MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE TUNIS EL MANAR
Faculté des Sciences de Tunis

Rapport du project Série temporelle: Les modèles ARCH et GARCH

Réalisé par:

Chaker Maleke

IDS4

April 27, 2024

Abstract

Ce rapport examine les fondements théoriques des modèles ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) et GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) utilisés dans l'analyse des séries temporelles. Les séries temporelles sont une suite de données enregistrées dans le temps, permettant d'étudier les tendances, les cycles et les motifs récurrents.

Les modèles ARCH et GARCH sont essentiels pour modéliser la volatilité conditionnelle, particulièrement dans le contexte des séries temporelles financières où la volatilité est un indicateur clé de risque. Contrairement aux modèles ARMA traditionnels qui supposent une volatilité constante, les modèles ARCH et GARCH permettent d'inclure l'hétéroscédasticité, rendant possible la modélisation de la variance conditionnelle en fonction des résidus passés.

Le rapport présente une vue d'ensemble de ces modèles, expliquant leur conception, leur évolution historique, ainsi que leur importance théorique. Bien que ces modèles soient largement utilisés dans le domaine financier pour analyser les fluctuations des marchés, ils ont également des applications dans d'autres domaines comme l'économie, la météorologie et l'ingénierie.

Le but de ce rapport est de fournir une compréhension approfondie des modèles ARCH et GARCH, tout en soulignant leur pertinence dans l'analyse des séries temporelles. Les informations contenues dans ce rapport peuvent servir de base pour des analyses théoriques plus complexes et des études de volatilité, contribuant ainsi à une meilleure gestion des risques et une prise de décision éclairée.

Contents

1 Introduction

1.1 La Série Temporelle

Une série temporelle est une collection de données organisées séquentiellement dans le temps, capturant l'évolution d'une variable spécifique. Elle permet d'analyser **les tendances, les cycles et les fluctuations de cette variable au fil du temps.**

Les séries temporelles jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines, notamment en économie, finance, météorologie, sciences sociales, et ingénierie.

Leur importance réside dans leur capacité à représenter et à analyser l'évolution d'une variable au fil du temps, offrant des perspectives précieuses pour la prise de décision et la compréhension des phénomènes temporels.

1.2 Les modèles ARMA ,ARIMA et SARIMA

Les modèles ARMA, ARIMA et SARIMA sont des outils statistiques puissants pour analyser et prédire des séries temporelles.

- **ARMA (AutoRegressive Moving Average)** :une combinaison du modèle autorégressif (AR) et modèle de moyenne mobile (MA).

  Le modèle AR est utilisé pour capturer la dépendance entre les observations actuelles et passées, tandis que le modèle MA est utilisé pour capturer la dépendance entre chaque observation et les erreurs de prédiction passées.

$$\mathrm{ARMA}(p,q) = \mathrm{AR}(p) + \mathrm{MA}(q) \tag{1.1}$$

- **ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)** :une extension du modèle ARMA qui inclut un terme d'intégration (I). L'intégration est utilisée pour rendre la série temporelle stationnaire, ce qui est une condition nécessaire pour de nombreuses méthodes de modélisation.

$$\mathrm{ARIMA}(p,d,q) = \mathrm{AR}(p) + \mathrm{I}(d) + \mathrm{MA}(q) \tag{1.2}$$

- **SARIMA (Seasonal AutoRegressive Integrated Moving Average)** : une extension du modèle ARIMA qui inclut un terme saisonnier (S). Ce terme est utilisé pour capturer la dépendance entre les observations actuelles et passées qui sont séparées par des périodes saisonnières.

$$\mathrm{SARIMA}(p,d,q,P,D,Q,s) = \mathrm{AR}(p) + \mathrm{I}(d) + \mathrm{MA}(q) + \mathrm{S}(P,D,Q,s) \tag{1.3}$$

1.3 Les limites des modèles ARMA

Les modèles ARMA (AutoRegressive Moving Average) sont des outils statistiques puissants pour analyser et prédire des séries temporelles. Cependant, ils ont certaines limites, notamment en ce qui concerne la gestion des volatilités et des erreurs autocorrélées.

