Propiedad de falta de memoria en la distribución geométrica

$$\boxed{\mathbf{X \sim G(p) \ \Rightarrow \ P\left(X \geq h + k / X \geq h\right) = P\left(X \geq k\right), \quad \forall h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la función de distribución de la ley geométrica, se tiene

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F_X(x-1) = 1 - (1 - (1-p)^x) = (1-p)^x, \quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por tanto, si $k, h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica

$$P(X \geq h + k / X \geq h) = \frac{P(X \geq h+k, X \geq h)}{P(X \geq h)} = \frac{P(X \geq h+k)}{P(X \geq h)} = \frac{(1-p)^{h+k}}{(1-p)^h} = (1-p)^k = P(X \geq k). \qquad \blacksquare$$

Nota: Esta propiedad significa que si ya se han realizado h repeticiones de la prueba de Bernoulli y no se ha obtenido el suceso éxito (por lo tanto el experimento no ha finalizado y $X \geq h$), la probabilidad de que se realicen al menos otras k repeticiones sin conseguirlo (con lo cual se realizan por lo menos $h+k$ sin obtener éxito y $X \geq h+k$) es igual a la probabilidad de que realicemos al menos k repeticiones sin alcanzar éxito; es decir esa probabilidad es la misma que si consideramos que el experimento comienza en la repetición $h+1$ y, por tanto, se *olvidan* las h repeticiones realizadas inicialmente.