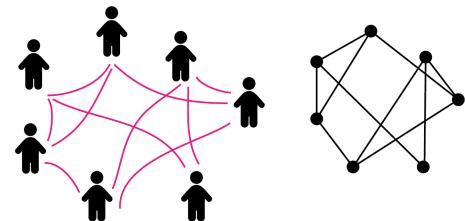
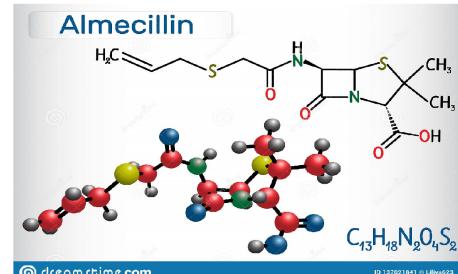
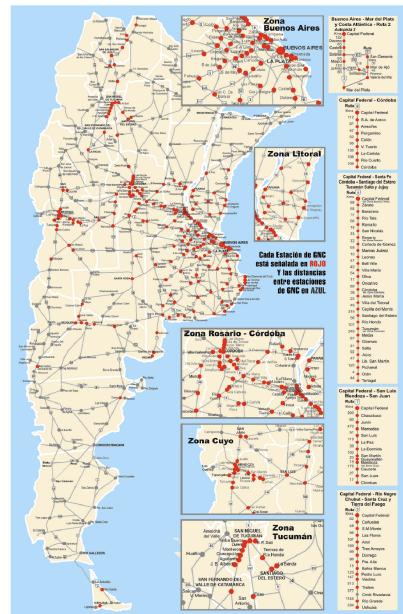
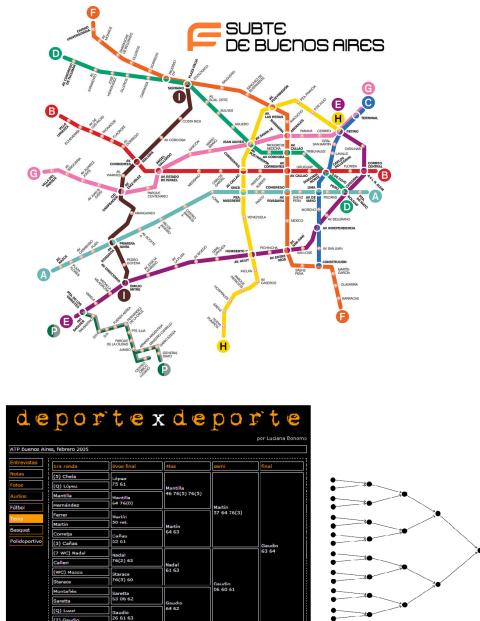




Teórica 3: Grafos

1. Reseña histórica

Sin saberlo, todos los días nos cruzamos con grafos. Por ejemplo, una red de subte puede ser representada como un grafo. También un mapa rutero, o algo tan distinto como una molécula de penicilina, un fixture deportivo o las relaciones en una red social.



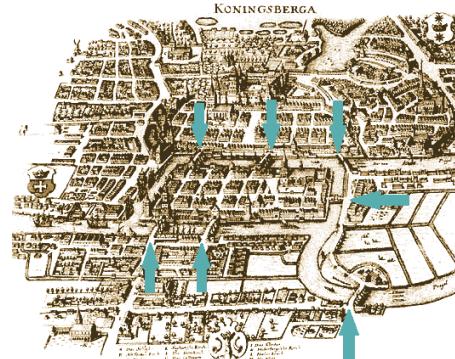
Los grafos modelan relaciones entre **vértices**. Por lo tanto, proporcionan una forma conveniente y flexible de representar problemas de la vida real que consideran una red como estructura subyacente. Esta red puede ser física (como instalaciones eléctricas, red ferroviaria o moléculas orgánicas) o abstracta que modela relaciones menos tangibles (relaciones sociales, en bases de datos o en ecosistemas). Los grafos se usan ampliamente para modelar diversas aplicaciones en diferentes áreas, siendo sumamente apropiados tanto para su estudio desde un punto de vista teórico como estructura abstracta, como para el desarrollo de algoritmos sofisticados e interesantes para resolver estas aplicaciones en la práctica.

Algunos ejemplos de aplicación son: ruteo de vehículos, organización del tráfico aéreo y venta de tickets de avión, optimización de redes de distribución de mercadería, planificación de grandes estructuras como redes eléctricas o redes de ferrocarriles; en sociología se utilizan, por ejemplo, para medir el prestigio de un actor o para explorar un mecanismo de difusión, en biología para estudiar ecosistemas y propiedades de migraciones, en los sitios de comercio electrónico para mostrar recomendaciones, en economía el Nobel 2012 premió a un trabajo de asignaciones estables sobre grafos utilizados para modelar el rediseño de mercados económicos.

La teoría de grafos comenzó en 1735/1736 cuando Leonhard Euler planteó y resolvió el problema de los puentes de Königsberg (hoy Kaliningrado). La ciudad tenía, en el siglo XVIII, siete puentes sobre el río Pregel.

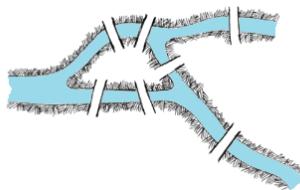


Leonhard Euler (1707–1783)



Ciudad de Königsberg

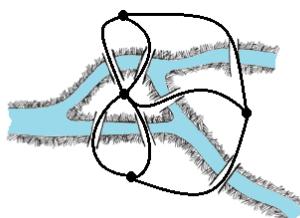
Euler buscaba un recorrido circular (que volviera al punto de partida) que atravesara cada uno de estos siete puentes exactamente una vez. El esquema del río y los puentes era este:



Euler notó que la forma de la tierras e islas no era importante, sino que la posibilidad de hacer ese recorrido dependía de las conexiones entre ellas, demostró que este problema particular no tiene solución y dio una condición necesaria para el caso general. Carl Hierholzer mostró, en 1871, que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.

Como lo que se busca es un recorrido circular, da lo mismo por donde lo comenzemos. Supongamos que comenzamos por la isla pequeña. Cuando retornemos a esta isla por primera vez ya habremos atravesado exactamente dos de los cinco puentes que la conectan. La siguiente vez que retornemos, habremos usado dos puentes más, y deberemos dejar la islita por el único que queda sin usar. Pero entonces no habrá posibilidad de retornar nuevamente a ella sin volver a utilizar uno de los cinco puentes por segunda vez. Ésto muestra que el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución.

