

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Instytut Matematyki



PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

TESTY PIERWSZOŚCI LICZB I ICH  
ZASTOSOWANIA W KRYPTOGRAFII

Małgorzata Lipińska

Promotor:

dr hab. Małgorzata Migda

POZNAŃ, 2018



**KARTA PRACY DYPLOMOWEJ Z**  
**DZIEKANATU**  
**(kserokopia z podpisami)**



# Spis treści

Wstęp .....	7
Spis oznaczeń i symboli .....	9
1. Liczby pierwsze .....	11
1.1. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki i twierdzenie Euklidesa .....	11
1.2. Twierdzenie i algorytm Euklidesa .....	15
1.3. Kongruencje i ich zastosowania .....	16
1.4. Sito Eratostenesa, Atkina i Sundarama .....	22
1.5. Spirala Ulama .....	26
1.6. Twierdzenie Wilsona, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Eulera ...	27
1.7. Własności liczb pierwszych .....	31
2. Testy pierwszości liczb .....	35
2.1. Testy deterministyczne .....	35
2.1.1. Metoda naiwna .....	35
2.1.2. Test pierwszości AKS .....	37
2.1.3. Test Lucasa-Lehmera .....	40
2.2. Testy probabilistyczne .....	43
2.2.1. Test pierwszości Fermata .....	44
2.2.2. Test pierwszości Lehmana .....	46
2.2.3. Test pierwszości Solovaya-Strassena .....	47
2.2.4. Test pierwszości Millera-Rabina .....	50
3. Zastosowania w kryptografii .....	53
Skrypty z programu Matlab .....	55
Sito Eratostenesa .....	55
Sito Sundarama .....	55
Funkcja Eulera .....	56
Rząd multiplikatywny .....	56
Metoda naiwna .....	57
Test pierwszości AKS .....	58
Test pierwszości Lucasa-Lehmera .....	60

Test pierwszości Fermata .....	60
Test pierwszości Lehmana.....	61
Test pierwszości Solovaya-Strassena.....	62
Test pierwszości Millera-Rabina .....	63
Bibliografia.....	65
Skorowidz .....	67

Wstep





# Spis oznaczeń i symboli

$a, b$  - liczby naturalne

$\mathbb{N}$  - zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z}$  - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Z}_+$  - zbiór liczb całkowitych dodatnich

$\mathbb{P}$  - zbiór liczb pierwszych

$a \mid b$  -  $a$  dzieli  $b$

$a \nmid b$  -  $a$  nie dzieli  $b$

$NWW(a, b)$  - największa wspólna wielokrotność  $a$  i  $b$

$NWWD(a, b)$  - największy wspólny dzielnik  $a$  i  $b$

$(a, b) = 1$  -  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze

$o_n(a)$  - rząd elementu  $a$  modulo  $n$



# 1. Liczby pierwsze

Poniższy rozdział jest zbiorem najważniejszych pojęć i twierdzeń związanych z liczbami pierwszymi oraz ich własnościami.

## 1.1. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki i twierdzenie Euklidesa

Jednym z najważniejszymi twierdzeń dotyczących liczb pierwszych jest zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Jego wprowadzenie i udowodnienie wymaga zdefiniowania kilku podstawowych pojęć z zakresu teorii liczb, które zostaną omówione w tym podrozdziale.

**Definicja 1.1.** [3, s. 3] Mówimy, że *liczba całkowita  $b$  jest podzielna przez liczbę całkowitą  $a$* , jeśli istnieje taka liczba całkowita  $e$ , że zachodzi  $b = ae$ . Wtedy liczba  $a$  jest dzielnikiem liczby  $b$ , z kolei o liczbie  $b$  mówi się, że jest wielokrotnością  $a$ .

Jeśli liczba  $b$  jest podzielna przez  $a$  ( $a$  dzieli  $b$ ), to używamy oznaczenia  $a \mid b$ , natomiast w przeciwnym przypadku stosujemy oznaczenie  $a \nmid b$ .

**Definicja 1.2.** *Liczbą pierwszą* nazywamy liczbę naturalną większą od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: jedynkę i samą siebie.

Zbiór wszystkich liczb pierwszych oznacza się literą  $\mathbb{P}$ . Liczbą złożoną jest więc liczba, która ma więcej niż dwa dzielniki. Warto zauważyć, że 1 nie jest liczbą ani pierwszą, ani złożoną.

**Definicja 1.3.** *Najmniejszą wspólną wielokrotnością* dla zadanych liczb całkowitych nazywamy najmniejszą liczbę naturalną, którą dzieli się bez reszty przez każdą z tych liczb.

Najmniejszą wspólną wielokrotność liczb  $a$  i  $b$  oznacza się symbolem  $NWW(a, b)$ , np.  $NWW(2, 15) = 30$ .

**Definicja 1.4.** *Największym wspólnym dzielnikiem* dla zadanych dwóch lub więcej liczb całkowitych nazywamy największą liczbę naturalną, która dzieli każdą z tych liczb.

Największy wspólny dzielnik liczb  $a$  i  $b$  oznaczany jest symbolem  $NWD(a, b)$ , np.  $NWD(18, 15) = 3$ .

**Definicja 1.5.** *Liczbami względnie pierwszymi* nazywamy liczby całkowite, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1.

Jeśli dwie liczby  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze to zapisuje się to jako  $NWD(a, b) = 1$  lub  $(a, b) = 1$ .

**Lemat 1.1.** (Euklides) [7, s. 10] Jeśli liczba pierwsza  $p$  dzieli iloczyn  $ab$ , to dzieli przynajmniej jeden z tych czynników. Inaczej, jeśli  $p \in \mathbb{P}$  oraz  $p \mid ab$ , to  $p \mid a$  lub  $p \mid b$ .

**Dowód.** Przyjmijmy, że  $p \nmid a$ , czyli  $NWD(a, p) = 1$ , gdyż  $p \in \mathbb{P}$ . Wtedy  $p \mid b$ . ■

**Lemat 1.2.** [3, s. 9] Jeżeli  $p \in \mathbb{P}$  i  $p \mid a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ , to istnieje  $k \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) takie, że  $p \mid a_k$ .

**Dowód.** Z lematu 1.1 wiemy, że jeżeli  $p \in \mathbb{P}$  oraz  $p \mid ab$ , to  $p \mid a$  lub  $p \mid b$ . Iloczyn  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  można przedstawić w postaci  $(a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1})a_n$ . Wtedy  $p \mid (a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1})a_n$ , czyli  $p \mid a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$  lub  $p \mid a_n$ . Jeżeli  $p \mid a_n$ , to lemat jest prawdziwy. Jeśli  $p \mid a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$  i  $p \nmid a_n$  to powtarzamy powyższe rozumowanie dla  $p \mid (a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-2})a_{n-1}$  i postępujemy podobnie do chwili znalezienia takiego  $k$ , że  $p \mid a_k$  lub do momentu, gdy przedmiotem naszych rozważań będzie  $p \mid a_1 a_2$ . Wtedy zgodnie z lematem 1.1  $p \mid a_1$  lub  $p \mid a_2$ , co kończy dowód. ■

**Lemat 1.3.** [3, s. 9] Jeśli liczby  $p, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{P}$  oraz  $p \mid q_1 \cdot \dots \cdot q_n$ , to  $p = q_k$  dla pewnego  $k$ , gdzie  $1 \leq k \leq n$ .

**Dowód.** Z lematu 1.2 wiadomo, że istnieje takie  $k$ , że  $p \mid q_k$ , ale  $q_k \in \mathbb{P}$  oraz  $p > 1$ , skąd wynika, że  $p = q_k$ . ■

Trzy powyższe lematy to lematy pomocnicze, które posłużą do udowodnienia zasadniczego twierdzenia arytmetyki, mówiącego o tym, że liczby pierwsze są czynnikami, na które można rozłożyć wszystkie złożone liczby naturalne.

**Twierdzenie 1.1.** (*Zasadnicze twierdzenie arytmetyki*) [3, s. 10] Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

**Dowód.** Dowód powyższego twierdzenia należy podzielić na dwie części. Pierwsza dotyczyć będzie istnienia rozkładu, a druga jego jednoznaczności.

**Istnienie rozkładu.** Załóżmy, że liczba  $n$  jest liczbą złożoną. Wtedy

$$D = \{d \in \mathbb{N}, 1 < d < n, d \mid n\}$$

jest niepustym zbiorem dzielników liczby  $n$ . Niech  $p_1$  będzie najmniejszą liczbą zawartą w tym zbiorze. Zatem  $p_1$  jest liczbą pierwszą, gdyż w przeciwnym przypadku istniałoby  $q < p_1$  takie, że  $q > 1$  i  $q \mid p_1$ , co byłoby sprzeczne z wyborem  $p_1$ . Stąd wynika, że

$$n = p_1 \cdot n_1,$$

gdzie  $1 < n_1 < n$ . Jeżeli liczba  $n_1 \in \mathbb{P}$ , to żądany rozkład został osiągnięty, w przeciwnym wypadku rozumowanie należy powtórzyć dla  $n_1$ , skąd dostajemy

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_1,$$

gdzie  $1 < n_2 < n_1$ ,  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ . Na koniec uzyskuje się rozkład

$$n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k,$$

ponieważ  $n_1 > n_2 > \dots > 1$  jest malejącym ciągiem liczb naturalnych, czyli jest ciągiem skończonym.

