Введение в решение задач на собственные значения методом Галеркина

ревизия[*]№(-1) (еще пока черновик)

Дмитрий Мальков[†]

г. Комсомольск-на-Амуре

2014 г.

Аннотация

Рассматриваются постановки задачи на собственные значения и способ решить их методом Галеркина.

[*]статьи время от времени пересматриваются и исправляются, скачивайте свежайшие версии с домашней страницы автора

[†]**Email:** `maldmitrix@gmail.com`, **домашняя страница:** `https://maldmitrix.github.com`

Содержание

1 Алгебраическая задача на собственные значения

1.1 Определение алгебраический задачи на собственные значения

Пусть A – некоторая матрица $n \times n$, x – некоторый вектор-столбец n неизвестных. Фундаментальная алгебраическая проблема собственных значений состоит в определении тех значений λ, при которых система n однородных линейных уравнений

$$Ax = \lambda x$$

имеет *нетривиальное* решение. Обозначая символом I единичную матрицу $n \times n$, уравнение можно записать в форме

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

и при произвольном λ эта система уравнений имеет только решение $x = 0$. Из общей теории совместных линейных алгебраических уравнений известно, что нетривиальное решение существует тогда, и только тогда, когда матрица $(A - \lambda I)$ особенная, то есть

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Раскрывая определитель в левой части уравнения по степеням λ, получим

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а полином в левой части называется *характеристическим полиномом.* Если рассматривать поле комплексных чисел, то, так как коэффициент при λ^n не нуль, это уравнение всегда имеет n корней. Корни могут быть комплексными, даже если матрица A вещественная, и корни могут быть любой кратности вплоть до n. Эти корни называются *собственными значениями* или *характеристическими числами* матрицы A.

Каждому собственному значению λ соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение x. Такое решение называется *собственным вектором* или *характеристическим вектором*, соответствующим этому собственному значению. Если ранг матрицы $(A - \lambda I)$ меньше, чем $(n - 1)$, то будет не менее двух линейно независимых векторов, удовлетворяющих удовлетворяющих исходному уравнению. Если x – решение исходного уравнения, то cx – тоже его решение при любом значении c, так что, даже если ранг $(A - \lambda I)$ равен $(n-1)$, собственный вектор, соответствующий λ, определен с точностью до произвольного множителя. Удобно выбирать этот множитель так, чтобы собственный вектор имел желаемые численные свойства; такие векторы называются *нормированными* векторами.

1.2 Проблема численного нахождения собственных значений на цифровых ЭВМ

Пусть дана матрица A. Ее элементы могут определяться прямо из физических наблюдений, и поэтому они могут иметь ошибки, свойственные всем наблюдениям. В этом случае матрица A является приближением матрицы, соответствующей точным измерениям. Если мы можем утверждать, что ошибка в любом элементе матрицы A ограничена числом δ, то можем сказать, что правильная матрица есть $(A+E)$, где E – некоторая матрица, для которой $|e_{ij} \leq \delta|$.

Полное решение поставленной задачи состоит не только в определении собственных значений A, но также и в оценке возможных вариаций собственных значений всех матриц класса $(A+E)$. Мы переходим к задаче о нахождении возмущений собственных значений матрицы, соответствующих возмущению ее элементов.

Элементы матрицы могут быть заданы точно математическими формулами, но работать с такой точной матрицей на цифровых машинах все же невозможно. Если элементы матрицы иррациональны, это почти всегда так. Но даже если они рациональны, их точное представление может потребовать большего числа цифр, чем имеется в машинной шкале. Например, матрица A может быть произведением некоторых матриц, элементы которых имеют полное число знаков, нормально используемое в вычислительной машине. Данная матрица снова будет матрицей $(A+E)$, где E – матрица ошибки.

Даже если мы можем рассматривать матрицы, заданную в вычислительной машине, как точную, это все же неверно, вообще говоря, для вычислительного решения. Наиболее часто при вычислении решения считают последовательность преобразований подобия $A_1, A_2, A_3, \ldots$ исходной матрицы A, и ошибки округления вносятся при проведении каждого из этих преобразований. Часто можно показать, что вычисленные матрицы A_i точно подобны матрицам $(A+E_i)$, а также найти точные границы для E_i. Собственные значения A_i будут поэтому точно равны собственным значениям $(A+E_i)$, и снова мы приходим к рассмотрению собственных значений и собственных векторов матрицы, соответствующих возмущению ее элементов.

