2. Travail préliminaire

1. On a :

$$f_X : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha)\,\theta^{\alpha}}$$

et $$f_Y : y \mapsto \frac{y-\mu-2b}{4b^2}\, \mathbb{1}_{\{y \in [\mu-2b,\mu]\}} + \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{y-\mu}{b}\right) \mathbb{1}_{\{y>\mu\}}$$

On peut utiliser $I(X+Y>0)$ qui vaut $\begin{cases} 1 & \text{si } X+Y>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $$\begin{aligned} p &= E(I(X+Y>0)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} I(x+y>0)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

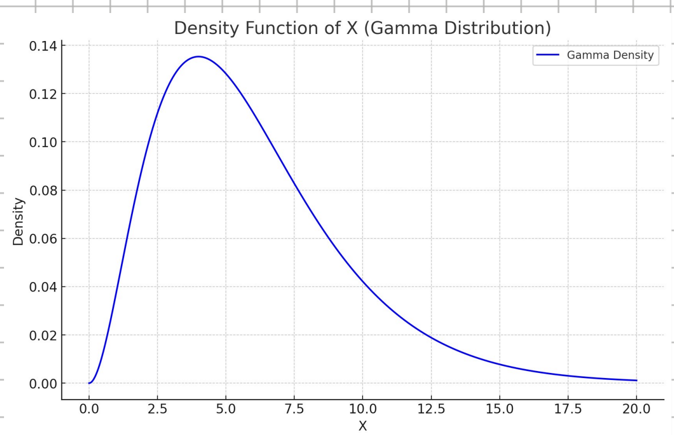
avec f_{XY} la fonction de densité jointe de X et Y qui vaut le produit des densités marginales par indépendance :

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Ainsi on a finalement :

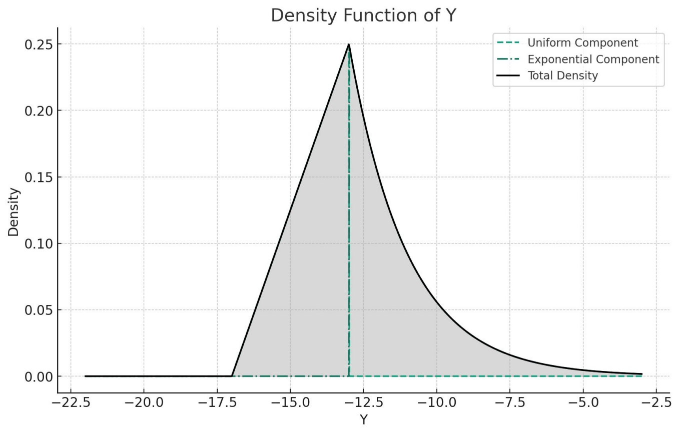
$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-x}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

2. X suit une loi gamma :



Dans notre cas, $\alpha = 3 \in \mathbb{N}$.
Ainsi X peut se représenter comme la somme de 3 v.a indépendantes exponentielles de paramètre $\lambda = \frac{1}{\theta}$ et de densité : $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Pour Y on a :



Pour simuler Y on va tirer p selon une loi uniforme sur $[0,1]$.

On a
$$F_Y : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < \mu - 2b \\ \dfrac{(y-\mu+2b)^2}{8b^2} & \text{si } y \in [\mu - 2b, \mu] \\ 1 - \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{y-\mu}{b}\right) & \text{si } y > \mu \end{cases}$$