**Jednoznaczność rozkładu.** Załóżmy przeciwnie, że rozkład nie jest jednoznaczny, czyli  $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ , ( $r \leq s$ ), gdzie  $p_i$  i  $q_j$  dla  $i = 1, 2, \dots, r$  i  $j = 1, 2, \dots, s$  są pierwsze i uporządkowane niemalejąco. Ponieważ  $p_1 \mid q_1 \dots q_s$ , zatem z lematu 1.3 wynika, że  $p_1 = q_k$  dla pewnego  $k$ , gdzie  $1 \leq k \leq s$ , skąd wynika, że  $p_1 \geq q_1$ . Analogicznie  $q_1 \mid p_1 \dots p_r$ , więc  $q_1 \geq p_1$ , czyli  $p_1 = q_1$ . Dzieląc początkową równość przez  $p_1 = q_1$  i powtarzając to samo rozumowanie dla kolejnych czynników obu rozkładów, otrzymujemy

$$1 = q_{r+1} \cdot \dots \cdot q_s,$$

jeśli  $r < s$ . Jest to sprzeczne dla  $q_{r+1}, \dots, q_s \in \mathbb{P}$ , a więc  $r = s$  oraz  $p_i = q_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, r$ , czyli rozkład jest jednoznaczny. ■

Z zasadniczego twierdzenia arytmetyki (twierdzenie 1.1) wynika bezpośrednio poniższy wniosek.

**Wniosek 1.1.** [3, s. 10] Każda liczba naturalna  $n > 1$  może być jednoznacznie zapisana w postaci kanonicznej

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

gdzie  $p_i \in \mathbb{P}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, r$  oraz  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ .

Do obliczania  $NWW$  i  $NWD$  stosuje się najczęściej rozkład badanych liczb na iloczyn liczb pierwszych.

**Przykład 1.1.** Obliczymy  $NWW$  i  $NWD$  liczb 123 i 567.

Rozkład danych liczb na czynniki pierwsze:

$$\begin{aligned} 123 &= 3 \cdot 41, \\ 567 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7. \end{aligned}$$

Aby obliczyć  $NWW(a, b)$  należy pomnożyć wszystkie czynniki pierwsze liczby  $a$  i czynniki pierwsze liczby  $b$ , które się nie powtarzają przy rozkładzie  $a$ . Zatem

$$NWW(123, 567) = 3 \cdot 41 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^4 \cdot 7 \cdot 41 = 23247.$$

$NWD(a, b)$  to iloczyn czynników pierwszych, które powtarzają się w rozkładzie liczby  $a$  i  $b$ . Stąd

$$NWS(123, 567) = 3.$$

**Wniosek 1.2.** [7, s. 8] Dla liczb  $a, b \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = ab.$$

**Dowód.** Niech

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}, \\ b &= p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}, \end{aligned}$$

będą rozkładami liczb  $a$  i  $b$  na czynniki pierwsze. Wówczas

$$\begin{aligned} NWD(a, b) &= p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}, \\ NWW(a, b) &= p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}. \end{aligned}$$

Po pomnożeniu  $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} &p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2) + \max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n) + \max(\alpha_n, \beta_n)} = \\ &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n + \beta_n} = \\ &= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n} = a \cdot b. \end{aligned}$$

■

## 1.2. Twierdzenie i algorytm Euklidesa

Euklides, żyjący około 300 roku p.n.e., to grecki matematyk pochodzący z Aten, uczeń Akademii Platońskiej i wykładowca w słynnej Szkole Aleksandryjskiej. Zaliczany jest do grona największych matematyków w historii, znany głównie jako twórca podstaw geometrii klasycznej. Jego największym dziełem są *Elementy*, które stanowią jedną z pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Podręcznik ten zawiera między innymi dwa klasyczne i bardzo ważne pojęcia z zakresu teorii liczb - twierdzenie Euklidesa o liczbach pierwszych i algorytm pozwalający znaleźć największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych.

**Twierdzenie 1.2.** (*Euklides*) [7, s. 5] *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Powstało kilkanaście dowodów twierdzenia 1.2. Poniżej przedstawiono pierwszy z nich, który został sformułowany w IV wieku p.n.e. przez Euklidesa w *Elementach*.

**Dowód.** Załóżmy, że istnieje skończony zbiór liczb pierwszych ponumerowanych kolejno  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Rozważmy liczbę

$$n = p_1 p_2 \dots p_k + 1.$$

Z twierdzenia 1.1 wynika, że  $n$  może być liczbą pierwszą różną od wszystkich  $p_i$  lub ma rozkład na czynniki pierwsze. Załóżmy, że jednym z tych czynników jest  $p$ . Liczba  $n$  przy dzieleniu przez każde z  $p_i$  daje resztę 1, więc  $p$  jest różne od wszystkich  $p_i$ . Z tego wynika, że albo  $p$  jest pierwsze lub samo  $n$  jest kolejną liczbą pierwszą, większą od każdego  $p_i$ , co jest sprzeczne z założeniem. ■

Algorytm Euklidesa to szybki sposób wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.

Do zrozumienia działania powyższego algorytmu potrzebne będzie zdefiniowanie pojęcia reszty z dzielenia.

**Definicja 1.6.** [7, s. 8] Dla dowolnej liczby całkowitej  $n$  i dowolnej liczby naturalnej  $k$  istnieje tylko jedna para liczb całkowitych  $q$  i  $r$  taka, że

$$n = qk + r, \text{ gdzie } 0 \leq r < k.$$

Liczbę  $r$  nazywa się wtedy *resztą z dzielenia*.

Zasadę działania algorytmu Euklidesa najlepiej wyjaśnić przy pomocy przykładu.

**Przykład 1.2.** Za pomocą algorytmu Euklidesa wyznaczmy  $NWD(1628, 374)$ .

Działanie algorytmu przebiega następująco:

$$1628 = 4 \cdot 374 + 132$$

$$374 = 2 \cdot 132 + 110$$

$$132 = 1 \cdot 110 + 22$$

$$110 = 5 \cdot 22 + 0.$$

Ostatnia niezerowa reszta jest szukanym największym wspólnym dzielnikiem badanych liczb. W przypadku powyższego przykładu  $NWD(1628, 374) = 22$ .

**Lemat 1.4.** (Bézout) [7, s. 9] Niech  $NWD(a, b) = d$ . Wówczas istnieją dwie liczby całkowite  $k$  i  $l$  takie, że

$$d = ka + lb.$$

**Dowód.** Niech  $a$  i  $b$  będą niezerowymi liczbami całkowitymi, a  $K$  oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych postaci  $am + bn$ , gdzie  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Zbiór  $K$  jest niepusty, więc istnieje w nim element najmniejszy  $d$ , gdzie  $d = ax + by$ . Zgodnie z algorytmem dzielenia z resztą, istnieją takie liczby  $q, r \in \mathbb{Z}$ , dla których zachodzi  $a = qd + r$ , przy czym  $0 \leq r < d$ . Z drugiej strony

$$r = a - qd = a - q(ax + by) = a - aqx - bqy = a(1 - qx) + b(-qy).$$

Jeżeli  $0 < r < d$ , to znaczy, że  $r \in K$ , co jest sprzeczne ze stwierdzeniem, że  $d$  jest najmniejszym elementem w  $K$ . Stąd  $r = 0$ , a z tego wynika, że  $a = qd$ , a to oznacza, że  $d|a$ . Podobnie można wykazać, że  $d|b$ , skąd wynika, że  $d$  jest wspólnym dzielnikiem dla  $a$  i  $b$ . Jeśli  $c$  jest innym wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  i  $b$ , to  $c$  dzieli również  $ax + by = d$ , co z definicji oznacza, że  $d = NWD(a, b)$ . ■

**Wniosek 1.3.** Niech  $(a, b) = 1$ . Wtedy istnieją dwie liczby całkowite  $k$  i  $l$  takie, że

$$ka + lb = 1.$$

### 1.3. Kongruencje i ich zastosowania

W poniższym rozdziale zawarte zostały najważniejsze informacje i twierdzenia związane z kongruencją. Będą one wykorzystywane w dalszej części pracy.



**Definicja 1.7.** [5, s. 41] Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną. Mówimy, że liczby całkowite  $a$  i  $b$  *przystają modulo  $n$* , jeżeli ich różnica  $a - b$  jest podzielna przez  $n$ . Symbolicznie zapisuje się to jako

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Relację tę nazywamy kongruencją lub przystawaniem modulo.

Jeśli zachodzi kongruencja  $a \equiv b \pmod{n}$ , to  $b$  jest resztą z dzielenia liczby  $a$  przez  $n$ . Jeżeli  $a \equiv 0 \pmod{n}$ , to znaczy, że  $n \mid a$ .

**Twierdzenie 1.3.** *Kongruencja jest relacją równoważności, tzn. jest ona*

1. *Zwrotna, tj.*

$$\forall_{a \in \mathbb{Z}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a \equiv a \pmod{n}.$$

2. *Symetryczna, tj.*

$$\forall_{a, b \in \mathbb{Z}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}.$$

3. *Przechodnia, tj.*

$$\forall_{a, b, c \in \mathbb{Z}} \forall_{n \in \mathbb{N}} (a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n}) \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}.$$

**Dowód.** 1 Jeżeli zachodzi  $a \equiv a \pmod{n}$ , to oznacza, że prawdziwa jest kongruencja  $a - a \equiv 0 \pmod{n}$ , co kończy dowód, ponieważ liczba 0 jest podzielna przez każde  $n \in \mathbb{N}$ .