2 Нахождение собственных значений методом Галеркина

2.1 Модельная задача на собственные значения

Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$. Эта задача имеет точное решение. Истинные собственные значения определяются формулой

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

им соответствуют собственные функции

$$u_k(x) = \sin k\pi x.$$

Решим ее методом Галеркина. Зададим пробное решение формулой

$$\tilde{u}(x) = \sum_i c_i(x - x^{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где форма базисных функций $x - x^{i+1}$ была выбрана так, чтобы граничные условия удовлетворялись в точности. Подставим разложение в исходное уравнение и вычислим невязку

$$R = \sum_i c_i(-(i+1)ix^{i-1} + \tilde{\lambda}(x - x^{i+1})).$$

Мы заменили λ на $\tilde{\lambda}$, поскольку мы ищем собственные значения уже не для исходного уравнения, а для приближенного. Из условия ортогональности невязки к каждой из базисных функций

$$\langle R, x - x^{j+1} \rangle = 0$$

получим матричное уравнение на собственные значения

$$\mathbf{Kc} = \tilde{\lambda}\mathbf{Mc},$$

где элементы матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ соответствуют формулам

$$K_{ji} = \frac{ij}{j+i+1}, \quad M_{ji} = \frac{ij(i+j+6)}{3(i+3)(j+3)(i+j+3)}.$$

Приближенные собственные значения определяются путем решения уравнения

$$\det|\mathbf{K} - \tilde{\lambda}\mathbf{M}| = 0.$$

Если взять только одну базисную функцию ($n = 1$), то матричное уравнение становится уравнением

$$\frac{1}{3}c_1 = \tilde{\lambda}\frac{1}{30}c_1,$$

откуда $\tilde{\lambda} = 10$. Соответствующая собственная функция будет $c_1(x - x^2)$.

Если взять две базисные функции ($n = 2$), то матричное уравнение будет представлено системой

$$\tfrac{1}{3}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = \tilde{\lambda}\left(\tfrac{1}{30}c_1 + \tfrac{1}{20}c_2\right),$$
$$\tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{4}{5}c_2 = \tilde{\lambda}\left(\tfrac{1}{20}c_1 + \tfrac{8}{105}c_2\right).$$

Соответствующие собственные значения будут $\tilde{\lambda}_1 = 10, \tilde{\lambda}_2 = 42$. Далее покажем находимые приближенные собственные значения в виде таблицы

n	1	2	3	4	λ_k
$\tilde{\lambda}_1$	10.000	10.0000	9.8697	9.8697	9.8696
$\tilde{\lambda}_2$	—	42.000	42.000	39.497	39.478
$\tilde{\lambda}_3$	—	—	102.133	102.133	88.826
$\tilde{\lambda}_4$	—	—	—	200.583	157.914

По мере увеличения числа базисных функций n точность выражения собственных значений низшего порядка быстро возрастает, тогда как точность выражения собственных значений высших порядков быстро снижается. Для самосопряженного и положительно определенного определяющего уравнения (как в нашем случае) собственные значения, вычисленные по методу Галеркина, всегда будут получаться больше точных собственных значений.

2.2 Задача для общего операторного уравнения

Рассмотрим самосопряженное и положительно определенное однородное операторное уравнение вида

$$Au - \lambda Bu = 0.$$

Если это операторное уравнение при некотором значении λ имеет решение u, отличное от тривиального $u = 0$, то такое число λ называют собственным значением этого уравнения.

В прикладных исследованиях задачи на собственные значения операторного уравнения возникают, например, при анализе колебаний различных динамических систем. В этом случае собственные значения пропорциональны квадрату частот собственных колебаний. При исследовании условий перехода системы из одного состояния в другое, собственные значения характеризуют уровень внешних воздействий на систему, при котором такой переход возможен. В частности, собственные значения могут иметь смысл критических нагрузок, вызывающих потерю устойчивости равновесия или движения системы.