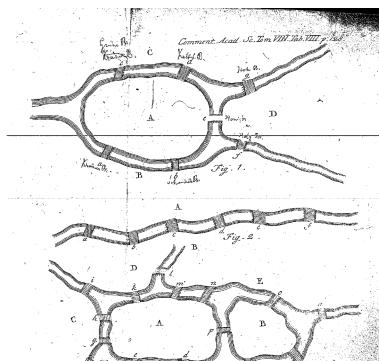
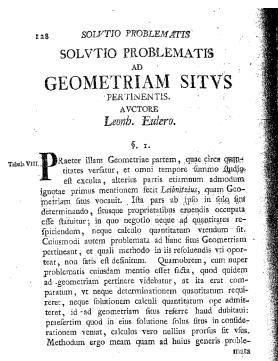
Si representamos cada uno de los cuatro territorios por puntos (vértices) y los puentes por curvas (aristas) uniendo los correspondientes puntos, obtenemos este grafo:



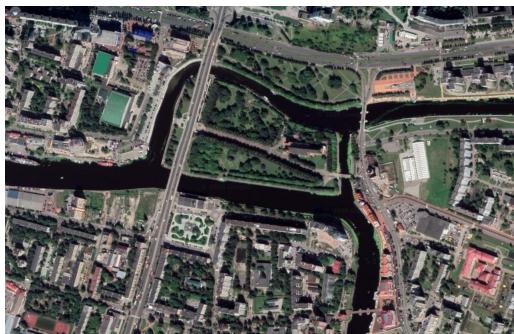


Euler observó que tenía vértices de grado *extraño* y demostró que este hecho hacía imposible esa caminata. Ésto condujo al concepto de *ciclo euleriano* (ciclo que pasa exactamente una vez por cada arista).

Ésta es una imagen de la publicación *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, Vol. 8, pág. 128-140, 1741) que fue presentada por Euler en la Academia de St. Petersburg el 26 de agosto de 1735 y publicada en 1741.



Dos de los siete puentes originales fueron destruidos durante el bombardeo de la ciudad en la Segunda Guerra Mundial. Más tarde, otros dos fueron demolidos y reemplazados por un ruta. Los otros tres puentes permanecen, aunque sólo dos de ellos son de la época de Euler (uno fue reconstruido en 1935). Al día de hoy, hay cinco de estos puentes en Kaliningrado.



En 1771, Alexandre-Theophile Vandermonde (1735–1796), en *Remarques sur des problèmes de situation*, su segundo artículo publicado en Académie des Sciences, estudió el *problema del caballo de ajedrez*. El objetivo de este problema es encontrar un camino circular de un caballo de ajedrez (respetando los movimientos permitidos para un caballo en el juego de ajedrez) que visite todas las casillas del tablero pasando *exactamente una vez* por cada una. Aunque Vandermonde no encontró solución al problema, este artículo es pionero en el estudio de ideas topológicas.



DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

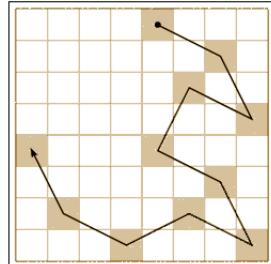
Algoritmos y Estructuras de Datos III
2do cuatrimestre 2021 (*dictado a distancia*)
Paula Zabala

366 MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
REMARQUES
SUR LES
PROBLÈMES DE SITUATION.
Par M. VANDERMONDE.

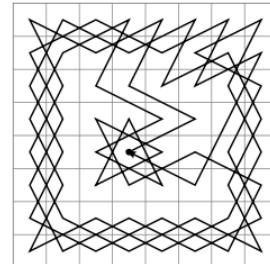
1721. **Q**UELLUS que font les circonlocutions d'un ou de plusieurs îles dans l'Espresso, on peut toujours en avoir une explication par un moyen simple & direct, sans faire de difficultés ni détour dans les Arts. L'ouvrier qui fait une nef, un réverbé, des nœuds, ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de la situation. C'est ce qu'il a fait dans le cas dont nous venons de faire. Il faut dans cela d'avoir un système de calcul plus conforme à la marche de l'esprit de l'ouvrier, une sorte de géométrie pratique, qui soit tout à fait naturelle, & qui ne suffise pour en relier un semblable dans tous les temps.

Mon objectif ici n'est que de faire entrer dans la tête d'une partie de l'humanité & de faire apprécier le mérite des idées de fil. Je me tâcherai, pour exposer mes idées, d'un Problème qui se rapporte à la situation d'un cabotage dans l'Espresso, dans le sens du sens des îles, qui a été résolu par M. Euler, Mémoires de Berlin, 1759. Le procédé de ce grand Géomètre (appelé alors à l'époque de l'écriture de ce Mémoire, Professeur d'Opérations d'Arithmétique), faire faire des nombres qui se représentent point à point, mais des rangs dans l'espacement.

Les résultats de ces deux Mémoires ont été faits fournis au calcul, jusqu'au moment où Vitre put : il y fournit les instructions nécessaires pour résoudre le problème. Il a été élaboré par les lettres de l'alphabet ; & ce fut l'epoque d'une révolution dans les Mathématiques. Quant aux nombres ordinaires, le processus est tout à fait différent. Mais, dans la méthode dans les calculs ordinaires, & que je propose ici d'appliquer aux problèmes sur les Situations, il ne paraîtra pas avoir encore tout à fait complètement fermé les Géométries.



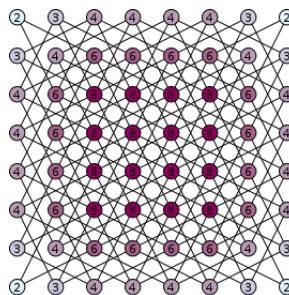
Ejemplo de movimientos



Una solución para el caso 8x8

Publicación original

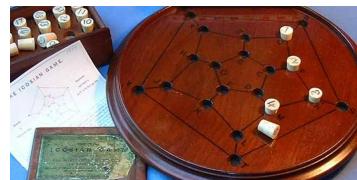
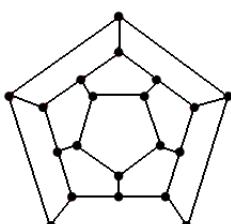
Este problema corresponde, en términos de hoy, a encontrar un **ciclo hamiltoniano** (que pase exactamente una vez por cada casilla) en el siguiente grafo:



Dos casillas son **vecinas** si desde una se puede ir a la otra por medio de un movimiento de caballo. En el gráfico (que es un grafo) se representa mediante una línea entre ellas. En cada casilla figura el número de casillas **vecinas** que tiene.

