Filtros de Kalman

Maria Alejandra Vélez Clavijo, Alejandra Palacio Jaramillo, Valentina Moreno Ramírez
Ingeniería matemática, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

Resumen

Con este artículo se pretende brindar los conocimientos básicos y necesarios para la comprensión del funcionamiento del algoritmo denominado filtro de Kalman. En el desarrollo de este artículo se presentará el origen del filtro, las bases y generalidades de su funcionamiento, y se mostrará el filtro de Kalman unidimensional y el multidimensional. Finalmente se darán unas conclusiones generales acerca de estos filtros.

Palabras clave*:* Filtro de Kalman, predicción, corrección, ruido, estimación, sistema dinámico.

Abstract

This article is intended to provide the basic and necessary knowledge to understand the operation of the algorithm called Kalman filter. In the development of this article, the origin of the filter, the bases and generalities of its operation will be presented and the one-dimensional and multidimensional Kalman filters will be shown. Finally, some general conclusions about these filters will be given.

Key Words: Kalman filter, prediction, correction, noise, estimate, dynamic system.

Introducción

Los filtros de Kalman son una técnica de asimilación de datos enfocada en la predicción y corrección de datos. Estos filtros son uno de los algoritmos de estimación más importantes y utilizados, ya que resuelven el problema de estimación en variables de estado en un sistema dinámico, basándose en el método de mínimos cuadrados. El algoritmo estima el estado de un sistema en cada momento, aprovechando la información disponible en el tiempo t-1 y actualizando dichas estimaciones con la información del tiempo t, proporcionando así una solución recursiva óptima. Estos filtros son muy utilizados en sistemas de localización y navegación, radares, sistemas de control, evoluciones de pandemias, entre otros, y lo que hace que se destaque de otros algoritmos de estimación, es que este permite estimar el estado de un sistema en el pasado, presente y futuro, aun cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida [1].

I. Recuento histórico

En 1960, el matemático Rudolf E. Kalman, publicó el artículo llamado *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, el en cuál se presentaba el algoritmo conocido actualmente como filtro de Kalman en honor a su nombre. Este artículo describe una solución recursiva al problema de filtrado lineal de datos discretos [2].

El filtro de Kalman tuvo su mayor implementación en el año 1960 precisamente cuando se inició el programa espacial Apolo y dichos filtros fueron incluidos en el sistema del computador Guidance de Apolo. Estos filtros se implementaron en el sistema de navegación de Apolo para la estimación de la trayectoria y control del proyecto.

La aplicabilidad de estos filtros en diversos campos se evidencia en la actualidad con la predicción de la evolución de pandemias, como es la pandemia actual causada por el coronavirus.

II. Conceptos básicos

El filtro de Kalman se puede aplicar siempre y cuando el sistema sea lineal, cuente con una ecuación de estado y su respectivo modelo dinámico. El modelo dinámico de un filtro de Kalman se resume básicamente al conjunto de ecuaciones de estado, y de esta forma el estado del sistema puede representarse como los parámetros del objetivo.

Es relevante aclarar que, cuando se habla de estado actual del sistema, se hace referencia a la entrada de información del algoritmo de predicción en un tiempo t, y el siguiente estado en un tiempo t+1 es la salida del algoritmo.

Otro aspecto característico de los filtros de Kalman es que así las medidas tomadas tengan errores causados por la medición o por factores externos, estos se filtrarán, obteniendo así mediciones mejoradas que permitirán tener como resultado una predicción más acertada. Cabe destacar que estos errores se denominan ruido de medición y ruido del proceso, respectivamente.

Dentro de las matemáticas involucradas en la implementación del filtro de Kalman, es importante tener en cuenta que, al ser un sistema lineal el que se utiliza para su aplicación, el álgebra lineal y sus componentes juegan un papel principal. En los elementos relevantes de esta área para los filtros de Kalman, se encuentran las matrices, matrices transpuestas, inversas, espacios vectoriales, entre otros. Por último y no menos importante, también se ven aplicados conceptos físicos, de modelado matemático, estadísticos y estocásticos.

