
Optimización de redes de telefonía entre las comunas del Valle de Aburrá.

Alejandra Palacio Jaramillo, Brahyán Esteban Ríos Soto, María Alejandra Vélez Clavijo y Valentina Moreno Ramírez.
Optimización I, Departamento de Ciencias Matemáticas, Escuela de Ciencias Exactas
Universidad EAFIT
apalacioj@eafit.edu.co, berioss@eafit.edu.co, mavelezc1@eafit.edu.co, vmorenor@eafit.edu.co.

Resumen- Debido al desarrollo social, las redes de comunicación son indispensables en la vida del ser humano. Sin embargo, el crecimiento tecnológico es tan rápido que redes como las telefónicas se vuelven obsoletas con el paso del tiempo, pues gracias a la tecnología inalámbrica, estas se vuelven menos prácticas respecto a otros dispositivos como los celulares. A pesar de ello, el hombre ha ideado las redes GPON, las cuales permiten que el sistema telefónico sea más eficiente, pero su costo de instalación resulta alto en grandes áreas, por ejemplo, en la ciudad de Medellín. Para dar una propuesta de solución respecto a lo anterior, el propósito de este proyecto es encontrar el camino más corto entre los centros de las redes telefónicas de las comunas del Valle de Aburrá mediante la implementación de un algoritmo, para así minimizar el costo de implementación de las redes telefónicas con tecnología GPON en la ciudad.

Palabras clave- Optimización, Redes de comunicación, Árbol de expansión mínima, Algoritmo de Kruskal, Grafos, Camino, Redes GPON.

I. INTRODUCCIÓN

Gracias al desarrollo acelerado que ha tenido la tecnología desde el siglo pasado, el hombre ha vivido más cómodamente, pues esta le ha facilitado las tareas de su diario vivir y le ha solucionado diversos problemas producto de la época. En consecuencia, hoy en día las ciudades cuentan con redes de telefonía, las cuales hacen más sencilla la comunicación entre las personas de manera eficaz. Por ejemplo, la invención de las redes GPON ha revolucionado la industria tecnológica porque son el presente y futuro de las telecomunicaciones, debido a los beneficios que traen.

de telecomunicaciones que utiliza fibra óptica para llegar hasta el suscriptor [1], lo cual permite principalmente que sea una red estable para conexiones de banda ancha, eficiente para la sincronización en la transmisión de datos y con menor volumen de cableado.

Pese a su llamativa operatividad y adaptabilidad, la implementación de estas redes de comunicación resulta costosa, por ende, es preciso optimizar el diseño de la red de telefonía y así, mantener la relación calidad-precio ideal que permita el mantenimiento y longevidad del uso de estas. Por consiguiente, el presente proyecto está enfocado en plantear una red GPON óptima para la telefonía entre las comunas de Medellín, mediante el uso del algoritmo de Kruskal para obtener un árbol de expansión mínima.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Debido a las necesidades actuales, cada vez se hace más imprescindible la optimización de sistemas, pues así, se puede obtener el provecho mínimo o máximo de cierto sistema, dependiendo del contexto. De acuerdo con lo anterior, para este proyecto se pretende obtener un árbol de expansión mínima, a través del algoritmo de Kruskal, con el fin de hallar la longitud mínima que representará la fibra óptica total de la red GPON utilizada para la red de telefonía en Medellín.

En primer lugar, para resolver este problema, se consideró una red (o más bien, un grafo no dirigido -ilustración 1-) compuesta por las comunas del Valle de Aburrá, donde las comunas son representadas por los nodos del grafo y las distancias entre ellas corresponden a los pesos de las aristas del grafo.