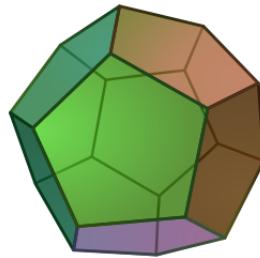
El primer algoritmo (heurístico!) para este problema fue presentado por H. C. Warnsdorff, en *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung* (1823). En términos modernos, es una heurística golosa que en cada paso mueve al caballo a la casilla vecina todavía sin visitar con menor valor (cantidad de casillas vecinas). Este procedimiento no siempre encuentra un ciclo Hamiltoniano aunque éste exista.

En 1857, Hamilton presentó el **juego icosiano** en una reunión de la Asociación Británica en Dublín y le vendió la idea a un fabricante de juegos por £ 25, pero finalmente fue un fracaso y vendió muy pocas copias. El juego planteaba 4 desafíos sobre un dodecaedro. En el primero, el jugador 1 elegía 5 vértices consecutivos del dodecaedro y el jugador 2 debía completar un ciclo que pasara exactamente una vez por cada vértice y retornar al primero. Siempre es posible encontrar al menos dos ciclos que cumplan lo pedido. Los otros desafíos crecían en dificultad y no siempre tenían solución.





Había una versión 3D del juego, conocido como *El dodecaedro del viajero*, donde los vértices representaban veinte lugares importantes: Bruselas, Cantón, Delhi, etc., terminando con Zanzíbar. Cada vértice estaba marcado por una clavija, y se podía enrollar un hilo alrededor de estas clavijas para indicar un ciclo. El objetivo era realizar un *viaje alrededor del mundo* (que pasara exactamente una vez por cada lugar).

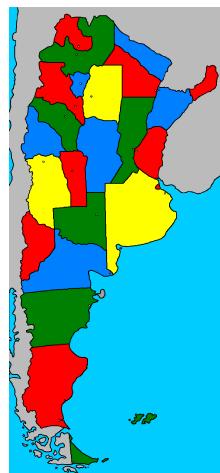


Tanto Vandermonde como Hamilton plantearon el problema para casos particulares, mientras que Thomas Kirkman fue el primero en tratar este problema de forma general en 1855. Sin embargo, estos ciclos se conocen como ciclos hamiltonianos.

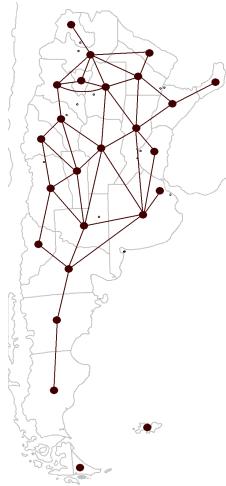
Estos dos problemas parecen bastante similares, uno busca un circuito que pase exactamente una vez por cada arista (circuito euleriano), y el otro, por cada vértice (ciclo hamiltoniano). Sin embargo, veremos que computacionalmente son problemas sumamente distintos. Para encontrar un circuito euleriano se conocen algoritmos polinomiales, mientras que para encontrar un ciclo hamiltoniano no se conocen. Ya hablaremos en más detalle sobre ésto en la segunda mitad del curso.

En 1878, James Sylvester publicó el trabajo *Chemistry and Algebra*, sobre análisis algebraico de estructuras moleculares en Nature 17. En este artículo, Sylvester utiliza la palabra *grafo* por primera vez. El término se deriva de la notación gráfica en química.

El *Teorema de los cuatro colores* dice que: Todo mapa puede ser coloreado usando *4 colores*, de modo tal que regiones limítrofes usen colores distintos. Dos regiones no se consideran limítrofes si sólo se tocan en un punto.



Si representamos cada región por un punto (vértice) y unimos dos puntos si las regiones que representan son limítrofes, obtenemos un grafo.



Ahora, queremos colorear los vértices de este grafo utilizando 4 colores de forma tal que vértices unidos por una línea tengan distinto color.

Francis Guthrie, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, notó que a veces se necesitan cuatro colores, y conjeturó que este número siempre era suficiente. Su hermano, Frederick Guthrie, comunicó la conjetura a su profesor Augustus De Morgan. En 1852, De Morgan se lo comunicó a Hamilton, quien no mostró interés, con la siguiente nota: *A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact –and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured –four colours may be wanted but not more– the following is his case in which four colours are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented.* La conjetura despertó el interés de De Morgan y la difundió entre otros matemáticos.

En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Al mismo tiempo, Heawood demostró el [teorema de los cinco colores](#).

En 1969, Oystein Ore y Joel Stemple mostraron que la conjetura es cierta para todos los mapas de [hasta 40 regiones](#).

La primera [demostración](#) fue dada en 1976, más de 100 años después de su planteo, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Appel y Haken redujeron todos los contraejemplos posibles a [1936 contraejemplos minimales](#). Utilizando un [programa de computadora](#), verificaron que todos esos posibles contraejemplos se pueden colorear con cuatro colores. Éste fue el primer teorema importante que se demostró con una gran asistencia informática, y la complejidad de la verificación humana suscitó una gran controversia.

En 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas dieron una demostración simplificada con [633 configuraciones minimales](#). En 2001 los mismos autores publicaron una demostración alternativa y en 2005 Georges Gonthier utilizó un programa de demostración de teoremas de propósito general para probar el teorema.

Durante un tiempo, se creyó que el problema de los cuatro colores había sido propuesto por August Möbius en 1840. Sin embargo, el problema no era el mismo. Möbius planteó lo siguiente: Había una vez un rey con cinco hijos. En su testamento escribió que, después de su muerte, los hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de forma tal que cada una limitara con las otras cuatro. Y preguntó si esto era posible.



El problema requiere para su solución poder diagramar cinco regiones vecinas en el plano. Ahora se sabe que no es posible cumplir la voluntad del rey.

Ambos problemas están relacionados. Si las cinco regiones del problema de Möbius pudieran ser diagramadas en un mapa, entonces seguro que cuatro colores no alcanzarían para pintar ese mapa. Pero que no puedan ser dibujadas estas cinco regiones, no asevera nada sobre el problema de los cuatro colores.

El libro [1] cuenta de forma muy completa la historia de los grafos entre 1736 y 1936.

