

(2) (a) Soit $x \in [a,b]$. On dispose de ε définie au voisinage V de 0 telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et telle que $\forall x \in]a,b[$ et $\forall h \in V$

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + \frac{f^{(2)}(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4 + h^4\varepsilon(h)$$
$$f(x-h) = f(x) - f^{(1)}(x)h + \frac{f^{(2)}(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{24}h^4 + h^4\varepsilon(h)$$

(D'après la formule de Taylor à l'ordre 4)

donc $\forall x \in]a,b[$ et $\forall h \in V$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f^{(2)}(x)\,h^2 + \frac{f^{(4)}(x)}{12}\,h^4 + 2h^4\,\varepsilon(h)$$

Quitte à redéfinir ε, on peut écrire :

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f^{(2)}(x)\,h^2 + h^2\,\varepsilon(h)$$

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f^{(2)}(x) + \varepsilon(h)$$

On peut donc approcher (21) par

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i) \qquad i = 1, \dots, M$$

$$-\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_M) \end{pmatrix}$$

(b) cf lap1d.m

(c) cf erreurLap1d.m

5 Equation de la chaleur en dimension 1 en différences finies

(1)

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{2\alpha k}{h^2} & \frac{\alpha k}{h^2} & & (0) \\ \frac{\alpha k}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{\alpha k}{h^2} \\ (0) & & \frac{\alpha k}{h^2} & 1-\frac{2\alpha k}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ \vdots \\ v_M^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ \vdots \\ v_M^{n+1} \end{pmatrix}$$

(2) (3) (4)

cf chal1d.m

On voit que $\alpha \frac{k}{h^2}$ permet de mettre en place un critère de stabilité du schéma.
On voit que pour $h = 0,0001$, $\frac{\alpha k}{h^2} = 0,25$, la solution trouvée est stable

A partir de $\alpha \frac{k}{h^2} = 0,5$, on franchit la limite de stabilité et on commence à voir des signes d'écartements à la solution idéale.

(5) Changer l'initialisation entre les lignes 18 et 28 dans chal1d.m

(6) cf courbe rouge qui s'affiche dans le premier plot

(7) cf chal1d_error.m

Schéma implicite de discrétisation en temps

Q.1

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{1}{h}-2\theta & \theta & & (0) & 0 \\
\theta & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & \ddots & \ddots & \theta & \vdots \\
(0) & & \theta & \frac{1}{k}-2\theta & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}}_{A}
\times
\begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_M^{n+1} \\ U_{M+1}^{n+1} \end{pmatrix}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{1}{h}-\frac{2\beta}{h^2}(1-\theta) & \frac{\beta}{h^2}(1-\theta) & & (0) & 0 \\
\frac{\beta}{h^2}(1-\theta) & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & \ddots & \ddots & \frac{\beta}{h^2}(1-\theta) & \vdots \\
(0) & & \frac{\beta}{h^2}(1-\theta) & \frac{1}{h}-\frac{2\beta}{h^2}(1-\theta) & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \frac{\beta}{hh} & 1-\frac{\beta h}{h}
\end{pmatrix}}_{B}
\begin{pmatrix} U_1^{n} \\ \vdots \\ U_M^{n} \\ U_{M+1}^{n} \end{pmatrix}
$$

$$U_{NEW} = A^{-1} B \, U_{OLD}$$

Q.2

6. Equation de Laplace en dimension 1 en éléments finis

Q.1 $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i$ est solution de (28)

ssi $\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k'(x) \, \phi_i'(x) \, dx = \int_\Omega f(x) \, \phi_i(x) \, dx \; ; \forall i$

ssi
$$\underbrace{\int_\Omega \begin{pmatrix} \phi_1'(x)^2 & \cdots & \phi_1'(x)\phi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n'(x)\phi_1'(x) & \cdots & \phi_n'(x)^2 \end{pmatrix}}_{M} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{A} dx = \underbrace{\int_\Omega \begin{pmatrix} f(x)\phi_1(x) \\ \vdots \\ f(x)\phi_n(x) \end{pmatrix} dx}_{B}$$

