

# Первое знакомство с методом Галеркина и с конечно-элементной аппроксимацией

ревизия\*№2

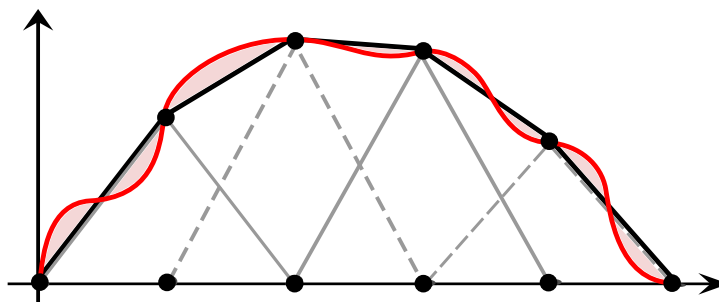
Дмитрий Мальков<sup>†</sup>

г. Комсомольск-на-Амуре

10 ноября 2014 г.

## Аннотация

Учебная статья для ознакомления с часто применяемым, но обычно недостаточно хорошо понимаемым методом Галеркина. Снабжена примерами.



---

\*статьи время от времени пересматриваются и исправляются, скачивайте свежайшие версии с домашней страницы автора

<sup>†</sup>**Email:** maldmitrix@gmail.com, **сайт:** <http://maldmitrix.github.io>

# Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Метод Галеркина</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Введение в метод взвешенных невязок . . . . .  | 3         |
| 1.2      | Невязка решения уравнения . . . . .  | 3         |
| 1.3      | Невязка аппроксимации функции . . . . .  | 3         |
| 1.4      | Базисная функция . . . . .   | 4         |
| 1.5      | Разложение по базисным функциям . . . . .  | 4         |
| 1.6      | Внутреннее произведение двух функций и условие их ортогональности . . . . .                  | 5         |
| 1.7      | Метод взвешенных невязок на примере краевой задачи теплопроводности в твердом теле . . . . . | 5         |
| 1.8      | Метод Галеркина на примере обыкновенного дифференциального уравнения . . . . .               | 8         |
| 1.9      | Метод Галеркина на примере задачи изгиба балки . . . . .                                     | 9         |
| <b>2</b> | <b>Введение в метод Галеркина с МКЭ-аппроксимацией</b>                                       | <b>13</b> |
| 2.1      | Определение метода Галеркина-МКЭ . . . . .   | 13        |
| 2.2      | Обзор метода Галеркина-МКЭ и пример использования . .  | 13        |
|          | <b>Литература</b>  | <b>20</b> |

# 1 Метод Галеркина

## 1.1 Введение в метод взвешенных невязок

Сразу уточним: метод Галеркина (или Бубнова-Галеркина) *не является* вариационным методом. Об этом говорит уже то, что им можно решать те задачи, для которых еще не придумали вариационных принципов. В то время как для любых вариационных методов наличие вариационных принципов для рассматриваемой задачи является *обязательным* условием ее решения – без этого невозможно задать функционал.

Существует два семейства методов для численного решения дифференциальных уравнений: метод взвешенных невязок (Weighted Residuals Method) и вариационные методы. К первым относятся метод Галеркина, метод коллокаций, интегральный метод, метод моментов, метод наименьших квадратов и другие. Эти методы работают с дифференциальным уравнением и условиями на границе напрямую, в то время как вариационные методы работают с функционалом, связанным с дифференциальным уравнением, и с условиями на границе. В отличие от метода взвешенных невязок, вариационные методы не универсальны.

Метод Галеркина изобрел и первым опубликовал ~~Борис~~ Галеркин швейцарский математик Вальтер Ритц (1909). А конкретно для решения задач теории упругости его применил российский математик ~~Борис~~ Галеркин Иван Бубнов (1913). Наконец, теоретическое обоснование метода дал советский математик ~~Борис~~ Галеркин Мстислав Келдыш (1942).

## 1.2 Невязка решения уравнения

Предположим, нам нужно найти такой  $x$ , чтобы известная нам функция  $f(x)$  принимала какое-то известное значение  $b$ . Подставляя вместо  $x$  любое приближенное значение  $x_0$  и вычисляя  $b - f(x_0)$ , получаем значение *невязки решения*  $x_0$ . При этом нельзя вычислить ошибку  $x - x_0$ , а невязку можно вычислять всегда.

Например, нужно решить уравнение  $\sin x = 0.7$ . Возьмем «с потолка»  $x_0 = \pi/4$ , тогда  $\sin x_0 = 0.707$  и невязка решения равна  $-0.007$ . Можно выбрать другое значение, дающее меньшую невязку, а можно оставить очень компактное решение  $x_0 = \pi/4$ . Но, вообще, решений данного уравнения много, а именно по два на каждый период, лучше записать  $x_0 = \{\pi/4 + 2\pi n, \pi - \pi/4 + 2\pi n\}$ .