2. Definiciones básicas

Ahora comenzaremos con el estudio de los grafos.

Definición 1. Un *grafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de *puntos* o *nodos* o *vértices* y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V . Los elementos de X se llaman *aristas* o *ejes*.

Nota. Si no aclaramos lo contrario, por lo general, en el curso llamaremos $n_G = |V|$ y $m_G = |X|$. Cuando esté claro a qué grafo nos referimos, evitaremos el subíndice.

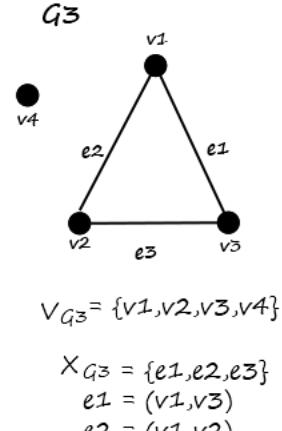
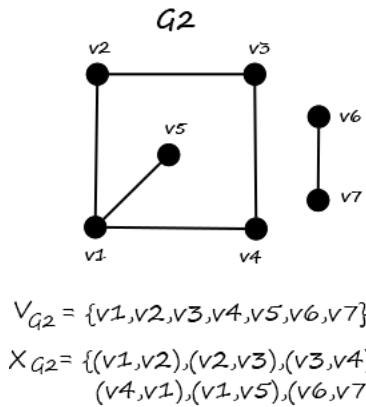
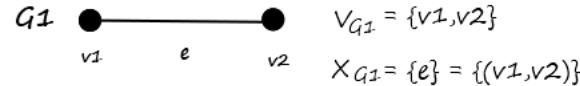
Definición 2.

- Dados v y $w \in V$, si $e = (v, w) \in X$ se dice que v y w son *adyacentes* y que e es *incidente* a v y w .
- La vecindad de un vértice v , $N(v)$, es el conjunto de los vértices adyacentes a v . Es decir:

$$N(v) = \{w \in V : (v, w) \in X\}.$$

Dibujar los grafos es sumamente útil para entender muchas de sus propiedades. Los vértices son representados mediante puntos y las aristas mediante líneas uniendo los vértices que la definen. No hay una única forma de dibujar un grafo, las posiciones relativas de los vértices son irrelevantes, como así también la de las aristas.

Ejemplo 1. *Algunos grafos y su representación gráfica:*



En algunas aplicaciones, por ejemplo para modelar más de un vuelo entre dos ciudades, la definición anterior de grafo no es apropiada.

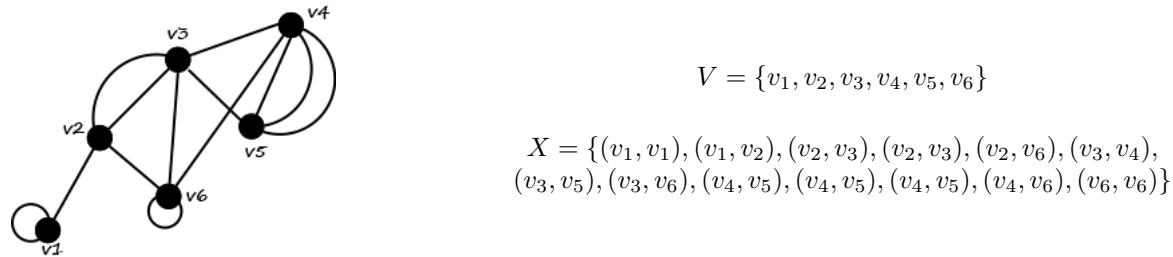
Definición 3. ■ Un **multigrafo** es un grafo en el que puede haber varias aristas entre el mismo par de vértices distintos.

■ Un **pseudografo** es un grafo en el que puede haber varias aristas entre cada par de vértices y también puede haber aristas (*loops*) que unan a un vértice con sí mismo.

Nota. En la materia, si no aclaramos lo contrario, cuando nos referimos al término grafo, asumimos que no hay aristas múltiples ni *loops*.

Nota. X pasa a ser un multiconjunto de aristas.

Ejemplo 2.



Definición 4. El **grado** de un vértice v en el grafo G , $d_G(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G . Llamaremos $\Delta(G)$ al máximo grado de los vértices de G , $\delta(G)$ al mínimo.

Nota. Si está claro al grafo que nos referimos, lo notaremos como $d(v)$.



Nota. En el caso de *loops* aportan 2 al grado del vértices.

Ejemplo 3. *En los grafos del Ejemplo 1*

1. $d_{G_1}(v_1) = d_{G_1}(v_2) = 1$
2. $d_{G_2}(v_1) = 3, d_{G_2}(v_2) = d_{G_2}(v_3) = d_{G_2}(v_4) = 2, d_{G_2}(v_5) = d_{G_2}(v_6) = d_{G_2}(v_7) = 1$
3. $d(v_1)_{G_3} = d_{G_3}(v_2) = d_{G_3}(v_3) = 2$

Y en el multigrafo del Ejemplo 2

$$d(v_1) = 3, d(v_2) = 4, d(v_3) = 5, d(v_4) = 5, d(v_5) = 4 \text{ y } d(v_6) = 5.$$

Veamos la primera propiedad de los grafos:

Teorema 1. *Dado un grafo $G = (V, X)$, la suma de los grados de sus vértices es igual a 2 veces el número de sus aristas. Es decir*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Demuestra: Haremos inducción en la cantidad de aristas.

Caso base: El caso base de nuestra demostración es cuando m es igual a 1 (también podría haber sido $m = 0$). En este caso el grafo G sólo tiene una arista, que notamos como $e = (u, w)$. Entonces $d(u) = d(w) = 1$ y $d(v) = 0$ para todo $v \in V, v \neq u, w$. Por lo tanto, $\sum_{v \in V} d(v) = 2$ y $2m = 2$, cumpliéndose la propiedad.

Paso inductivo: Para demostrar el paso inductivo, consideremos un grafo G con m aristas, $m \geq 1$.

Nuestra hipótesis inductiva es: **en todo grafo $G' = (V', X')$ con $m' < m$ aristas, se cumple que $\sum_{v \in V'} d_{G'}(v) = 2m'$.**

Elijamos una arista $e = (u, w)$ cualquiera de nuestro grafo G , y llamemos G' al grafo que resulta si se la quitamos, esto es $G' = (V, X')$ con $X' = X - \{e\}$.