2.3 Нахождение верхней границы для собственных значений

Искомый собственный элемент u приближенно представим в виде

$$\tilde{u} = \sum_i c_i u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

функции u_i выбираются по определенному правилу. Подставим это разложение в операторное уравнение и применяя условие ортогональности невязки к каждой из функций u_i, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_i c_i \langle\, A u_i - \lambda B u_i, u_j \,\rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Каждое из уравнений в системе содержит неизвестное число λ. Эту СЛАУ можно иначе записать как

$$\sum_i K_{ji} c_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где симметрическая матрица $\mathbf{K} = K_{ji} = K_{ij}$ состоит из элементов $\langle\, A u_i - \lambda B u_i, u_j \,\rangle$.

Система уравнений имеет нетривиальное решение относительно коэффициентов c_i при условии равенства нулю определителя матрицы K_{ji}. Каждое значение $\tilde{\lambda}_k,\ k = 1, 2, \ldots n$, удовлетворяющее уравнению $\det \mathbf{K} = 0$, примем в качестве приближения к собственному значению λ_k операторного уравнения (индекс k должен именно возрастать от 1 до n). При фиксированном n можно найти приближенные значения лишь для n собственных значений операторного уравнения.

Можно показать, что при любом $k \leq n$ верно неравенство $\tilde{\lambda}_k \geq \lambda_k$ и при увеличении n значения $\tilde{\lambda}_k$ при *фиксированных* значениях индекса k не возрастают, а наоборот, $\tilde{\lambda}_k \to \lambda_k$ при $n \to \infty$. Таким образом, из решения уравнения $\det \mathbf{K} = 0$ можно получить значения $\tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, дающие *верхнюю границу* (или *оценки сверху*) для собственных значений λ_k исходного операторного уравнения.

Однако, чем больше n, тем больше разница между $\tilde{\lambda}_n$ и λ_n, и чем ближе k к n, тем больше разница между $\tilde{\lambda}_k$ и λ_k. Словами можно выразить такое правило: *чем больше берется число n базисных функций, тем больше порядков собственных значений λ приближенно справа вычисляются, и тем более точно вычисляются значения низших порядков, но тем более ошибочные получаются значения высших порядков; если интересны только m собственных значений низших порядков, то есть смысл взять число $n > m$.*

2.4 Нахождение нижней границы для собственных значений

Методом Галеркина можно найти *только* верхнюю границу $\tilde{\lambda}_k$ для собственных значений λ_k исследуемого операторного уравнения $Au - \lambda Bu = 0$, и при увеличении числа n базисных функций эта граница будет снижаться до собственных значений при фиксированных k. Нижнюю границу (оценку снизу) найти *нельзя.*

Однако можно рассмотреть *другую задачу* для другого самосопряженного и положительно определенного операторного уравнения $A'u - \lambda' B'u = 0$ с легко находимыми (точными) собственными значениями λ'_k. И если соблюдается условие

$$\frac{\langle A'u, u\rangle}{\langle B'u, u\rangle} \leq \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle Bu, u\rangle},$$

то $\lambda'_k \leq \lambda_k$. Значения λ'_k можно принять за нижнюю границу для λ_k, однако она может быть сильно далека от искомых собственных значений λ_k. Но существует способ поднять нижнюю границу поближе к λ_k.

2.5 Задача о критической осевой сжимающей силе для стержня

Рассмотрим упругий, шарнирно закрепленный по концам стержень длины ℓ, расположенный вдоль оси Ox. Вдоль этой же оси на его торцы действует сжимающая сила P. Материал стержня изотропный и равномерный, обладает модулем упругости E. Поперечное сечение круглое, но не постоянное, а с радиусом $r(x) = a\sqrt{1 + \frac{x}{\ell}}$. Момент инерции сечения $I(x) = \frac{\pi}{4} r^4(x)$. Точки стержня отклоняются от оси Ox перпендикулярно, значения этих отклонений равны $u(x)$. Перемещениями точек стержня по оси Ox пренебрегаем. Нужно найти критическое значение силы P – наименьшую осевую нагрузку, при которой стержень перейдет из уравновешенного состояния к безразличному по отношению к малым поперечным возмущениям.

