Université Jean Monnet – EMSE 2023 – 2024

Master Maths en Action
–
Méthodes de Monte-Carlo – TD n°3
–
Simulation de variables aléatoires

Exercice 1 *(Loi exponentielle)*
Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Rappeler la fonction de répartition de X, qu'on notera F. Sur quel ensembles est-elle bijective ?
2. Déterminer son application réciproque F^{-1}.
3. À partir de ce résultat programmer une fonction `function [X] = LoiExpo(lambda)` simulant une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.
   Utiliser le script `TestExpo.m` fourni avec le sujet pour vérifier votre fonction : il estime l'espérance et la variance, on doit trouver des valeurs proches des valeurs théoriques.

Exercice 2 *(Loi de Poisson)*

1. Montrer le résultat théorique suivant.

   Théorème 4.3 : Soit $E_1, \ldots, \mathbb{E}_k, \ldots$ une suite de variables de loi exponentielle de paramètre 1. On note $S_n = E_1 + \cdots + E_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit alors la variable aléatoire

   $$N = \min\{n \in N^* \,;\, S_n >= \lambda\} - 1,$$

   avec $\lambda > 0$. Alors $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
2. A partir de ce résultat, déterminer un algorithme pour simuler la Loi de Poisson de paramètre λ pour obtenir une fonction `function [N] = LoiPoisson(lambda)`. Vous utiliserez le script `TestPoisson.m` pour vérifier votre générateur.

Exercice 3 *(Loi discrète quelconque)*
Soit n valeurs réelles $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ deux à deux distinctes et p_i, $i = 1 \ldots n$ telles que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

On considère la variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de loi

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i,\ i = 1 \ldots n.$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. Calculer sa pseudo-inverse F^{-1}.
3. En déduire un algorithme pour programmer une variable aléatoire suivant cette loi et la programmer.