Como la cantidad de aristas de G' es $m - 1$, G' cumple la hipótesis de la HI. Entonces podemos aplicar la HI sobre G' :

$$\sum_{v \in V} d_{G'}(v) = 2(m - 1).$$

Como $d_G(u) = d_{G'}(u) + 1, d_G(w) = d_{G'}(w) + 1$ y $d_G(x) = d_{G'}(x)$ para todo $x \in V, x \neq u, w$, obtenemos que:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_{G'}(v) + 2 = 2(m - 1) + 2 = 2m.$$

Que es lo que queremos probar.

Con ésto terminamos la demostración.

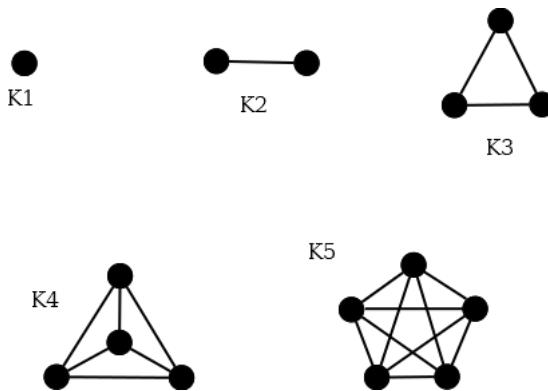


Corolario 1. Para todo grafo, la cantidad de vértices que tienen grado impar es par.

Definición 5. Un grafo se dice **completo** si todos sus vértices son adyacentes entre sí. Notaremos como K_n al grafo completo de n vértices.

La noción de grafo completo fue introducida por Möbius con el problema del rey.

Ejemplo 4.

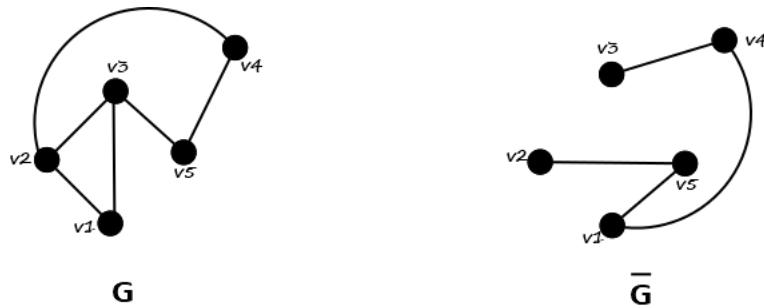


Ejemplo 5. ¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de n vértices?

$$m_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Definición 6. Dado un grafo $G = (V, X)$, su grafo **complemento**, que notaremos $\bar{G} = (V, \bar{X})$, tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacente en \bar{G} si, y solo si, no son adyacentes en G . También puede ser notado como G^c .

Ejemplo 6.

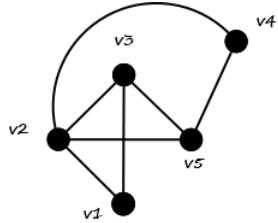


Ejemplo 7. Si G tiene n vértices y m aristas, ¿cuántas aristas tiene \bar{G} ?

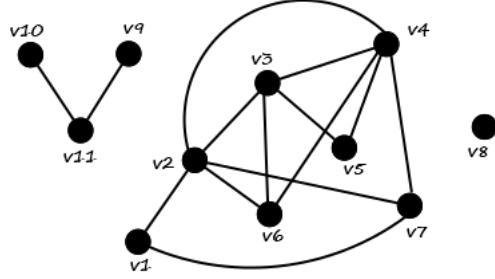
$$m_{\bar{G}} = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

**Definición 7.**

- Un **recorrido** en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0e_1v_1e_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \dots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k . En los grafos (no multi ni pseudo) un recorrido queda definido por la secuencia de vértices: $P = v_0v_1 \dots v_{k-1}v_k$.
- Un **camino** es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.
- Una **sección** de un camino $P = v_0e_1v_1e_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ es un subsecuencia $v_ie_{i+1}v_{i+1}e_{i+2} \dots v_{j-1}e_jv_j$ de términos consecutivos de P , y lo notamos como $P_{v_iv_j}$.
- Un **ciclo** es un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice.
- Un **ciclo o circuito simple** es un circuito de 3 o más vértices que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Ejemplo 8. $P_1 = v_2v_3v_1v_2v_4$ es recorrido pero no camino. $P_2 = v_1v_2v_5v_4$ es camino. $C_1 = v_1v_3v_2v_4v_5v_2v_1$ es circuito pero no ciclo. $C_2 = v_2v_3v_5v_4v_2$ es ciclo.**Definición 8.**

- Dado un recorrido P , su **longitud**, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.
- La **distancia** entre dos vértices v y w , $d(v, w)$, se define como la longitud del recorrido más corto entre v y w .
- Si no existe recorrido entre v y w se dice que $d(v, w) = \infty$.
- Para todo vértice v , $d(v, v) = 0$.

Ejemplo 9.

$$\begin{aligned}d(v_1, v_2) &= 1 \\d(v_1, v_3) &= 2 \\d(v_1, v_5) &= 3 \\d(v_3, v_7) &= 2 \\d(v_3, v_9) &= \infty \\d(v_7, v_7) &= 0 \\d(v_1, v_8) &= \infty \\d(v_{10}, v_9) &= 2\end{aligned}$$



Proposición 1. Si un recorrido P entre v y w tiene longitud $d(v, w)$ entonces P es un camino.

*Demuestra*ción. Vamos a demostrarlo por el absurdo. Llamemos $P = v \dots w$ a un recorrido entre v y w con $l(P) = d(v, w)$. Supongamos que no es camino, es decir existe un vértice u que se repite en P (u podría llegar a ser v o w): $P = v \dots u \dots u \dots w$. Si formamos un nuevo camino P' concatenando P_{vu} y P_{uw} (omitiendo el camino en P de u a sí mismo), obtendríamos un camino entre v y w con $l(P') < l(P) = d(v, w)$. Ésto genera un absurdo porque por definición $d(v, w)$ es la longitud del camino más corto entre v y w . ■

Proposición 2. La función de distancia cumple las siguientes propiedades para todo u, v, w pertenecientes a V :

- $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

*Demuestra*ción.

