Variables aleatorias

¿Qué es una variable aleatoria?

- Vimos que un experimento aleatorio produce un espacio muestral. Por ejemplo, elegir un habitante de la ciudad al azar.
- Muchas veces lo que nos interesa no son los elementos del espacio muestral en sí, sino algún valor numérico asociado a cada uno de ellos.
- Por ejemplo: la estatura, la cantidad de hijos, la edad o la temperatura.

Definición:

Sea Ω un espacio muestral asociado con un experimento aleatorio. Una variable aleatoria X es una función que asocia a cada elemento $w \in \Omega$ un número real $X(w) = x$.

Ejemplo: Tirar el dado dos veces.

Se arroja dos veces un dado equilibrado.

$$\Omega = \{(x_1, x_2)\,/x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

X: número de resultados pares

Y: máximo resultado

$$\begin{array}{ll} X((2,5)) = 1 & Y((2,5)) = 5 \\ X((1,3)) = 0 & Y((1,3)) = 3 \end{array}$$

$$P(X = 0) = P(\{(x_1, x_2) \in \Omega / x_i \in \{1, 3, 5\}\}) = \frac{9}{36}$$

$$P(Y = 4) = P(\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1)\}) = \frac{7}{36}.$$

Ejemplo: Tiro al blanco

Se tira un dardo en un blanco de 10 cm de radio. Supongamos que el dardo puede caer en cualquier lugar del blanco con igual probabilidad y que todos los tiros dan en el blanco.

- Z : distancia al centro en cm.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 10\}$$

$$P(Z < 5) = \frac{\pi 5^2}{\pi 10^2} = \frac{1}{4}$$

Observar

- X, Y y V toman valores en un conjunto finito
- Z y W toman valores en un intervalo: $(0, +\infty)$.

Definición:

Una v.a. es discreta si toma un número finito o infinito numerable de valores.

Función de distribución acumulada

Definición: La función de distribución acumulada (fda) de una v.a. X se define, para todo $t \in \mathbb{R}$, como

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

Ejemplo: Tiro al blanco

Z: distancia al centro

$$F_Z(t) = P(Z \leq t)$$

Si $0 \leq t \leq 10$,

$$F_Z(t) = \frac{\pi t^2}{\pi 10^2} = \frac{t^2}{10^2}$$

Si $t < 0$, $F_Z(t) = 0$

Si $t > 10$, $F_Z(t) = 1$

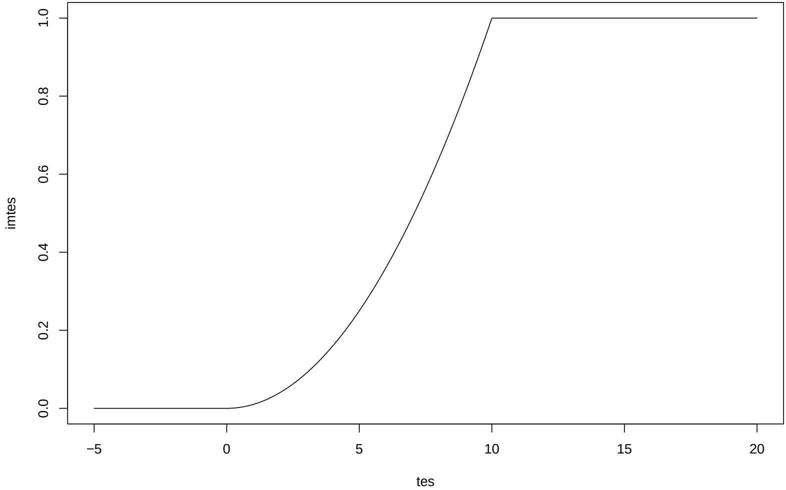
Ejemplo: Tiro al blanco. Fórmula de F_Z

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^2}{10^2} & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 1 & \text{si } t \geq 10 \end{cases}$$

Ejemplo: Tiro al blanco. Gráfico de F_Z

```r
F_Z <-  function(t){
  if(t<0) ans <- 0
  if(t>=0&t<10) ans <- t^2/10^2
  if(t>=10) ans<- 1
  ans
  }
tes <- seq(-5,20, length = 1000)
imtes <- sapply(tes, F_Z)
plot(tes, imtes, type ="l")
```

Ejemplo: Tiro al blanco. Gráfico de F_Z



Propiedades de la fda

Sea X una variable aleatoria y F_X su fda. Se tiene

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Dem: Es inmediato de la definición $F_X(x) = P(X \leq t)$.

2) F_X es monótona no decreciente, es decir

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

Dem: $F_X(x_1) = P(X \leq x_1)$ y $F_X(x_2) = P(X \leq x_2)$. Como $x_1 < x_2$, entonces

$$\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}.$$

Por lo tanto,

$$P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2) \text{ es decir, } F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

Propiedades de la fda (continuación)

3) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

4) $F_x(x)$ es continua a derecha, es decir

$$\lim_{h\to o^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Más propiedades

6) $\lim_{t \to x^-} F_X(t) = P(X < x)$ y $\lim_{t \to x+} F_X(t) = P(X \leq x)$.

7) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Dem:

$$P(a < X \leq b) = P(X \in (a, b]) = P(X \in (-\infty, b] - (-\infty, a])$$

$$= P(X \in (-\infty, b]) - P(X \in (-\infty, a])$$

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Más propiedades

8) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X\left(a^-\right)$

Dem:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a, b]) = P(X \in (-\infty, b] - P(X \in (-\infty, a))$$

$$= P(X \leq b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X\left(a^-\right)$$

9) $P(a < X < b) = F_X\left(b^-\right) - F_X(a)$

10) $P(a \leq X < b) = F_X\left(b^-\right) - F_X\left(a^-\right)$