Численное решение в Scilab однородной задачи об изгибе балки методом Галеркина с конечно-элементной аппроксимацией

ревизия*№2

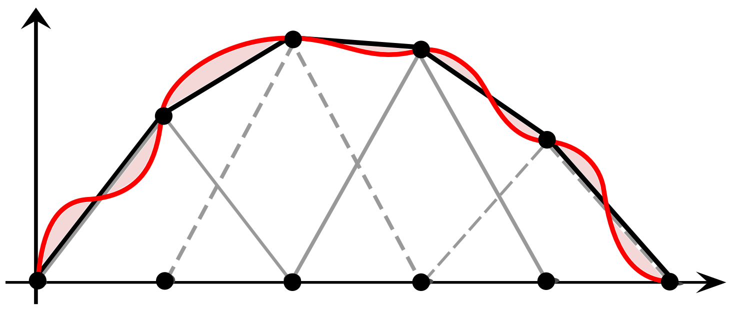
Дмитрий Мальков†

г. Комсомольск-на-Амуре

2014 г.

Аннотация

Рассмотрено решение одномерной однородной задачи из теории упругости методом Галеркина с интерполяцией на конечных элементах. Приводится программный код решения задачи на ЭВМ в математическом комплексе общего назначения Scilab.



*статьи время от времени пересматриваются и исправляются, скачивайте свежайшие версии с домашней страницы автора

†**Email:** maldmitrix@gmail.com, **сайт:** http://maldmitrix.github.io

Содержание

Предисловие

Определить, понимается численный метод или нет, очень легко. Если не возникает проблем при попытке сесть за компьютер и реализовать в математическом программном комплексе общего назначения, например, метод Бубнова-Галеркина (далее просто Галеркина), то этот метод понимается. К математическим комплексам общего назначения относятся такие программные системы, как `Matlab`, `Scilab`, `GNU Octave`, `Maple`, `Mathematica`, `MathCad`, `Maxima` и подобные им. Изучение сложных численных методов в таких универсальных программах, а не в специализированных, дает глубокое понимание их сути.

В приложении к этой статье приведен пример программирования решения задачи теории упругости методом Галеркина-МКЭ (через дефис обычно указывается метод аппроксимации). Сама задача и алгоритм решения приведены в последнем разделе. Алгоритм запрограммирован в комплексе `Scilab` пятой версии. Однако код можно легко переделать, чтобы он запустился в `Matlab` или `GNU Octave`.

1 Интерполяция сплайнами

1.1 Быстрое введение в интерполяцию

Аппроксимация – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. *Аппроксимацией (приближением) функции* $f(x)$ называется нахождение такой функции $\tilde{f}(x)$ (аппроксимирующей функции), которая была бы близка к заданной. Критерии близости функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ могут быть различные.

В том случае, когда приближение строится на дискретном наборе точек, аппроксимацию называют *точечной* или *дискретной*. В том случае, когда аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), аппроксимация называется *непрерывной* или *интегральной*. Примером такой аппроксимации может служить разложение функции в ряд Тейлора, то есть замена некоторой функции степенным многочленом.

Мы будем рассматривать точечную аппроксимацию. При этом функция $f(x)$ как правило неизвестна, а связь между параметрами x и y задается в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике же (например, для визуализации) могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Однако получить эти значения можно лишь путем очень сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов. В подобных случаях, оптимальным, с точки зрения экономии времени и средств, является использование имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра у при любом значении определяющего параметра x (в рамках некоторого интервала), поскольку точная связь $y = f(x)$ неизвестна или использование ее в расчетах затруднительно.