F_Y est strictement croissante à partir de $\mu - 2b$ donc

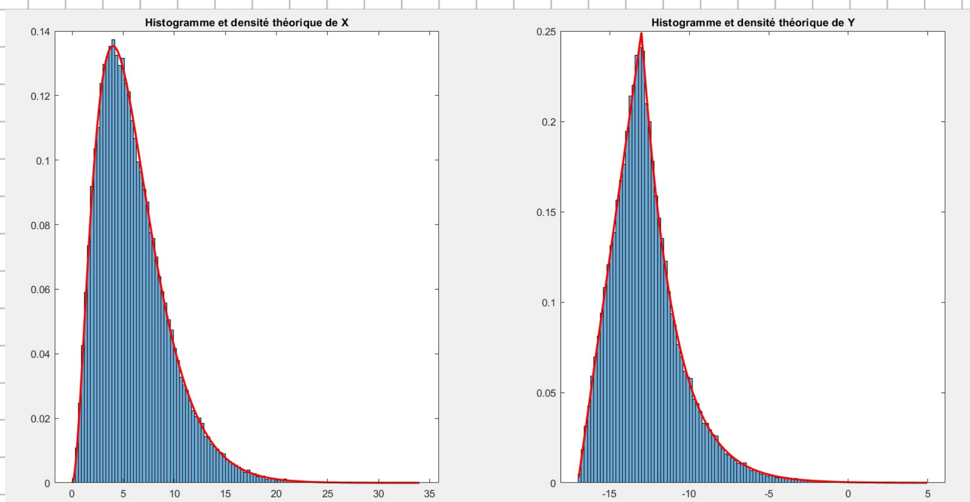
et
$$F_Y^{-1} : [0,1] \longrightarrow [\mu - 2b, +\infty[$$
$$p \longmapsto \begin{cases} \sqrt{8b^2 \times p} + \mu - 2b & \text{si } p \leq 0,5 \\ \mu - b\ln(2-2p) & \text{si } p > 0,5 \end{cases}$$

Ainsi en renvoyant $F^{-1}(U)$, avec U une loi uniforme sur $[0,1]$
On simulera bien Y.

3. Méthode de Monte-Carlo

1. cf verifie_simulations_variables.m qui utilise la fonction simulat_pair.m

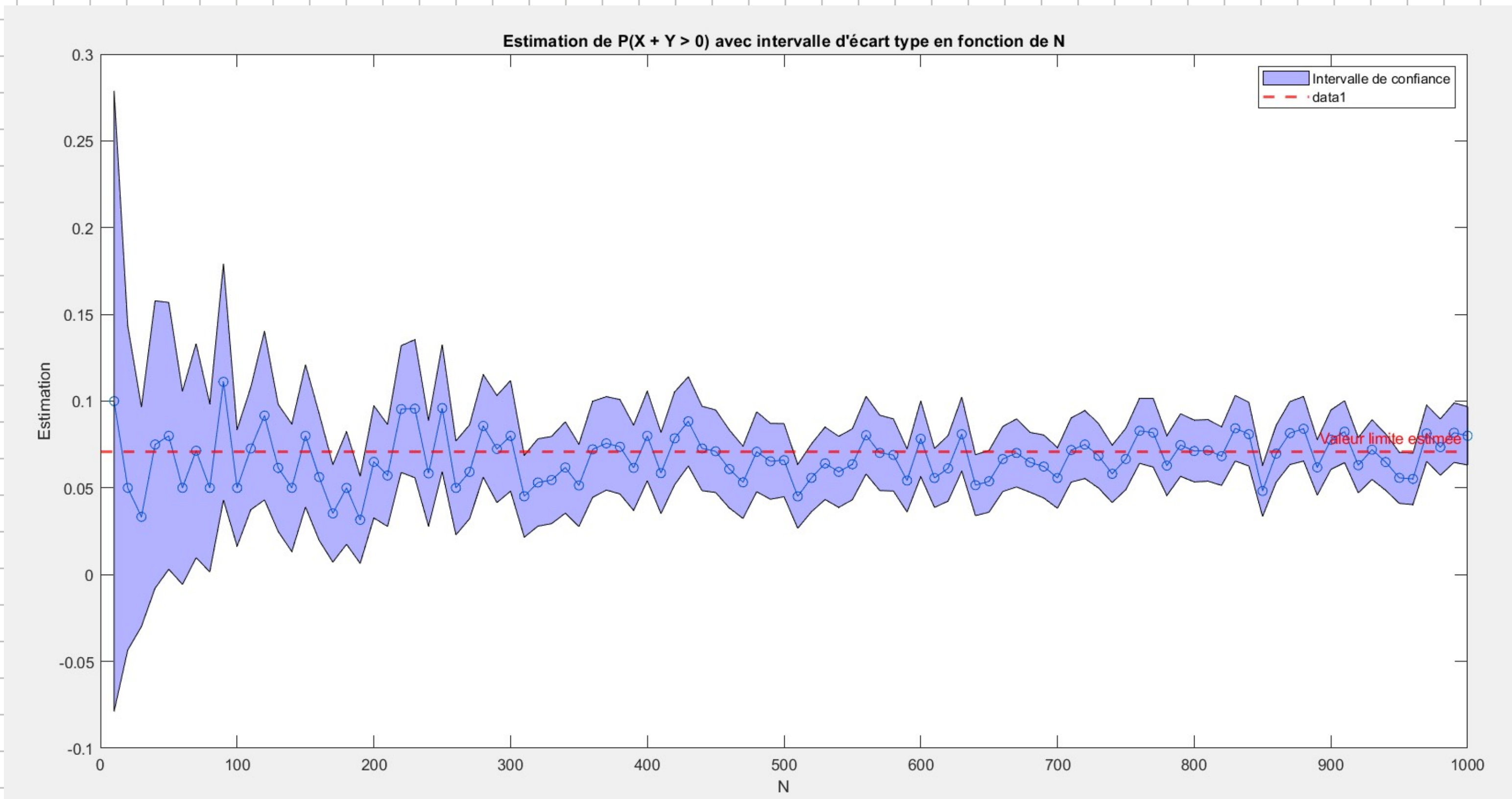
On obtient :