Q.2 Soit $(a_i)_{i \in [\![1, n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tq

$\sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i = 0$ En évaluant cette somme

pour tout les valeurs $(x_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ on montre

que $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$

Ainsi (ψ_i) forme une famille libre

De plus soit $v \in V^h$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$

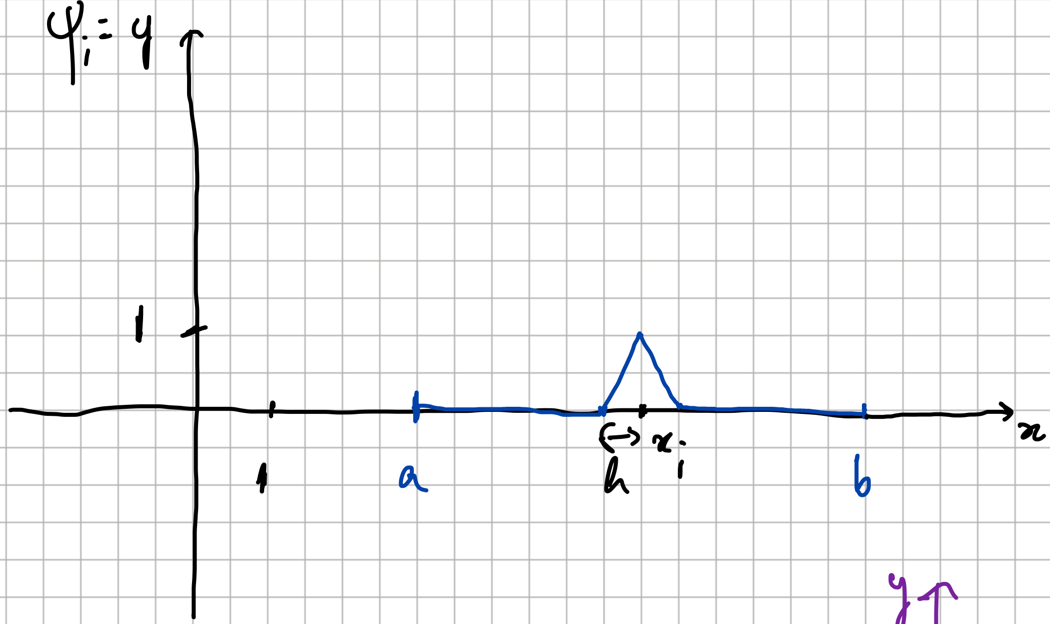
v est affine sur $[x_j, x_{j+1}]$ de valeur $v(x_j) = y_i$

Ainsi on peut construire v :

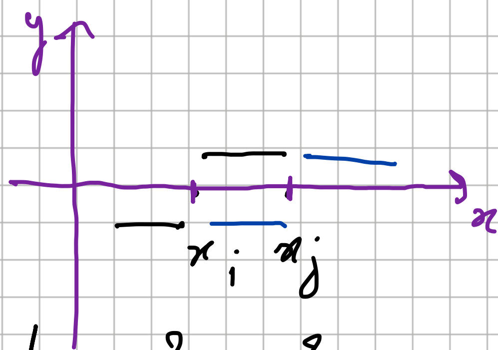
$v = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \psi_i$ Donc (ψ_i) est générateur de V^h

Ainsi (φ_i) est une base de V^h

Q.3



Q.4 si $i = j-1$ $\displaystyle\int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx = -\frac{1}{h}$



si $i = j$ $\displaystyle\int_a^b \varphi_i'(x)^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\,dx \times 2 = \frac{2}{h}$

$$\int \begin{pmatrix} \phi_1'(x)^2 & \cdots & \phi_1'(x)\phi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n'(x)\phi_1'(x) & \cdots & \phi_n'(x)^2 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 2/h & -1/h & & (0) \\ -1/h & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \end{pmatrix}$$