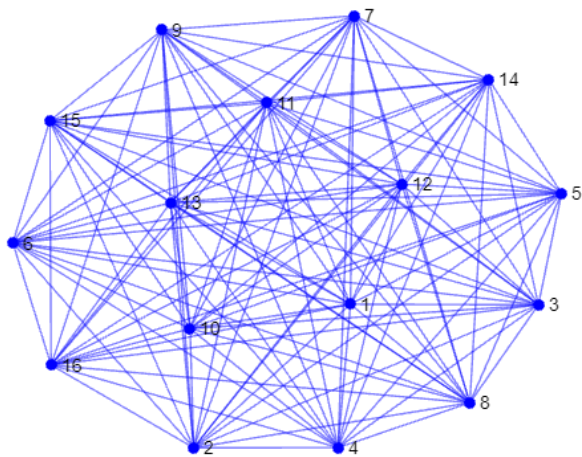


Ilustración 1: Grafo dirigido que representa el problema.

En segundo lugar, es importante tener en cuenta el funcionamiento de las redes GPON, el cual se muestra en la ilustración 2. La central telefónica representa el lugar por el cual son procesadas las llamadas en primera instancia, mientras que los armarios son los puntos de distribución de estas hacia cada comuna. Luego, cada armario conectará las llamadas con determinado poste que, posteriormente, las llevará a su destino final, dicho de otra manera, las llevará a la casa correspondiente. No está de más aclarar que el proceso es inverso cuando una llamada sale de un determinado hogar, es decir, esta sale de allí, pasa por el poste, luego por el armario y, por último, va a la central telefónica, donde se realiza el proceso enunciado anteriormente para llegar a su destino original.

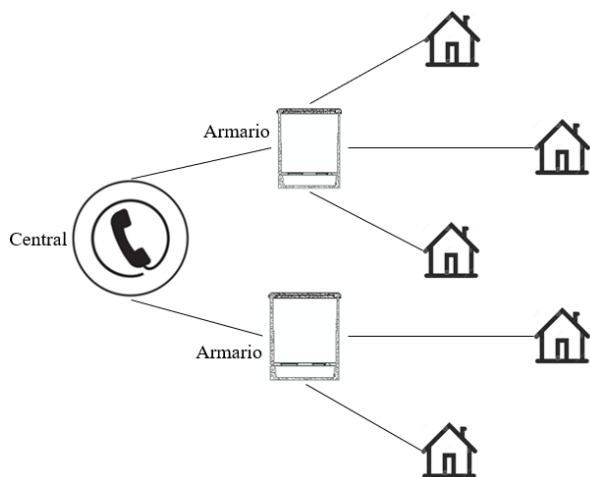


Ilustración 2: Funcionamiento redes GPON.

Ahora bien, es relevante mencionar que la central telefónica puede estar ubicada en cualquiera de los nodos y, por ende, se sabe que el resto de ellos representan armarios, porque igualmente la distancia entre los vértices seguirá siendo mínima,

independientemente de su función como nodo. No obstante, si cierto nodo representa la central telefónica, este no puede a su vez representar un armario, por tanto, el grafo se compone de 16 nodos, donde 1 es la central telefónica y 15 armarios.

Adicionalmente, nótese que, para fines del proyecto, solo se está considerando el grafo formado por la central y los armarios, pues el interés está enfocado en minimizar la fibra óptica necesitada para comunicar la central con los armarios. También, los datos utilizados (distancias entre las 16 comunas del Valle de Aburrá) son reales y están dados en kilómetros.

III. MÉTODOS

Para poder hablar del algoritmo de Kruskal y su funcionamiento, es necesario tener cierto conocimiento en teoría de grafos.

Primeramente, un grafo es un conjunto de puntos (vértices o nodos) en el espacio, que están conectados por un conjunto de líneas (aristas o arcos) [2]. Los grafos tienen diferentes clasificaciones, por ejemplo, existen grafos dirigidos y no dirigidos. Los grafos dirigidos son aquellos que tienen sus aristas orientadas de un nodo a otro, mientras que los no dirigidos no tienen los arcos orientados [2].