1. Volatilité constante:

   Les modèles ARMA supposent que la volatilité de la série temporelle est constante. Cependant, dans de nombreux cas, la volatilité peut changer au fil du temps, ce qui est **une caractéristique importante des séries temporelles financières et économiques.**

2. Erreurs autocorrélées :

   Les modèles ARMA ne peuvent pas capturer directement les erreurs autocorrélées, c'est-à-dire la corrélation entre les erreurs de prédiction actuelles et passées. **Cette corrélation peut être importante** pour comprendre et prédire les variations de la série temporelle.

Bien que les modèles ARMA soient utiles pour analyser et prédire des séries temporelles, ils ont des limites significatives.

Pour surmonter ces limites, **les modèles ARCH sont utilisés.** Les modèles ARCH sont spécifiquement conçus pour modéliser les volatilités et les erreurs autocorrélées dans les séries temporelles.

1.4 L'Objectif principal du projet

Le but de ce rapport est de fournir une compréhension approfondie des modèles ARCH et GARCH, tout en soulignant leur pertinence dans l'analyse des séries temporelles. Les informations contenues dans ce rapport peuvent servir de base pour des analyses théoriques plus complexes et des études de volatilité, contribuant ainsi à une meilleure gestion des risques et une prise de décision éclairée.

2 La Theorie

2.1 Le modèle ARCH

2.1.1 L'Historique

Le modèle ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) a été développé par Engle, Granger et Newbold en 1982.

Robert Engle, David Granger et Mark Newbold sont des économistes et statisticiens de renom connus pour leurs contributions dans le domaine de l'analyse des séries temporelles.

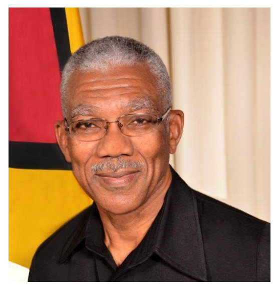

Figure 2.1: David Granger

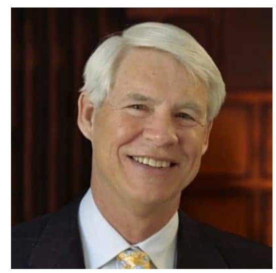

Figure 2.2: Robert Engle

La raison principale de son développement était de répondre aux limites des modèles traditionnels de séries temporelles, tels que ARMA (AutoRegressive Moving Average), dans la capture de la volatilité et de l'hétéroscédasticité (non-constance de la variance) dans les données de séries temporelles financières et économiques.

2.1.2 La Définition

Les modèles ARCH ou Autoregressive Conditional Heteroskedasticity sont utilisés pour modéliser des séries temporelles où la volatilité est variable. Ils sont particulièrement pertinents dans le contexte financier pour analyser les séries temporelles de rendements d'actifs, de taux d'intérêt, ou d'autres variables financières où les variations de volatilité sont importantes.

Mathématiquement, un modèle ARCH est défini par la variance conditionnelle du processus qui est une fonction de ses réalisations passées. Plus précisément, la variance conditionnelle au temps t est une fonction de t et des carrés des innovations (différences entre les observations successives) jusqu'à $t-1$.

Le modèle ARCH p (ARCH(p)) est défini comme :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2$$

Où :

- μ est la moyenne des rendements.
- ε_t est le résidu à l'instant t.
- σ_t^2 est la variance conditionnelle des résidus à l'instant t.
- z_t est une série de bruit blanc, généralement supposée suivre une distribution normale standard.
- α_0 est le coefficient d'interception.
- α_i sont les coefficients des termes ARCH, où $i = 1, 2, \ldots, p$.
- p est l'ordre du modèle ARCH, indiquant le nombre de périodes de décalage considérées pour modéliser la volatilité conditionnelle.

Le modèle ARCH spécifie que la variance conditionnelle à un instant donné dépend linéairement des carrés des résidus passés, avec des coefficients α_i contrôlant l'impact de chaque période de décalage sur la variance conditionnelle actuelle.

