# Variables Aleatorias Continuas

# Ejemplos

- Se mide la concentración de cierta sustancia en una solución.
  $X =$ medición obtenida
- Se elige una mujer adulta argentina al azar y se mide su estatura.
  $X =$ estatura de la mujer elegida.

Estos son ejemplos de variables aleatorias que no son discretas

# Ejemplos

- Se quiere determinar la concentración de cierta sustancia en una solución. Para ello se repita la medición 5 veces.
  $X_i = i-$ ésima medición obtenida
  $\bar{X} =$ promedio de las mediciones obtenidas.
- Se eligen al azar 100 mujeres adultas argentinas y se mide su estatura.
  $X_i =$ estatura de la $i-$ ésima mujer.
  $\bar{X} =$ promedio de las estaturas obtenidas
- En un hospital se registran los pesos de los recién nacidos.
  $X_i =$ peso del $i-$ ésimo niño nacido en 2020 en ese hospital.
  $\bar{X} =$ peso promedio de todos los niños nacidos en 2020 en ese hospital.
  Estos son más ejemplos de variables aleatorias que no son discretas

# Densidad

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice densidad si

- $f(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du = 1$

# Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria $X$ se dice continua sii existe una densidad

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tal que

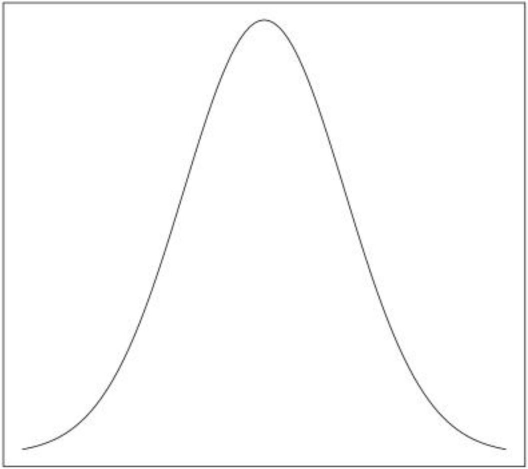
$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)\, du.$$

En particular,

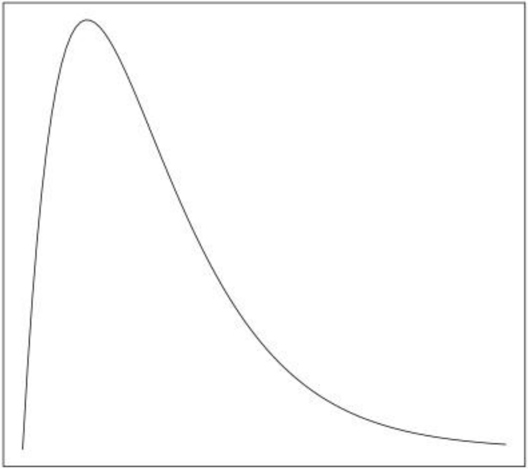
$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\; du\ .$$

En tal caso, diremos que $f_X$ es la función de densidad de la variable aleatoria $X$.

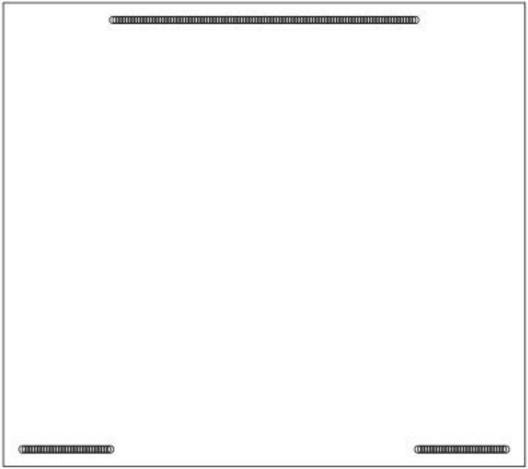
# Densidades



# Densidades

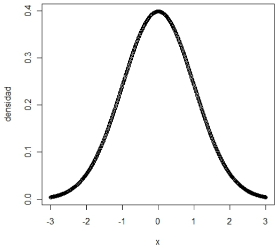


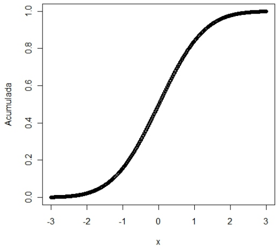
# Densidades



# Variables aleatorias continuas

- Función de densidad: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $\mathbb{P}(X = t) = 0$ para todo $t$.
- $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)\, du$.
- Función de distribución acumulada:
  $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$