## 1.3 Невязка аппроксимации функции

Пусть нам дано операторное уравнение  $Tf(x) = g(x)$ , где неизвестна функция  $f(x)$ , а известный оператор  $T$  отображает ее в функцию  $g(x)$ .

Мы можем аппроксимировать решение  $f(x)$  некоторой функцией  $\tilde{f}(x)$ . Тогда *невязкой аппроксимации функции* можно назвать что-нибудь из списка:

1. разность функций  $g(x) - T\tilde{f}(x)$ ;
2. если  $\tilde{f}$  есть усредненное решение  $f$  на области  $\Omega$ , то невязкой назовем максимум нормы разности  $\max_{x \in \Omega} |g(x) - T\tilde{f}(x)|$  на этой области;
3. некоторый интеграл функции разности, например,  $\int_{\Omega} |g(x) - T\tilde{f}(x)|^2$ ;
4. что-нибудь другое, но чтобы отражало погрешность аппроксимации.

В большинстве случаев, чем меньше невязка, тем аппроксимированное значение ближе к точному решению.

## 1.4 Базисная функция

*Базисная функция* – это функция, через которую можно *линейно* выразить другую функцию из определенного класса функций. Примеры:

1. любой вектор является базисным для любого другого вектора, параллельного ему;
2. любые два непараллельных вектора являются базисными для любого другого третьего вектора, компланарного<sup>1</sup> им;
3. две функции  $H_0(x) = 1$  и  $H_1(x) = x$  составляют систему базисных функций, через линейную комбинацию которых можно выразить любую прямую на декартовой плоскости, кроме строго вертикальных. Эти две функции называются первыми двумя полиномами Эрмита.

## 1.5 Разложение по базисным функциям

Пусть нам даны  $n$  базисных функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ , причем число  $n$  может быть неопределенным. Тогда можно представить функцию  $f(x)$  как

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x).$$

Символ  $\approx$  использован, чтобы не оговаривать условия, при которых такое разложение будет точным, а не приближенным. Не каждая функция

---

<sup>1</sup>компланарный чему-то – лежащий с чем-то в одной плоскости или в параллельной для чего-то плоскости.

имеет разложение по тому или иному базису. Примеры разложения по базису:

1. разложение радиус-вектора по ортонормированным базисным векторам  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ;
2. разложение непрерывной линии в тригонометрический ряд;
3. разложение аналитической функции в ряд Тейлора.

## 1.6 Внутреннее произведение двух функций и условие их ортогональности

*Внутреннее произведение*  $\langle f, g \rangle$  вещественных скалярных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в области  $\Omega$  определяется как

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\Omega.$$

Две вещественные скалярные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  *ортогональны* в некоторой области, если их внутреннее произведение в этой области равно нулю:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\Omega = 0.$$

Покажем, что на интервале  $[0, \pi]$  функции  $\sin x$  и  $\cos x$  ортогональны. Посчитаем их внутреннее произведение на этом интервале:

$$\begin{aligned} \langle \sin x, \cos x \rangle &= \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = (\cos^2 x - \sin^2 x) \Big|_0^{\pi} = \\ &= (-1)^2 - 0^2 - 1^2 + 0^2 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Также можно доказать, что на интервалах  $[0, 2\pi]$  и  $[\pi, 2\pi]$  функции  $\sin x$  и  $\cos x$  также ортогональны. Но они не ортогональны на интервале  $[0, \frac{3\pi}{2}]$ .

*Примечание:* в разной литературе под внутренним произведением, под условием ортогональности функций и под обособлением угловыми скобками  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  может пониматься отличное от здесь представленного.

## 1.7 Метод взвешенных невязок на примере краевой задачи теплопроводности в твердом теле

Пусть дана краевая задача:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{в области } \Omega(x, y)$$

$$T = T_0 \quad \text{на границе } \Gamma \text{ области } \Omega,$$

где  $\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy}$ ,  $T_{xx} = \frac{d^2 T}{dx^2}$ . Пробное решение  $\tilde{T}$  берется в форме

$$T \approx \tilde{T} = T_0 + \sum_{i=1}^n c_i T_i,$$

где все функции  $T_i$  должны обращаться в нуль на границе, а за значение аппроксимации на самой границе  $\Gamma$  отвечает *главный член*  $T_0$ . Тогда какими бы ни были коэффициенты  $c_i$ , пробное решение будет отвечать граничным условиям поставленной задачи. Подставляем это пробное решение в исходное дифференциальное уравнение и получаем выражение невязки

$$R(c_1, c_2, \dots, c_n, x, y) = \nabla^2 T_0 + \sum_i c_i \nabla^2 T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если бы пробная функция была точным решением, то невязка была *всюду* равна нулю. Но это обычно не так. Нужно подобрать коэффициенты  $c_i$  таким образом, чтобы невязка была равна нулю *только в области задачи*  $\Omega$ . Приравняем к нулю внутренние произведения невязки и весовых функций (запишем условие ортогональности выражения невязки  $R(c_1, c_2, \dots, c_n, x, y)$  и весовых функций  $w_j$ ):

$$\langle w_j, R \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Покажем подробнее внутренние произведения невязок и весовых функций:

$$\langle w_j, R \rangle = \langle w_j, \nabla^2 T_0 \rangle + \sum_i c_i \langle w_j, \nabla^2 T_i \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Перепишем уравнение:

$$\sum_i c_i \langle w_j, \nabla^2 T_i \rangle = -\langle w_j, \nabla^2 T_0 \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