III. Filtro de Kalman unidimensional

Para comprender cómo es el funcionamiento de los filtros de Kalman se hace necesario dar a conocer los pasos en los que se fundamenta el mismo: el algoritmo se divide en dos grandes fases, una de predicción y otra de corrección, y estas a su vez tienen subprocesos que permiten llevar a cabo dicho algoritmo. En el caso de los filtros de Kalman unidimensionales, en primera instancia es necesario obtener los valores de entrada, es decir recibir las mediciones; luego de tener las mediciones se pasa a la fase de actualización de estado, en la cual se debe calcular la ganancia de Kalman y recibir la estimación inicial, es decir la conjetura inicial del estado del sistema y estimar el estado actual usando la ecuación de actualización de estado. Posteriormente, se debe calcular el estado previsto para la próxima iteración utilizando el modelo dinámico del sistema.

Como se ha mencionado anteriormente, el filtro de Kalman es un algoritmo que predice recursivamente, es decir utiliza la información del pasado y la actualiza en el presente para obtener sus futuras estimaciones.

En este proceso es fundamental la ecuación que permitirá hacer las respectivas actualizaciones del estado del sistema, a continuación, se mostrará cómo obtenerla:

Sea $\hat{x}_{n,n}$ la estimación de *x* en el tiempo n, $\hat{x}_{n,n-1}$ la estimación que se realizó en el tiempo *n-1*, $\hat{x}_{n+1,n}$ la estimación del estado futuro *n+1* de *x*, y z_n el valor de la medición en el instante n.

Como se trata de un proceso recursivo, se pretende que la estimación de $\hat{x}_{n,n}$ se obtenga utilizando la estimación anterior y agregando a esta un ajuste o mejor llamada *Ganancia de Kalman.*

Haciendo uso de conceptos de estadística básica, se tiene:

$$\hat{x}_{n,n} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_N$$

(Fórmula del promedio)

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N-1}(z_n) + z_N\right]$$

(Sumatoria de los N-1 términos anteriores más la última medición)

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}(z_N) + \frac{1}{N} z_N$$

(Se aplica distributiva de $\frac{1}{N}$)

$$= \frac{1}{N}\frac{N-1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}(z_N) + \frac{1}{N} z_N$$

(Se multiplica y divide el primer término de la ecuación por N-1)

$$= \frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}(z_N) + \frac{1}{N} z_N$$

(Reorganizando la ecuación se puede observar que la expresión en color azul hace referencia al promedio del instante anterior, es decir N-1)

$$= \frac{N-1}{N}\hat{x}_{N,N-1} + \frac{1}{N} z_N$$

(Se reescribe la expresión)

$$= \hat{x}_{N,N-1} - \frac{1}{N}\hat{x}_{N,N-1} + \frac{1}{N} z_N$$

(Se distribuye el término $\hat{x}_{N,N-1}$)

$$= \hat{x}_{N,N-1} + \frac{1}{N}(z_N - \hat{x}_{N,N-1})$$

(Reordenando la expresión)

Por tanto,

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{N,N-1} + \frac{1}{N}(z_N - \hat{x}_{N,N-1}),$$

de una forma mucho más explícita después de realizar las anteriores operaciones se llega a que la ecuación de estimación del estado actual tiene la forma:

De esto se tiene que la ganancia de Kalman es el peso que se le da a la medición y (1-ganancia de Kalman) es el peso que se le da a estimación.

Es importante señalar que la *Ganancia de Kalman* representada con K_n, toma valores entre 0 y 1, y no siempre es igual en cada iteración, es decir que esta puede variar en el tiempo.

Como $K_n = \frac{1}{N}$, se puede analizar que cuando N se hace muy grande, es decir, cuándo la cantidad de mediciones es elevada, va a ser menos significativo el aporte de cada nueva medición en el estado del sistema.