2 Jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$ , to  $a - b = kn$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , to  $b - a = -kn$ . Stąd wynika, że  $b \equiv a \pmod{n}$ .

3 Jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$  i  $b \equiv c \pmod{n}$ , to  $a - b \equiv 0 \pmod{n}$  i  $b - c \equiv 0 \pmod{n}$ . Opierając się na tożsamości

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

otrzymujemy, że  $a - c \equiv 0 \pmod{n}$ , skąd wynika, że  $a \equiv c \pmod{n}$ . ■

**Twierdzenie 1.4.** [4, s. 37] *Kongruencje mają następujące własności:*

(i) *Jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$  oraz  $c \equiv d \pmod{n}$ , to*

$$a + c \equiv b + d \pmod{n},$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{n},$$

$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$

- (ii) Kongruencja  $a \equiv b \pmod{n}$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $n|(a-b)$ .
- (iii) Jeżeli  $ab \equiv ac \pmod{n}$  i  $(a, n) = 1$ , to  $b \equiv c \pmod{n}$ .
- (iv) Jeżeli  $a \in \mathbb{N}$  i  $ab \equiv ac \pmod{an}$ , to  $b \equiv c \pmod{n}$ .
- (v) Jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$ , to  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ .

**Dowód.** (i) Wiemy, że  $a - b = hn$  i  $c - d = gn$ , gdzie  $g, h \in \mathbb{Z}$ . Z tożsamości

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = (h + g)n,$$

wynika, że

$$(a + c) - (b + d) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$$

Podobnie dla odejmowania prawdziwa jest tożsamość

$$(a - c) - (b - d) = (a - b) - (c - d) = (h - g)n,$$

skąd wynika, że

$$(a - c) - (b - d) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{n}.$$

Opierając się na tożsamości

$$ac - bd = (a - b)c + (c - d)b = hnc + gnb = (hc + gb)n,$$

otrzymujemy, że

$$ac - bd \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}.$$

(ii) Jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$  to  $a - b \equiv 0 \pmod{n}$ , więc  $a - b = hn$ , gdzie  $h \in \mathbb{Z}$ . Zachodzi  $n|hn$ , skąd wynika, że  $n|a - b$ . Dowód implikacji w drugą stronę przebiega analogicznie.

(iii) Jeżeli  $ab \equiv ac \pmod{n}$ , to znaczy, że  $n|(b-c)a$ . Założenie  $(a, n) = 1$  oznacza, że  $n \nmid a$ , więc  $n|(b-c)$ . Stąd wynika, że  $b \equiv c \pmod{n}$ .

(iv) Jeżeli  $ab \equiv ac \pmod{an}$ , to  $an|a(b-c)$ , z czego wynika, że  $n|(b-c)$ , więc  $b \equiv c \pmod{n}$ .

(v) Dowód indukcyjny. Dla  $k = 1$  kongruencja zachodzi. Załóżmy, że teza jest spełniona dla pewnego  $k$ . Mamy więc  $a \equiv b \pmod{n}$  oraz  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ . Wykorzystując własność (i) mnożymy przez siebie obie kongruencje, otrzymując

$$aa^k \equiv bb^k \pmod{n} \Rightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{n},$$

co kończy dowód. ■

Za pomocą powyższych własności kongruencji możemy między innymi wykonywać tak zwane szybkie potęgowanie modulo, co przedstawione jest w poniższym przykładzie.

**Przykład 1.3.** Korzystając z twierdzenia 1.4 obliczymy  $4^{22} \pmod{23}$ .

Wiemy, że

$$4 \equiv 4 \pmod{23}. \quad (1.1)$$

Na mocy własności (i) i (v) twierdzenia 1.4 możemy przemnożyć kongruencję (1.1) przez samą siebie, czyli możemy podnieść ją do drugiej potęgi. Otrzymujemy

$$4^2 \equiv 16 \pmod{23} \equiv -7 \pmod{23}. \quad (1.2)$$

Następnie podnosimy do potęgi kongruencję (1.2), skąd otrzymujemy

$$4^4 \equiv 49 \pmod{23} \equiv 3 \pmod{23}. \quad (1.3)$$

Powtarzamy potęgowanie dla równania (1.3), a następnie dla równania (1.4)

$$4^8 \equiv 9 \pmod{23}, \quad (1.4)$$

$$4^{16} \equiv 81 \pmod{23} \equiv 12 \pmod{23}. \quad (1.5)$$

Następnie mnożymy kongruencje (1.3) i (1.5). Mamy

$$4^{20} \equiv 36 \pmod{23} \equiv 13 \pmod{23}. \quad (1.6)$$

Ostatnim krokiem jest pomnożenie kongruencji (1.2) i (1.6), skąd otrzymujemy

$$4^{22} \equiv -91 \pmod{23} \equiv 1 \pmod{23}.$$

Z powyższych obliczeń wynika, że  $4^{22} \equiv 1 \pmod{23}$ .

**Definicja 1.8.** [3, s. 30] *Klasami reszt modulo  $m$*  nazywamy warstwy (klasy abstrakcji) kongruencji w zbiorze liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ .

Każdą liczbę całkowitą  $a$  można zapisać w postaci  $a = qm + r$ , gdzie  $0 \leq r < m$ , więc każda liczba całkowita przystaje modulo  $m$  do jednej z liczb ze zbioru  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ . Żadne dwie liczby spośród liczb  $0, 1, \dots, m-1$  nie przystają do siebie modulo  $m$ , więc zbiór postaci  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  tworzy pełny układ reprezentantów warstw.

**Definicja 1.9.** [3, s. 31] *Pełnym układem reszt modulo  $m$*  nazywamy pełny układ reprezentantów klas relacji przystawania modulo  $m$ .

**Definicja 1.10.** [3, s. 31] *Zredukowanym układem reszt modulo  $m$*  nazywamy układ reprezentantów tych klas relacji przystawania modulo  $m$ , które składają się z liczb względnie pierwszych z modulem  $m$ .

Poniżej wprowadzimy pojęcie funkcji arytmetycznej, które jest niezbędne do zdefiniowania funkcji Eulera, wykorzystującej pojęcie zredukowanego układu reszt modulo.

**Definicja 1.11.** [1, s. 67] *Funkcją arytmetyczną* nazywamy funkcję działającą ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb zespolonych.

Rozważane w tej pracy funkcje przyjmują wartości całkowite.

**Definicja 1.12.** [1, s. 67] Funkcję arytmetyczną  $f$  nazywamy *funkcją addytywną*, gdy dla wszystkich  $m, n \in \mathbb{N}$  takich, że  $(m, n) = 1$ , zachodzi równość

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi dla dowolnych  $m$  i  $n$  (również dla  $(m, n) > 1$ ), to funkcję  $f$  nazywamy funkcją w pełni addytywną.

**Definicja 1.13.** [1, s. 68] Funkcję arytmetyczną  $f$  nazywamy *funkcją multiplikatywną*, jeżeli  $f$  nie jest tożsamościowo równa 0 i dla wszystkich  $m, n \in \mathbb{N}$  takich, że  $(m, n) = 1$ , zachodzi równość

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi dla dowolnych  $m$  i  $n$  (również dla  $(m, n) > 1$ ), to funkcję  $f$  nazywamy funkcją w pełni multiplikatywną.

**Definicja 1.14.** [7, s. 31] *Funkcją  $\varphi$  (Eulera)* lub *tocejntem* nazywamy funkcję arytmetyczną, która każdej liczbie naturalnej  $m$  przypisuje liczbę elementów zredukowanego układu reszt modulo  $m$ .

Możemy zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej  $m$  zbiór

$$\phi(m) := \{k : 1 \leq k \leq m, (k, m) = 1\}$$

tworzy zredukowany układ reszt modulo  $m$ .

**Stwierdzenie 1.1.** Funkcji Eulera ma następujące własności:

- (1) Dla każdej liczby naturalnej  $n > 1$  zachodzi  $\varphi(n) \leq n - 1$ .
- (2) Jeśli liczby naturalne  $n$  i  $m$  są względnie pierwsze to  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .

- (3) Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą to  $\varphi(p) = p - 1$ .  
 (4) Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą to  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$ .  
 (5) Jeśli  $p$  i  $q$  są różnymi liczbami pierwszymi to  $\varphi(pq) = (p - 1)(q - 1)$ .  
 (6) Jeśli  $p_1, p_2, \dots, p_k$  są wszystkimi czynnikami pierwszymi liczby  $n$  bez powtórzeń, to

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

**Przykład 1.4.** Obliczmy  $\varphi(9)$ ,  $\varphi(12)$ ,  $\varphi(13)$ .

Pełnym układem reszt modulo 9 jest zbiór  $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Jeśli usuniemy z niego wszystkie liczby, które nie są względnie pierwsze z 9, otrzymamy zbiór  $R = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ . Liczba elementów zbioru  $R$  jest równa 6, więc  $\varphi(9) = 6$ . Wartość funkcji Eulera dla liczby 9 można obliczyć również korzystając z własności (4) stwierdzenia 1.1. Wtedy  $\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3(3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$ .