или компактнее:

$$\sum_i B_{ji} c_i = d_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $B_{ji} = \langle w_j, \nabla^2 T_i \rangle$  и  $d_j = -\langle w_j, \nabla^2 T_0 \rangle$ . Поскольку функции  $T_0$  и  $T_i$  нам известны, а выбор весовых функций  $w_j$  определен ниже, то можно вычислить значения матрицы  $B_{ji}$  и вектор-столбца  $d_j$ . Тогда останется инвертировать матрицу  $B_{ji}$ , чтобы найти коэффициенты  $c_i$ .

Весовые функции могут быть выбраны многими путями, каждый выбор будет соответствовать уникальному критерию метода. Мы можем разбить область  $\Omega$  на  $n$  подобластей  $\Omega_j$  и задать

$$w_j = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_j, \\ 0, & x \notin \Omega_j. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение, проинтегрированное по подобласти, равно нулю. Этот вариант весовой функции предложили в 1923 году датские инженеры Бизено и Кох для решения задач устойчивости стержней, валов и пластин. Это *метод подобластей*.

В *методе коллокаций* весовые функции есть дельта Дирака:

$$w_j = \delta(x - x_j),$$

которая обладает свойством

$$\int_{\Omega} w_j R d\Omega = R \Big|_{x_j}.$$

Тогда невязка равна нулю в  $n$  точках коллокации  $x_j$ . Этот метод предложили в 1934 году Слатер для задач электростатики в металлах и в 1937 году Барта для задач кручения прямоугольных призм. Сейчас это общий метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1795 году Гаусс и в 1806 году Лежандр предложили весовую функцию  $w_j = \partial R / \partial c_j$  для *метода наименьших квадратов*. Этот метод был использован Беккером в 1964 году для задач, возникающих в ядерных реакторах.

Наиболее широко известен с 1915 года *метод Галеркина*. Вместо весовых функций нужно просто *взять еще раз* базисные функции, то есть  $w_i = T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). При этом множество  $\{T_i\}_{i=1}^n$  должно быть *полным* множеством *линейно независимых* функций. Конкретный вид функций  $w_i$  определяется из специфики задачи и удобства работы. Часто применяются тригонометрические функции, ортогональные полиномы (полиномы Лежандра, Чебышева, Эрмита и др.).

*Примечание:* функции  $T_i$  в иной литературе могут называться пробными функциями (их линейная комбинация в сумме с главным членом составляет пробное решение  $\tilde{T}$ ); функции  $w_j$  могут называться поверочными или тестовыми функциями.

## 1.8 Метод Галеркина на примере обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим в качестве иллюстрации обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$u'' + \lambda u = 0,$$

с граничными условиями  $u(0) = u(1) = 0$ . Точное решение данного уравнения известно:

$$u(x) = \sin \pi m x, \quad \lambda = \pi^2 m^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для первого нетривиального решения ( $m = 1$ ) собственное число равно  $\lambda = \pi^2 \approx 9.869$ . Теперь применим метод Галеркина. Выберем сперва множество базисных функций, которое состоит всего из одной функции:

$$u_1(x) = x(1 - x).$$

Эта функция дважды дифференцируема, на интервале  $[0, 1]$  и отдаленно похожа на горб синусоиды. Запишем пробное решение  $\tilde{u}(x)$  в форме разложения по имеющемуся базису:

$$\tilde{u}(x) = c_1 u_1(x).$$

Подставим в исходное дифференциальное уравнение и получим выражение невязки:

$$R(c_1, x) = c_1(u_1'' + \lambda u_1).$$

Запишем требование ортогональности невязки к самим же базисным функциям в области задачи:

$$\langle w_j, R \rangle = \int_0^1 u_1'' u_1 dx + \lambda \int_0^1 u_1^2 dx = 0.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\int_0^1 u_1'' u_1 dx}{\int_0^1 u_1^2 dx} = \frac{\int_0^1 (u_1')^2 dx}{\int_0^1 u_1^2 dx} = \frac{\int_0^1 1 - 4x + 4x^2 dx}{\int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx} = \\ &= \frac{(x - 2x^2 + 4x^3/3) \Big|_0^1}{(x^3/3 - x^4/2 + x^5/5) \Big|_0^1} = \frac{1 - 2 + 4/3}{1/3 - 1/2 + 1/5} = \frac{1/3}{1/30} = 10. \end{aligned}$$

Получается, что по методу Галеркина в первом приближении  $\lambda = 10$ , что менее чем на 1.5% отличается от точного решения. Задание большего числа базисных функций позволяет уточнить уже известное значение



$\lambda$ , а также получить первое приближение для следующего (соответствующего  $m = 2$ ).