Q.5 Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$

$$B_j = \int_a^b f(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \frac{h}{2}\Big[f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + 2f(x_j)\varphi_j(x_j) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1}) \Big]$$

Q 6 cf LaplaceEF1D.m

Q 7 On a une EDP de Poisson aux conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\forall x \in \Omega$ on définit $f = \pi^2 \sin(\pi x)$

On a donc $v : x \longmapsto \sin \pi x$

car $v'' : x \longmapsto -\pi^2 \sin \pi x$ et $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases}$

Q 8 cf LaplaceEF1D.m

Q 9 cf LaplaceEF1D error

L'ordre est proche de -2, on peut donc considérer que l'erreur diminue proportionnellement au carré de h.

II. Equation de la chaleur en dimension 1 en éléments finis

Q 1 (29)
$$\frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1} - u^n\right) - \Delta u^{n+1} = f(t^{n+1}, x)$$

On multiplie par v une fonction test qui s'annule sur $\partial\Omega$ et on intègre sur Ω

On a
$$\int_\Omega \frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1} - u^n\right) v \, dx - \int_\Omega \Delta u^{n+1} v \, dx$$
$$= \int_\Omega f(t^{n+1}, x) \, v \, dx$$

D'après la formule de green :

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx + \int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma$$

Or $\quad -\int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = 0 \qquad$ car $v\big|_\Gamma = \tilde{0}$

$$\int_\Omega \frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) v \, dx + \int_\Omega \nabla v \nabla u^{n+1} dx = \int_\Omega f(t^{n+1}, x) \, v \, dx \qquad (E)$$

On applique (E) à tous les (ψ_i) avec $u = \sum_i a_i \psi_i$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$\int_\Omega \frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) \psi_i \, dx + \int_\Omega \nabla \psi_i \nabla u^{n+1} dx = \int_\Omega f(t^{n+1}, x) \psi_i \, dx \qquad (E)$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$

$$\int_\Omega \frac{1}{h} \left(\sum_i a_i^{n+1} \psi_i - \sum_i a_i^n \psi_i \right) \psi_j + \int_\Omega \nabla \psi_j \nabla \sum_i a_i^{n+1} \psi_i$$

$$= \int_\Omega f(t^{n+1}, x) \, \psi_j(x) \, dx$$

Soit

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{1}{h} \sum_{i=j-1}^{j+1} (a_i^{n+1} - a_i^n) \psi_i \psi_j + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \psi_j' \sum_{i=j-1}^{j+1} a_i^{n+1} \psi_i'$$

$$= \int_\Omega f(t^{n+1}, x) \, \psi_j(x) \, dx$$

On pose $B_{n+1} = \left(\int_\Omega f(t^{n+1}, x) \, \psi_j(x) \, dx \right)_j$

$$\begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_2} \frac{\psi_1^2}{h}+\psi_1'^2 & \int_{x_0}^{x_2}\frac{\psi_1\psi_2}{h}+\psi_1'\psi_2' & & (0) \\ \int_{x_1}^{x_3}\frac{\psi_1\psi_2}{h}+\psi_1'\psi_2' & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \int_{x_{n-2}}^{x_n}\frac{\psi_{n-1}\psi_n}{h}+\psi_{n-1}'\psi_n' \\ (0) & & \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\frac{\psi_{n-1}\psi_n}{h}+\psi_{n-1}'\psi_n' & \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\frac{\psi_n^2}{h}+\psi_n'^2\end{pmatrix} \times A_{NEW}$$

$$-\frac{1}{h}\begin{pmatrix} \int_0^2 \psi_1^2 & \int_0^2 \psi_1\psi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \int_1^3 \psi_1\psi_2 & \int_1^3 \psi_2^2 & \int_1^3 \psi_2\psi_3 & (0) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \int_{n-2}^{n} \psi_{n-1}\psi_n \\ (0) & & & \int_{n-1}^{n+1} \psi_{n-1}\psi_n & \int_{n-1}^{n+1} \psi_n^2 \end{pmatrix} A_{OLD}$$

