Éléments finis - TP2

Mathis Le Gall

22 janvier 2023

1 Introduction du problème

1.1 Problème initial

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $[a, b]$, avec les conditions de Neumann:

$$\begin{cases} -u" + u = f \\ u'(a) = 1 \\ u'(b) = -1 \end{cases} \tag{1}$$

La forme variationnelle s'obtient en multipliant l'équation (1) par une fonction $v \in \mathcal{H}_0^1(]a, b[)$ et en intégrant sur $[a, b]$:

$$\begin{cases} -\int_a^b u"(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ u'(a) = 1 \\ u'(b) = -1 \end{cases} \tag{2}$$

Il revient suite à une IPP que :

$$\begin{cases} \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + [u'(x)v(x)]_a^b \\ u'(a) = 1 \\ u'(b) = -1 \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Problème discret

Soit $V_h \subset \mathcal{H}_0^1(]a, b[)$ de dimension n et $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V_h.

On peut alors écrire u sous la forme $u_h = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$.

On a alors la forme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, n]\!], \sum\limits_{i=1}^{n} c_i (\int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x) = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x + [u_h'(x)v_h(x)]_a^b \\ u_h'(a) = 1 \\ u_h'(b) = -1 \end{cases} \tag{4}$$

$\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$\begin{cases} R_{i,j} = \int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,\mathrm{d}x \\ M_{i,j} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x \\ K = R + M \end{cases} \tag{5}$$

Le membre de droite de l'équation (4) est le même que celui du TP1, à la seule différence qu'on lui rajoute les termes de bord de l'IPP:

$$\begin{cases} b_1 = \int_a^b f(x)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x - u'(a) \\ b_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + u'(b) \end{cases} \tag{6}$$

Et on obtient donc le système matriciel suivant :

$$K\vec{c} = \vec{b} \tag{7}$$

2 Solution exacte

Prenons dans notre cas $f(x) = 10$. Ainsi:

$$\begin{cases} -u" + u = 10 \\ u'(a) = 1 \\ u'(b) = -1 \end{cases} \tag{8}$$

u s'écrit donc, après résolution de l'équation différentielle:

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x} + 10 \tag{9}$$

Je ne vous mets pas les détails des calculs de A et B, seulement leur valeur:

$$\begin{cases} A = 1 + B \\ B = \frac{1+e^1}{e^{-1}-e^1} \end{cases} \tag{10}$$

3 Programmes MATLAB

J'ai utilisé la même programmation des fonctions φ que pour le TP1. J'ai également utilisé la même méthode d'intégration, celle de Simpson.

3.1 Programme principal

Le programme principal se décompose en 4 parties.

1. L'initialisation de l'intervalle, du maillage et des fonctions.
2. L'assemblage de $\vec{b}$.
3. L'assemblage de R et de M.
4. Le calcul et affichage de la solution.