Представим пробное решение в виде линейной комбинации  $n$  базисных функций:

$$u(x) = \sum_i c_i u_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подставим пробное решение в исходное дифференциальное уравнение  $u'' + \lambda u = 0$ . Получим выражение невязки:

$$R(c_1, c_2, \dots, c_n, x) = \sum_i R_i(c, x) = \sum_i c_i (u_i'' + \lambda u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Запишем требование ортогональности невязки к базисным функциям в области задачи:

$$\langle u_j, R \rangle = \sum_i c_i \int_0^1 u_j (u_i'' + \lambda u_i) dx = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

В этом случае собственные значения находятся из условия разрешимости системы (равенство нулю ее определителя):

$$\det(A_{ji}) = 0; \quad A_{ji} = \int_0^1 u_j (u_i'' + \lambda u_i) dx.$$

Важно помнить, что сходимость метода Галеркина не всегда быстро достигается.

## 1.9 Метод Галеркина на примере задачи изгиба балки

**Задача:** определить прогиб в середине пролета однопролетной шарнирно опертой балки длины  $\ell$  и постоянной жесткости  $EI$ , загруженной сосредоточенной поперечной силой  $P$  в середине пролета.

Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной жесткости:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} - p(x) = 0, \quad x \in [0, \ell].$$

Запишем граничные условия шарнирно опертой балки:

$$u(0) = \frac{d^2 u}{dx^2} = u(\ell) = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0.$$

Учитывая то, что пробное решение  $\tilde{u}(x)$  для однородной задачи долж-

но состоять из функций, принимающих на границе нулевые значения, примем пробное решение для прогиба балки в виде ряда

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_i c_i u_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где  $u_i(x) = \sin i\pi \frac{x}{\ell}$  – выбранные нами базисные функции,  $c_i$  – неизвестные коэффициенты, которые нужно найти, чтобы невязка в области задачи была равна нулю. Запишем выражение невязки:

$$R(c_1, c_2, \dots, c_n, x) = EI \sum_i c_i \left[ \left( \frac{i\pi}{\ell} \right)^4 \sin \frac{i\pi}{\ell} x \right] - p(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Множество весовых функций  $\{w_i\}$  возьмем такое же, как и множество базисных  $\{u_i\}$ . Запишем условие ортогональности выражения невязки  $R$  и весовых функций  $w_j = u_j$ :

$$\begin{aligned} \langle R, w_j \rangle &= 0 = \\ &= \int_0^\ell EI \sum_i c_i \left[ \left( \frac{i\pi}{\ell} \right)^4 \sin \frac{i\pi}{\ell} x \right] \sum_j \sin \frac{j\pi}{\ell} x - p(x) \sum_j \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx, \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

или

$$\int_0^\ell EI \sum_i c_i \left[ \left( \frac{i\pi}{\ell} \right)^4 \sin \frac{i\pi}{\ell} x \right] \sum_j \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx = \int_0^\ell p(x) \sum_j \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx, \\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Меняем местами операции суммирования и интегрирования:

$$\sum_j EI \sum_i \left( \frac{i\pi}{\ell} \right)^4 \int_0^\ell c_i \left[ \sin \frac{i\pi}{\ell} x \right] \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx = \sum_j \int_0^\ell p(x) \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx, \\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Избавляемся от внешней операции суммирования, но получаем взамен систему  $n$  уравнений с различными значениями  $j$ :

$$EI \sum_i \left( \frac{i\pi}{\ell} \right)^4 c_i \int_0^\ell \left[ \sin \frac{i\pi}{\ell} x \right] \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx = \int_0^\ell p(x) \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx, \\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Эту систему уравнений можно записать так:

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{f},$$

где  $K_{ji} = EI \left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^4 \int_0^\ell \left[\sin \frac{i\pi}{\ell} x\right] \sin \frac{j\pi}{\ell} x \, dx$ ;  $f_i = \int_0^\ell p(x) \sin \frac{i\pi}{\ell} x \, dx$ ;  $c_i$  – вектор-столбец искомых коэффициентов. Это матричное уравнение легко решить, когда будут вычислены все коэффициенты матрицы  $K_{ij}$  и вектор-столбца  $f_i$ .