Общая погрешность аппроксимирующей функции может быть выражена как сумма локальных погрешностей в точках с координатами x_i: $E = \sum_i e_i$, где $e_i = |\tilde{f}(x_i) - f(x_i)|$. В общем случае при аппроксимации $0 \leq e_i \leq \varepsilon$. В случае, если $\varepsilon = 0$, то есть налагается условие строгого совпадения значений функций $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ в заданных точках x_i, то данный вид аппроксимации называется *интерполяцией.*

При интерполяции $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$, что автоматически подразумевает наличие известных $\{x_i, y_i\}$, для некоторого определенного интервала $[x_0, x_n]$. В случае, если требуется получить аппроксимацию функции за пределами известного интервала, то данный вид аппроксимации называется экстраполяцией. x_i, для которых даны y_i, называются *узлами интерполяции* или *опорными точками.*

Интерполяция бывает *глобальной* – $\tilde{f}(x)$ проходит через *все* точки заданного интервала $[x_0, x_n]$, либо *локальной (кусочной)* – $f(x)$ на указанном интервале интерполируется несколькими $\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \ldots, \tilde{f}_k(x)$.

Известны три типа интерполяции: полиномиальная, тригонометрическая, экспоненциальная.

Линейная интерполяция – простейший вид локальной полиномиальной интерполяции – замена $f(x)$ множеством линейных функций $\tilde{f}_1(x)$, $\tilde{f}_2(x), \ldots, \tilde{f}_k(x)$, каждая из которых соединяет лишь две точки. Если заданы две точки $f(x_0) = y_0$ и $f(x_1) = y_1$, то их соединяет отрезок прямой, уравнение которой есть полином первой степени

$$\tilde{f}(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + y_0.$$

Пусть в интервале $[a, b]$ заданы $n+1$ опорных точек $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$, а так же $n+1$ действительных чисел $y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда в качестве глобальной интерполяционной функции $\tilde{f}(x)$ можно найти многочлен степени не больше n, такой, что $\tilde{f}(x_i) = y_i$. Всегда существует *единственный* интерполяционный многочлен. Но однозначно определенный многочлен может быть представлен в различных видах.

Пусть кривые интерполирующих функций задаются параметрически по t. *Непрерывность* интерполирующих функций при кусочной интерполяции:

- Непрерывность нулевого порядка по параметру, C_0 – означает, что кривые встречаются, то есть $\tilde{f}_{k-1}(x_p) = \tilde{f}_k(x_p)$.

- Непрерывность первого порядка по параметру, C_1 – означает, что первые производные по параметру (t) двух кривых одинаковы в точке пересечения (стыковки), то есть $\tilde{f}'_{k-1}(x_p) = \tilde{f}'_k(x_p)$.

- Непрерывность второго порядка по параметру, C_2 – означает, что первая и вторая производные по параметру (t) двух кривых одинаковы в точке пересечения (стыковки), то есть $\tilde{f}'_{k-1}(x_p) = \tilde{f}'_k(x_p)$ и $\tilde{f}''_{k-1}(x_p) = \tilde{f}''_k(x_p)$.

Для гладкой интерполяции узлов изобрели сплайны. *Сплайны* (k-сплайны) – кусочные полиномы степени k с непрерывной производной степени $k-1$ в точках соединения сегментов. Иными словами, сплайнами называется набор функций, который вместе с несколькими производными этих функций непрерывен на отрезке $[a, b]$, а на каждом частном интервале этого отрезка $[x_i, x_i + 1]$ в отдельности является некоторым многочленом невысокой степени. В настоящее время чаще всего применяют *кубический сплайн*, то есть на каждом локальном интервале функция является полиномом 3-го порядка.

1.2 Интерполяция Эрмита

Примечательная особенность Эрмитовой интерполяции в том, что кроме значений y_i интерполируемой функции $f(x)$ в точках x_i, также учитываются и ее первые производные в этих точках. Этот дополнительный учет добавляет два уравнения в систему, определяющую параметры интерполирующей функции. Чтобы получить уникальные значения этих параметров, число независимых уравнений в системе должно быть равно числу параметров, поэтому нужно увеличить число параметров. Два дополнительных параметра дают возможность построить гладкий сплайн, у которого при переходе с сегмента на сегмент не так сильно заметна смена полинома (выполняется условие непрерывности C_1). Если значения первых производных неизвестны (а чаще всего это именно так), то есть разные способы их найти, взяв в расчет узлы соседних сегментов.