Pełnym układem reszt modulo 12 jest zbiór  $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ . Usuujemy z niego wszystkie liczby, które nie są względnie pierwsze z 12 i otrzymujemy zbiór  $R = \{1, 5, 7, 11\}$ . Liczba elementów zbioru  $R$  wynosi 4, więc  $\varphi(12) = 4$ .

Wartość funkcji  $\varphi$  dla liczby 13 można obliczyć z własności (3) stwierdzenia 1.1:

$$\varphi(13) = 13 - 1 = 12.$$

Funkcja Eulera jest bardzo prosta do zaimplementowania w środowisku Matlab (skrypt 3.3). Poniżej przedstawiono tabelę z wynikami i czasem działania powyższej funkcji dla liczb o różnej wielkości.

Lp.	Liczba $n$	Wartość funkcji $\varphi(n)$	Czas działania funkcji [s]
1	23	22	0.023398
2	100	40	0.029472
3	567	324	0.047793
4	1000	400	0.051363
5	12345	6576	0.496064
6	123456	41088	5.326313
7	1234567	1224720	65.953887

Tabela 1.1. Wartość funkcji  $\varphi(n)$  dla liczb o różnej wielkości.

**Stwierdzenie 1.2.** Jeśli zbiór  $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}\}$  tworzy zredukowany układ reszt modulo  $m$  i  $(k, m) = 1$ , to zbiór  $\{ka_1, ka_2, \dots, ka_{\varphi(m)}\}$  także tworzy zredukowany układ reszt modulo  $m$ .

**Definicja 1.15.** [7, s. 15] *Odwrotnością elementu  $a$  modulo  $n$  nazywamy taki element, oznaczany przez  $a^{-1}$ , że*

$$aa^{-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

**Twierdzenie 1.5.** *Liczba naturalna  $a$  jest odwracalna modulo  $n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a$  i  $n$  są względnie pierwsze.*

**Dowód.** Niech  $(a, n) = 1$ . Wtedy na mocy lematu Bézouta (lemat 1.4) dla pewnych  $k$  i  $l$  zachodzi  $ka + ln = 1$ . Korzystając z własności (i) twierdzenia 1.4 otrzymujemy

$$ka + ln = 1 \pmod{n},$$

skąd

$$ka = 1 \pmod{n},$$

więc  $k$  jest odwrotnością elementu  $a$  modulo  $n$ .

Implikacja w drugą stronę: Odwracalność elementu  $a$  modulo  $n$  oznacza, że istnieje  $k$ , dla którego prawdziwa jest kongruencja  $ka \equiv 1 \pmod{n}$ . Wówczas  $ka - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ , skąd wynika, że

$$ka - 1 = ln \Rightarrow ka + (-l)n = 1.$$

Z powyższej tożsamości wynika, że  $a$  i  $n$  są liczbami względnie pierwszymi. ■

**Przykład 1.5.** Znajdziemy odwrotność liczby 12 modulo 5. Zachodzi  $(12, 5) = 1$ , więc odwrotność liczby 12 istnieje. Zgodnie z definicją odwrotności modulo sprawdzamy kolejne iloczyny

$$12 \cdot 1 = 12 \equiv 2 \pmod{5},$$

$$12 \cdot 2 = 24 \equiv 4 \pmod{5},$$

$$12 \cdot 3 = 36 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Stąd wynika, że odwrotnością liczby 12 modulo 5 jest liczba 3.

## 1.4. Sito Eratostenesa, Atkina i Sundarama

Problem z liczbami pierwszymi polega na ich nieregularnym rozmieszczeniu pośród liczb naturalnych. Nie odkryto dotąd żadnego wzoru pozwalającego na wyszukiwanie kolejnych liczb pierwszych, ale powstało kilka metod znajdowania takich

liczb w zadanym przedziale. Metody te są nazywane sitami, ponieważ aby znaleźć wszystkie liczby pierwsze mniejsze od liczby  $n$  wystarczy ze zbioru liczb naturalnych mniejszych lub równych  $n$  *odsiać* liczby złożone i jedynkę. Pierwszy służący do tego algorytm został przedstawiony przez Eratostenesa z Cyreny (III-II w. p.n.e.). Sito to zostało później ulepszone przez Arthura Atkina i D.J. Bernsteina. Innym, mniej znanym sitem, jest sito Sundarama.

*Sito Eratostenesa* [2, s. 55] jest algorytmem wyszukiwania kolejnych liczb pierwszych z przedziału  $\{2, n\}$ .

Algorytm polega na usuwaniu liczb złożonych ze zbioru liczb naturalnych większych od 1 i mniejszych bądź równych  $n$ . Na początek z zadanego zbioru wybieramy liczbę najmniejszą i usuwamy wszystkie jej wielokrotności z wyjątkiem jej samej. Następnie wybieramy najmniejszą liczbę z pozostałych i znów usuwamy wielokrotności tej liczby większe od niej. Postępujemy tak dopóki liczba, której wielokrotności mamy usuwać, jest mniejsza niż  $\sqrt{n}$ . Na koniec procesu w zbiorze pozostaną tylko liczby pierwsze.

**Przykład 1.6.** Za pomocą sita Eratostenesa wyznaczmy wszystkie liczby pierwsze należące do zbioru  $P = \{2, 3, \dots, 40\}$ .

- I. Najmniejszą liczbą w zbiorze  $P$  jest 2, więc usuwamy wszystkie większe od 2 wielokrotności liczby 2.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}.$$

- II. Kolejną najmniejszą liczbą w zbiorze (nie biorąc pod uwagę liczby 2) jest liczba 3, więc usuwamy wszystkie jej wielokrotności, przy czym nie usuwamy samej trójki.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37\}.$$

- III. Następną najmniejszą liczbą w zbiorze (nie biorąc pod uwagę liczb 2 i 3) jest liczba 5, więc wyrzucamy ze zbioru  $P$  wszystkie jej wielokrotności, zostawiając samą 5.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}.$$

Krok trzeci jest ostatni, ponieważ w czwartym kroku najmniejszą liczbą, której wielokrotności musielibyśmy usunąć, jest liczba 7, ale  $n = 40$ , a  $\sqrt{40} \approx 6,32$ . Liczba 7 jest więc większa niż 6.32, możemy zatem zatrzymać algorytm. Po trzecim kroku w zbiorze  $P$  pozostały jedynie liczby pierwsze.

Sito Eratostenesa można teoretycznie zapisać w postaci funkcji, na przykład w programie Matlab (skrypt 3.1). Poniżej przedstawiona została tabela z wynikami działania algorytmu dla przedziałów o różnej długości.

Lp.	Koniec przedziału $\{2, n\}$	Czas działania programu [s]	Liczba liczb pierwszych
1	100	0.002345	25
2	1000	0.00219	168
3	10 000	0.107349	1229
4	100 000	0.191775	9592
5	1 000 000	0.253845	78 498
6	10 000 000	6.684239	664 579
7	100 000 000	174.164354	5 761 455

Tabela 1.2. Wyniki działania funkcji szukającej liczb pierwszych sitem Eratostenesa.

Niestety w przypadku większego zakresu liczb czas oczekiwania na wynik jest bardzo długi. Na przykład przeszukiwanie zbioru liczb naturalnych  $\{2, 1\,000\,000\,000\}$  może trwać już kilka godzin. Co więcej, największa znana obecnie liczba pierwsza jest o wiele większa od liczb, które można znaleźć za pomocą tego algorytmu nawet na nowoczesnych komputerach o dużej wydajności.

*Sito Atkina* lub *sito Atkina-Bernsteina* [2, s. 55] to algorytm autorstwa dwóch matematyków - Arthura Atkina i D.J. Bernsteina, który służy do wyszukiwania liczb pierwszych w dużych przedziałach.

Metoda ta działa podobnie do sita Eratostenesa, jednak dzięki wykorzystaniu pewnych zależności jest efektywniejsza i wymaga znacznie mniej pamięci. Na przykład algorytm całkowicie pomija wszystkie liczby podzielne przez 2, 3 lub 5, liczby z parzystą resztą z dzielenia przez 60, liczby, które mają resztę z dzielenia przez 60 podzielną przez 3 oraz liczby z resztą z dzielenia przez 60 podzielną przez 5. Pierwszość pozostałych liczb rozpatrywana jest na podstawie ich reszty z dzielenia przez liczbę 12. Jeżeli wynosi ona:

- 1 lub 5 — liczba jest pierwsza, jeśli liczba rozwiązań równania  $4x^2 + y^2 = n$  (gdzie  $n$  jest analizowaną przez nas liczbą, a  $x$  i  $y$  to dowolne liczby naturalne) jest nieparzysta, a  $n$  nie jest kwadratem innej liczby naturalnej,
- 7 — liczba jest pierwsza, jeśli liczba rozwiązań równania  $3x^2 + y^2 = n$  (gdzie  $n$  to analizowana przez nas liczba, a  $x$  i  $y$  to dowolne liczby naturalne) jest nieparzysta, a  $n$  nie jest kwadratem innej liczby naturalnej,



- 11 — liczba jest pierwsza, jeśli liczba rozwiązań równania  $3x^2 - y^2 = n$  (gdzie  $n$  to analizowana przez nas liczba, a  $x$  i  $y$  to dowolne liczby naturalne i  $x > y$ ) jest nieparzysta, a  $n$  nie jest kwadratem innej liczby naturalnej.