2.2 Le modèle GARCH

2.2.1 L'Historique

Le modèle GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) a été développé par Bollerslev en 1986.

Le modèle GARCH étend le modèle ARCH en permettant à la variance conditionnelle d'être une combinaison linéaire des carrés des innovations passées ainsi que de la variance conditionnelle elle-même.

Tim Bollerslev est un économiste renommé connu pour ses contributions dans le domaine de l'économétrie financière.

Figure 2.3: Tim Bollerslev

2.2.2 La Définition

Les modèles GARCH sont utilisés pour modéliser des séries temporelles où la volatilité est variable et persistante. Ils sont largement utilisés en finance pour modéliser les rendements d'actifs et analyser le risque financier.

Mathématiquement, un modèle GARCH est défini par la variance conditionnelle du processus qui est une fonction de ses réalisations passées, des carrés des innovations passées, et de la variance conditionnelle elle-même. Plus précisément, la variance conditionnelle au temps t est une fonction de t, des carrés des innovations jusqu'à $t-1$, et de la variance conditionnelle jusqu'à $t-1$.

Le modèle GARCH p,q (GARCH(p, q)) est défini comme :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2$$

Où :

- μ est la moyenne des rendements.
- ε_t est le résidu à l'instant t.
- σ_t^2 est la variance conditionnelle des résidus à l'instant t.
- z_t est une série de bruit blanc, généralement supposée suivre une distribution normale standard.
- ω est le coefficient d'interception.

- α_i et β_j sont les coefficients des termes GARCH, où $i = 1, 2, \ldots, p$ et $j = 1, 2, \ldots, q$.
- p est l'ordre du modèle GARCH pour les termes ARCH et q est l'ordre du modèle GARCH pour les termes GARCH.

Le modèle GARCH spécifie que la variance conditionnelle à un instant donné dépend linéairement des carrés des résidus passés et de la variance conditionnelle passée, avec des coefficients α_i et β_j contrôlant respectivement l'impact des résidus passés et de la variance conditionnelle passée sur la variance conditionnelle actuelle.

3 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons examiné les fondements des séries temporelles et exploré différents modèles statistiques utilisés pour analyser et prédire ces données, notamment les modèles ARMA, ARIMA, SARIMA, ARCH et GARCH. Chaque modèle a ses propres avantages et inconvénients, et ils sont adaptés à différentes situations.

Les modèles ARMA, ARIMA et SARIMA sont efficaces pour analyser les tendances et les cycles des séries temporelles stationnaires et saisonnières. Cependant, ils ont des limites, notamment lorsqu'il s'agit de modéliser des séries présentant des fluctuations de volatilité ou des erreurs autocorrélées.

C'est là que les modèles ARCH et GARCH entrent en jeu. Ces modèles permettent de capturer l'hétéroscédasticité et de modéliser la volatilité conditionnelle, ce qui les rend particulièrement utiles pour l'analyse des séries temporelles économiques et financières, telles que les rendements d'actifs et les taux d'intérêt. Leur capacité à traiter des variances non constantes permet d'obtenir des prédictions plus précises et des analyses plus approfondies des risques.

Le modèle ARCH repose sur le concept d'une variance conditionnelle, définie par des carrés d'innovations passées, **tandis que le modèle GARCH étend ce concept en incluant également la variance conditionnelle des périodes précédentes.** Ces approches offrent des perspectives précieuses pour l'analyse économique, renforçant la compréhension des phénomènes temporels complexes.

En conclusion, les modèles ARCH et GARCH apportent une dimension supplémentaire à l'analyse des séries temporelles, en tenant compte de la nature changeante de la volatilité. Cela permet de mieux comprendre les fluctuations des marchés et les phénomènes économiques. Toutefois, une connaissance approfondie de leur formulation et de leurs propriétés statistiques est nécessaire pour leur utilisation efficace dans l'analyse théorique des séries temporelles.