Если даны две точки $\{x_0, x_1\}$, значения интерполируемой функции в них $\{f(x_0), f(x_1)\}$ и значения первых производных $\{f'(x_0), f'(x_1)\}$, то кубический полином Эрмита можно записать как линейную комбинацию четырех базисных функций h_i:

$$H_3(x) = h_1 f(x_0) + h_2 f'(x_0) + h_3 f(x_1) + h_4 f'(x_1),$$

$$h_1 = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)^2, \quad h_2 = (x - x_0)\left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)^2,$$

$$h_3 = \left(1 + 2\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x_0 - x}{x_0 - x_1}\right)^2, \quad h_4 = (x - x_1)\left(\frac{x_0 - x}{x_0 - x_1}\right)^2.$$

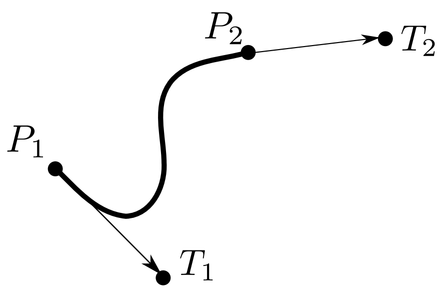


Рис. 1: Чтобы определить кубический полином, нужно задать стартовую и конечную точки P_1, P_2, направления и скорости кривой в этих точках T_1, T_2 (каким образом кривая покидает точку P_1 и встречает точку P_2)

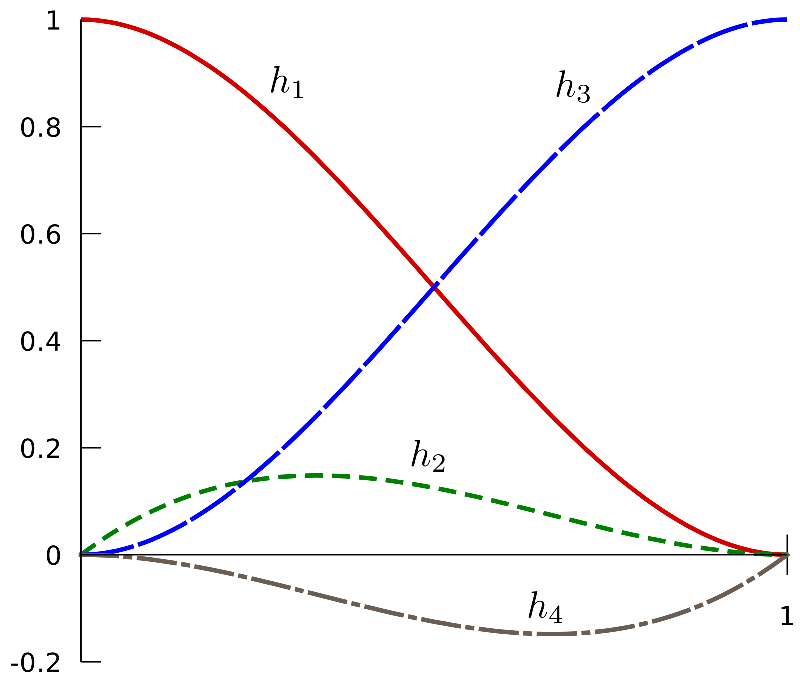


Рис. 2: Графики четырех Эрмитовых базисных функций h_i, линейная комбинация которых образует кубический интерполяционный Эрмитов полином для каждого отдельного сегмента кубического сплайна