- Por definición de distancia, $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$ (cualquier camino entre dos vértices distintos tiene por lo menos una arista).
- Como las aristas no tienen sentido, la secuencia inversa de un camino entre u y v , es un camino entre v y u . Entonces $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ por concatenación de caminos:

Sean

- P_{uv} un camino que define $d(u, v)$
 P_{vw} un camino que define $d(v, w)$

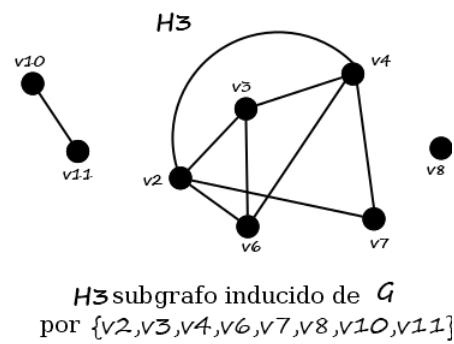
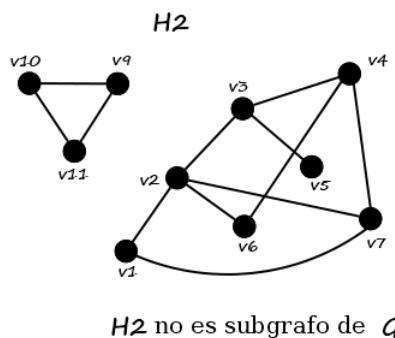
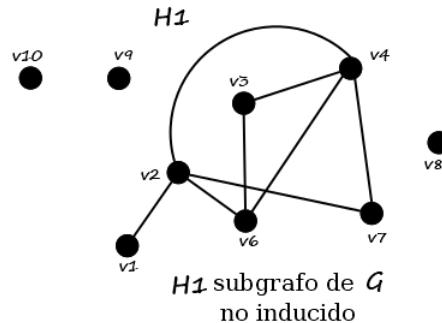
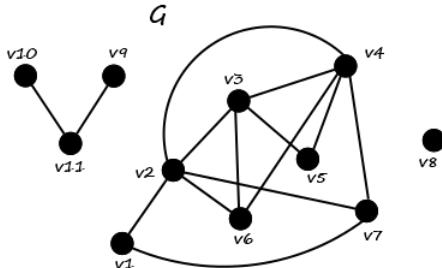
$C_{uv}C_{vw}$ es un recorrido de u a w de longitud $d(u, v) + d(v, w)$. Entonces el camino más corto de u a w tiene longitud menor o igual a $d(u, v) + d(v, w)$. ■

Definición 9.

- Dado un grafo $G = (V_G, X_G)$, un **subgrafo** de G es un grafo $H = (V_H, X_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G \cap (V_H \times V_H)$. Lo notamos como $H \subseteq G$.
- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G$, entonces H es subgrafo propio de G , $H \subset G$.
- H es un subgrafo generador de G si $H \subseteq G$ y $V_G = V_H$.
- Un subgrafo $H = (V_H, X_H)$ de $G = (V_G, X_G)$, es un **subgrafo inducido** si todo par $u, v \in V_H$ con $(u, v) \in X_G$ entonces también $(u, v) \in X_H$.
- Un subgrafo inducido de $G = (V_G, X_G)$ por un conjunto de vértices $V' \subseteq V_G$, se denota como $G_{[V']}$.



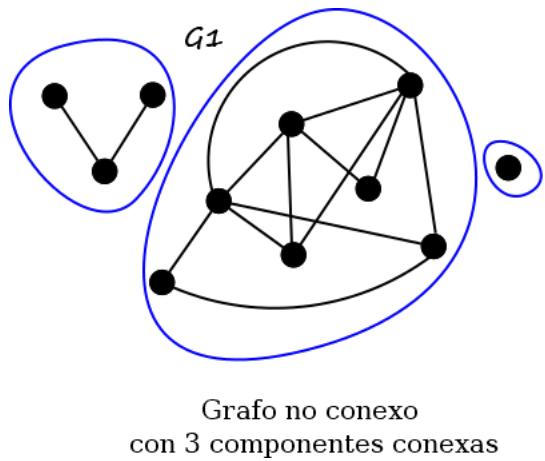
Ejemplo 10.



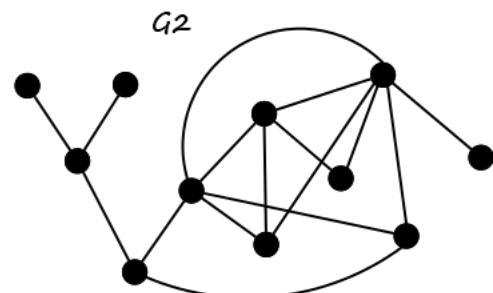
Definición 10.

- Un grafo se dice **conexo** si existe camino entre todo par de vértices.
- Una **componente conexa** de un grafo G es un subgrafo conexo maximal (no está incluido estrictamente en otro subgrafo conexo) de G .

Ejemplo 11.



Grafo no conexo
con 3 componentes conexas



Grafo conexo



3. Grafos bipartitos

Definición 11.

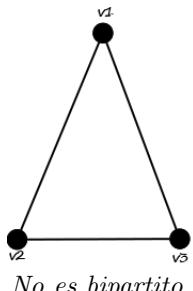
- Un grafo $G = (V, X)$ se dice **bipartito** si existen dos subconjuntos V_1, V_2 del conjunto de vértices V tal que:

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

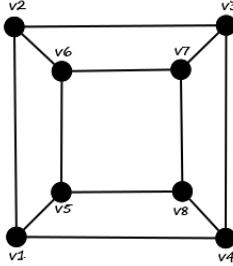
y tal que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2 .

- Un grafo bipartito con subconjuntos V_1, V_2 , es **bipartito completo** si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2 .

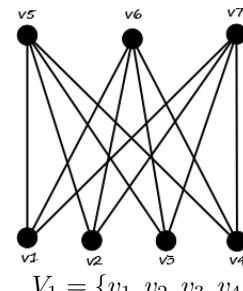
Ejemplo 12.



No es bipartito

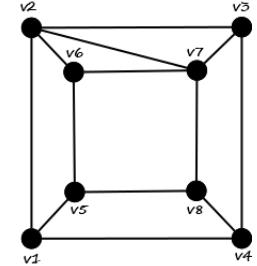


$V_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$
 $V_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$



$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
 $V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}$

Es bipartito completo: $K_{4,3}$



No es bipartito

Teorema 2. Un grafo G es bipartito \iff no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración: $G = (V, X)$

Como:

- un grafo es bipartito \iff cada una de sus componentes conexas es bipartita,
- un grafo no tiene ciclos impares \iff cada una de sus componentes conexas no tiene ciclos impares,

alcanza con demostrar el teorema para grafos conexos. Entonces vamos a suponer que G es conexo.