Рассмотрим случай, когда  $n = 1$ . Система вырождается в одно уравнение:

$$EI \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 c_1 \int_0^\ell \left[\sin \frac{\pi}{\ell} x\right]^2 \, dx = \int_0^\ell p(x) \sin \frac{\pi}{\ell} x \, dx$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4 \frac{\int_0^\ell p(x) \sin \frac{\pi}{\ell} x \, dx}{\int_0^\ell \left[\sin \frac{\pi}{\ell} x\right]^2 \, dx}.$$

Функция  $p(x)$  имеет значение, равное  $P$  в точке  $x = \ell/2$ , а во всех остальных точках равна нулю. Поэтому интеграл в числителе равен  $P \sin \frac{\pi}{\ell} x \Big|_{x=\frac{\ell}{2}}$ .

Интеграл в знаменателе можно легко найти в справочнике<sup>2</sup>:  $\int_a^b \sin^2 \lambda x \, dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4\lambda} \sin 2\lambda x\right) \Big|_a^b$ . Имеем коэффициент

$$c_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4 \frac{P \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4\pi} \sin 2\frac{\pi}{\ell}} = \frac{1}{EI} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4 \frac{2P}{\ell} = \frac{2}{\pi^4} \frac{P\ell^3}{EI}$$

и решение

$$u(x) = \frac{2}{\pi^4} \frac{P\ell^3}{EI} \sin \pi \frac{x}{\ell}.$$

Находим пробное значение прогиба в середине балки при  $n = 1$ :

$$\tilde{u}_{(1)} \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{2}{\pi^4} \frac{P\ell^3}{EI} \cdot 1 \approx 0.02057 \frac{P\ell^3}{EI}.$$

Классическое (точное) решение из теории сопротивления материалов:

$$u \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{48} \frac{P\ell^3}{EI} \approx 0.02083 \frac{P\ell^3}{EI}.$$

Метод Галеркина при  $n > 1$  позволяет уточнить полученный в случае

---

<sup>2</sup><http://www.sosmath.com/tables/tables.html>

$n = 1$  результат. Так при  $n = 2, 3$  имеем прогибы в середине балки:

$$\tilde{u}_{(2)} = \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{2}{\pi^4} \frac{P\ell^3}{EI} \left(1 + \frac{1}{3^4}\right) \approx 0.02079 \frac{P\ell^3}{EI},$$

$$\tilde{u}_{(3)} = \left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{2}{\pi^4} \frac{P\ell^3}{EI} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4}\right) \approx 0.02082 \frac{P\ell^3}{EI}.$$

Ошибки  $\delta_{(n)}$  приближенных решений  $\tilde{u}_{(n)}(x)$  в точке  $x_0$  при знании точного решения  $u(x)$  вычисляются по формуле:

$$\delta_{(n)} = \frac{u - \tilde{u}_{(n)}}{u} 100\%, \quad x = x_0.$$

Получили ошибки:

$$\begin{aligned} \delta_{(1)} &= 1.4\%, \\ \delta_{(2)} &= 0.2\%, \\ \delta_{(3)} &= 0.05\%. \end{aligned}$$

Таким образом уже первое приближение (первый член ряда) дает практически точное значение прогиба.

## 2 Введение в метод Галеркина с МКЭ-аппроксимацией

### 2.1 Определение метода Галеркина-МКЭ

Напомним, что метод Галеркина – это метод взвешенных невязок, в котором весовые функции выбираются из того же полного множества, что и базисные функции для аппроксимации решения. При этом в методе Галеркина не уточняется, какие функции должны входить в множество базисных функций: эти функции могут простираются и рассматриваться на всей области задачи «от края до края», а могут быть локальными, определенными в подобластях задачи и вырождающимися в нуль на территории других подобластей.

*Метод конечных элементов* – это метод взвешенных невязок, в котором множество базисных функций состоит только из компактных локальных функций.

Объединяем эти два метода в один и получаем *метод Галеркина с МКЭ-аппроксимацией* – метод взвешенных невязок, в котором множество базисных функций для аппроксимации решения состоит из компактных локальных функций, а множество весовых функций совпадает с множеством базисных функций. Далее будем коротко называть этот метод методом Галеркина-МКЭ.

### 2.2 Обзор метода Галеркина-МКЭ и пример использования

Коротко и схематично метод Галеркина-МКЭ можно представить как

$$(\mathbf{S}) \Leftrightarrow (\mathbf{W}) \approx (\mathbf{G}) \Leftrightarrow (\mathbf{M})$$

и расшифровать так: берем исходную задачу, записанную в сильной форме  $(\mathbf{S})$ , переписываем ее в слабую форму  $(\mathbf{W})$ , аппроксимируем решение методом Галеркина, но используя локальные функции  $(\mathbf{G})$ , записываем задачу в матричной форме  $\mathbf{M}$ .

Рассмотрим простой пример. Вертикальный стержень длины  $\ell$ , защемленный в верхнем сечении и свободный в остальных сечениях, нагружен осевой растягивающей равномерно распределенной по его длине силой  $p(x) = p_0$  (растянут под действием собственного веса). Нужно найти функцию осевых перемещений его точек  $u(x)$ . Направим луч  $Ox$  от верхнего сечения вертикально вниз и запишем эту задачу в сильной

форме:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -p_0, \quad u(0) = 0, \quad EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad x \in [0, \ell],$$

где  $E$  – модуль Юнга при растяжении,  $A$  – площадь поперечного сечения. С точки зрения математической физики это есть однородная краевая задача для одномерного уравнения Пуассона.

