Éléments finis - TP3

Mathis Le Gall

19 février 2023

1 Introduction du problème

1.1 Problème initial

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $[a, b]$

$$-u" + u = f \tag{1}$$

La forme variationnelle s'obtient en multipliant l'équation (1) par une fonction $v \in \mathcal{H}_0^1(]a, b[)$ et en intégrant sur $[a, b]$:

$$-\int_a^b u"(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

On obtient, suite à une IPP, la forme variationnelle suivante:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + [u'(x)v(x)]_a^b \tag{3}$$

1.1.1 Conditions de Dirichlet

J'ai choisi les conditions Dirichlet suivantes: $\begin{cases} u(a) = 4 \\ u(b) = 2 \end{cases}$

Dans le cas des conditions de Dirichlet, $u_{/\Gamma} = 0$. La formule variationnelle devient donc:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

1.1.2 Conditions de Neumann

J'ai choisi les conditions de Neumann suivantes: $\begin{cases} u'(a) = 1 \\ u'(b) = 1 \end{cases}$

Dans ce cas, la formule variationnelle devient:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x - v(a) - v(b) \tag{5}$$

1.1.3 Conditions mixtes

J'ai choisi les conditions mixtes suivantes: $\begin{cases} u(a) = 4 \\ u'(b) = -1 \end{cases}$

Dans ce cas, la formule variationnelle devient:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x - v(b) \tag{6}$$

1.2 Problème discret

Soit $V_h \subset \mathcal{H}_0^1(]a,b[)$ de dimension n et $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de V_h.
On peut alors écrire u sous la forme $u_h = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$.
On a alors la forme variationnelle discrète suivante :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} c_i(\int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x) = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$\begin{cases} R_{i,j} = \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,\mathrm{d}x \\ M_{i,j} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x \\ K = R + M \\ b_j = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{8}$$

Et on obtient donc le système matriciel suivant :

$$K\vec{c} = \vec{b} \tag{9}$$

2 Solution exacte

Prenons dans notre cas $f(x) = 10$.
u s'écrit donc, après résolution de l'équation différentielle:

$$u(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + 10 \tag{10}$$

2.1 Cas des conditions de Dirichlet

On a: $\begin{cases} u(a) = 4 \\ u(b) = 2 \end{cases}$

On obtient donc:

$$\begin{cases} A = -6 - B \\ B = \frac{6e-8}{e^{-1}-e} \end{cases} \tag{11}$$

2.2 Cas des conditions de Neumann

On a: $\begin{cases} u'(a) = 1 \\ u'(b) = -1 \end{cases}$

On obtient donc:

$$\begin{cases} A = 1 + B \\ B = \frac{1+e}{e^{-1}-e} \end{cases} \tag{12}$$

2.3 Cas des conditions mixtes

On a: $\begin{cases} u'(a) = 1 \\ u'(b) = -1 \end{cases}$

On obtient donc:

$$\begin{cases} A = -10 - B \\ B = \frac{1-10e}{e^{-1}+e} \end{cases} \tag{13}$$

3 Programmes MATLAB

J'ai utilisé la même programmation des fonctions φ que pour le TP1. J'ai également utilisé la même méthode d'intégration, celle de Simpson.

3.1 Programme principal

Le programme principal se décompose en 4 parties.

1. L'initialisation de l'intervalle, du maillage et des fonctions.
2. L'assemblage de $\vec{b}$.
3. L'assemblage de R et de M.
4. Le calcul et affichage de la solution.

3.1.1 L'assemblage de $\vec{b}$

Comme $\int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x$, on introduit une boucle for sur k pour assembler $\vec{b}$.
On pose alors $i_{glob} = i_{loc} + k - 1$ pour pouvoir accéder à tous les indices de $\vec{b}$.
Il suffit donc de sommer b_{iglob} sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ et cela $\forall i_{glob} \in [\![1, n]\!]$.

3.1.2 L'assemblage de R et de M

L'assemblage de R et de M est similaire à celui de $\vec{b}$, il faut simplement introduire en plus l'indice $j_{glob} = j_{loc} + k - 1$. Le processus reste ensuite le même à la simple différence que ce ne sont pas les mêmes fonctions que l'on intégre.

3.2 Différences dans les assemblages

3.2.1 Construction de K et b pour les conditions de Dirichlet

On extrait la sous-matrice $newK$ qui est la matrice K sans sa première ligne, dernière ligne, première colonne et dernière colonne.
On créé un nouveau vecteur $newB$ qui est le vecteur b auquel on a soustrait la première et dernière colonne de K fois les termes de bords respectifs. On extrait ensuite le sous-vecteur sans le premier terme et dernier terme.
On résout en suite $newK * u = newB$, et on fixe u aux bords.

3.2.2 Construction de K et b pour les conditions de Neumann

Le membre de droite de (8) est le même que pour celui des conditions de Dirichlet, à la seule différence qu'on lui rajoute les termes de bord de l'IPP:

$$\begin{cases} b_1 = \int_a^b f(x)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x - u'(a) \\ b_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + u'(b) \end{cases} \tag{14}$$

Cette fois-ci, on ne fait pas les extractions de matrices et vecteurs. On résout directement $K * c = b$.