$\implies G$ bipartito, $V = (V_1, V_2)$ bipartición.

Si G no tiene ciclos, listo, porque se cumple que G no tiene ciclos de longitud impar.

Supongamos entonces que G tiene algún ciclo y sea $C = v_1v_2\dots v_kv_1$ un ciclo de G . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 \in V_1$. Como $(v_1, v_2) \in X$, entonces $v_2 \in V_2$. En general, $v_{2i+1} \in V_1$ y $v_{2i} \in V_2$. Como $v_1 \in V_1$ y $(v_k, v_1) \in X$, debe pasar $v_k \in V_2$. Luego $k = 2i$ para algún i , lo que implica que $l(C)$ es par.

$\iff G$ sin ciclos impares. Sea u cualquier vértice de V . Definimos:



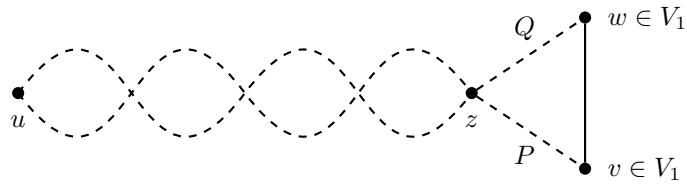
$$V_1 = \{v \in V \text{ tq } d(u, v) \text{ es par}\} \cup \{u\}$$

$$V_2 = \{v \in V \text{ tq } d(u, v) \text{ es impar}\}$$

V_1, V_2 definen una partición de V (ya que como G es conexo no hay vértices a distancia ∞ de u). Veamos que definen una bipartición (es decir que no existe arista entre un vértice de V_1 y uno de V_2).

Supongamos que no es bipartición, es decir existen $v, w \in V_1$ (podría ser V_2) tales que $(v, w) \in X$. Si $v = u$, entonces $d(u, w) = 1$, pero esto no puede pasar porque $d(u, w)$ es par. Lo mismo para w . Luego, $u \neq v, w$.

Sea P un camino mínimo entre v y u y Q uno entre v y w . Como $u, w \in V_1$, P y Q tienen longitud par.



Sea z el vértice común a P y Q tal que P_{zv} y Q_{zw} no tienen vértices en común (solo z). Tiene que suceder que $d(u, z) = l(P_{uz}) = l(Q_{uz})$, de lo contrario P y Q no serían caminos que definen las distancias respectivas. Entonces $l(P_{zv})$ y $l(Q_{zw})$ tienen igual paridad. Esto implica que el ciclo $P_{zv}(v, w)Q_{zw}$ tiene longitud impar, contradiciendo la hipótesis. Esta contradicción se generó por suponer que existe $v, w \in V_1$ tales que $(v, w) \in X$.

■

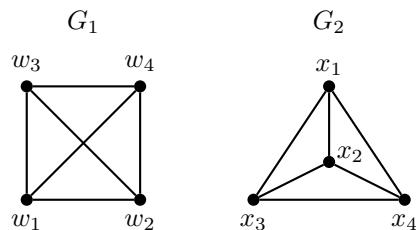
Isomorfismo de grafos

Definición 12. Dados dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \rightarrow V'$ tal que para todo v, w en V :

$$(v, w) \in X \text{ si y solo si } (f(v), f(w)) \in X'.$$

A la función f se la llama función de isomorfismo. Cuando G y G' son isomorfos lo notaremos como $G \cong G'$ o, simplemente (por abuso de notación) $G = G'$.

Ejemplo 13. Dados $G_1 = (V_1, X_1)$ y $G_2 = (V_2, X_2)$:



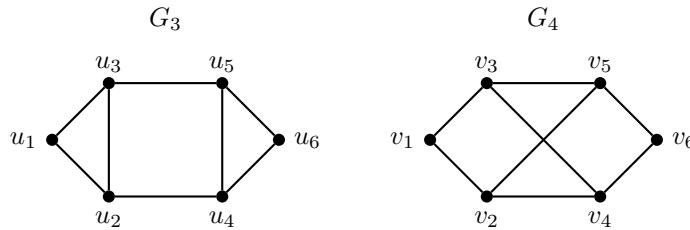


Si definimos $f : V_1 \rightarrow V_2$ como

$$f(w_1) = x_1 \quad f(w_2) = x_2 \quad f(w_3) = x_3 \quad f(w_4) = x_4$$

podemos ver que f respeta las adyacencias y, por lo tanto, G_1 y G_2 son isomorfos.

Ejemplo 14. Para $G_3 = (V_3, X_3)$ y $G_4 = (V_4, X_4)$:



no existe función biyectiva $f : V_3 \rightarrow V_4$ que respete las adyacencias, lo que muestra que G_3 y G_4 no son isomorfos.

Proposición 3. Si dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ son isomorfos, entonces

1. tienen el mismo número de vértices,
2. tienen el mismo número de aristas,
3. para todo k , $0 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de vértices de grado k ,
4. tienen el mismo número de componentes conexas,
5. para todo k , $1 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k .

Demostración: Sean $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ dos grafos isomorfos con función de isomorfismo f .

1. Por existir $f : V \rightarrow V'$ biyectiva, $|V| = |V'|$.
2. Definimos $h : X \rightarrow X'$ como $h((u, v)) = h(f(u), f(v))$. Tenemos que ver que h está bien definida y que es biyectiva.
 - h está bien definida: Si $(u, v) \in X$, por definición de isomorfismo, $(f(u), f(v)) \in X'$, y es único porque f es función.
 - h es inyectiva:

$$\begin{aligned} h((u_1, v_1)) &= h((u_2, v_2)) \\ &\Downarrow \\ (f(u_1), f(v_1)) &= (f(u_2), f(v_2)) \\ &\Downarrow \\ f(u_1) = f(u_2) &\quad y \quad f(v_1) = f(v_2) \\ &\Downarrow \quad f \text{ inyectiva} \\ u_1 = u_2 &\quad y \quad v_1 = v_2 \\ &\Downarrow \\ (u_1, v_1) &= (u_2, v_2) \end{aligned}$$



- h es sobreyectiva:

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) &\in X' \\ \Downarrow &\text{por ser } f \text{ sobreyectiva} \\ (u_1, u_2) &= (f(v_1), f(v_2)) \\ \Downarrow &\text{por definición de isomorfismo} \\ (v_1, v_2) \in X &\quad y \quad h((v_1, v_2)) = (u_1, u_2)\end{aligned}$$

Entonces, como h es biyectiva, $|X| = |X'|$.