Por otro lado, también es importante definir qué es un camino, un ciclo, subgrafo, grafo conexo y un grafo ponderado:

- Camino: es una secuencia de arcos en que el extremo final de cada arco coincide con el extremo inicial del siguiente en la secuencia [3].
- Ciclo: es un camino en el cual no se repiten vértices, excepto posiblemente el primero y el último. Además, es cerrado [3].
- Subgrafo: es un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son subconjuntos de los de G [4].
- Grafo conexo: Un grafo es conexo si cada par de vértices está conectado por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (a, b), existe al menos un camino posible desde a hacia b [4].

-
- Grafo ponderado: es aquel en el cual se le atribuye un valor asociado o peso a cada arista [4].

De acuerdo con los conceptos anteriores, se puede entender como árbol a un grafo que no tiene ciclos y que conecta a todos los nodos [4], y como árbol de expansión mínima a un árbol donde sus aristas están conectadas con el menor peso posible. También, un árbol de expansión mínima se puede entender como un grafo conexo, sin ciclos y con $n-1$ aristas (n = número de vértices del grafo), en el cual la suma de sus aristas es la mínima posible.

Algoritmo de Kruskal

El algoritmo de Kruskal es un algoritmo diseñado para encontrar el árbol de expansión mínima, desarrollado en 1956 por el investigador, matemático y estadístico del Math Center, Joseph B. Kruskal [2].

Dentro de las restricciones de uso del algoritmo, se tiene que, para poder encontrar el árbol de expansión mínima de cierto grafo, este debe ser conexo, ponderado y no dirigido. Por otro lado, dado que el grafo sea dirigido, entonces el algoritmo busca un bosque expandido mínimo (un árbol expandido mínimo para cada componente conexa) [5].

Es relevante mencionar que, existen otros algoritmos que pueden encontrar el árbol de expansión mínima, tal como lo es el algoritmo de Prim, pero para este contexto en específico es mejor utilizar el algoritmo de Kruskal, pues en términos de complejidad algorítmica tanto en tiempo como en espacio, es más rápido este algoritmo cuando el número de aristas es pequeño o se encuentran ordenadas ascendentemente (en este caso, tenemos 256 aristas, un valor realmente pequeño), pues su complejidad para el peor de los casos en notación Big O es $O(A \log V)$ (por el ordenamiento), donde A es el número de nodos y V es el número de aristas.

En este orden de ideas, para desarrollar este algoritmo, se deben seguir los siguientes pasos [2]:

1. Dado un grafo conexo, ponderado y no dirigido, se inicia el algoritmo.
2. Se selecciona la arista de menor longitud. Si hay varias, se elige cualquiera de ellas.

3. En cada iteración, se agrega la arista siguiente de menor longitud del conjunto de aristas restantes. Si hay varias, se elige cualquiera de ellas.
4. El paso anterior se repetirá las veces que sea necesario hasta que todos los nodos estén conectados por algún camino, sin que se formen ciclos entre las aristas ya seleccionadas.
5. El algoritmo termina cuando se halla la solución óptima, la cual incluye $n-1$ arcos, donde n = número de nodos.

No obstante, para comprobar que el algoritmo finalmente trae como resultado un árbol de expansión mínima, se tiene la siguiente demostración [5]:

Se tiene un grafo G , con n nodos y m aristas, cada una de ellas con un peso asociado, supongamos el grafo $T = [N, A]$ con n vértices, $n-1$ aristas, es conexo y acíclico. El gráfico T es el retornado por el algoritmo, posee un costo asociado H y, en general, es un árbol de expansión.

T no puede tener ciclos ya que, cada vez que se añade una arista, ésta debe conectar vértices de dos árboles diferentes y no vértices dentro de un subárbol.

Sea $S = [N, A']$ para G que al igual que T es un árbol de expansión. Si se demuestra que S y T tienen la misma longitud y es mínima, se puede concluir que el árbol retornado por el algoritmo Kruskal es el árbol de expansión mínima.

Sea S_1 un árbol creado con base a T y a S , con la diferencia de que este tiene $k+1$ aristas con T , a diferencia de las k aristas en común que tienen T y S , se seguirán creando S_k árboles, de modo que cada uno de estos tengan $k + n$ aristas en común con T . Como el procedimiento es finito, nótese que en un punto se construirá S_k , que tiene $n-1$ aristas en común con T , por ende, $S_k = T$, concluyendo de esta manera que T es el árbol de costo mínimo de G .