2 & 3. On peut utiliser un estimateur de Monte Carlo de p en utilisant une suite de couple (X_i, Y_i). On calculera la moyenne des Y_i (qui indiquent si $X_i + Y_i > 0$).

C'est effectué dans le code monte_carlo_p.m et appliqué dans application_monte_carlo.m

On obtient la courbe suivante :



La valeur estimée limite en rouge est la moyenne des 10 dernières observations. On voit qu'elle est, en général, contenue dans l'intervalle de confiance.

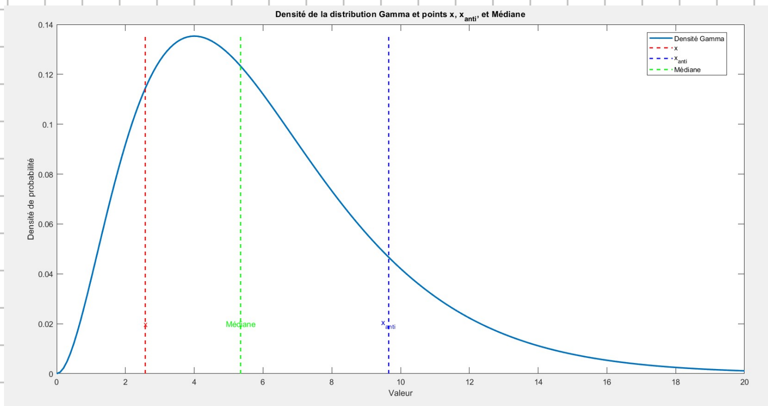
```
>> appliation_monte_carlo
Estimation de Monte-Carlo de P(X + Y > 0) : 0.080000
Estimation de la variance : 0.073852
Intervalle de confiance à 95.000000% : [0.063157, 0.096843]
Valeur limite estimée de p : 0.071013
```

L'image précédente donne les estimations du dernier point du graph : pour $N = 1000$.

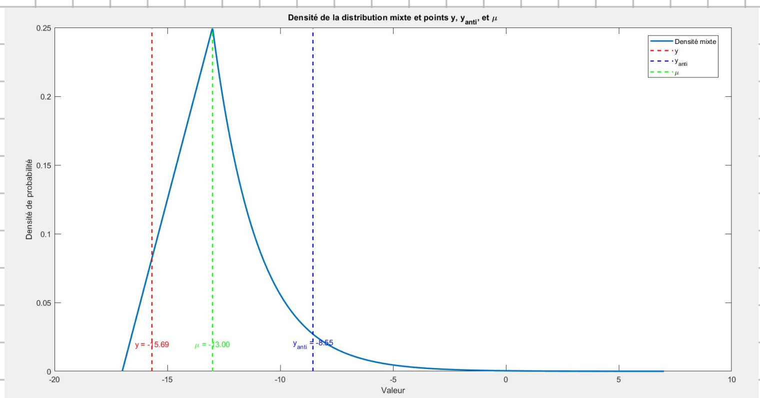
4. Variables antithétique

Les fonction Fy_generate_Antithetic.m et Fx_generate_Antithetic.m renvoient les valeurs antithétiques recherchées.

