Cambio de variable

Ejemplo 1

Sea $X \sim U(0,2)$ y sea $Y = X^2$. Hallar la densidad de Y.

$g(x) = x^2$, $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ y $(g^{-1}(y))' = 1/(2\sqrt{y})$.

$$f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2} I_{(0,2)}\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = I_{(0,4)}\left(y\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ejemplo 2

Sea $X \sim U(-1,1)$ y sea $Y = X^2$. Hallar la densidad de Y.

$g(x) = x^2$ no es estrictaemente monótona en $(-1,1)$.

$$
\begin{aligned}
&= F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) \\
&= P(\{|X| \leq \sqrt{y}\} \cap \{X \geq 0\}) + P(\{|X| \leq \sqrt{y}\} \cap \{X < 0\}) \\
&= P(\{X \leq \sqrt{y}\} \cap \{X \geq 0\}) + P(\{-X \leq \sqrt{y}\} \cap \{X < 0\}) \\
&= P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) + P(-\sqrt{y} \leq X < 0) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(0) + F_X(0) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Ejemplo 2 (continuación)

Hemos probado que $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$. Entonces

$$f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2}I_{(-1,1)}(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2}I_{(-1,1)}(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{2}I_{(0,1)}(y)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2}I_{(0,1)}(y)\frac{1}{2\sqrt{y}} = I_{(0,1)}(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

y llegamos a

$$f_y(y) = I_{(0,1)}(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Teorema de cambio de variable

Teorema Sea X una v.a. con densidad f_X tq $P(X \in (a, b)) = 1$, sea $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (a, b) y sea $Y = g(X)$. Entonces

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| (g^{-1}(y))' \right|$$

Teorema de cambio de variable

Demostración

Hallamos primero la f.d.a de Y. Sea $y \in \mathbb{R}$

Caso 1 - g es estrictamente creciente

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y)) \left|(g^{-1}(y))'\right|$$

Teorema de cambio de variable

Demostración (continuación)

Caso 2 - g es estrictamente decreciente

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y)) \left|(g^{-1}(y))'\right|$$

Generación de números aleatorios

Supongamos que sabemos generar números aleatorios con distribución $U[0,1]$ y, a partir de ellos, queremos generar números con otra distribución

Teorema

Sean U una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$ y G una función de distribución acumulada continua y estrictamente creciente. Si $X = G^{-1}(U)$, entonces la función de distribución acumulada de X es G , es decir $F_X = G$.

Demostración

Recordemos que si $U \sim U(0,1)$, entonces su función de distribución es de la forma

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 < u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P\left(G^{-1}(U) \leq x\right) = P(U \leq G(x))$$
$$= F_U(G(x)) = G(x)\square$$

Ejemplo 1: Exponencial

En el caso de una variable $X \sim E(\lambda)$, la función de distribución acumulada es de la forma

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dado $y \in (0,1)$, busquemos $F_X^{-1}(y)$.

$$F_X(x) = y \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = y \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - y \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-y)$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$$

la inversa de F_x es $F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$.

Luego, si $U \sim U(0,1)$

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \sim E(\lambda)$$

Aplicación en R

```
u <- runif(10)
u
```

```
##  [1] 0.39167122 0.59964404 0.73475493 0.16007834 0.32057549 0
##  [7] 0.91286932 0.03315827 0.21090472 0.97724597
```

```
lambda <- 2
x <- -log(1-u)/lambda
x
```

```
##  [1] 0.24851989 0.45770061 0.66355054 0.08722333 0.19325457 0
##  [7] 1.22017312 0.01686023 0.11843410 1.89150646
```

Estimamos la esperanza de la exponencial con una simulación

```
u <- runif(1000)
lambda <- 2
x <- -log(1-u)/lambda
mean(x)
```

```
## [1] 0.476701
```

Aplicación en R

```r
x <- rexp(10,2)
x
```

```
##  [1] 0.32610630 0.71221757 0.08113480 0.86500495 0.09356068 0
##  [7] 0.69102118 0.06715828 1.67852096 1.34433313
```

```r
x <- rexp(1000,2)
mean(x)
```

```
## [1] 0.4808434
```

Generación de variables discretas

Ejemplo: Queremos generar una variable con la siguiente fpp

x	1	2	5
$p_X(x)$	0.5	0.3	0.2

a partir de una v.a. uniforme. Podemos aplicar el siguiente procedimiento.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq U < 0.5 \\ 2 & \text{si } 0.5 \leq U < 0.8 \\ 5 & \text{si } 0.8 \leq U < 1 \end{cases}$$

Verifico:

$P(X = 1) = P(0 \leq U < 0.5) = 0.5$

$P(X = 2) = P(0.5 \leq U < 0.8) = 0.3$

$P(X = 5) = P(0.8 \leq U < 1) = 0.2$

Aplicación en R

```
u <- runif(10)
x <- 1* ( u >= 0& u< 0.5) + 2 * ( u >= 0.5 & u< 0.8) +
  5 * ( u >= 0.8 & u< 1)
x
```

```
##  [1] 1 1 1 2 5 2 1 5 5 1
```

Verifico:

```
u <- runif(10000)
x <- 1* ( u >= 0& u< 0.5) + 2 * ( u >= 0.5 & u< 0.8) +
  5 * ( u >= 0.8 & u< 1)
c(mean(x==1),
mean(x==2),
mean(x==5))
```

```
## [1] 0.5019 0.2983 0.1998
```

Aplicación en R

Esto ya está implementado en R

```
sample(c(1,2,4), size = 10, prob =c(0.5, 0.3, 0.2),
       replace  = TRUE)
```

```
##  [1] 2 1 4 1 1 2 1 1 4 4
```