IV. HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES

Para conseguir la solución del problema, se propuso un programa en Matlab que implementa el algoritmo de Kruskal y retorna un árbol de expansión mínima.

Es necesario subrayar que los datos conseguidos se encuentran en una matriz de incidencia llamada, la cual es una matriz de dimensión 16x16, compuesta por 256 aristas que representan las distancias entre cada comuna, las cuales se sacaron de [6].

El pseudocódigo que representa la solución en este lenguaje de programación es el enunciado a continuación:

Pseudocódigo

Importar el conjunto de datos

Crear un grafo G

Insertar los datos de la matriz en el grafo

Crear un nuevo grafo tree2

Ordenar el grafo G ascendentemente, de acuerdo con los pesos de sus arcos

Buscar los pesos únicos en el grafo para evitar ciclos

Crear un grafo auxiliar T igual al original

Para cada peso en la lista de pesos ordenada, **buscar** cada peso igual en el grafo auxiliar T y agregarlos al árbol de expansión mínima tree2

Si al agregar un peso (arco) se forma un ciclo, **entonces** se quita el arco.

Graficar el árbol de expansión mínima.

V. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

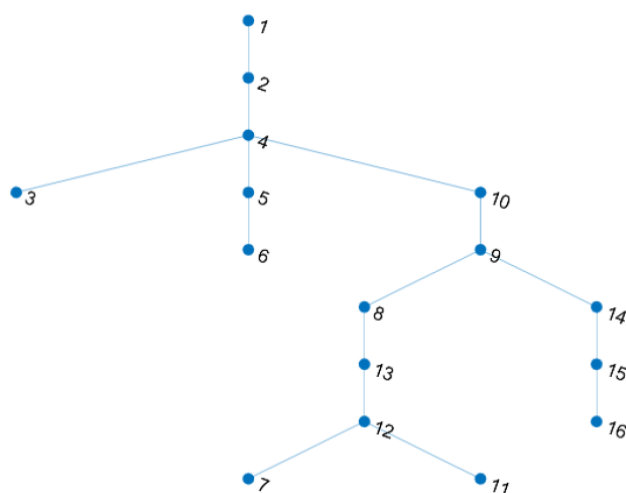


Ilustración 3: Solución obtenida con el algoritmo de Kruskal programado.

Luego de ejecutar el algoritmo de Kruskal propuesto en Matlab para este proyecto, se obtuvo la solución mostrada en la ilustración 3.

Para comprobar si la solución es correcta, se implementó la función *minspantree()* de Matlab que

calcula el árbol de expansión mínima de un grafo conexo y ponderado, usando el algoritmo de Kruskal.

El resultado obtenido al usar esta función es el mostrado en la ilustración 4.

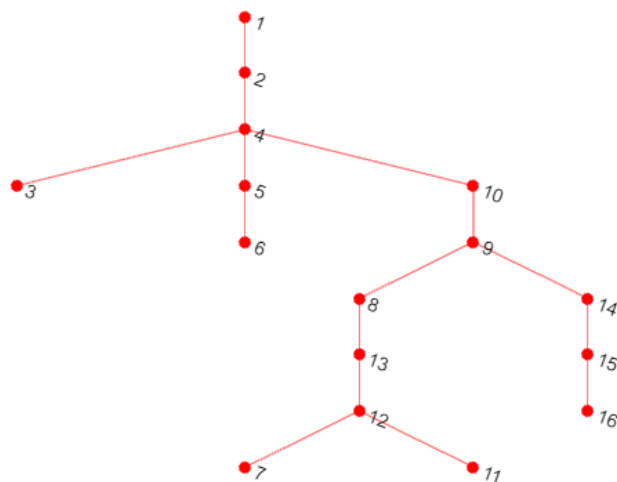


Ilustración 4: Árbol de expansión mínima obtenido para verificación.