*Sito Sundarama* [2, s. 55] to prosty algorytm autorstwa XX-wiecznego indyjskiego matematyka Sundarama, który służy do wyszukiwania liczb pierwszych w przedziale  $\{1, n\}$ .

Algorytm przebiega w następujący sposób:

1. Wybieramy przedział  $\{1, n\}$ .
2. Z zadanego przedziału usuwamy liczby obliczone za pomocą wzoru  $l = i + j + 2ij$ , gdzie  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq j$  oraz  $i + j + 2ij \leq n$ .
3. Pozostałe liczby ze zbioru mnożymy przez 2 i dodajemy 1.

Po przeprowadzeniu algorytmu uzyskujemy listę liczb pierwszych z przedziału  $\{3, 2n+1\}$ .

Sito Sundarama można zapisać w postaci funkcji, na przykład w programie Matlab (skrypt 3.2). Poniższa tabela zawiera wyniki działania sita Sundarama dla przedziałów o różnej długości.

Lp.	Koniec przedziału $\{1, n\}$	Czas działania programu [s]	Liczba liczb pierwszych w przedziale $\{2, 2n+1\}$
1	50	0.000764	26
2	500	0.000663	168
3	5000	0.001613	1229
4	50 000	0.006975	9592
5	500 000	0.055643	78 498
6	5 000 000	0.639726	664 579
7	50 000 000	7.374154	5 761 455
8	500 000 000	137.090207	50 847 534

Tabela 1.3. Wyniki działania funkcji szukającej liczb pierwszych sitem Sundarama.

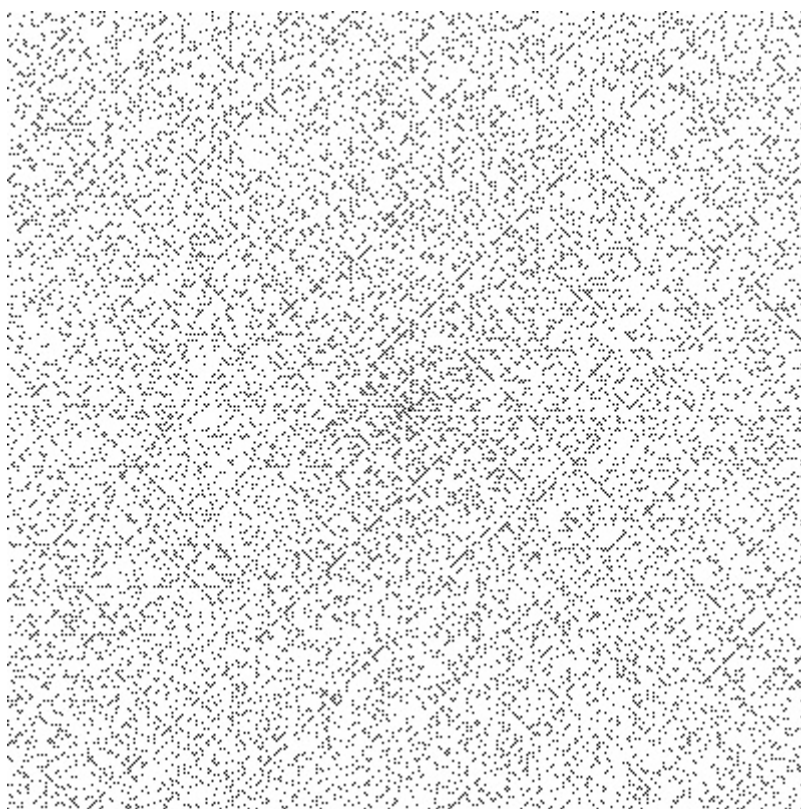
Jak łatwo zauważyć, algorytm Sundarama jest o wiele szybszy niż sito Eratostenesa.

## 1.5. Spirala Ulama

Stanisław Marcin Ulam (ur. 13 kwietnia 1909 we Lwowie, zm. 13 maja 1984 w Santa Fe) to polski matematyk i przedstawiciel lwowskiej szkoły matematycznej. W swoim dorobku ma wiele dokonań w zakresie matematyki i fizyki matematycznej oraz metod numerycznych. W 1963 roku zaprezentował przedstawienie rozkładu liczb pierwszych w formie graficznej, zwanej dziś spiralą Ulama.

*Spirala Ulama* lub *spiralą liczb pierwszych* [10] to graficzna metoda przedstawiania rozkładu liczb pierwszych.

Sposób zapisu polega na tym, że na kwadratowej tablicy zaczynając od 1 w środku spiralnie wypisuje się kolejne liczby naturalne. Okazuje się, że na pewnych przekątnych liczby pierwsze pojawiają się o wiele częściej niż na innych. Co więcej, zjawisko nie zależy od wyboru pierwszej liczby w spirali. Na rysunku 1.5 przedstawiono spiralę Ulama o rozmiarze 400x400.



Rysunek 1.1. Spirala Ulama o rozmiarze 400x400 [10].

## 1.6. Twierdzenie Wilsona, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Eulera

Podrozdział ten jest poświęcony trzem klasycznym twierdzeniom z zakresu teorii liczb - twierdzeniu Wilsona, małemu twierdzeniu Fermata oraz twierdzeniu Eulera. Mają one szerokie zastosowanie w testach pierwszości liczb.

**Twierdzenie 1.6.** (*Twierdzenie Wilsona, 1770 r.*) [7, s. 18] *Liczba naturalna  $p > 1$  jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (1.7)$$

Za odkrywcę powyższego twierdzenia uznaje się Johna Wilsona, zostało jednak opublikowane przez Edwarda Waringa. Jak się okazuje, wcześniej mówił o nim już al-Hajsam (X/XI w.) i Leibniz (XVII w.). Pierwszy dowód twierdzenia Wilsona pochodzi od Lagrange'a i został przedstawiony w 1777 roku.

**Dowód.** Na początek pokażemy, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to zachodzi kongruencja (1.7). Dla  $p = 2$  implikacja jest spełniona, więc ograniczamy się do liczb pierwszych nieparzystych. Ponieważ  $p$  jest liczbą pierwszą, więc każda z liczb

$$1, 2, 3, \dots, p-2, p-1$$

ma swoją odwrotność modulo  $p$ . Poszukujemy, dla jakich  $a$  spośród tych liczb zachodzi

$$a \equiv a^{-1} \pmod{p},$$

tzn.

$$a^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ostatni warunek oznacza, że liczba  $p$  musi dzielić

$$a^2 - 1 = (a+1)(a-1).$$

Z lematu Euklidesa (lemat 1.1) wynika, że  $p$  dzieli  $a+1$  lub  $a-1$ , więc  $a = p-1$  lub  $a = 1$ . Te dwie liczby na razie pomijamy. Wówczas liczby  $2, 3, \dots, p-2$  dzielą się na pary, liczba i jej odwrotność modulo  $p$ , skąd wynika, że

$$2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mnożąc obie strony powyższej kongruencji przez  $p-1$  otrzymujemy

$$(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p},$$

co kończy dowód pierwszej implikacji.

Teraz pokażemy implikację w drugą stronę. Musimy udowodnić, że jeżeli zachodzi

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

to  $n$  jest liczbą pierwszą. Przypuśćmy, że  $n$  jest liczbą złożoną. Wtedy istnieją dwie liczby  $p$  i  $q$  takie, że  $n = pq$ . Załóżmy, że  $p < q$ . Wówczas

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot p \cdot \dots \cdot (q-1) \cdot q \cdot \dots \cdot (n-1),$$

więc  $(n-1)!$  jest podzielne przez  $n$ . Stąd  $(n-1)! + 1$  nie może być podzielne przez  $n$ . Wynika stąd, że

$$(n-1)! + 1 \not\equiv 0 \pmod{n},$$

co kończy dowód. ■

**Twierdzenie 1.7.** (*Małe twierdzenie Fermata, 1640 r.*) [7, s. 19] *Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to dla każdej liczby całkowitej  $a$  niepodzielnej przez  $p$  zachodzi*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

**Dowód.** Jeśli liczba pierwsza  $p$  nie dzieli  $a$ , to ciąg reszt z dzielenia  $a$  przez  $p$   $1, 2, 3, \dots, p-1$  oraz ciąg liczb

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \pmod{p} \tag{1.8}$$

różnią się jedynie kolejnością. Łatwo zauważyć, że jeśli  $p$  nie dzieli  $a$ , to niemożliwe jest, aby  $ka \equiv 0 \pmod{p}$  dla  $k = 1, 2, \dots, p-1$ . Z tego wynika, że wszystkie reszty  $ka \pmod{p}$  są liczbami naturalnymi od 1 do  $p-1$ . Ponieważ liczb tych jest dokładnie  $p-1$ , więc musimy pokazać, że są one parami różne.

Założmy, że dla  $i, j < p$ , gdzie  $i \neq j$  zachodzi  $ai \equiv aj \pmod{p}$ . Z treści twierdzenia wiemy, że  $a$  nie jest podzielne przez  $p$ , więc obie strony możemy podzielić przez  $a$ , skąd otrzymujemy  $i \equiv j \pmod{p}$ . Obie liczby są z założenia mniejsze od  $p$ , więc  $i = j$ , co prowadzi do sprzeczności.