Напомним, что *сильная форма* задачи – это когда задача дается в виде набора из дифференциального уравнения и условий на границе. Теперь переформулируем задачу в слабой форме – вариационной постановке задачи, при которой задается интеграл по всей области задачи, под которым интегрируется невязка приближенного решения, умноженная на весовую функцию  $w(x)$ . Выбрать весовую функцию можно произвольно. Запишем выражение невязки:

$$R(c_i, x) = \frac{d^2 u}{dx^2} + p_0,$$

теперь частично запишем задачу в *слабой форме* (частично, потому что нужно будет еще добавить в набор слабой формы условия на границе, но пока запишем только уравнение):

$$\int_0^\ell \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + p_0 \right) w(x) dx = 0.$$

Теперь, вместо того, чтобы искать точное решение повсюду, мы будем искать решение, удовлетворяющее сильной форме, но только в пределах области задачи. Решение сильной формы всегда и везде удовлетворяет условиям слабой формы, но не наоборот.

Если мы можем сами выбирать весовую функцию<sup>3</sup>, так пусть она будет удовлетворять однородным краевым условиям, то есть обращаться в нуль на границе:  $w(0) = 0$ . Еще раз запишем интеграл из слабой формы (раздельно по слагаемым его подынтегральной функции) и применим

---

<sup>3</sup>при определении весовой функции, в методе Галеркина-МКЭ одновременно определяется и базисная как равная весовой, весовая и базисная функции обладают одинаковыми свойствами, поэтому не имеет значения свойства какой функции определить первыми, а какой – вторыми.

интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \frac{d^2 u}{dx^2} w(x) dx + \int_0^\ell p_0 w(x) dx &= \\
&= - \int_0^\ell \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \left[ w(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_0^\ell + \int_0^\ell p_0 w(x) dx = \\
&= - \int_0^\ell \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + w(\ell) \frac{du}{dx} \Big|_{x=\ell} - w(0) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} + \int_0^\ell p_0 w(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

Теперь запишем полностью задачу в слабой форме:

$$\begin{aligned}
u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad w(0) = 0, \\
\int_0^\ell \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + w(\ell) \frac{du}{dx} \Big|_{x=\ell} - w(0) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \int_0^\ell p_0 w(x) dx.
\end{aligned}$$

Заметим, что в последнем уравнении в левой части второе и третье слагаемые исчезают. Это означает, что слабая форма удовлетворяет условиям Неймана (или граничным условиям второго рода) автоматически.

Выберем множество локальных базисных функций  $\{u_i\}_{i=1}^n$ . Тогда пробное приближенное решение  $\tilde{u}(x)$  запишется как положено в методе взвешенных невязок (для однородной задачи):

$$\tilde{u}(x) = \sum_i c_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $c_i$  – коэффициенты, которые нужно найти. Весовую функцию  $w(x)$ , как это положено в методе Галеркина, разложим по тому же базису:

$$w(x) = \sum_i b_i u_i,$$

где  $b_i$  – коэффициенты, которые можно выбрать независимо. Подставим эти две функции в слабую форму:

$$\int_0^\ell \sum_j c_j \frac{du_j}{dx} \sum_i b_i \frac{du_i}{dx} dx = \int_0^\ell \sum_j b_j u_j(x) p_0 dx.$$

Знаки интеграла и суммы можно поменять местами:

$$\sum_j \sum_i c_j b_i \int_0^\ell \frac{du_j}{dx} \frac{du_i}{dx} dx = \sum_j b_j \int_0^\ell u_j(x) p_0 dx.$$

Ничто не мешает в правой части поменять индекс на другой:

$$\sum_i b_i \sum_j c_j \int_0^\ell \frac{du_j}{dx} \frac{du_i}{dx} dx = \sum_i b_i \int_0^\ell u_i(x) p_0 dx.$$

Теперь можно сократить левую и правую части на одинаковую внешнюю операцию суммирования и избавиться заодно от коэффициентов  $b_i$ , но получив взамен  $n$  уравнений с различным значением индекса  $i$ :

$$\sum_j c_j \int_0^\ell \frac{du_j}{dx} \frac{du_i}{dx} dx = \int_0^\ell u_i(x) p_0 dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

С точки зрения линейной алгебры, мы получили *матричное уравнение*  $\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{f}$ , где мы можем легко посчитать все элементы квадратной матрицы  $K_{ij} = \int_0^\ell \frac{du_j}{dx} \frac{du_i}{dx} dx$  и все элементы вектор-столбца  $f_i = \int_0^\ell u_i(x) p_0 dx$ , так как все базисные функции  $u_i(x)$  нам известны. Поскольку мы можем спокойно менять местами значения  $i$  и  $j$  в интеграле  $\int_0^\ell \frac{du_j}{dx} \frac{du_i}{dx} dx$ , получая одно и то же его значение при фиксированных  $i$  и  $j$ , то матрица  $K_{ij}$  будет *симметричной*.

