Introducción a la teoría de la probabilidad

Basado en las notas de Ana Bianco y Elena Martinez, disponibles en el campus virtual.

Agosto, 2023

Introducción

El término Probabilidad se refiere al estudio del azar y la incertidumbre.

Cuando se realiza un experimento que puede tener varios resultados posibles, la teoría de la Probabilidad provee métodos para cuantificar la chance de ocurrencia de cada uno de ellos.

Ejemplos:

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una escalera servida en la generala?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar apostando a una columna en la ruleta?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un servidor se sature en un determinado momento?
- Dada la información disponible, ¿cuál es la probabilidad de que llueva el próximo fin de semana?

Primeras definiciones

- Experimento aleatorio: Es cualquier proceso o acción que genera observaciones y que es repetible.
- Espacio muestral asociado a un experimento: conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Lo notaremos Ω.
- Evento o suceso: subconjunto del espacio muestral
- Evento simple: consiste de un único resultado.
- Evento compuesto: consiste de más de un resultado.

Ejemplos

(1) Tirar una moneda: $\Omega = \{\text{cara}, \text{ceca}\}$
Ejemplo de evento: $E = \{\text{cara}\}$

(2) Tirar dos monedas : $\Omega = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$
Ejemplo de evento: $E = \{(C, C), (C, X), (X, C)\}$

(3) Elegir un alumno del curso al azar y preguntarle cuántas horas pasó ayer mirando netflix:
$\Omega = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 24\}$
Ejemplo de evento: $E = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

Relación con Teoría de conjuntos

(1) Ω: suceso cierto o seguro .

(2) $\emptyset$: suceso imposible.

(3) $A \cup B$: ocurre cuando A ocurre o B ocurre.

(4) $A \cap B$: ocurre cuando ocurre A y ocurre B.

(5) A^c: ocurre cuando no ocurre A.

(6) $A - B$: ocurre cuando ocurre A y no ocurre B.

(7) $A \subset B$: quiere decir que la ocurrencia de A implica la ocurrencia de B.

(8) Dos sucesos A y B se dicen mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

Repaso de conjuntos

Ley conmutativa

- Para la unión: $A \cup B = B \cup A$
- Para la intersección: $A \cap B = B \cap A$

Ley asociativa

- Para la unión: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Para la intersección: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Ley distributiva

- $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
- $$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Leyes de De Morgan

- $$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$
- $$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Idea intuitiva de probabilidad

La probabilidad de un suceso representa el porcentaje de veces que esperamos que este ocurra, siempre que el experimento se repita indefinidamente, de forma independiente y bajo las mismas condiciones.

La probabilidad como frecuencia relativa

Supongamos que se repite n veces un mismo experimento bajo las mismas condiciones y sea n_A el número de veces que ocurre el evento A. Se llama frecuencia relativa de A en las n repeticiones a

$$\mathrm{fr}(A) = \frac{n_A}{n}.$$

La evidencia empírica muestra que cuando n crece, $\mathrm{fr}(A)$ tiende a estabilizarse alrededor de un número que llamaremos $P(A)$.

En el ejemplo (1) Tirar una moneda, $\Omega = \{\mathrm{cara}, \mathrm{ceca}\}$ $E = \{\mathrm{cara}\}$

$$fr(E) = 0.5$$

Propiedades

- $fr(A) = \frac{n_A}{n} \geq 0$
- $fr(\Omega) = 1$

Dem: Ejercicio

- Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

Dem:

Definición axiomática de probabilidad

Dado un experimento aleatorio y un espacio muestral asociado Ω, a cada evento A se le asociará un número $P(A)$ que satisface

- $P(A) \geq 0$ para todo evento $A \subset \Omega$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es una colección de eventos mutuamente excluyentes (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$) entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

Propiedades

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
  Dem: $P(A^c) + P(A) = P(\Omega) = 1$

- $P(\emptyset) = 0$.
  Dem: $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0$
- Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A)$. Dem:
  $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B - A)$. Entonces,
  $P(B) = P(A) + P(B - A)$ por al axioma 3, ya que A y $B - A$ son mutuamente excluyentes. Entonces
  $P(B - A) = P(B) - P(A)$

Más propiedades

- Dados dos eventos cualesquiera A y B,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Dem: $A \cup B = A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c)$
  y estos dos eventos son excluyentes, entonces

  $$P(A \cup B) = P\left(A \cup (B \cap A^c)\right) = P(A) + P\left(B \cap A^c\right)$$

  Por otro lado $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ y estos eventos también son excluyentes. Por lo tanto,

  $$P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap A^c\right) \Rightarrow P\left(B \cap A^c\right) = P(B) - P(B \cap A)$$

  Esto implica que

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Más propiedades

- Dados 3 sucesos A_1, A_2, A_3,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Dem: Ejercicio