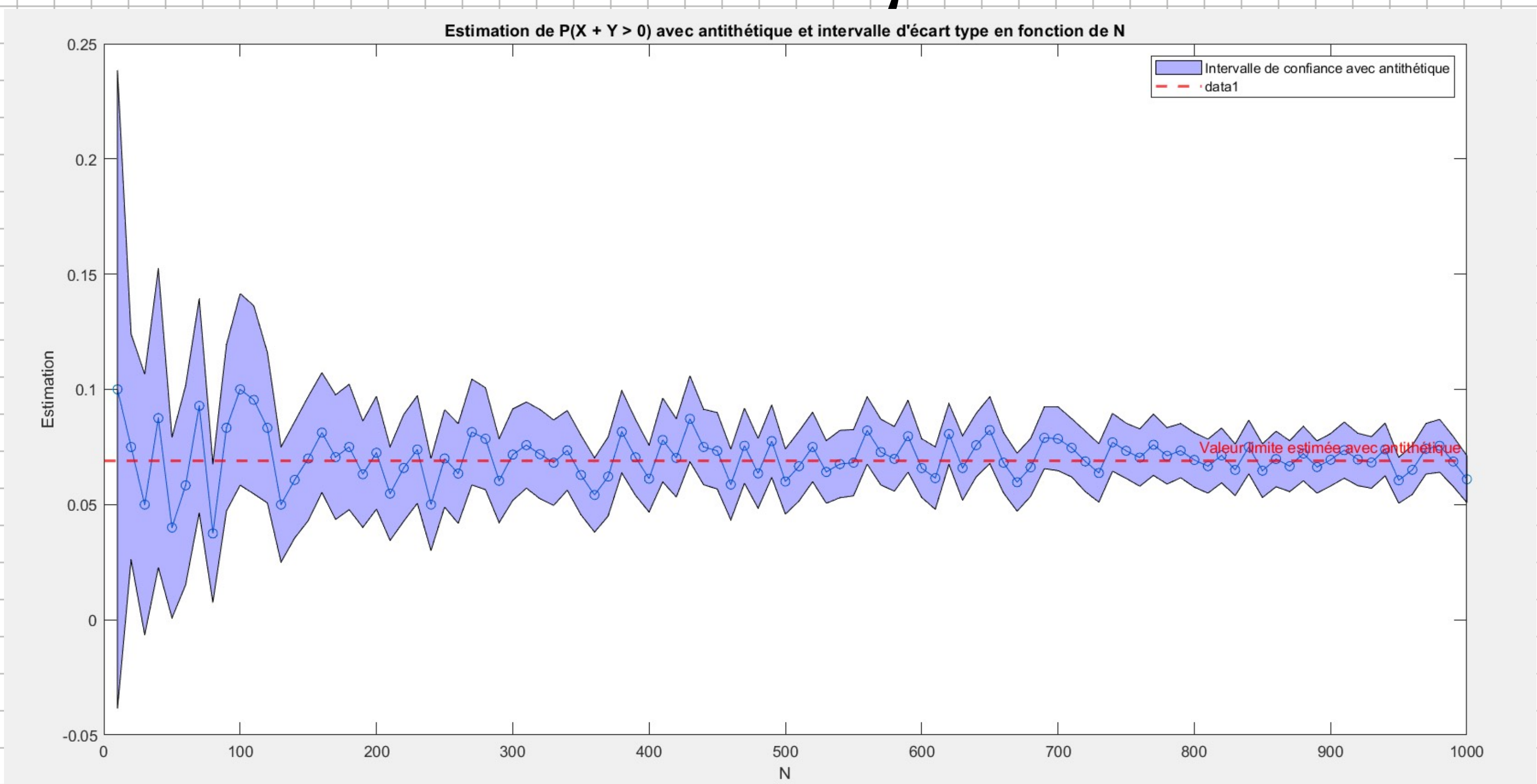
Fx_test_anti.m plot visuellement le tirage:



De même Fy_test_anti.m :



La fonction monte_carlo_p_antithetic.m fait une prédiction de p avec variance et interval de confiance.



La valeur limite est estimé avec la moyenne comme précédement.

```
>> application_monte_carlo_anti
Estimation de Monte-Carlo de P(X + Y > 0) avec antithétique : 0.080000
Estimation de la variance avec antithétique : 0.034000
Intervalle de confiance à 95.000000% avec antithétique : [0.068572, 0.091428]
Valeur limite estimée de p avec antithétique : 0.071644
```

On observe bien une réduction de variance de 50% quasiment.
Les valeurs limites sont très proches.