Jak wcześniej zauważyliśmy, ciąg liczb (1.8) modulo  $p$  to ciąg  $1, 2, \dots, p-1$ , więc

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p},$$

a po przekształceniu

$$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Z twierdzenia 1.6 wiemy, że liczba  $(p-1)!$  jest względnie pierwsza z  $p$ , więc obie strony kongruencji możemy podzielić przez  $(p-1)!$ , co kończy dowód. ■

Uogólnieniem małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7) jest twierdzenie Eulera.

**Twierdzenie 1.8.** (Eulera) [3, s. 33] *Jeżeli  $n$  i  $a$  są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to zachodzi*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

**Dowód.** Niech układ

$$r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}$$

będzie zredukowanym układem reszt modulo  $n$ . Po pomnożeniu każdej z nich przez  $a$  i podzieleniu przez  $n$  powstaje nowy układ reszt  $r'_i$ :

$$r_i a = q_i n + r'_i, \quad i = 1, 2, \dots, \varphi(n).$$

Układ można również przedstawić w postaci kongruencji

$$r_i a \equiv r'_i \pmod{n}, \quad i = 1, 2, \dots, \varphi(n). \quad (1.9)$$

Po wymnożeniu przez siebie wszystkich  $\varphi(n)$  kongruencji układu (1.9) otrzymujemy

$$a^{\varphi(n)} r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} \equiv r'_1 r'_2 \dots r'_{\varphi(n)} \pmod{n}. \quad (1.10)$$

Zarówno  $r_i$  i  $r'_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, \varphi(n)$  są względnie pierwsze z  $n$ , więc obie strony kongruencji (1.10) można podzielić przez ich identyczny iloczyn, co daje

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

■

Twierdzenie Eulera (twierdzenie 1.8) można wykorzystać do szybkiego potęgowania modulo.

**Przykład 1.7.** Korzystając z twierdzenia Eulera obliczymy  $8^{24} \pmod{25}$ .

Z twierdzenia Eulera (twierdzenie 1.8) wiemy, że jeśli  $n$  i  $a$  są względnie pierwsze, to zachodzi kongruencja

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

W powyższym przykładzie  $n = 25$  i  $a = 8$ , więc  $(n, a) = (25, 8) = 1$ . Korzystając z własności (4) stwierdzenia 1.1 obliczamy wartość funkcji Eulera dla liczby 25

$$\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5(5 - 1) = 5 \cdot 4 = 20.$$

Wiemy zatem, że

$$8^{20} \equiv 1 \pmod{25}. \quad (1.11)$$

Obliczamy

$$8^2 \equiv 64 \equiv 14 \equiv -11 \pmod{25}, \quad (1.12)$$

a następnie ponosimy obie strony kongruencji (1.12) do kwadratu

$$8^4 \equiv 121 \equiv 21 \pmod{25}. \quad (1.13)$$

W ostatnim kroku mnożymy kongruencje (1.11) i (1.13)

$$8^{24} \equiv 21 \cdot 1 \equiv 21 \pmod{25}.$$

Na mocy powyższych obliczeń otrzymujemy

$$8^{24} \equiv 21 \pmod{25}.$$

**Definicja 1.16.** Jeżeli  $n$  jest nieparzystą liczbą złożoną, a liczba  $b$ , względnie pierwsza z  $n$ , spełnia warunek

$$b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

to  $n$  nazywamy *liczbą pseudopierwszą* przy podstawie  $b$ .

Z twierdzenia 1.7 wynika, że dla każdej liczby  $a$ , która jest względnie pierwsza z modulem  $n$ , istnieje liczba naturalna  $k$  taka, że  $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Definicja 1.17.** [12] *Rzędem multiplikatywnym* liczby całkowitej  $a$  modulo  $n$ , gdzie  $(a, n) = 1$ , nazywamy najmniejszą liczbę naturalną  $k$ , dla której zachodzi

$$a^k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Rząd elementu  $a$  modulo  $n$  oznacza się  $\text{ord}_n(a)$  lub  $o_n(a)$ .

**Przykład 1.8.** Obliczymy rząd multiplikatywny liczby 4 modulo 7.

Szukamy najmniejszej liczby  $k \in \mathbb{N}$ , dla której prawdziwa jest kongruencja

$$4^k \equiv 1 \pmod{7}.$$

Sprawdzamy kongruencję dla kolejnych wartości liczby  $k$ :

$$k = 1 \Rightarrow 4^1 = 4 \equiv 4 \pmod{7} \neq 1 \pmod{7},$$

$$k = 2 \Rightarrow 4^2 = 16 = 2 \cdot 7 + 2 \equiv 2 \pmod{7} \neq 1 \pmod{7},$$

$$k = 3 \Rightarrow 4^3 = 64 = 9 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Rzędem multiplikatywnym liczby 4 modulo 7 jest 3, czyli  $o_7(4) = 3$ .

Obliczanie rzędu elementu  $a$  modulo  $n$  jest również proste do zaimplementowania w środowisku Matlab (skrypt 3.4). Poniżej przedstawiono tabelę z wynikami i czasem działania powyższej funkcji.

Lp.	Liczba $n$	Liczba $a$	Wartość funkcji $o_n(a)$	Czas działania funkcji [s]
1	7	4	3	0.033575
2	4	7	2	0.025657
3	100	387	20	0.031364
4	167	379	166	0.036658
5	1000	37	100	0.035297

Tabela 1.4. Wartość funkcji  $o_n(a)$  dla liczb o różnej wielkości.

## 1.7. Własności liczb pierwszych

Liczby pierwsze mogą przyjmować różne postaci. W podrozdziale tym skupimy się na różnych rodzajach liczb pierwszych, takich jak liczby pierwsze Fermata, bliźniacze, czworacze, Sophie Germain czy Mersenne’a. W części tej znajduje się również zestawienie dziesięciu największych znanych liczb pierwszych (odkrytych do 3 stycznia 2018 roku).

**Twierdzenie 1.9.** [3, s. 46] *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $4k - 1$ .*

**Dowód.** Przypuśćmy przeciwnie, że  $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$  jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych postaci  $4k - 1$ . Zdefiniujmy  $N = 4q_1q_2\dots q_r - 1$ .

Ponieważ  $N$  jest liczbą nieparzystą, więc wszystkie dzielniki liczby  $N$  również są nieparzyste. Z kolei każda liczba nieparzysta ma postać  $4k - 1$  lub  $4k + 1$ . Wiadomo także, że iloczyn liczb postaci  $4k + 1$  jest też liczbą postaci  $4k + 1$ , więc  $N$  musi mieć

dzielnik pierwszy  $q$  postaci  $4k - 1$ . Jak wiadomo,  $q_1 \nmid N$ ,  $q_2 \nmid N$ , ...,  $q_r \nmid N$ , skąd wynika, że  $q \notin \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ , co jest sprzeczne z założeniem. ■

Nieco trudniej jest udowodnić tę samą własność dla zbioru liczb postaci  $4k + 1$ .

**Twierdzenie 1.10.** [3, s. 46] *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $4k + 1$ .*

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [3, s. 46].

Twierdzenia 1.9 i 1.10 są szczególnymi przypadkami twierdzenia Dirichleta.

**Twierdzenie 1.11.** (Dirichlet) [3, s. 47] *Jeśli  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  oraz  $(a, m) = 1$ , to w ciągu arytmetycznym  $a + mk$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots$ , istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Dowód twierdzenia Dirichleta jest trudny i nieelementarny. Można go znaleźć w [4] (rozdział 5).

**Definicja 1.18.** [2, s. 57] Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Liczbę postaci

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad (1.14)$$

gdzie  $n \geq 1$ , nazywa się  *$n$ -tą liczbą Fermata*.

Fermat obliczył, że  $F_1 = 5$ ,  $F_2 = 17$ ,  $F_3 = 257$ ,  $F_4 = 65537$  są liczbami pierwszymi i założył, że każda liczba postaci (1.14) jest liczbą pierwszą. Hipotezę tę obalił Euler, który udowodnił, że  $F_5$  jest podzielne przez 641.

**Definicja 1.19.** [8] Liczby pierwsze  $p$  i  $q = p + 2$  nazywane są *liczbami pierwszymi bliźniaczymi*.

Liczbami pierwszymi bliźniaczymi są np.: (3, 5), (11, 13), (1949, 1951), (4967, 4969). Największe znane dziś liczby bliźniacze, każda składająca się z 388 342 cyfr, to

$$2\,996\,863\,034\,895 \cdot 2^{1\,290\,000} \pm 1,$$

znalezione zostały w 2016 roku.

**Definicja 1.20.** [8] *Liczbą pierwszą Sophie Germain* nazywamy dowolną liczbę pierwszą  $p$ , dla której liczba  $2p + 1$  także jest liczbą pierwszą.

Przykładem takiej liczby jest 23, gdyż  $2 \cdot 23 + 1 = 47$ . Największa znana obecnie liczba pierwsza Sophie Germain to

$$2\,618\,163\,402\,417 \cdot 2^{1\,290\,000} - 1,$$



a jej zapis dziesiętny wymaga 388 342 cyfr. Została ona odkryta w 2016 roku.

**Definicja 1.21.** [3, s. 52] *Liczbami Mersenne’a* nazywamy liczby postaci  $M_n = 2^n - 1$ ,  $n \geq 1$ . Jeżeli liczba Mersenne’a jest pierwsza to nazywamy ją *liczbą pierwszą Mersenne’a*.

Nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersenne’a. Do 2018 roku znanych jest 50 takich liczb. Co więcej, dziewięć na dziesięć największych odkrytych do tej pory liczb pierwszych to właśnie liczby Mersenne’a. Zostały one przedstawione w tabeli 1.5. Ich poszukiwaniem zajmuje się projekt GIMPS (ang. Great Internet Mersenne Prime Search), w którym mogą wziąć udział ochotnicy z całego świata.

Nr	Liczba pierwsza	Liczba cyfr	Data odkrycia	Odkrywcy
1	$2^{77\,232\,917} - 1$	23 249 425	2018-01-03	J. Pace, GIMPS
2	$2^{74\,207\,281} - 1$	22 338 618	2016-01-07	Cooper, GIMPS
3	$2^{57\,885\,161} - 1$	17 425 170	2013-01-25	Cooper, GIMPS
4	$2^{43\,112\,609} - 1$	12 978 189	2008-08-23	Edson Smith, GIMPS
5	$2^{42\,643\,801} - 1$	12 837 064	2009-06-04	Strindmo, GIMPS
6	$2^{37\,156\,667} - 1$	11 185 272	2008-09-06	H. Elvenich, GIMPS
7	$2^{32\,582\,657} - 1$	9 808 358	2006-09-04	Boone, Cooper, GIMPS
8	$2^{30\,402\,457} - 1$	9 152 052	2005-12-15	Boone, Cooper, GIMPS
9	$2^{25\,964\,951} - 1$	7 816 230	2005-02-18	Nowak, GIMPS
10	$2^{24\,036\,583} - 1$	7 235 733	2004-05-15	Findley, GIMPS

Tabela 1.5. Dziesięć największych znanych liczb pierwszych Mersenne’a na 2018 rok [9].



## 2. Testy pierwszości liczb

Test pierwszości to algorytm, który określa, czy zadana liczba jest liczbą pierwszą, czy złożoną. Poniższy rozdział ma na celu przedstawienie algorytmów, które testują pierwszość zadanej liczby.

### 2.1. Testy deterministyczne

*Testy deterministyczne* to testy, które wydają certyfikat pierwszości, czyli ich wynik jest prawidłowy z prawdopodobieństwem 1. Zwracają odpowiedź, że podana na wejściu liczba  $n$  jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy naprawdę tak jest, czyli wynik działania testu jest jednoznaczny.

#### 2.1.1. Metoda naiwna

Najprostszą deterministyczną metodą testowania pierwszości jest *metoda naiwna*. Algorytm działania jest bardzo prosty: dla danej liczby  $n > 2$  wystarczy sprawdzić, czy dzieli się ona kolejno przez  $2, 3, \dots, n - 1$ . Jeżeli wśród tych liczb nie ma dzielnika liczby  $n$ , wtedy  $n$  jest pierwsza. Jeśli chociaż przez jedną z tych liczb  $n$  dzieli się bez reszty, wtedy  $n$  jest złożona.

Jak się okazuje, nie trzeba testować podzielności przez wszystkie liczby od 2 do  $n - 1$ , wystarczy ograniczyć się do przedziału  $2, 3, \dots, \sqrt{n}$ .

Co więcej, algorytm można ulepszyć dzieląc liczbę  $n$  jedynie przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze lub równe  $\sqrt{n}$ . Listę takich liczb możemy wyznaczyć sitem Eratostenesa, które omówione zostało w podrozdziale 1.4.

Warto zauważyć, że jeśli liczba  $n$  okaże się być złożona, to jednocześnie wyznaczany jest jej nietrywialny dzielnik (dzielnik różny od 1).

Algorytm metody naiwnej w wersji udoskonalonej działa następująco:

1. Pobieramy liczbę  $n$ .
2. Wyznaczamy zbiór  $p$  wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych  $\sqrt{n}$ .
3. Dzielimy liczbę  $n$  przez kolejne liczby ze zbioru  $p$ .
4. Jeśli  $n$  dzieli się przez przynajmniej jedną z liczb ze zbioru  $p$  bez reszty, wtedy  $n$  jest złożona.
5. Jeśli wśród liczb  $p$  nie ma dzielnika liczby  $n$ , wtedy  $n$  jest pierwsza.

Jest to algorytm deterministyczny, który uznaje pierwszość liczby ze stuprocentową pewnością. W związku z tym, że metoda jest bardzo dokładna, wymaga dużej liczby dzielení, więc jej efektywność spada dla większych liczb.

**Przykład 2.1.** Za pomocą algorytmu metody naiwnej sprawdzimy, czy liczba 53 jest pierwsza.

Zgodnie z algorytmem działania metody naiwnej, wyznaczamy zbiór  $p$  wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych  $\sqrt{53} \approx 7,28$ . Zbiór ten ma więc postać

$$p = \{2, 3, 5, 7\}.$$

W następnym kroku sprawdzamy reszty z dzielenia liczby 53 przez liczby pierwsze ze zbioru  $p$ :

$$53 = 1 \pmod{2},$$

$$53 = 2 \pmod{3},$$

$$53 = 3 \pmod{5},$$

$$53 = 4 \pmod{7}.$$

Liczba 53 nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb ze zbioru  $p$ , więc 53 jest liczbą pierwszą.

**Przykład 2.2.** Za pomocą algorytmu metody naiwnej sprawdzimy, czy liczba 25 jest pierwsza.

W pierwszym kroku wyznaczamy zbiór  $p$  wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych  $\sqrt{25} = 5$ . Zbiór ten jest postaci

$$p = \{2, 3, 5\}.$$

W następnym kroku sprawdzamy reszty z dzielenia liczby 25 przez liczby pierwsze ze zbioru  $p$ :

$$25 = 1 \pmod{2},$$

$$25 = 1 \pmod{3},$$

$$25 = 0 \pmod{5}.$$

Liczba 25 dzieli się bez reszty przez liczbę 5, więc jest liczbą złożoną.

Algorytm metody naiwnej w programie Matlab został przedstawiony na końcu tej pracy (skrypt 3.5). Tabela 2.1 przedstawia wyniki i czas działania algorytmu dla liczb o różnej wielkości.

Lp.	Testowana liczba	Czas działania programu [s]	Liczba pierwsza/złożona
1	7	0.005050	pierwsza
2	23	0.004529	pierwsza
3	365	0.002450	złożona
4	5737	0.002264	pierwsza
5	99 487	0.015185	pierwsza
6	99 489	0.014734	złożona
7	100 001	0.013290	złożona
8	12 192 109	9.409341	pierwsza
9	14 476 001	11.304216	pierwsza
10	100 000 001	215.084406	złożona

Tabela 2.1. Wyniki działania funkcji testującej pierwszość liczb metodą naiwną z sitem Eratostenesa.

Łatwo zauważyć, że dla niewielkich liczb czas działania jest bardzo krótki, ale dla liczb rzędu  $10^8$  sprawdzanie pierwszości trwa już kilka minut.

### 2.1.2. Test pierwszości AKS

*Test pierwszości AKS* (lub inaczej test pierwszości Agrawal-Kayal-Saxena lub cyklotomiczny test AKS) jest deterministycznym testem pierwszości liczb opracowanym przez trójkę indyjskich naukowców - Manindra Agrawala, Neeraja Kayala i Nitina Saxena z Indyjskiego Instytutu Technologii w Kanpurze. Test został po raz pierwszy opublikowany 6 sierpnia 2002 roku w artykule zatytułowanym *PRIMES is in P*. W 2006 roku autorzy otrzymali za to odkrycie dwie nagrody - Nagrodę Gödla, którą przyznaje się za osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej, oraz nagrodę Fulkersona, przyznawaną za wybitne prace z zakresu matematyki dyskretniej.

Poniższy podrozdział oparty jest na artykule *PRIMES is in P* [11].

Test AKS jest pierwszym opublikowanym algorytmem testującym czy dana liczba jest pierwsza, który jest jednocześnie szybki, jednoznaczny i bezwarunkowy. Oznacza to, że algorytm ten zawsze zwróci poprawną odpowiedź (w przeciwieństwie

do testów probabilistycznych), a jego działanie nie bazuje na żadnych nieudowodnionych hipotezach.

Test pierwszości AKS opiera się na pewnej tożsamości liczb pierwszych, która jest uogólnieniem małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7).

**Lemat 2.1.** (małe twierdzenie Fermata dla wielomianów) Niech  $a, n \in \mathbb{N}$  i  $n \geq 2$  oraz  $(a, n) = 1$ . Wówczas  $n$  jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{n}. \quad (2.1)$$

**Dowód.** Równanie (2.1) możemy zapisać w postaci

$$(X + a)^n - (X^n + a) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Dla  $0 < i < n$  współczynnik przy  $X^i$  w wyrażeniu  $((X + a)^n - (X^n + a))$  wynosi  $\binom{n}{i} a^{n-i}$ .

Założmy, że  $n$  jest liczbą pierwszą. Wtedy  $\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod{n}$ , a więc wszystkie współczynniki są zerowe.