$= B_{NEW}$

cf Laplace_impEF1D.m

Q.2

De même que précédemment on a :

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$\int_\Omega \frac{1}{\Delta t}\left(u^{n+1}-u^n\right)\psi_i \, dx + \int_\Omega \nabla\psi_i \nabla u^n \, dx = \int_\Omega f(t^n, x)\psi_i \, dx \qquad (E)$$

càd $\forall j \in [\![1, n]\!]$ et $\forall n$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{1}{h}\sum_{i=j-1}^{j+1}\left(a_i^{n+1}-a_i^n\right)\psi_i \, \psi_j + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \psi_j' \sum_{i=j-1}^{j+1} a_i^n \psi_i'$$

$$= \int_\Omega f(t^n, x)\, \psi_j(x)\, dx$$

On pose $B_{n+1} = \left(\int_\Omega f(t^n, x)\, \psi_j(x)\, dx\right)_j$

$$
-\begin{pmatrix}
\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} \frac{\psi_1^2}{h} - \psi_1'^2 & \displaystyle\int_{x_0}^{x_2} \frac{\psi_1\psi_2}{h} - \psi_1'\psi_2' & & (0) \\
\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} \frac{\psi_1\psi_2}{h} - \psi_1'\psi_2' & \ddots & \ddots & \displaystyle\int_{x_{n-2}}^{x_n} \frac{\psi_{n-1}\psi_n}{h} - \psi_{n-1}'\psi_n' \\
(0) & \ddots & \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{\psi_{n-1}\psi_n}{h} - \psi_{n-1}'\psi_n' & \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{\psi_n^2}{h} - \psi_n'^2
\end{pmatrix} \times A_{OLD} \qquad e_1
$$

$$
+\frac{1}{h}\begin{pmatrix}
\int_0^2 \psi_1^2 & \int_0^2 \psi_1\psi_2 & 0 & \cdots & 0 \\
\int_1^3 \psi_1\psi_2 & \int_1^3 \psi_2^2 & \int_1^3 \psi_2\psi_3 & (0) & \vdots \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \int_{n-2}^{n} \psi_{n-1}\psi_n \\
 & (0) & & \int_{n-1}^{n+1} \psi_{n-1}\psi_n & \int_{n-1}^{n+1} \psi_n^2
\end{pmatrix} A_{NEW} \qquad e_2
$$