La ganancia de Kalman también puede expresarse como:

$$K_n = \frac{p_{n,n-1}}{p_{n,n-1} + r_n}$$

donde

$p_{n,n-1}$

es la incertidumbre de la estimación la cuál es una salida del filtro, y r_n es la incertidumbre de la medición.

La ganancia de Kalman se puede expresar cuándo se quiere cambiar la estimación que se tiene respecto a una medición, es decir, si se estuviera midiendo una carretera y se tiene interés en una precisión de 4 centímetros (σ), entonces se deben hacer mediciones hasta que la incertidumbre de la medición (σ^2) sea menor a 16 centímetros.

En casos en que se tenga sistemas con velocidad constante y se necesite, por ejemplo, estimar la posición de un objeto, el modelo dinámico para este sistema podría escribirse mediante dos ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t x \dot{x}_n$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n$$

A estas ecuaciones se les llama extrapolación de estado, y siguiendo su lógica, la posición del objeto en el siguiente momento va a estar dada por la posición actual más la velocidad multiplicada por el cambio de tiempo o tiempo de seguimiento.

Como se ha mencionado anteriormente los filtros de Kalman son una técnica de corrección y predicción que toma en cuenta el ruido para proporcionar resultados más exactos. Siguiendo esta idea, este algoritmo cuenta con una *ecuación de actualización de covarianza,* la cual actualiza la incertidumbre estimada del estado actual y se expresa de la siguiente manera:

$$p_{n,n} = (1 - K_n)\, p_{n,n-1}$$

De esta ecuación se tiene que

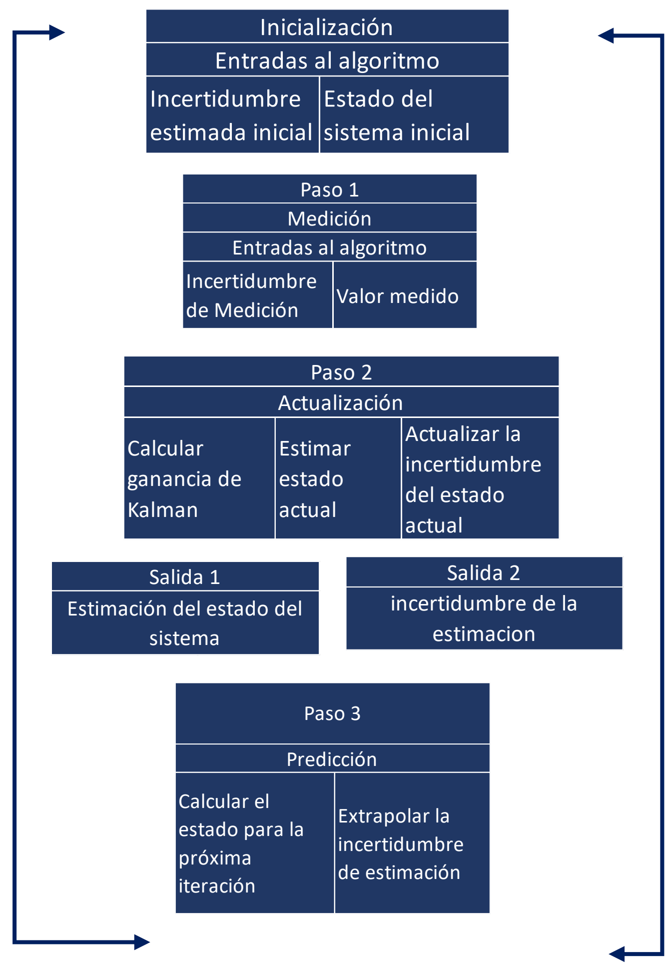
K_n es la ganancia de Kalman,

$p_{n,n-1}$ es la incertidumbre estimada que se obtuvo de la estimación anterior, y

$p_{n,n}$ es la incertidumbre estimada del estado actual.