Los puntos 3 al 5 quedan como ejercicio. ■

La recíproca de esta proposición es falsa. Hay grafos que cumplen ?? al 5 y, sin embargo, no son isomorfos. Esta proposición da condiciones necesarias para que dos grafos sean isomorfos, pero no suficientes. No se conocen condiciones suficientes fáciles de chequear (algoritmo polinomial) que aseguren que dos grafos son isomorfos.

4. Representación de grafos

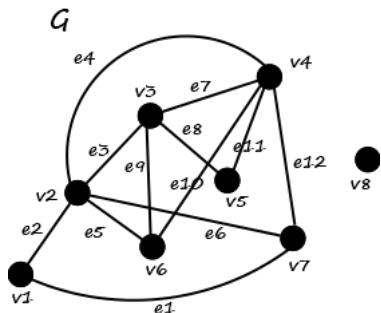
Para desarrollar algoritmos sobre grafos, debemos representarlos en la computadora. Lo más común no es hacerlo mediante matrices, ya que, en general, a no ser que el grafo sea muy denso (tenga muchas aristas), como hay muchas entradas en 0 desperdiciaríamos espacio. Sin embargo, la representación de grafos mediante matrices es útil conceptual y teóricamente.

Matriz de adyacencia de un grafo

Dado un grafo G , se define su **matriz de adyacencia** $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene una arista entre } v_i \text{ y } v_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejemplo 15.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición 4. Si A es la matriz de adyacencia del grafo G , entonces:

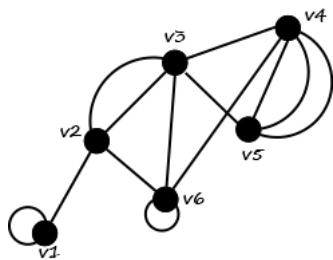


- La suma de los elementos de la columna i de A (o fila i , dado que A es simétrica) es igual a $d(v_i)$.
- Los elementos de la diagonal de A^2 indican los grados de los vértices: $a_{ii}^2 = d(v_i)$.

Para los pseudografo, se generaliza la **matriz de adyacencia** como:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{cantidad de aristas}(v_i, v_j) & \text{si } i \neq j \\ \text{cantidad de loops sobre } v_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ejemplo 16.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

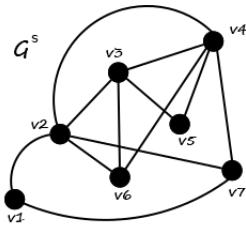
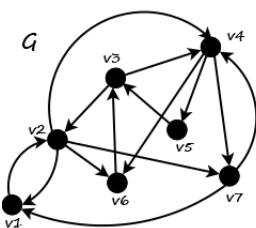
5. Digrafos

Cuando queremos modelar ciertas situaciones reales, no es adecuado que una arista pueda ser atravesada en cualquiera de las dos direcciones, como sería el caso de una calle de un solo sentido. Ésto genera las siguientes definiciones.

Definición 13.

- Un **digrafo** $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos, nodos o vértices y X es un subconjunto del conjunto de los pares **ordenados** de elementos distintos de V . A los elementos de X los llamaremos **arcos**.
- Dado un arco $e = (u, w)$ llamaremos al primer elemento, u , **cola** de e y al segundo elemento, w , **cabeza** de e .
- El **grado de entrada** $d_{in}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *llegan* a v . Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cabeza.
- El **grado de salida** $d_{out}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *salen* de v . Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cola.
- El **grafo subyacente** de un digrafo G es el grafo G^s que resulta de remover las direcciones de sus arcos (si para un par de vértices hay arcos en ambas direcciones, sólo se coloca una arista entre ellos).

Ejemplo 17.





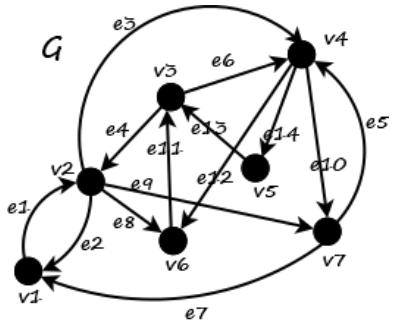
La matriz de adyacencia de un digrafo G , $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ se define como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene un arco de } v_i \text{ a } v_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Proposición 5. Si A es la matriz de adyacencia del digrafo G , entonces:

- La suma de los elementos de la fila i de A es igual a $d_{OUT}(v_i)$.
- La suma de los elementos de la columna i de A es igual a $d_{IN}(v_i)$.

Ejemplo 18.

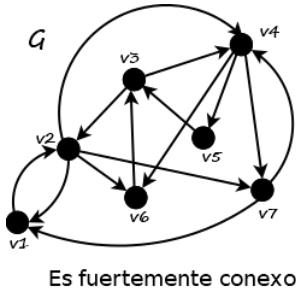


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 14.

- Un **recorrido/camino orientado** en un digrafo es una sucesión de arcos $e_1e_2\dots e_k$ tal que el primer elemento del arco e_i coincide con el segundo de e_{i-1} y el segundo elemento de e_i con el primero de e_{i+1} $i = 2, \dots, k - 1$.
- Un **cicuito/ciclo orientado** en un grafo dirigido es un recorrido/camino orientado que comienza y termina en el mismo vértice.
- Un digrafo se dice **fuertemente conexo** si para todo par de vértices u, v existen caminos orientados de u a v y de v a u .

Ejemplo 19.



$P_1 = v_1v_2v_4v_5v_3$ es camino orientado

$P_2 = v_2v_3v_4$ NO es camino orientado

$C_1 = v_1v_2v_4v_7v_1$ es ciclo orientado

$C_2 = v_2v_1v_7v_2$ NO es ciclo orientado



6. Bibliografía recomendada

- Capítulo 1, 13, 16 de F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
- Capítulo 1, Capítulo 2 Secciones 1 y 5 de J. Gross and J. Yellen, *Graph theory and its applications*, CRC Press, 1999.
- Capítulo 1 Secciones 1, 3-7 de J. Bondy and U. Murty, *Graph theory with applications*, Macmillan, 5ta edición, 1982.

Referencias

- [1] N. Biggs, E. Lloyd, and R. Wilson. *Graph theory 1736-1936*. Clarendon Press, 1976.