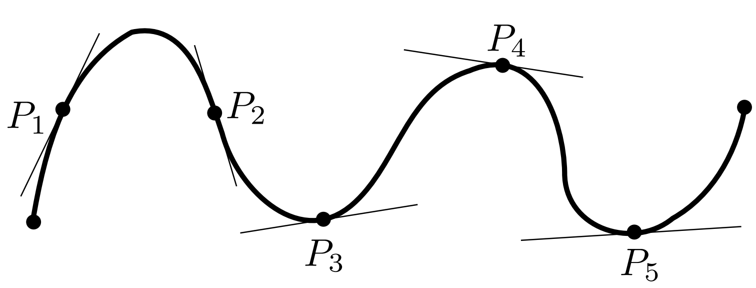


Рис. 3: При переходе с одного кубического сплайна на другой, первая производная не меняется. P_i – точки стыков сегментов

2 Численное решение задачи о статических прогибах балки

2.1 Уравнение Эйлера-Бернулли изгиба балки

Балочная теория Эйлера-Бернулли, называемая классической теорией, чаще всего применяется в расчетах благодаря ее простоте и удовлетворительным погрешностям во многих задачах. В этой теории поперечные прогибы балки записываются в виде обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right] = f(x,u), \quad 0 \le x \le \ell,$$

подчиненного условиям на границе

$$u(0) = a_0, \quad \frac{d^2u(0)}{dx^2} = b_0, \quad u(\ell) = a_\ell, \quad \frac{d^2u(\ell)}{dx^2} = b_\ell.$$

Функция $r(x) = E \cdot I$ – изгибная жесткость балки, E – модуль упругости при растяжении, I – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно ее нейтральной оси. $u(x)$ – это прогибы балки, $f(x,u)$ – распределенная поперечная нагрузка, зависящая в том числе и от величины прогиба в каждой точке. В случае линейности, $f(x,u) = q(x) \cdot u(x) + p(x)$, и тогда уравнение можно переписать как

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right] = q(x)u(x) + p(x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

где $q(x)$ – коэффициент эластичности основания (грунта) и $p(x)$ – распределение поперечных к балке активных сил.

Если балка не лежит на основании, а поддерживается только на ее концах или на одном конце (консольная балка), то $q(x) = 0$ решение $u(x)$ описывает прогибы балки при распределенной активной нагрузки $p(x)$.

Для случаев, когда заданы простые функции $f(x,u)$ и $r(x)$, точное решение обыкновенного дифференциального уравнения может быть легко найдено стандартными путями. Но в более сложных случаях найти точное решение затруднительно, и тогда стоит применять численные методы для нахождения приближенного решения. Покажем далее, как применить метод Галеркина с методом Конечных Элементов в случае, когда $r(x) = E \cdot I$ – константа, $q(x) = 0$. Задача будет иметь вид

$$EI\frac{d^4u(x)}{dx^4} = p(x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

$$u(0) = a_0, \quad \frac{d^2u(0)}{dx^2} = b_0, \quad u(\ell) = a_\ell, \quad \frac{d^2u(\ell)}{dx^2} = b_\ell.$$

2.2 Решение однородной задачи методом Галеркина с конечно-элементной аппроксимацией

Сначала решим задачу глобально, используя глобальные базисные и весовые функции, целиком покрывающие область от 0 до ℓ.

Запишем исходное дифференциальное уравнение в слабой форме, умножив невязку на весовую функцию $w(x)$ и взяв интеграл по области задачи. Интегрирование по частям позволит понизить порядок дифференцирования функции u:

$$\int_0^\ell \left[EI\frac{d^4u(x)}{dx^4} - p(x)\right] w(x)dx = EI\frac{d^3u(x)}{dx^3}w(x)\Big|_0^\ell -$$
$$- EI\frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{dw(x)}{dx}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \left[EI\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} - p(x)w(x)\right] dx = 0.$$