La incertidumbre estimada se va a hacer más pequeña cada que se dé una iteración, puesto que el peso que le damos a la estimación va a ser menor o igual a 1. De aquí se puede resaltar que cuando la ganancia de Kalman sea alta y la incertidumbre de medición sea baja, entonces la incertidumbre estimada va a tender a cero [3].

Resumen filtros de Kalman unidimensionales



<u>Ejemplo de aplicación:</u>

Suponiendo que se necesita determinar la longitud del Puente de Occidente ubicado en Antioquia con base en diferentes mediciones realizadas con un odómetro impreciso, se utilizarán filtros de Kalman para dicho fin.

Ya que la longitud de este puente no variará en el tiempo, se utilizará el filtro de Kalman unidimensional.

Inicialmente, se debe tener en cuenta que el odómetro tiene una imprecisión de 0,5 metros por cada 100 metros.

Es importante destacar que la iteración cero corresponde a la fase de inicialización del proceso, en la cual se tiene la incertidumbre estimada inicial (en este caso el error de medición humano) y el estado inicial del sistema.

A modo de observación se tiene que a medida que la cantidad de mediciones van aumentando, la ganancia de Kalman tiende a ser un poco menor, esto debido a que, si el modelo se sobrecarga de muchas mediciones, estas al final no aportarán información significativa al sistema.

ITERACIÓN	VALOR DE ENTRADA	ERROR	VARIANZA
0	300	5,00	25
1	270	1,30	1,69
2	264	1,32	1,74
3	271	1,36	1,84
4	306	1,53	2,34
5	293	1,47	2,15
6	287	1,44	2,06
7	296	1,48	2,19
8	283	1,42	2,00
9	295	1,48	2,18
10	263	1,32	1,73

ITERACIÓN	GANANCIA DE KALMAN	ESTIMACIÓN DEL ESTADO ACTUAL	ACTUALIZACIÓN DE INCERTIDUMBRE
0	1	300	25
1	0,94	271,9	1,58
2	0,48	267,1	0,83
3	0,31	266,2	0,57
4	0,20	277,9	0,46
5	0,18	303,7	0,38
6	0,16	292,1	0,32
7	0,13	288,1	0,28
8	0,12	294,4	0,24
9	0,10	284,2	0,22
10	0,11	291,4	0,20

De la última iteración se tiene que la medida de la longitud del puente es de 291.4 metros. Cabe destacar que es una medida bastante acertada, puesto que se sabe que la medida original de este puente es de 291 metros.

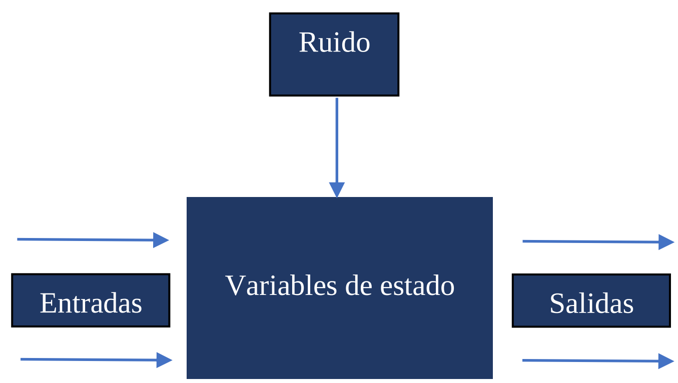
IV. Filtro de Kalman Multidimensional

Retomando la implementación y contextualización de filtros de Kalman unidimensionales, es importante aclarar que para la implementación multidimensional se necesitaran matrices que contengan los vectores de variables de estado. La lógica de dicha implementación es la misma que en los filtros unidimensionales.