Теперь можно по правилам линейной алгебры найти вектор-столбец неизвестных коэффициентов  $\mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{c} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{c} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \\ \mathbf{c} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{K}^{-1}$  – обратная к  $\mathbf{K}$  матрица. Найденные коэффициенты  $c_i$  подставим в разложение по базису пробной функции  $\tilde{u}(x)$ , посчитаем сумму и запишем приближенный ответ к исходной задаче:

$$\tilde{u}(x) = \sum_i c_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Представим, что наш вертикальный стержень разбит на две равные подобласти:

$$\Omega_1 : x \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right], \quad \Omega_2 : x \in \left[\frac{\ell}{2}, \ell\right].$$

В качестве базисных функций мы можем выбрать весьма разные функции, но для простоты выберем сейчас кусочно-линейные холмообразные функции, имеющих наибольшее значение – единицу.

Приближенное решение  $\tilde{u}(x)$  будет линейной комбинацией этих функ-



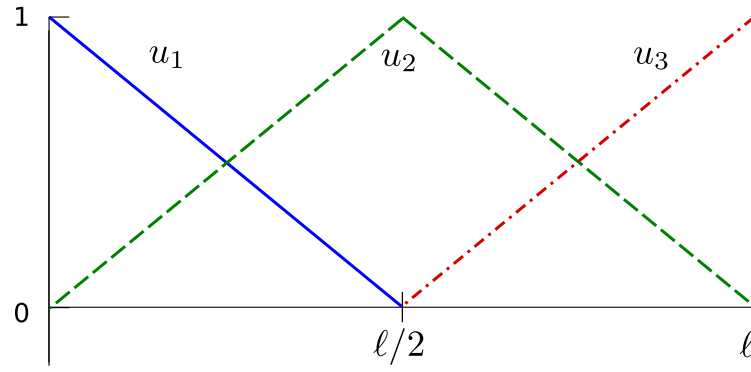


Рис. 1: Базисные кусочно-линейные функции  $u_i$  для одномерных элементов (холмообразные)

ций:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^3 c_i u_i.$$

Поскольку выбранные функции удовлетворяют условию  $\tilde{u}_i(x_j) = \delta_{ij}$ , то решение  $\tilde{u}(x)$  будет интерполяцией.

Поскольку мы знаем, что  $\tilde{u}(0) = 0$ , то  $c_1 = 0$ , и мы можем отбросить функцию  $u_i$  из расчета для экономии времени:  $c_1 u_1 = 0$  – повсюду. Для остальных функций:

$$u_2(x) = \begin{cases} 2\frac{x}{\ell}, & x \in [0, \frac{\ell}{2}] \\ -2\frac{x-\ell}{\ell}, & x \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}, \quad u_3(x) = \begin{cases} 2\frac{x}{\ell} - 1, & x \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \\ 0, & x \notin [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}.$$

Мы нашли все интересующие нас базисные функции. Теперь составим матрицы жесткости. Сначала найдем производные от базисных функций:

$$\frac{du_2}{dx} = \begin{cases} \frac{2}{\ell}, & x \in [0, \frac{\ell}{2}] \\ -\frac{2}{\ell}, & x \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}, \quad \frac{du_3}{dx} = \begin{cases} \frac{2}{\ell}, & x \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \\ 0, & x \notin [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}.$$

Запишем матричное уравнение  $\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{f}$ :

$$\begin{bmatrix} \int_0^\ell \left(\frac{du_1}{dx}\right)^2 dx & \int_0^\ell \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} dx & \int_0^\ell \frac{du_1}{dx} \frac{du_3}{dx} dx \\ \int_0^\ell \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} dx & \int_0^\ell \left(\frac{du_2}{dx}\right)^2 dx & \int_0^\ell \frac{du_2}{dx} \frac{du_3}{dx} dx \\ \int_0^\ell \frac{du_1}{dx} \frac{du_3}{dx} dx & \int_0^\ell \frac{du_2}{dx} \frac{du_3}{dx} dx & \int_0^\ell \left(\frac{du_3}{dx}\right)^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\ell u_1(x) p_0 dx \\ \int_0^\ell u_2(x) p_0 dx \\ \int_0^\ell u_3(x) p_0 dx \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $c_1 = 0$ , то первый столбец и первая строка матрицы жесткости не нужны, также не нужны первые строки в вектор-столбцах неизвестных коэффициентов и сил. Скроем от глаз и вычислений ненужные