# Importante: $F_X$ vs. $f_X$ - ida y vuelta a mano

1. Si conozco $f_X$ recupero la acumulada haciendo $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$
2. Si conozco $F_X$, recupero la densidad $f_X$ haciendo $f_X(x) = F'_X(x)$

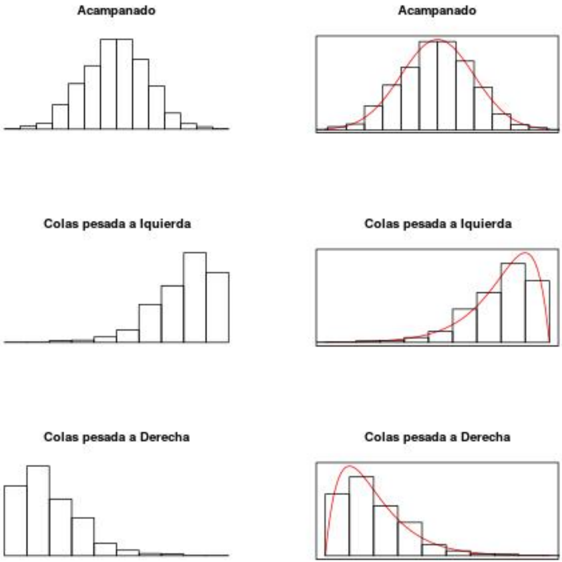
# Ejemplo:

Una barra de 12 pulgadas sujeta por ambos extremos, debe someterse a una creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa. Sea $Y =$ distancia desde el extremo izquierdo hasta dónde ocurre la rotura. Supongamos que la densidad de $Y$ es la siguiente

$$f_Y(y) = \begin{cases} ay\left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Hallar $a$.
2. Calcular $P(Y \leq 4), P(6 < Y); P(4 \leq Y < 6)$.
3. Hallar $F_Y(y)$.

# Densidades - Histogramas



# Percentiles

Dada una variable aleatoria continua $X$ y dado $p \in (0,1)$ definimos el $100p-$ésimo percentil (o $p$-ésimo cuantil) de $X$ como el valor $x_p$ que verifica

$$F_X(x_p) \ = \ p \ .$$

- Cuando $p = 1/2$, el valor para el cual la acumulada vale $1/2$ se dice mediana.
- Los percentiles asociados a $p = 1/4$ y $p = 3/4$ se dicen cuartiles.

# Esperanza

Dada una variable aleatoria continua $X$ con función de densidad $f_X$, definimos la esperanza de $X$ como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u \, f_X(u) \, du \; .$$

siempre que $\int_{-\infty}^{\infty} |u| \, f_X(u) \, du < \infty$.

# Esperanza - Propiedad

**Lema** (Regla del estadístico inconciente):
Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X$.
Entonces, para toda función $g$ tenemos que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\ f_X(u)\ du\ .$$

# Aplicación

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbb{E}(Y^2)$.

# Esperanza y Varianza: sigue todo igual

- Definición: $\mathbb{E}(X) = \int u f_X(u) du$.
- Propiedad: $\mathbb{E}[g(X)] = \int g(u) f_X(u) du$.
- Corolario: Linealidad $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b$.
- Definición: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]$, donde $\mu_X = \mathbb{E}(X)$, medida de dispersión.
- Propiedad: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

- Desvío estandar: $SD(X) = \sqrt{V(X)}$,

$$SD(aX + b) = |a| SD(X)$$

# La función indicadora - Ejemplo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función Indicadora (del intervalo $[0, 12]$)

$$I_{[0,12]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0, 12] \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Escribimos $f_Y$ de manera simplificada

$$f_Y(y) = \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) I_{[0,12]}(y)$$

# La función indicadora - Ejemplo

Función Indicadora (del intervalo $A$)

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$I_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Ejercicio:** Graficar $I_{[2,4]}$ en R