Теперь нужно выбрать подходящие базисные (аппроксимирующие) функции u_i. Заметим, что наибольший порядок производной от $u(x)$ в слабой форме равен трем. Выберем базисные функции трижды дифференцируемые. Базисные кубические интерполяционные полиномы Эрмита h_i подойдут. После подстановки $x_0 = 0$ и $x_1 = \ell$ в формулы базисных кубических полиномов Эрмита, они принимают вид

$$h_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3, \quad h_2 = x\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2,$$
$$h_3 = 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3, \quad h_4 = x\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{x}{\ell}\right].$$

Как принято в методе взвешенных невязок, представим пробную функцию $\tilde{u}$ в форме разложения по данным базисным функциям $\tilde{u} = \sum_{j=1}^4 u_j h_j$. Используя метод Галеркина, мы должны взять весовые функции такие же, как и базисные: $w_i = h_i$. Подставим в уравнение слабой формы весовые функции. Получим:

$$\int_0^\ell \left[EI\frac{d^4u(x)}{dx^4} - p(x)\right] w(x)dx = EI\frac{d^3u(x)}{dx^3}h_i(x)\Big|_0^\ell -$$
$$- EI\frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{dh_i(x)}{dx}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \left[EI\frac{d^2h_i(x)}{dx^2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} - p(x)h_i(x)\right] dx = 0.$$

Матрица жесткости будет состоять из компонентов

$$K_{ij} = EI \int_0^\ell \frac{d^2h_i}{dx^2}\frac{d^2h_j}{dx^2}dx.$$

Вектор-столбец внешних сил будет состоять из компонентов

$$f_i = \int_0^\ell p(x)h_i dx.$$

Найдем, например, первый компонент матрицы жесткости:

$$\begin{aligned} K_{11} = EI \int_0^\ell \frac{d^2h_1}{dx^2}\frac{d^2h_1}{dx^2}dx = EI \int_0^\ell \frac{1}{\ell^3}(12x-6\ell)\frac{1}{\ell^3}(12x-6\ell)dx = \\ = \frac{EI}{\ell^6}\int_0^\ell 144x^2 - 144x\ell + 36\ell^2 dx = \\ = \frac{EI}{\ell^6}\left(48x^3 - 72x\ell + 36x\ell\right)\Big|_0^\ell = \frac{EI}{\ell^6}\left(12\ell^3\right) = \frac{12EI}{\ell^3}. \end{aligned}$$

Все остальные компоненты найдутся аналогично, и матрица жесткости будет иметь вид:

$$K_{ij} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично найдем первый компонент вектор-столбца сил, для простоты считая, что распределенная сила не меняет свою интенсивность:

$$f_i = \int_0^\ell p(1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3})dx = p\left(x - \frac{x^3}{\ell^2} + \frac{x^4}{2\ell^3}\right)\Big|_0^\ell = \frac{p\ell}{2}.$$

Полный вектор-столбец сил:

$$f_i = \frac{p\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 6\ell \\ 1 \\ -6\ell \end{bmatrix}.$$

И можно записать матричное уравнение:

$$\frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{p\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 6\ell \\ 1 \\ -6\ell \end{bmatrix}$$

Решив это матричное уравнение, найдем вектор-столбец перемещений.

Теперь нужно разбить область на m элементов, каждый из которых имеет длину $h = \frac{\ell}{m}$ (не путайте с полиномами Эрмита h_i). Для каждого элемента составить свое локальное матричное уравнение. Далее ассемблировать элементные уравнения в единое глобальное матричное уравнение с порядком, равным числу степеней свободы, а их у нас по две на каждый узел (узлов всего $m + 1$ штук): значение перемещения в узле и значение первой производной от перемещения. Далее подчинить глобальное матричное уравнение граничным условиям: скрыть от вычислений и результатов столбцы и строки, соответствующие определенным и неизменяемым степеням свободы. Если нет перемещения в узле, не меняется первая степень свободы. Если при этом нет и поворота сечения, то не меняется вторая степень свободы в этом же узле. Наконец, решить матричное уравнение процедурами линейной алгебры.