$$= B_{NEW}$$

cf Laplace_imp EF1D.m

8. Résolution d'EDP via FreeFem++

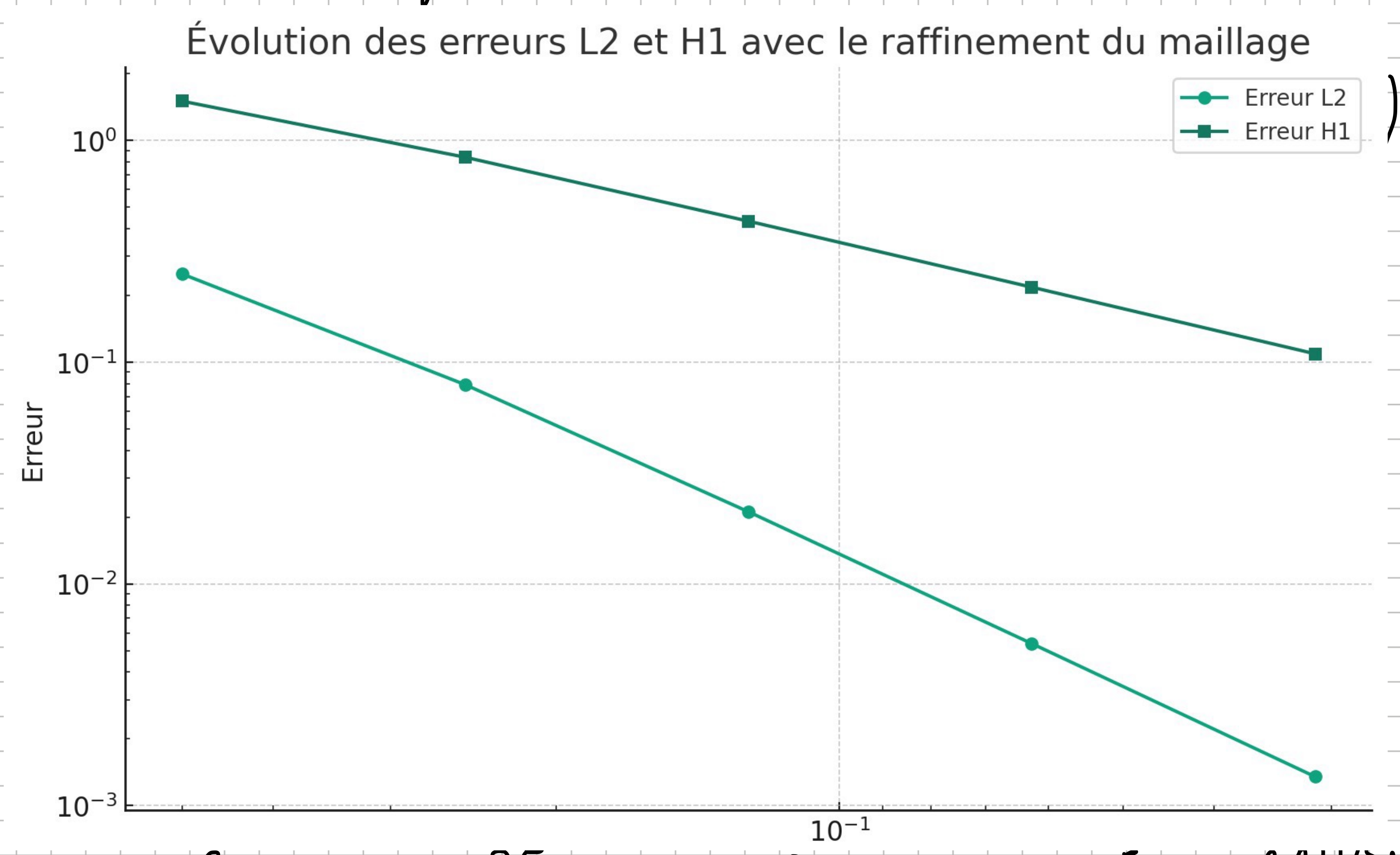
8.1.1 → prise_en_main.edp

8.1.2 → lap_convergence.edp

je choisis $u : x \longmapsto \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} : x \longmapsto \pi \cos(\pi x)\sin(\pi y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} : x \longmapsto \pi \sin(\pi x)\cos(\pi y)$



0,5 0,25 0,125 0,0625 0,03125 h

On voit que la solution converge bien quand h tend vers 0.

8.1.3

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On multiplie par une fonction test et on intègre sur Ω

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\, v = \int_\Omega f v$$

D'après la formule de green :

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx + \int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma$$

Ainsi $$-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx - \underbrace{\int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma}_{=0}$$

Ainsi il s'agit de trouver v tel que $\forall v$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega u v = \int_\Omega f v$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \alpha u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur} \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$

On multiplie par une fonction test et on intègre sur Ω

$$\int_\Omega -\Delta u \, v = \int_\Omega f v$$

Ainsi en utilisant Green on a :

$$-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx - \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma \quad \text{càd} \quad -\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx - \int_\Gamma (g - \alpha u)\, v \, d\gamma$$

On veut donc trouver u tel que $\forall v$

$$\int_{\Omega} \Pi\, u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha u v \, d\gamma = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\gamma$$

8.2.1 cf elasticite_linearisee.edp

8.2.2