A continuación, se enunciará la ecuación de *extrapolación de estado*, la cual permitirá predecir el siguiente estado del sistema utilizando la información del estado actual:

Sean las variables de estado los atributos del sistema, $\hat{x}_{n,n}$ la estimación del vector de estado en el tiempo n, $\hat{x}_{n+1,n}$ la estimación del estado futuro *n+1*, $\hat{u}_{n,n}$ es la variable de estrada al sistema, F es la matriz de transición de estado y G es la matriz de control de entrada.

$$\hat{x}_{n+1,n} = F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n}$$



De acuerdo con lo explicado respecto a la extrapolación de covarianza en los filtros de Kalman unidimensionales, en esta ocasión se derivará la *ecuación de extrapolación de covarianza* en la notación matricial. Esta ecuación será la ecuación de covarianza para la predicción.

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$$

De aquí se tiene que $P_{n,n}$ es la matriz de incertidumbre estimada (covarianza) del estado actual, $P_{n+1,n}$ es una matriz de incertidumbre estimada predicha para el siguiente estado, F es la matriz de estado y Q es la matriz del ruido del proceso.

Para el proceso de actualización y corrección es fundamental hacer uso de una ecuación que se encargue del filtrado, otra que corrija y finalmente una ecuación que represente la ganancia de información.

Para actualizar el estado con la nueva información que le llega al sistema se utiliza la ecuación de *actualización de estado* que básicamente concuerda con la actualización de estado en los filtros unidimensionales excepto por la ganancia de Kalman que en este caso está dada en una notación matricial.

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n(z_n - H\hat{x}_{n,n-1})$$

Donde z_n es una medida en el tiempo n, z es un vector de salida, H es una matriz de observación con dimensiones $n_z \times n_x$ y K_n es la ganancia de Kalman con dimensiones $n_x \times n_z$.

Al término $(z_n - H\hat{x}_{n,n-1})$ se le llama innovación del estado del sistema, ahora se mostrará un poco sobre la estructura matricial de estas:

$$z(n) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \text{(vector de salida)}$$

$$x(n) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} \text{(Vector de estado)}$$

$$(z_n - H\hat{x}_{n,n-1}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix}$$

$$(z_n - H\hat{x}_{n,n-1}) = \begin{bmatrix} (z_1 - \hat{x}_1) \\ (z_3 - \hat{x}_3) \\ (z_5 - \hat{x}_5) \end{bmatrix} \text{(Innovación)}$$

Para el proceso de corrección se requiere la *actualización de la covarianza*, la cual necesita una matriz de incertidumbre estimada (covarianza) del estado actual $(P_{n,n})$, matriz de incertidumbre de estimación previa del estado actual predicha en el estado anterior $(P_{n,n-1})$, la ganancia de Kalman K_n , la matriz de observación H y una matriz de covarianza de ruido de medición R_n. Dicha ecuación viene dada por:

$$P_{n,n} = (I + K_n H) P_{n,n-1} (I + K_n H)^T + K_n R_n K_n^T$$

Uno de los aspectos más importantes de la corrección es encontrar una ganancia de Kalman que permita minimizar la varianza estimada. Para ello se minimiza la diagonal principal de la matriz de covarianza, luego de hacer procedimientos algebraicos se obtiene la ecuación de la *ganancia de Kalman* que minimiza dicha varianza:

$$K_n = P_{n,n-1} H^T (H P_{n,n-1} H^T + R_n)^{-1}$$

Dichos parámetros que la componen ya fueron descritos anteriormente.

La *ecuación medida del sistema* representa el valor del sistema en el tiempo n, puesto que se compone de la suma del valor medido y el ruido en esta medición.

Sea H la matriz de observaciones, x_n el estado verdadero del sistema, v_n el ruido aleatorio en la medición, entonces se obtiene que:

$$z_n = H x_n + v_n$$

Siendo z_n el valor de medida en el tiempo n del sistema.

La incertidumbre de la medición está determinada por la esperanza matemática del producto entre el error de medición (v_n) y su transpuesta (v_n^T), expresado de otra manera,

$$R_n = E(v_n v_n^T)$$

Donde R_n será una matriz de covarianza de medida.