Из условия равновесия следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$EI(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + Pu(x) = 0, \quad x \in (0, \ell).$$

с граничными условиями $u(0) = u(\ell) = 0$. Подставим в уравнение выражение для момента:

$$E\frac{\pi}{4}a^4\left(1 + \frac{x}{\ell}\right)^2\frac{d^2u(x)}{dx^2} + Pu(x) = 0, \quad x \in (0, \ell)$$

Перейдем к координате $\xi = \frac{x}{\ell}$:

$$E\frac{\pi}{4}a^4(1+\xi)^2\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\xi}{dx^2} + Pu(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, 1),$$

где $\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{\ell^2}$. Умножим уравнение на $-\frac{4\ell^2}{\pi Ea^4(1+\xi)^2}$:

$$-\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} - \frac{4P\ell^2}{\pi Ea^4(1+\xi)^2}u(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, 1),$$

Обозначим $\lambda = \frac{P\ell^2}{\pi Ea^4}$ и перейдем к краевой задаче

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} - \lambda\dfrac{4}{(1+\xi)^2}u(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Обозначив $A = -\frac{d^2}{d\xi^2}$ и $Bu = \frac{4u}{(1+\xi)^2}$, получим операторное уравнение

$$Au - \lambda Bu = 0.$$

Наряду с тривиальным решением $u(\xi) \equiv 0$, полученная краевая задача может иметь решения $u_k(\xi) \not\equiv 0$, соответствующие собственным значениям λ_k. В данном случае важно оценить наименьшее собственное значение λ_1, пропорциональное наименьшей сжимающей силе, вызывающей потерю устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня.

Для вычисления верхней границы $\tilde{\lambda}_1$ используем одну базисную функцию $u_1(\xi) = \xi(1-\xi)$, дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющую граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$. Вычислим

$$\langle Au_1, u_1\rangle = -\int_0^1 \left(\frac{d^2u_1(\xi)}{d\xi^2}\right) u_1(\xi)\, d\xi = 2\int_0^1 \xi(1-\xi)\, d\xi = \frac{1}{3}.$$

$$\langle Bu_1, u_1\rangle = 4\int_0^1 \frac{\xi^2(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2}\, d\xi = 4\frac{25-36\ln 2}{3}.$$

$$\tilde{\lambda}_1 \le \frac{\langle Au_1, u_1\rangle}{\langle Bu_1, u_1\rangle} = \frac{1}{4(25-36\ln 2)} \approx 5.3532.$$

Границу снизу можно получить, если рассмотреть такую же задачу, но для стержня с постоянным круглым сечением. Для такого стержня имеем самосопряженную и положительно определенную краевую задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} - 4\lambda u(\xi) = 0, \quad \xi \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Собственными функциями будут $u_k(\xi) = \sin k\pi\xi$, им соответствуют собственные значения $\lambda'_k = \frac{(k\pi)^2}{4}$. Наименьшее из них (при $k = 1$) равно $\lambda'_1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.4674$ и соответствует значению эйлеровой (или первой критической) силы $P_* = \frac{\lambda'_1 \pi E a^4}{\ell^2} = \frac{\pi^3 E a^4}{4\ell^2}$, вызывающей потерю устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня с постоянным круговым поперечным сечением (Л. Эйлер, 1744 г.).

Сравнивая две краевые задачи, находим, что $A' = A = -\frac{d^2}{d\xi^2}$, $B' = 4$, $\langle A'u, u\rangle = \langle Au, u\rangle$ и $\langle B'u, u\rangle \ge \langle Bu, u\rangle$. Значит можно записать двустороннюю оценку

$$\lambda'_1 \le \lambda_1 \le \tilde{\lambda}_1,$$

что выразится в числах как

$$2.4674 \le \lambda_1 \le 5.3532.$$

Полученная оценка является довольно грубой, поскольку верхняя граница превышает нижнюю более чем в два раза. Верхнюю границу можно понизить, если взять две и более базисных функций. Нижнюю границу тоже можно поднять, причем существенно, но это потребует введения нескольких понятий и рассмотрения нескольких теорем.

Список литературы

[1] Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер.– М. : Мир, 1988. – 352 с.

[2] Дж. Х. Уилкинсон Алгебраическая проблема собственных значений – М., 1970 г., 564 стр. с илл.

[3] Власова Б.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.

[4] Садовничий В. А. Теория операторов : учеб. для вузов с углубленным изучением математики. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.