Список литературы

[1] Bruce A. Finlayson The method of weighted residuals and variational principles. – Academic ress, inc., New York, 1972.

[2] S Rao. Gunakala, D.M.G. Comissiong. A Finite Element Solution of the Beam Equation via MATLAB. – International Journal of Applied Science and Technology, Vol. 2 No. 8; October 2012, pp 80-88.

[3] Иванов В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости: Учеб. пособие – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 176 с.: ил.

[4] Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986.

Приложение A

Код в программе `Scilab` (после небольших поправок код можно запустить в `Matlab` или в `GNU Octave`) для расчета методом Галеркина с конечно-элементной аппроксимацией прогибов балки с разными условиями на концах. Балка имеет длину 1, всюду постоянную изгибную жесткость равную 1 и постоянное поперечное сечение. Нагрузка - поперечная, равномерно распределенная. Балку представляем как последовательность равноудаленных узлов. Результат – вертикальные перемещения узлов – представляем как точечный график смещенных узлов. «Чисто декоративно» соединяем узлы отрезками прямых линий, чтобы нагляднее представить непрерывную балку.

```
m = 100;                        // число конечных элементов
P = -100;                       // нагрузка

// Массив из m+1 равномерно распределенных точек на интервале [0,1]
nodeCoordinates = linspace(0, 1, m+1)';
L = max(nodeCoordinates);   // Наибольшая координата узлов, т.е. L=1
numberNodes = size(nodeCoordinates,1);
xx = nodeCoordinates;
E = 1; I = 1; EI = E*I;         // Изгибная жесткость балки
GDof = 2*numberNodes;           // Глобальное число степеней свобод
U = zeros(GDof,1);
force = zeros(GDof,1);          // Глобальный столбец сил
stiffness = zeros(GDof,GDof);   // Глобальная матрица жесткости
displacements = zeros(GDof,1);  // Глобальный столбец прогибов

// Нумерация узлов каждого элемента (для первого индексы: [1, 2])
for i = 1:m
  elementNodes(i,1) = i;
  elementNodes(i,2) = i+1;
end

for e=1:m                       // Пробегаем все элементы
  indice=elementNodes(e,:);     // Номера узлов элемента (2 штуки)
  // Номера степеней свобод, принадлежащих элементу (4 штуки)
  elementDof = [ 2*(indice(1)-1)+1 2*(indice(2)-1) ...
                 2*(indice(2)-1)+1 2*(indice(2)-1)+2];
  h = xx(indice(2)) - xx(indice(1));  // Длина элемента
  // Набиваем локальный столбец сил каждого элемента
  f1 = (P*h/2)*[1  6*h  1  -6*h]';
  force(elementDof)=force(elementDof)+f1;
  // Набиваем локальную матрицу жесткости каждого элемента
  k1=(EI/h^3)*[  12    6*h    -12    6*h ;...
                6*h  4*h^2  -6*h  2*h^2 ;...
                -12   -6*h    12   -6*h ;...
                6*h  2*h^2  -6*h  4*h^2 ]';
  stiffness(elementDof,elementDof)=stiffness(elementDof,elementDof)+k1;
end
```

```
// Граничные условия: оба конца защемлены
fixedNodeU = [1 2*m+1];
fixedNodeV = [2 2*m+2];
prescribedDof = [fixedNodeU;fixedNodeV];
activeDof = setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]);
U = stiffness(activeDof,activeDof) \ force(activeDof);
displacements = zeros(GDof,1);
displacements(activeDof) = U;
U = displacements(1:2:2*numberNodes);
plot(nodeCoordinates,U,'b:');        // синий штрих чере две точки

// Граничные условия: оба конца свободно оперты
fixedNodeU = [1 2*m+1];
fixedNodeV = [];
prescribedDof = [fixedNodeU;fixedNodeV];
activeDof = setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]);
U = stiffness(activeDof,activeDof) \ force(activeDof);
displacements = zeros(GDof,1);
displacements(activeDof) = U;
U = displacements(1:2:2*numberNodes);
plot(nodeCoordinates,U,'r--');       // красный штрих

// Граничные условия: левый конец защемлен
// правый конец свободно оперт
fixedNodeU = [1 2*m+1];
fixedNodeV = [2 2*m+1];
prescribedDof = [fixedNodeU;fixedNodeV];
activeDof = setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]);
U = stiffness(activeDof,activeDof) \ force(activeDof);
displacements = zeros(GDof,1);
displacements(activeDof) = U;
U = displacements(1:2:2*numberNodes);
plot(nodeCoordinates,U,'k-'); // черная сплошная линия

// Граничные условия: левая половина балки защемлена,
// правая половина вся свободна
fixedNodeU = [1:m];
fixedNodeV = [1:m];
prescribedDof = [fixedNodeU;fixedNodeV];
activeDof = setdiff([1:GDof]',[prescribedDof]);
U = stiffness(activeDof,activeDof) \ force(activeDof);
displacements = zeros(GDof,1);
displacements(activeDof) = U;
U = displacements(1:2:2*numberNodes);
plot(nodeCoordinates,U,'g-');        // зеленая сплошная линия
```