3.2.3 Construction de K et b pour les conditions mixtes

Le membre de droite de (8) est le même que pour celui des conditions de Dirichlet, à la seule différence qu'on lui rajoute les termes de bord de l'IPP.

$$b_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + u'(b) \tag{15}$$

On extrait la sous-matrice $newK$ qui, cette fois-ci, est la matrice K sans sa première ligne et première colonne.
On créé un nouveau vecteur $newB$ qui est le vecteur b auquel on a soustrait la

première de K fois le terme de bord respectif. On extrait ensuite le sous-vecteur sans le premier terme.
On résout en suite $newK * u = newB$, et on fixe u au bord.

3.3 Affichage de la solution

3.3.1 Conditions de Dirichlet

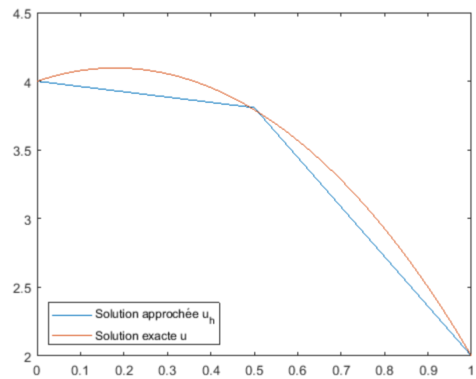

Figure 1: Solution pour $n = 2$

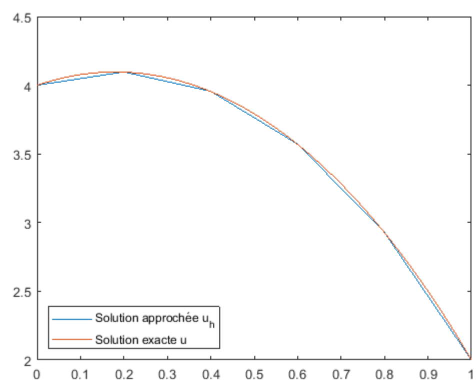

Figure 2: Solution pour $n = 5$

3.3.2 Conditions de Neumann

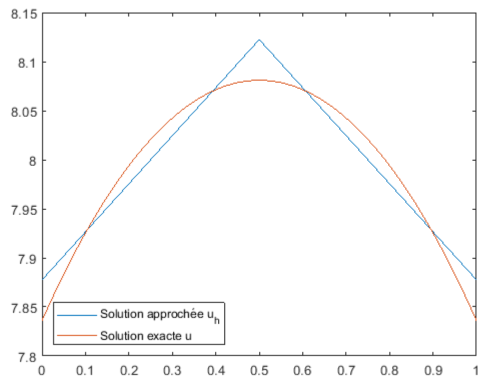

Figure 3: Solution pour $n = 2$

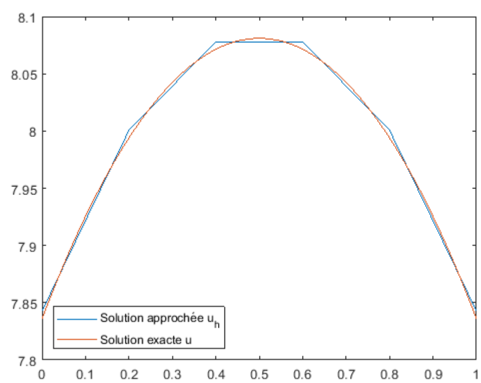

Figure 4: Solution pour $n = 5$

3.3.3 Conditions mixtes

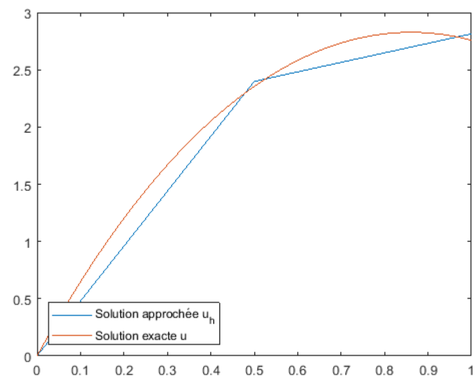

Figure 5: Solution pour $n = 2$

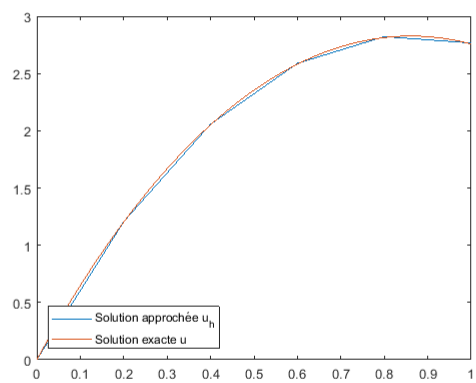

Figure 6: Solution pour $n = 5$