Como es evidente, los árboles son iguales, por ende, podemos concluir que el código funciona y es correcto para implementar el algoritmo de Kruskal y hallar el árbol de expansión mínima.

Asimismo, la longitud mínima recorrida por este árbol, es decir, el costo mínimo asociado a este es 39 km. En términos del proyecto, la cantidad de fibra óptica que se necesita para llevar desde la central a los armarios las redes telefónicas GPON es de 39 km.

VI. CONCLUSIONES

El progreso de la tecnología en los últimos años ha marcado una era histórica. Hablando en materia de telecomunicaciones, la invención y estructura de las redes GPON ha permitido que las redes de telefonía, por ejemplo, sean más eficientes y óptimas en su funcionamiento, gracias a su componente principal que es la fibra óptica. Por ello, su implementación en las ciudades resulta benéfica, sin embargo, su costo es elevado por las razones dadas anteriormente. Es por esto por lo que, para fines del proyecto, se implementó el algoritmo de Kruskal para encontrar la longitud mínima entre las comunas del Valle de Aburrá y, así, obtener la conexión correcta entre estas donde se minimice la cantidad de fibra óptica utilizada para conectar la central telefónica con los armarios ubicados en cada comuna.

Gracias a este algoritmo desarrollado por Joseph B. Kruskal en 1956, se puede encontrar el árbol de expansión mínima de un grafo conexo y ponderado, pues este comienza seleccionando las aristas con menor peso del grafo, sin que formen ciclos entre sí, hasta obtener un camino entre los nodos, es decir, hasta conseguir un árbol con $n-1$ aristas, donde n es igual al número de nodos.

Luego de aplicar el algoritmo para la resolución del problema, se puede concluir que el árbol de expansión mínima que consigue lo pedido es el mostrado por la ilustración 3 y, que la longitud mínima es de 39 km.

También, se puede concluir que el algoritmo de Kruskal programado es competente, porque logra su objetivo de manera correcta, así como se verificó en párrafos anteriores. Además, el algoritmo es robusto, porque no es sensible a datos raros, pues este trabaja con los datos ordenados.

De acuerdo con lo señalado previamente, debido a la distribución de las redes GPON y sus atributos, sería óptimo realizar su instalación completa en el Valle de Aburrá con base en los resultados obtenidos, pues así se minimizan costos y se alcanza el máximo rendimiento de las líneas telefónicas. Por ello, se hace hincapié en su puesta en funcionamiento para mejoramiento de la calidad de vida en el área en cuestión.

REFERENCIAS

- [1] Es.wikipedia.org. 2021. *GPON - Wikipedia, la enciclopedia libre*. [online] Disponible en: <<https://es.wikipedia.org/wiki/GPON#:~:text=La%20Red%20%C3%93ptica%20Pasiva%20con,984.1%2C%20G>> [Accedido el 16 de noviembre del 2021].
- [2] Mariscal, G., 2021. Análisis de algoritmos: Algoritmo de Kruskal. [online] PDFCOFFEE. Disponible en: <<https://pdfcoffee.com/algoritmo-de-kruskal-pdf-free.html#German+Mariscal>> [Accedido el 16 de noviembre del 2021].
- [3] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Caminos, Ciclos, Circuitos. n.d. *Matemáticas discretas: Apuntes digitales*. [online] Disponible en: <http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro5/44_caminos_ciclos_circuitos.html> [Accedido el 16 de noviembre del 2021].
- [4] n.d. Teoría de grafos. Universidad de Pamplona, pp.3-6. Disponible en: <https://www.unipamplona.edu.co/unipamplona/portaIG/home_23/recursos/general/11072012/graf3.pdf>
- [5] Es.wikipedia.org. 2021. Algoritmo de Kruskal - Wikipedia, la enciclopedia libre. [online] Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Kruskal> [Accedido el 16 de noviembre del 2021].
- [6] Datos sintéticos (sacados de Google Maps).
-