Ensayos Bernoulli

Se trata de ensayos repetidos, independientes, con solo dos resultados posibles (éxito o fracaso) y donde la probabilidad de éxito es constante (p).

$$X \sim Bernoulli(p), \quad P(X = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{x_i}, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) = npq$$

Preguntas relacionadas con los ensayos Bernoulli:

1. ¿Cuál es la cantidad de éxitos en los primeros n ensayos?
2. En n ensayos, ¿cuál es el número de éxitos más probable?
3. ¿Cuántos experimentos hay que realizar para observar el primer éxito?
4. ¿Cuánto experimentos hay que realizar para observar el k-ésimo éxito?

La distribución Binomial: cantidad de éxitos en n ensayos

1. Una cadena de tiendas compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3 %.
   I) El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre los 20 artículos del cargamento?
   II) Supongamos que la cadena recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector prueba aleatoriamente 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 3 cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso entre los 20 seleccionados y probados?
2. Un avión se mantendrá en vuelo mientras funcionen al menos 50 % de los motores. Si cada motor del avión en vuelo puede fallar con una probabilidad $1-p$ independientemente de los demás, ¿para qué valores de $p \in (0, 1)$ es más seguro un avión de 4 motores que uno de 2?
3. Si la probabilidad de éxito es $p = 0{,}01$, ¿cuántos ensayos se deben realizar para asegurar que la probabilidad de que ocurra por lo menos un éxito sea al menos $1/2$?

Distribución Geométrica

Cuenta la cantidad de experimentos hasta obtener el primer éxito.

$\{X = n\}$ significa que en los primeros ensayos se obtuvieron fracasos y que el n-ésimo se obtuvo éxito.

$$X \sim G(p), \; P(X = n) = (1-p)^{n-1}p^n$$

$$E(X) = 1/p \qquad Var(X) = (1-p)/p^2$$

1. Un juego consiste en lanzar un dado justo o equilibrado. Se gana 100 dólares si sale seis, pero se tiene que pagar 10 dólares cada vez que se lanza el dado. Si llegamos al juego con 30 dólares, ¿cuál es la probabilidad de perder todo el dinero antes de ganar?

2. El costo de efectuar un experimento es de \$1000. Si el experimento falla, se incurre en un costo adicional de \$300 debido a cambios que deben efectuarse antes de que se intente de nuevo. Si la probabilidad de éxito en cualquiera de los ensayos es de 0.2, los ensayos son independientes y los experimentos continuan hasta obtener el primer éxito, ¿cuál es el costo esperado del procedimiento completo?

Distribución Binomial Negativa

Cuenta la cantidad de experimentos hasta obtener el k-ésimo éxito.

$\{X = n\}$ significa que en el n-ésimo experimento se obtuvo un éxito, y que en los $n-1$ experimentos anteriores se obtuvieron $k-1$ éxitos

$$X \sim BN(k,p), \; P(X = n) = \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = k/p \qquad Var(X) = k(1-p)/p^2$$

• Lucas y Miguel disputan la final de un campeonato de ajedrez. El primero que gane 6 partidas (no hay tablas) resulta ganador. La probabilidad de que Lucas ganer cada partida es 3/4. ¿Cuál es la probabilidad de que Lucas gane el campeonato en la novena partida?

Distribución Hipergeométrica

• N = población
• D = cantidad de éxitos en la población
• Cada individuo o elemento puede ser clasificado como *éxito* o *fracaso*.

Se extrae una muestra de tamaño n:
X = *número de éxitos en la muestra de tamaño* n.

$$X \sim H(n, N, D),\ P(X = k) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{máx}(0, n - (N - D)) \leq k \leq \text{mín}(n, D)$$

$$E(X) = n\frac{D}{N} \qquad Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{n}(1 - \frac{k}{N})$$

<u>Observación</u>: la extracción de la muestra es *sin reposición*.

• Lotes con 40 componentes cada uno que contengan 3 ó mas componentes defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para detectar si un lote es inaceptable o no, es seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra se encuenrer un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?.

Distribución Poisson

Condiciones para un proceso de Poisson:

Supongamos que se observa la ocurrencia de un evento a lo largo del tiempo y que existe una cantidad positiva θ tal que:

1. La probabilidad de que ocurra exactamente un evento en un intervalo pequeño de longitud Δt es aproximadamente igual $\theta \Delta t$:

$$P(\text{ocurra un evento en } \Delta T) = \theta \Delta t + o(\Delta t)$$

2. La probabilidad de que ocurra más de un evento en un intervalo pequeño de longitud Δt, es despreciable cuando se lo compara con la probabilidad de un evento:

$$P(\text{ocurra más de un evento en } \Delta T) = o(\Delta t)$$

3. El número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son independientes.

Entonces el número de ocurrencias del evento en un período de longitud t tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = \theta t$,

$$X \sim P(\lambda); \; P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

1. Una máquina que envasa comprimidos en un laboratorio farmacéutico tiene en promedio 1,5 fallas por día. Hallar la probabilidad de que en una semana de trabajo tenga menos de 6 fallas.

2. En un estudio ecológico realizado en un lago, se encontró que había, en promedio, 2 microorganismos por cm3. Si se toman muestras de 3 cm3, hallar la probabilidad de encontrar 9 o más microorganismos.