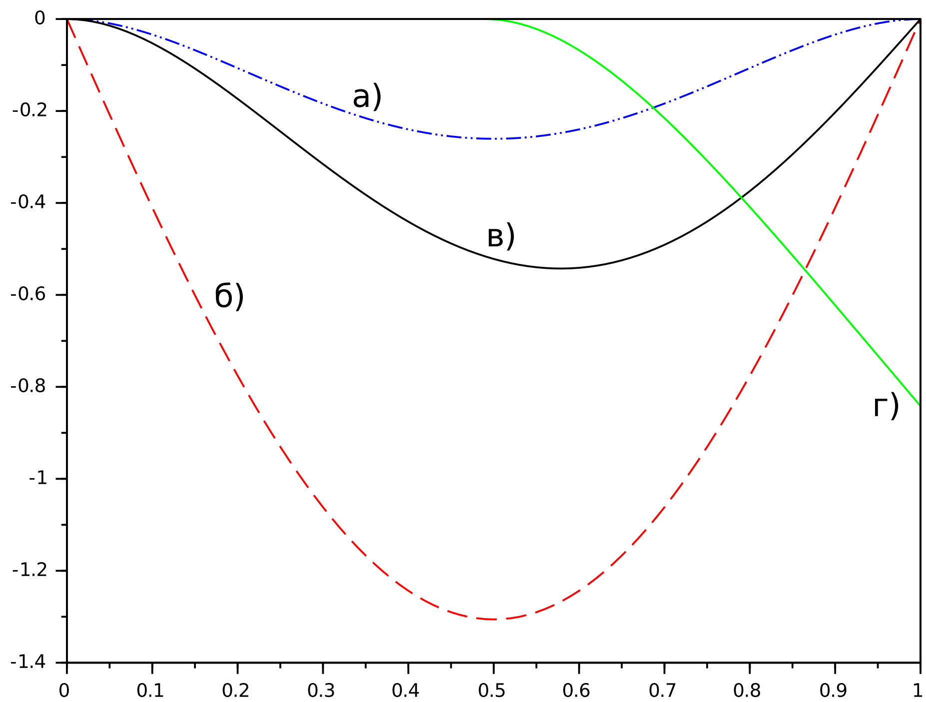


Рис. 4: графики прогибов балки при одинаковой нагрузке, выданные приведенным `Scilab`-скриптом: а) концы защемлены; б) концы свободно опираются; в) левый конец защемлен, правый конец свободно оперт; г) левая половина балки вся защемлена, остальная часть вся свободна