строки и столбцы, как бы визуальнo понижая ранг матрицы и размерность вектор-столбцов, но с сохранением старых значений индексов (это эквивалентно обнулению всех ненужных компонентов, чтобы они не мешались при матричных операциях):

$$\begin{bmatrix} \int_0^\ell \left(\frac{du_2}{dx}\right)^2 dx & \int_0^\ell \frac{du_2}{dx} \frac{du_3}{dx} dx \\ \int_0^\ell \frac{du_2}{dx} \frac{du_3}{dx} dx & \int_0^\ell \left(\frac{du_3}{dx}\right)^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\ell u_2(x) p_0 dx \\ \int_0^\ell u_3(x) p_0 dx \end{bmatrix}.$$

Вычислим все коэффициенты, заданные формулами. Везде стоят пределы интегрирования от 0 до  $\ell$ . Однако из-за того, что функции  $u_i$  являются кусочно-линейными функциями, интегрировать следует последовательно от точки преломления до точки преломления, то есть вместо интегрирования от 0 до  $\ell$  будем интегрировать от 0 до  $\frac{\ell}{2}$ , затем от  $\frac{\ell}{2}$  до  $\ell$  и складывать значения интегралов. При этом будем обращать внимание на то, что функция  $u_3$  и ее производная равна нулю слева от  $x = \frac{\ell}{2}$ . Не забудем о симметричности матрицы жесткости.

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= \int_0^{\ell/2} \left(\frac{du_2}{dx}\right)^2 dx + \int_{\ell/2}^\ell \left(\frac{du_2}{dx}\right)^2 dx = \\ &= \int_0^{\ell/2} \left(\frac{2}{\ell}\right)^2 dx + \int_{\ell/2}^\ell \left(-\frac{2}{\ell}\right)^2 dx = \frac{4}{\ell^2} \int_0^\ell dx = \frac{4}{\ell}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2,3} &= \int_0^{\ell/2} \frac{du_2}{dx} \frac{du_3}{dx} dx + \int_{\ell/2}^\ell \frac{du_2}{dx} \frac{du_3}{dx} dx = \int_{\ell/2}^\ell \left(-\frac{2}{\ell}\right) \left(\frac{2}{\ell}\right) dx = \\ &= -\frac{4}{\ell^2} \int_{\ell/2}^\ell dx = -\frac{4}{\ell^2} \left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) = -\frac{4}{\ell^2} \frac{\ell}{2} = -\frac{2}{\ell}. \end{aligned}$$

$$K_{3,3} = \int_0^{\ell/2} 0 dx + \int_{\ell/2}^\ell \left(\frac{2}{\ell}\right)^2 dx = \frac{4}{\ell^2} \left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{2}{\ell}.$$

Используя геометрический смысл определенного интеграла (смотрим на графики  $u_2$  и  $u_3$  и вспоминаем формулу площади треугольника, высота которого равна единице), находим:

$$f_2 = \int_0^\ell u_2(x) p_0 dx = p_0 \frac{\ell}{2},$$

$$f_3 = \int_0^\ell u_3(x) p_0 dx = p_0 \frac{\ell}{4}.$$

Через геометрический смысл брать интегралы линейных функций ока-

зывается проще и нагляднее. Матричное уравнение запишется:

$$\frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = p_0 \ell \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Теперь в программе **Scilab** легко найдем коэффициенты  $c_i$ . В интерактивной консоли вводим и получаем:

```
-->K = [4 -2; -2 2];    \ \ Вводим матрицу жесткости

-->f = [1/2; 1/4];      \ \ Вводим столбец сил

-->c = K \ f            \ \ Делим "справа" 'f' на 'K'...
c =

    0.375
    0.5
```

Напомним, что в **Scilab** «деление справа» означает умножение обратной матрицы для матрицы, стоящей слева от знака операции, на матрицу или столбец, стоящий справа от этого знака ( $\mathbf{K} \setminus \mathbf{f} \equiv \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}$ ). Получили

$$c_i = p_0 \ell^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3.$$

Запишем приближенное решение:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} p_0 \ell x, & x \in [0, \frac{\ell}{2}] \\ \frac{1}{2} p_0 (\ell^2 + \ell x), & x \in [\frac{\ell}{2}, \ell] \end{cases}$$

Можно сравнить с известным точным решением  $u(x) = p_0 \ell x - \frac{p_0 x^2}{2}$ , подставив конкретные значения  $p_0$ ,  $\ell$  и  $x$  в него и в наше  $\tilde{u}(x)$ . Поскольку  $\tilde{u}$  – кусочно-линейная интерполяция функции  $u$  для трех заданных узлов  $x_k = \{0, \frac{\ell}{2}, \ell\}$ , то в этих узлах  $\tilde{u}(x_k) = u(x_k)$ . В остальных точках графики функций  $u$  и  $\tilde{u}$  немного расходятся.

## Список литературы

- [1] Bruce A. Finlayson The method of weighted residuals and variational principles. – Academic press, inc., New York, 1972.
- [2] Иванов В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости: Учеб. пособие – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 176 с.: ил.
- [3] Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986.