Por otro lado, *la incertidumbre del ruido de proceso* está dada por la esperanza del producto entre el ruido del proceso (w_n) y su matriz transpuesta(w_n^T), es decir,

$$Q_n = E(w_n w_n^T)$$

De tal forma que Q_n será la matriz de covarianza del ruido del proceso.

Finalmente, la incertidumbre de estimación se calcula con la esperanza matemática del producto entre un error de estimación (e_n) y su transpuesta (e_n^T), en otras palabras,

$$P_{n,n} = E(e_n e_n^T) = E((x_n - \hat{x}_{n,n})(x_n - \hat{x}_{n,n})^T)$$

Donde $P_{n,n}$ es una matriz de covarianza del error de estimación.

Adicionalmente, esta incertidumbre de estimación se puede calcular análogamente como la esperanza matemática del producto entre un estado oculto o verdadero del sistema menos el vector de estado del sistema en el tiempo n $(x_n - \hat{x}_{n,n})$ y su transpuesta

$((x_n - \hat{x}_{n,n})^T)$.

Resumen de ecuaciones del filtro de Kalman multidimensional [5]:

Rol en el proceso	Nombre de la ecuación	Ecuación
Predicción	Extrapolación de estado	$\hat{x}_{n+1,n} = F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n}$
	Extrapolación de covarianza	$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$
Actualización y corrección	Actualización de estado	$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n(z_n - H\hat{x}_{n,n-1})$
	Actualización de covarianza	$P_{n,n} = (I + K_nH)P_{n,n-1}(I + K_nH)^T + K_nR_nK_n^T$
	Ganancia de Kalman	$K_n = P_{n,n-1}H^T(HP_{n,n-1}H^T + R_n)^{-1}$
Auxiliares	Ecuación de medida	$z_n = Hx_n + v_n$
	Incertidumbre de medición	$R_n = E(v_nv_n^T)$
	Incertidumbre del ruido del proceso	$Q_n = E(w_nw_n^T)$
	Incertidumbre de estimación	$P_{n,n} = E(e_ne_n^T) = E((x_n - \hat{x}_{n,n})(x_n - \hat{x}_{n,n})^T)$

V. Conclusiones

El proceso que realiza el algoritmo de filtro de Kalman se puede dividir en dos etapas, sobre todo:

1. La fase predicción donde, con base en el estado anterior del sistema y las ecuaciones que rigen su evolución, se predecirá el estado actual del sistema.

2. La segunda parte es la corrección, parte en la cual, con los datos de medición tomados, se corrige la primera predicción para tener una mejor estimación.

La importancia actual de los filtros de Kalman radica en que su campo de aplicación es muy amplio, por tanto, el filtro servirá para hacer estimaciones óptimas en diferentes áreas de conocimiento y, el hecho de ser un método recursivo, lo hace más llamativo.

En síntesis, los filtros de Kalman han facilitado la predicción eficaz de sistemas no estáticos, lo cual ha sido evidente desde el Programa Espacial Apolo hasta la actualidad.

VI. Referencias

[1] Anónimo. *Control automático: introducción al filtro de Kalman*, from http://www.ie.tec.ac.cr/einteriano/control/clase/11.ControlconFiltrodeKalman.pdf

[2] Becker, A. *Mirada General: Acerca del filtro de Kalman*, from https://www.kalmanfilter.net/ES/default_es.aspx

[3] Becker, *A. The α−β−γ Filter: ejemplo 1-pesando oro,* from https://www.kalmanfilter.net/ES/alphabeta_es.html

[4] Ramírez, E. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems: a.k.a. Kalman Filters*. Nueva York, Estados Unidos, Agosto del 2016.

[5] Becker, A. *Filtro de Kalman: Resumen*, from https://www.kalmanfilter.net/multiSummary.html