Fiche TD 1
Lien entre Processus aléatoires et EDPs

Exercices 1.1, 1.2 et 1.3 du support de cours (slide n° 3 / 31) : ces exercices permettent de réviser le calcul différentiel ordinaire avant d'aborder dans une seconde partie du cours le calcul différentiel stochastique.

Exercice 1 (reprise de l'exercice 2.1 du cours, slide n° 7) - solution forte de l'équation de la chaleur sur une barre infinie

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, x) \quad (t > 0)\ ;\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

avec $\sigma^2 = 2D$; $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité thermique ($m^2\ s^{-1}$).

On suppose la condition initiale θ_0 **continue, positive ou nulle, nulle à l'infini** et telle que

$$0 < Q_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c\theta_0(x)dx < +\infty\ .$$

On note $\mathbf{p(t, z)} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp(-\dfrac{z^2}{2\sigma^2 t})$ (noyau de la chaleur).

Montrer que le produit de convolution

$$\theta(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y)p(t, x - y)dy$$

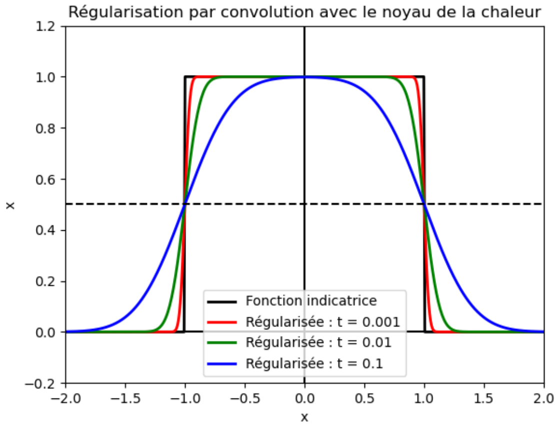
définit une fonction de classe C^∞ sur le domaine $]0\ ; +\infty[\times\mathbb{R}$ qui est solution de l'EDP de la chaleur. On montrera en particulier que

$$\theta(t, x) \to \theta_0(x) \text{ lorsque } t \downarrow 0 \text{ pour tout } x.$$

Vérifier également que pour tout t, $\theta(t, x)$ est nulle à l'infini et la relation (de conservation de l'énergie) :

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c\theta(t, x)dx.$$

Exercice 2 – sur le phénomène de régularisation et de propagation instantanée à l'infini de la chaleur (voir code Python demo2_slide7.py)



Obtenir la solution analytique de l'EDP de la chaleur sur une barre infinie

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) \quad (t > 0)\ ;\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

lorsque la condition initiale θ_0 est la fonction indicatrice de l'intervalle [-1 ; +1].

Exercice 3 (reprise de l'exercice 2.5 du cours, slide n° 15) – solution de l'équation de diffusion de la chaleur sur une barre infinie avec terme source stationnaire

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) + f_0(x) \quad (t > 0)\ ;\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

Montrer (sans se soucier des hypothèses qui permettent de justifier vos calculs) que la fonction $\theta(t, x) = E[\ \theta_0(x + \sigma B_t)\ ] + E[\ \int_0^t f_0(x + \sigma B_s)ds\ ]$ est solution où $(B_t)_{t \geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard.

Exercice 4 – équation de la chaleur sur une barre finie avec conditions de Dirichlet en régime permanent ou dans le cas stationnaire

On rappelle l'EDP :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \text{ dans }]-a\ ;\ b[$$

$$\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$

$$\theta(t, x = -a) = \theta_a \text{ et } \theta(t, x = +b) = \theta_b \text{ pour tout } t > 0$$

et la représentation probabiliste de la solution

$$\theta(t, x) = E[\ 1_{T_x > t}\ \theta_0(x + \sigma B_t)\ ] + \theta_a P(T_x \leq t \text{ et } x + \sigma B_{T_x} = -a) + \theta_b P(T_x \leq t \text{ et } x + \sigma B_{T_x} = +b)$$

1. On examine le cas où $t \uparrow +\infty$. On note $\theta_\infty(x)$ la valeur limite de $\theta(t, x)$ pour tout x de la barre supposée finie. De quelle équation différentielle est solution la fonction $\theta_\infty(x)$? La résoudre et obtenir l'expression de $\theta_\infty(x)$.