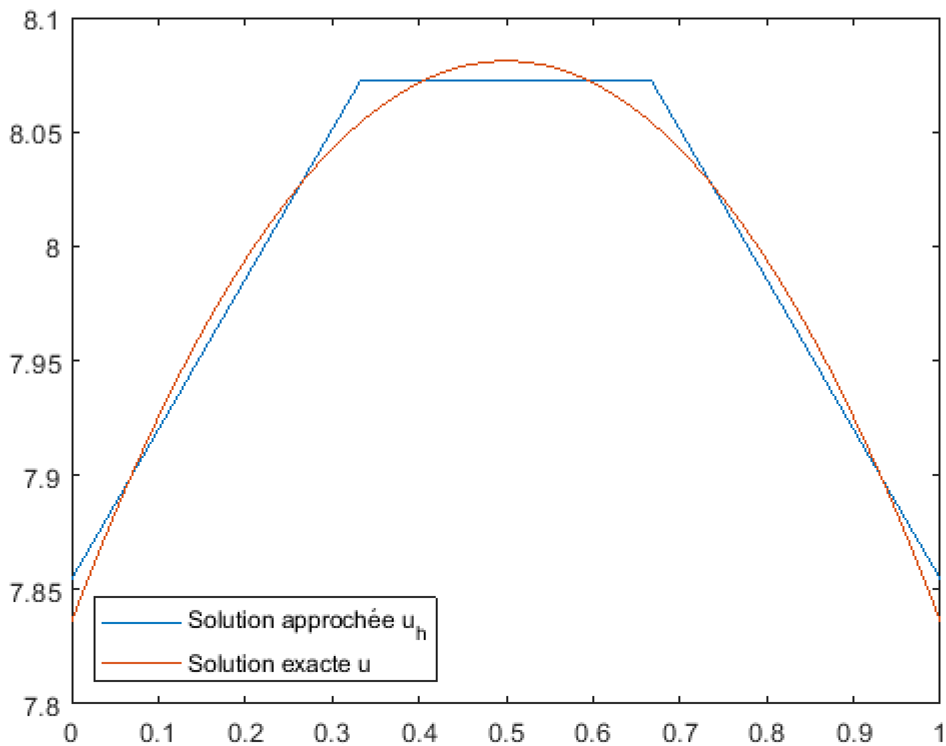
3.1.1 L'assemblage de $\vec{b}$

Comme $\int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x$, on introduit une boucle for sur k pour assembler $\vec{b}$.
On pose alors $i_{glob} = i_{loc} + k - 1$ pour pouvoir accéder à tous les indices de $\vec{b}$.
Il suffit donc de sommer b_{iglob} sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ et cela $\forall i_{glob} \in [\![1, n]\!]$.
On ajoute finalement les termes de bord pour le premier et dernier termes de $\vec{b}$.

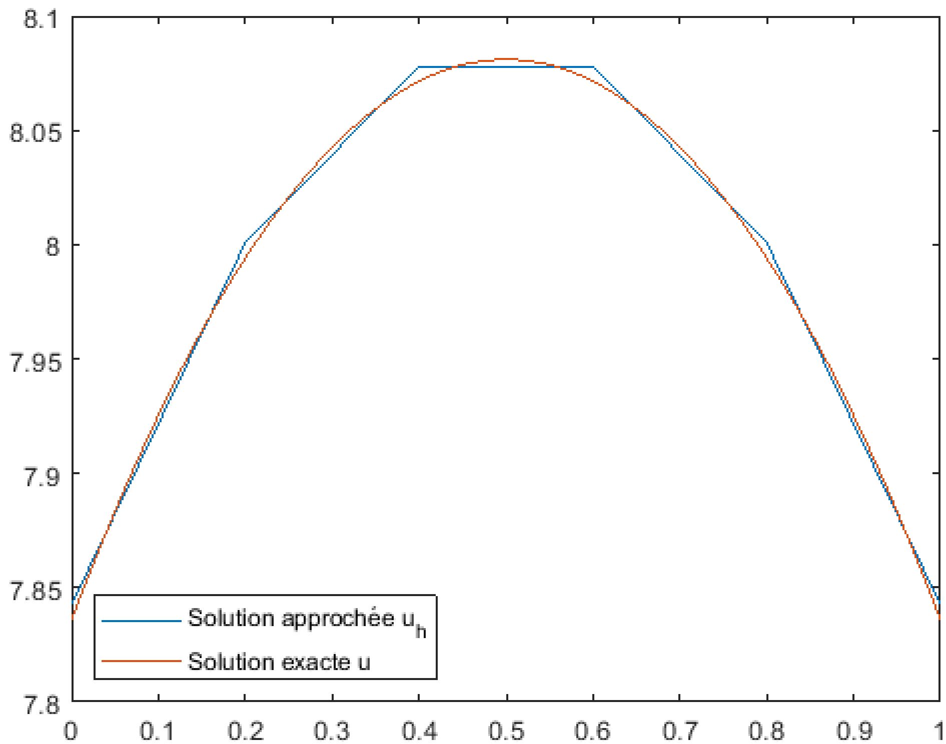
3.1.2 L'assemblage de R et de M

L'assemblage de R et de M est similaire à celui de $\vec{b}$, il faut simplement introduire en plus l'indice $j_{glob} = j_{loc} + k - 1$. Le processus reste ensuite le même à la simple différence que ce ne sont pas les mêmes fonctions que l'on intégre.

3.1.3 Affichage de la solution



Solution pour $n = 3$



Solution pour $n = 5$