TP n°1 – Equation de la chaleur et mouvement brownien

☞ Pour « valider » ce TP et vérifier que vous avez bien compris les méthodes probabilistes qui sont en jeu, on utilisera **Python** de préférence.

Exercice 1. Ecrire un programme qui simule le mouvement d'une particule brownienne sur l'intervalle de temps [0, T] (pas de temps T/N avec N entier), qui démarre d'une position initiale x et qui diffuse avec un coefficient σ. Visualiser quelques simulations de trajectoires sur un même graphique. Tester différentes valeurs de σ.

Problème 1. On reprend l'EDP de la chaleur sur une barre infinie sous des hypothèses physiques classiques (σ est le coefficient de diffusion) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) \; ; \; \theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

La température initiale (t = 0) est prise de la forme (mélange de 2 gaussiennes):

$$\theta_0(x) = \theta_1 \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + \theta_2 \exp\left(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

ce qui conduit à la solution analytique explicite immédiate (pourquoi ?) :

$$\theta(t, x) = \frac{\sigma_1\theta_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma^2 t)}\right) + \frac{\sigma_2\theta_2}{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2(\sigma_2^2+\sigma^2 t)}\right)$$

On choisira comme valeurs de référence :

- $\theta_1 = 300$ (K), $\theta_2 = 500$ (K), $\mu_1 = -0.4$ (m), $\mu_2 = 0.2$ (m), $\sigma_1 = 0.2$ (m), $\sigma_2 = 0.1$ (m) pour la condition initiale
- $\sigma = 0.05$ (m.s$^{-0.5}$) pour le coefficient de diffusion
- T = 10 (s) pour l'instant final

Partie 1 – Résolution numérique par la formule de représentation probabiliste de la solution

Mettre en œuvre une procédure qui estime par méthode Monte-Carlo $\theta(t, x)$ en fonction de t, x, et N le nombre de simulations. On donnera un intervalle de confiance à 95%.

Vérifier la validité de votre procédure d'estimation (consistance et niveau de confiance annoncé).

Partie 2 – Méthode particulaire

On vérifie que l'énergie est conservée puisque l'intégrale $\int \theta(t, x)dx = \sqrt{2\pi}\,(\sigma_1\theta_1 + \sigma_2\theta_2)$ est constante au cours du temps.

On sait par ailleurs que la densité d'énergie correspondante, i.e. la fonction

$$d(t, x) = \frac{\theta(t, x)}{\sqrt{2\pi}\,(\sigma_1\theta_1 + \sigma_2\theta_2)},$$

est la densité de la variable aléatoire $X_0 + \sigma W_t$, où X_0 est de loi de densité $d_0(x) = d(0, x)$ et où $(W_t)_t$ désigne un mouvement brownien standard indépendant de X_0.

On propose ici de vérifier par expériences numériques cette interprétation probabiliste en utilisant encore la méthode Monte-Carlo qui consiste à simuler un « grand » nombre de fois la v.a. en question puis à estimer sa densité par lissage.

Problème 2 – Conditions de Dirichlet

On s'intéresse à l'EDP de la chaleur suivante sur une barre finie

$$\begin{aligned} &\mathbf{x \in]-a, b[\ (a, b > 0) :} \quad \frac{\partial\theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, x)\ ;\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) \\ &\mathbf{t > 0 :} \quad \theta(t, x = -a) = \theta_a\ ,\ \theta(t, x = b) = \theta_b \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que la fonction $\theta_\infty(x) = \theta_a + (\theta_b - \theta_a)\times\frac{x + a}{b + a}$ est la solution dans l'état stationnaire.

Lorsque la température initiale est de la forme

$$\theta_0(x) = \theta_\infty(x) + \theta_1\sin(2\pi n_1\frac{x + a}{2(b+a)}) + \theta_2\sin(2\pi n_2\frac{x + a}{2(b + a)}) \text{ avec } n_1, n_2 \text{ entiers,}$$

on a, de manière explicite,

$$\theta(t, x) = \theta_\infty(x) + \theta_1\exp(-\frac{\pi^2 n_1^2}{(b + a)^2}\times\frac{\sigma^2 t}{2})\times\sin(2\pi n_1\frac{x + a}{2(b + a)}) + \theta_2\exp(-\frac{\pi^2 n_2^2}{(b + a)^2}\times\frac{\sigma^2 t}{2})\times\sin(2\pi n_2\frac{x + a}{2(b + a)})$$

Mettre en œuvre une procédure Monte-Carlo qui calcule la température $\theta(t, x)$ en un point particulier (t, x) à partir de la représentation probabiliste vue en TD. On donnera un intervalle de confiance à 95%. Vérifier votre procédure en comparant à la valeur exacte ci-dessus pour la condition initiale correspondante. **On pourra utiliser les valeurs $a = b = 1$, $\theta_a = 100$, $\theta_b = 500$, $\sigma = 0.01$, $n_1 = 5$, $n_2 = 8$, $\theta_1 = 50$, $\theta_2 = 100$ et $(t, x) = (60, 0)$.**

Remarque. Par le principe de superposition et l'analyse classique de Joseph Fourier (cf. Traité analytique de la chaleur, 1822), on peut facilement obtenir la solution analytique dans le cas général comme dans le cas d'une barre infinie. En particulier, on a les résultats probabilistes suivants par « simple » décomposition en série de Fourier :

$$f_{x + \sigma B_t \mid T_x > t}(u)\times P(T_x > t) = \frac{2}{b+a}\sum_{n \geq 1}\exp(-\frac{\pi^2 n^2}{(b + a)^2}\times\frac{\sigma^2 t}{2})\times\sin(\pi n\frac{x + a}{b + a})\times\sin(\pi n\frac{u + a}{b + a})$$

avec

$$P(T_x > t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k \geq 0}\frac{1}{2k+1}\exp(-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{(b + a)^2}\times\frac{\sigma^2 t}{2})\times\sin((2k+1)\pi\frac{x + a}{b + a})$$