Vectores aleatorios

Vectores aleatorios discretos

Definición: Un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_k)$ se dice discreto si, para todo $1 \leq i \leq k$, X_i es una v.a. discreta.

Definición. Función de probabilidad conjunta de un vector aleatorio discreto (X,Y)

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Definición. Rango de un vector aleatorio discreto (X,Y)

$$R_{XY} = \{(x, y)/x \in R_X, y \in R_Y\}$$

Propiedades

- Una función de probabilidad conjunta satisface:

(a) $p_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y)$
(b) $\sum_x \sum_y p_{XY}(x, y) = 1$

Funciones de probabilidad marginal

- $p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(x, y)$ función de probabilidad marginal de X
- $p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p_{XY}(x, y)$ función de probabilidad marginal de Y

Ejemplo: monedas

Experimento: Lanzar una moneda dos veces y anotar los resultados.

$$\Omega = \{(C, X), (X, C), (C, C), (X, X)\}$$

1- $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima tirada es cara} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima tirada es ceca} \end{cases}$$

es un vector aleatorio. Hallar la función de probabilidad puntual conjunta de $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$.

2 - Sea $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$, con $Y_1 = X_1 + X_2$,

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 = X_2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Hallar la función de probabilidad puntual conjunta de $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$.

Vectores aleatorios continuos

Definición: Sean X e Y v.a. continuas definidas sobre un espacio muestral Ω. El vector aleatorio (X, Y) es continuo si existe una función, denominada función de densidad conjunta, $f_{XY}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x, y) dxdy \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

En particular, si $A = [a, b] \times [c, d]$

$$P((X, Y) \in A) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dydx.$$

Propiedades

Una función de densidad conjunta satisface:

- $f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$

Ejemplo 1

Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\left(x+y^2\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de la constante k.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^1 k\left(x+y^2\right)dxdy = k\int_0^1\left(\int_0^1\left(x+y^2\right)dx\right)dy = \\
&= k\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy^2\right)\Big|_0^1 dy = k\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y^2\right)dy \\
&= k\left(\frac{y}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = k\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Debe ser entonces, $k = 6/5$.

b) Calcular $P\left(0 \le X \le \frac{1}{4}, 0 \le Y \le \frac{1}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
P\left(0 \le X \le \frac{1}{4}, 0 \le Y \le \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{1/4}\int_0^{1/4} \frac{6}{5}\left(x+y^2\right) dxdy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^{1/4} \left(\frac{x^2}{2} + xy^2\right)\Bigg|_0^{1/4} dy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^{1/4} \left(\frac{1}{16\cdot 2} + \frac{1}{4}y^2\right) dy \\
&= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{32}y + \frac{1}{4}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/4} \\
&= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{32\cdot 4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64\cdot 3}\right) = \frac{7}{640}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{xy}(x, y) = k(x + 2y)I_T(x, y)$$

siendo $T = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

a) Hallar el valor de la constante k
b) Hallar $P\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\right)$
c) Hallar $P(X \leq Y)$

Ejemplo 3

3) En este ejemplo presentaremos a la distribución Uniforme sobre una región, la cual generaliza a la distribución Uniforme sobre un intervalo estudiada en el caso de variables aleatorias. Diremos que el vector aleatorio tiene distribución Uniforme sobre una región $A \subset \mathbb{R}^2$ si su densidad es constante sobre la región y 0 fuera de ella, es decir

$$(X, Y) \sim U(A) \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin A \end{cases}$$

Debe ser $k = \frac{1}{\text{area}(A)}$, pues

$$1 = \iint_A k dx dy = k \iint_A dx dy = k \,\text{área}(A)$$

Además se tiene

$$P((X,Y) \in B) = \frac{\text{área}(A \cap B)}{\text{área}(A)} \quad \forall B \subset \mathbb{R}^2$$

pues

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_B \text{área}(A) dxdy = \text{área}(A) \int\int_B 1 dxdy$$

$$= \frac{\text{área}(A \cap B)}{\text{área}(A)}$$