(Chapter head:)*

Graphes

Introduction : Quelques problèmes

Le graphe est l'un des concepts mathématiques les plus simples qui soient : des points, que l'on appelle « sommets », reliés entre eux par des lignes, les « arêtes » la notion de « graphique » n'a rien à voir. Étrangement, la forme des lignes du graphe n'a aucune importance; ce qui compte, c'est qu'elles relient deux sommets donnés. De même, la position des sommets est sans effet sur les propriétés du graphe.

Préliminaires

Vocabulaire de base

Définition 1 *Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de points appelés* **sommets (ou noeuds)**, *et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ d'arêtes, tels qu' à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités, et que nous noterons (x_i, x_j) où x_i est un prédécesseur de x_j et x_j est un successeur de x_i.*

Un graphe est un ensemble de noeuds (ou sommets) qui sont reliés entre eux par des arcs. Mathématiquement, un graphe est représenté par un couple de deux ensembles $G = (S, A)$ où S est l'ensemble des noeuds (ou sommets) et A l'ensemble des arêtes (graphe non orienté) ou arcs (orienté).
Le nombre de sommets présents dans un graphe est l'**ordre du graphe** .

Remarque 1 *Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une boucle. Une première manière d'evaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets; les mathématiciens ont donné à ce nombre un nom particulier (que l'on retrouve dans d'autres domaines, par exemple en théorie des groupes).*

Un arc relie deux noeuds entre eux, il sera donc représenté par un couple (x, y) où x et y sont des noeuds.
Un arc peut être orienté, c'est-à-dire que l'ordre de x et de y est important dans le couple (x, y). Un arc peut ne pas être orienté et dans ce cas, l'ordre de x et de y dans le couple (x, y) n'a aucune importante, donc $(x, y) = (y, x)$.

Définition 2 *L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.*

Définition 3 *Le chemin est une suite de sommets reliés par des arcs en respectant leurs sens.*

Définition 4 *La longueur d'un chemin est le nombre d'arc qui compose un chemin.*

Définition 5 *Le circuit d'un graphe orienté est un chemin particulier d'un sommet vers lui-même.*

Définition 6 *La boucle est un circuit de longueur* 1.

Définition 7 *Le chemin élémentaire est un chemin tel qu'en le parcourant on ne rencontre pas deux fois le même sommet.*

Définition 8 *Le chemin simple est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par le même arc.*

Définition 9 *Un graphe est complet si chaque sommet possède un arc vers tout autre sommet y compris lui-même. Si n sommet alors n^2 arcs.*

Définition 10 *Etant donnée une arête a associée à (x_1, x_2), on dit que les sommets x_1 et x_2 sont les extrémités de l'arête a, et x_1 et x_2 sont dits adjacents. Lorsque $x_1 = x_2$, on dit que a est une boucle.*
Un graphe est dit simple si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle (c-à-d ne contient pas d'arête de la forme (x_i, x_i)).

Remarque 2 *Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités. Dans certaines circonstances, il est naturel de considérer des graphes avec des arêtes parallèles (par exemple pour le problème des ponts de Koenigsberg). Cependant, la très grande majorité des problèmes que nous rencontrerons concerne des graphes simples, c'est-à-dire sans boucles ni arêtes parallèles. Il n'est donc pas utile d'introduire cette terminologie en cours.*

Définition 11 *Un graphe est dit symétrique lorsque*

$$(x_i, x_j) \in A \Longleftrightarrow (x_j, x_i) \in A.$$

Un graphe symétrique est dit aussi graphe non orienté.

Exemple 1 *Considérons le graphe G_1 d'ordre 4 défini par : Soit $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$ tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e soient respectivement associés $(s_1, s_1), (s_1, s_2), (s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_2,$*
Une représentation possible de ce graphe est :

Le point s_4 est un point isolé , l'arête a est une boucle, b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, (s_1, s_2) est une arête multiple, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3, puisqu'ils sont reliés par une arête.

Définition 12 *Un graphe G orienté (appelé aussi digraphe : directed graphe) est constitué d'un ensemble $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de points appelés sommets, et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ d'arcs, tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités, et que nous noterons (x_i, x_j) où x_i est l'extrémité initiale et x_j est l'extrémité terminale de l'arc $a_i = (x_i, x_j)$. On dit aussi que x_i et x_j sont adjacents.*

Remarque 3 *Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin. Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot "orienté" pour préciser ; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner. En particulier, une chaîne orientée est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).*

Remarque 4 *Les graphes représentent un outil mathématique simple permettant de modéliser des situations différentes. Citons par exemple :*
-) circulation dans une ville : sommets$\longleftrightarrow$carrefour; arêtes$\longleftrightarrow$vols existants.
-) réseau informatique : sommets$\longleftrightarrow$ordinateurs; arêtes$\longleftrightarrow$connexions physiques.