2. A partir de la représentation probabiliste de la solution, obtenir les valeurs des deux probabilités d'atteinte du bord :

$$\mathbf{P}(x + \sigma \mathbf{B}_{\mathrm{T}_x} = -\,\mathbf{a}) \; ; \; \mathbf{P}(x + \sigma \mathbf{B}_{\mathrm{T}_x} = +\mathbf{b})$$

Exercice 5 (reprise de l'exercice 2.8, slide n° 18) – méthode particulaire pour la résolution de l'équation de la chaleur sur une barre finie avec conditions de Dirichlet

On rappelle la solution $\boldsymbol{\theta(t, x) = E[\, \theta(t - t \wedge T_x , x + \sigma B_{t \wedge T_x}) \,]}$ de l'EDP de la chaleur sur une barre finie avec conditions de Dirichlet (cf. cours slides 16 et 17).

1. Retrouver la décomposition $\boldsymbol{\theta(t, x) = \theta_s(t, x) + \theta_b(t, x)}$ où $\boldsymbol{\theta_s(t, x)}$ est la contribution du terme source $\boldsymbol{\theta(t{=}0, x) = \theta_0(x)}$ (condition initiale à $t = 0$) et $\boldsymbol{\theta_b(t, x)}$ la contribution due aux conditions au bord à $\boldsymbol{x = -\,a}$ et $\boldsymbol{x = b}$.

2. Obtenir une interprétation probabiliste du terme source $\boldsymbol{\theta_s(t, x)}$ analogue à celle vue en cours dans le cas d'une barre infinie. En déduire une procédure Monte-Carlo pour estimer ce terme qui utilise une population de « grains de chaleur » qui diffusent au cours du temps.

3. En considérant la différence $\boldsymbol{\theta(t, x) - \theta(t{=}{+}\infty, x)}$, proposer une procédure globale d'estimation de $\theta(t, x)$ qui consiste à utiliser une population de particules qui diffusent au cours du temps (méthode particulaire).

Problème – solution analytique de l'équation de la chaleur sur une barre finie et application au calcul de lois de probabilité

On considère encore l'EDP de la chaleur sur une barre finie avec conditions de Dirichlet

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \text{ dans }]-a\,;\, b[$$
$$\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$$
$$\theta(t, x = -\,a) = \theta_a \text{ et } \theta(t, x = +b) = \theta_b \text{ pour tout } t > 0$$

1. (résolution analytique) Déterminer des solutions de la forme $\boldsymbol{\theta(t, x) = f(t) \times g(x)}$ qui vérifient les conditions aux bords $\boldsymbol{\theta(t, x = -\,a) = 0}$ et $\boldsymbol{\theta(t, x = +b) = 0}$ pour tout $t > 0$. A quelles conditions initiales remarquables $\boldsymbol{\theta(t{=}0, x)}$ ces fonctions correspondent-elles ?

2. En déduire une expression analytique de la solution dans le cas $\theta_a = \theta_b = 0$ par décomposition en série de Fourier de la condition initiale $\theta_0(x)$.

3. (conséquences probabilistes ☺) En déduire l'expression suivante de la densité de la loi conditionnelle de la variable aléatoire $\boldsymbol{x + \sigma B_t}$ sachant que l'événement $\{ \mathrm{T}_x > t \}$ est réalisé :

$$f_{x+\sigma B_t \mid T_x > t}(u) \times P(T_x > t) = \frac{2}{b+a} \sum_{n \geq 1} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{(b+a)^2} \times \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \times \sin\left(\pi n \frac{x+a}{b+a}\right) \times \sin\left(\pi n \frac{u+a}{b+a}\right)$$

avec

$$P(T_x > t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} \exp\left(-\frac{\pi^2 (2k+1)^2}{(b+a)^2} \times \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \times \sin\left((2k+1)\pi \frac{x+a}{b+a}\right)$$

4. Quelle est la loi du temps d'atteinte T_x de la double barrière $x = -a$ et $x = +b$ pour une particule brownienne issue du point x et qui diffuse selon le coefficient σ ?

5. Donner enfin une expression analytique de la solution dans le cas général (θ_a et θ_b quelconques).