Más propiedades

- Dados 3 sucesos A_1, A_2, A_3,

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
  $$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

  Dem: Ejercicio

- Dados dos eventos cualesquiera $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Dem: Ejercicio

Espacios equiprobables

Definición

Diremos que un espacio muestral (finito) es equiprobable si los n sucesos elementales tienen igual probabilidad, es decir si, para todo evento elemental E_i,

$$P\left(E_i\right) = p.$$

Proposición:

Si Ω es un espacio muestral equiprobable, entonces para todo evento $A \subset \Omega$, se tiene

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Dem:

Supongamos que $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} P(\{e_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = np = 1,$$

entones $P(\{e_i\}) = 1/n \forall i$

$$P(A) = \sum_{\{e_i\} \in A} P\left(\{e_i\}\right) = \sum_{\{e_i\} \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{\#S}$$

Ejemplo 1: Bolitas

De una urna que contiene 2 bolillas blancas y 3 rojas se extraen 2 bolillas con reposición.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga al menos una bolilla roja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bolilla extraída sea roja y la segunda blanca?
c) Repetir suponiendo que las extracciones son sin reposición.

Resolución del ejemplo 1

a) Supondremos que las bolillas están numeradas, de manera de poder considerar que se trata de un espacio de equiprobabilidad, entonces

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \, / x_i \in \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2\}\}$$

Observemos primero que $\#\Omega = 25$.

Sea

$$A = \text{se extrae al menos una bolilla roja.}$$

Entonces $P(A) = 1 - P\left(A^c\right)$.

$$A^c = \{(x_1, x_2) \in \Omega / x_i \in \{B_1, B_2\}\}.$$

Como $\#A^c = 2 \cdot 2 = 4$, resulta

$$P\left(A^c\right) = \frac{4}{25} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

Resolución del ejemplo 1

2) Sea

$$B = \text{la primera bolilla extraída es roja y la segunda blanca.}$$

Entonces

$$B = \{(x_1, x_2) \in \Omega / x_1 \in \{R_1, R_2, R_3\}, x_2 \in \{B_1, B_2\}\}.$$

Como

$$\#B = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{25}$$

Resolución del ejemplo 1

3) Ahora,

$$\Omega = \{(x_1, x_2) / x_i \in \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2\}, x_1 \neq x_2\}$$

Entonces

$$\#\Omega = 5 \cdot 4 = 20$$

Ejemplo: El dado

Se arroja un dado equilibrado. Calcular la probabilidad de que el resultado sea par.

Ejemplo: El dado

Se arroja un dado equilibrado. Calcular la probabilidad de que el resultado sea par.

Rta:

El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Los sucesos elementales son $E_i = i$ para $i = 1, .., 6$

y sus probabilidades son $p(E_i) = 1/6$.

Llamamos $A =$ el resultado es par.

Como $A = E_2 \cup E_4 \cup E_6$ se obtiene
$P(A) = P(E_2) + P(E_4) + P(E_6) = 1/2$

Ejemplo: El Problema de los cumpleaños

En una clase de n alumnos, cuál es la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día?

Rta: Consideremos el evento:

$E = \{$al menos dos alumnos de la clase cumplen años el mismo día$\}$

$P(E) = 1 - P(E^c)$

$E^c = \{$todos los alumnos de la clase cumplen años en días distintos$\}$

$$P(E^c) = \frac{365 * 364 * ....(365 - (n-1))}{365^n}$$

$$P(E) = 1 - \frac{365 * 364 * ....(365 - (n-1))}{365^n}$$

El problema de los cumpleaños. Visualización de resultados usando R

```r
calcular_proba_mismo_cumple <- function(m){
    1 - prod((365:(365 - m + 1)/365))
 }

m <- seq(10, 90, 10)
proba_mismo_cumple <- sapply(m, calcular_proba_mismo_cumple)
round(proba_mismo_cumple, 3)

## [1] 0.117 0.411 0.706 0.891 0.970 0.994 0.999 1.000 1.000
```

Tabla: cantidad de alumnos y probabilidad

```
cbind(m,proba_mismo_cumple)
```

```
##        m proba_mismo_cumple
##  [1,] 10          0.1169482
##  [2,] 20          0.4114384
##  [3,] 30          0.7063162
##  [4,] 40          0.8912318
##  [5,] 50          0.9703736
##  [6,] 60          0.9941227
##  [7,] 70          0.9991596
##  [8,] 80          0.9999143
##  [9,] 90          0.9999938
```

Gráfico: probabilidad vs cantidad de alumnos

```
m <- 1:100
proba_mismo_cumple <- sapply(m,
                             calcular_proba_mismo_cumple)
plot(m,proba_mismo_cumple)
```