Założmy, że  $n$  jest liczbą złożoną. Rozważmy liczbę pierwszą  $q$ , która jest dzielnikiem  $n$  i dla pewnego  $k$  niech  $q^k \mid n$ . Wtedy  $q^k$  nie dzieli  $\binom{n}{q}$  i jest względnie pierwsza z  $a^{n-q}$ . Stąd współczynnik przy  $X^q$  jest niezerowy  $\pmod{n}$ . Zatem wyrażenie  $((X + a)^n - (X^n + a))$  nie jest tożsamościowo równe zero  $\pmod{n}$ . ■

Równanie (2.1) sugeruje prosty test pierwszości: pobieramy badane  $n$ , wybieramy  $a$  i sprawdzamy, czy kongruencja (2.1) jest spełniona. Jednak wymaga to czasu, ponieważ w najgorszym przypadku należy oszacować  $n$  współczynników po lewej stronie równania. Prostym sposobem na zmniejszenie liczby tych współczynników jest oszacowanie obu stron kongruencji (2.1) modulo wielomian postaci  $X^r - 1$  dla odpowiednio wybranego małego  $r$ . Innymi słowy, sprawdzić, czy spełnione jest równanie

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, n}. \quad (2.2)$$

Z lematu 2.1 wynika natychmiast, że wszystkie liczby pierwsze  $n$  spełniają równanie (2.2) dla wszystkich wartości  $a$  i  $r$ . Problem polega na tym, że niektóre liczby złożone  $n$  mogą również spełnić równanie dla kilku wartości  $a$  i  $r$ . Jednak możemy pokazać, że dla odpowiednio dobranego  $r$ , jeśli równanie (2.2) jest spełnione dla kilku  $a$ , to musi być potęgą liczby pierwszej.

Algorytm działania metody AKS jest następujący:

1. Wybieramy testowaną liczbę  $n > 1$ .
2. Jeśli istnieje takie  $a \in \mathbb{N}$  i  $b > 1$ , że  $n = a^b$ , to liczba  $n$  jest złożona - stop.
3. Znajdujemy najmniejsze  $r$  takie, że  $o_r(n) > (\log_2 n)^2$ .
4. Jeśli  $1 < NWD(a, n) < n$  dla pewnego  $a \leq r$ , wtedy  $n$  jest złożona - stop.
5. Jeśli  $n \leq r$ ,  $n$  jest pierwsza - stop.
6. Dla  $a = 1$  do  $\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log_2 n \rfloor$  sprawdzamy  
jeśli  $((X + a)^n \neq X^n + a \pmod{X^r - 1, n})$ ,  $n$  jest złożona - stop.
7.  $n$  jest pierwsza.

**Przykład 2.3.** Za pomocą algorytmu testu AKS sprawdzimy, czy liczba 11 jest pierwsza.

1.  $n = 11 > 1$ .
2.  $n$  nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej.
3.  $(\log_2 11)^2 \approx 11,97$ , więc  $r = 13$ , ponieważ  $o_{13}(11) = 12$ .
4. Dla każdego  $a \leq 13$  i  $a \neq 11$   $NWD(a, 11) = 1$ . Dla  $a = 11$   $NWD(a, 11) = 11$ , więc  $NWD(a, 11) \notin (1, 11)$ .
5.  $11 \leq 13$ , więc 11 jest pierwsza.

Kod metody AKS zaimplementowany w środowisku Matlab został przedstawiony w części pracy poświęconej skryptom (skrypt 3.6). Tabela poniżej przedstawia wyniki i czas działania testu pierwszości AKS.

Lp.	Liczba $n$	Pierwsza/złożona	Czas działania funkcji [s]
1	3	pierwsza	0.034859
2	23	pierwsza	0.047291
3	25	złożona	0.009026
4	123	złożona	0.045841
5	199	pierwsza	4.284376
6	1000	złożona	0.020794
7	1001	złożona	0.047622
8	1223	pierwsza	35.298198
9	3313	pierwsza	113.642901
10	3315	złożona	0.044053

Tabela 2.2. Wartość funkcji  $\varphi(n)$  dla liczb o różnej wielkości.

Łatwo zauważyć, że algorytm radzi sobie bardzo szybko z liczbami złożonymi i niewielkimi liczbami pierwszymi, jednak już dla liczb pierwszych czterocyfrowych potrzebne jest ponad pół minuty na potwierdzenie ich pierwszości. Test AKS ma niestety znikomą wartość praktyczną, ponieważ złożoność tego algorytmu jest duża, a to oznacza, że liczba wykonywanych operacji rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem wielkości badanej liczby.

### 2.1.3. Test Lucasa-Lehmera

*Test Lucasa-Lehmera* [6] jest testem pierwszości dla liczb Mersenne’a. Test ten został stworzony przez francuskiego matematyka Edwarda Lucasa w 1856 roku, a następnie zmodyfikowany przez niego w roku 1878. Ponad 50 lat później algorytm Lucasa został udoskonolony przez Derricka Henry’ego Lehmera, skąd pochodzi dwuczłonowa nazwa testu.

Test Lucasa-Lehmera opiera się na poniższym twierdzeniu.

**Twierdzenie 2.1.** *Jeżeli  $m^n - 1$  jest liczbą pierwszą, a  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  i  $n > 1$ , wtedy  $m = 2$  i  $n$  jest liczbą pierwszą.*

**Dowód.** Ponieważ  $m - 1$  dzieli  $m^n - 1$ , warunkiem na to, aby  $m^n - 1$  była liczbą pierwszą, jest aby  $m - 1$  było równe 1, skąd wynika, że  $m = 2$ . Załóżmy, że  $n$  jest liczbą złożoną. Wtedy  $n = r \cdot s$  dla pewnych  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ . Rozważmy wielomian

$$x^n - 1 = x^{r \cdot s} - 1.$$

Zgodnie ze wzorami skróconego mnożenia wielomian ten może być zapisany w postaci

$$x^{r \cdot s} - 1 = (x^s - 1)(x^{s(r-1)} + x^{s(r-2)} + \dots + x^s + 1).$$

Jeśli  $n = r \cdot s$  jest liczbą złożoną, to  $2^n - 1$  jeśli również liczbą złożoną, ponieważ jest podzielne przez  $2^s - 1$ . Stąd wynika, że  $n$  musi być liczbą pierwszą.

■

**Twierdzenie 2.2.** *(Test Lucasa-Lehmera) Dodatnia liczba całkowita Mersenne’a postaci  $M_p = 2^p - 1$  jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli  $S_{p-1}$ , gdzie ciąg  $(S_k)$  definiuje się w sposób rekurencyjny jako  $S_k = S_{k-1}^2 - 2$  i  $S_1 = 4$ .*

**Dowód.** Niech  $\omega = 2 + \sqrt{3}$  i  $\mu = 2 - \sqrt{3}$ . Wtedy

$$\mu\omega = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = 1.$$



Pokażemy przez indukcję, że  $S_m = \omega^{2^{m-1}} + \mu^{2^{m-1}}$  dla wszystkich  $m$ , gdzie  $S_s$  są elementami ciągu zdefiniowanego w twierdzeniu. Dla  $S_1$  mamy

$$S_1 = (2 + \sqrt{3})^{2^0} + (2 - \sqrt{3})^{2^0} = (2 + \sqrt{3})^1 + (2 - \sqrt{3})^1 = 2 + 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 4.$$

Przypuśćmy teraz, że  $S_t = \omega^{2^{t-1}} + \mu^{2^{t-1}}$  dla wszystkich  $t = 2, \dots, n-1$ . Wtedy

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1}^2 - 2 = (\omega^{2^{n-1}} + \mu^{2^{n-1}})^2 - 2 \\ &= ((2 + \sqrt{3})^{2^{n-1}} + (2 - \sqrt{3})^{2^{n-1}})^2 - 2 \\ &= (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n} + 2((2 + \sqrt{3})^{2^{n-1}}(2 - \sqrt{3})^{2^{n-1}}) - 2 \\ &= \omega^{2^n} + \mu^{2^n} + 2(\omega\mu)^{2^{n-1}} - 2 \\ &= \omega^{2^n} + \mu^{2^n} + 2 \cdot 1 - 2 \\ &= \omega^{2^n} + \mu^{2^n} = S_n. \end{aligned}$$

Jeśli  $M_p$  dzieli  $S_{p-1}$ , to

$$S_{p-1} = \omega^{2^{p-1-1}} + \mu^{2^{p-1-1}} \equiv 0 \pmod{M_p},$$

więc

$$\omega^{2^{p-2}} + \mu^{2^{p-2}} = RM_p$$

dla pewnej liczby całkowitej  $R$ . Następnie mnożymy obie strony powyższego równania przez  $\omega^{2^{p-2}}$ , skąd otrzymujemy

$$RM_p \omega^{2^{p-2}} = \omega^{2^{p-2}} \omega^{2^{p-2}} + \mu^{2^{p-2}} \omega^{2^{p-2}},$$

$$RM_p \omega^{2^{p-2}} - \mu^{2^{p-2}} \omega^{2^{p-2}} = \omega^{2^{p-2}} \omega^{2^{p-2}},$$

$$RM_p \omega^{2^{p-2}} - 1 = \omega^{2^{p-1}}. \quad (2.3)$$

Na koniec podnosimy obie strony równania do kwadratu

$$\omega^{2^p} = (RM_p \omega^{2^{p-2}} - 1)^2. \quad (2.4)$$

Założmy teraz, że  $M_p$  jest liczbą złożoną. Wtedy musi istnieć liczba pierwsza  $q$ , która jest dzielnikiem liczby  $M_p$  takim, że  $q^2 \leq M_p$ . Liczba  $M_p$  jest postaci  $2^p - 1$ , więc jest liczbą nieparzystą, stąd  $q \neq 2$ . Rozważmy grupę  $\mathbb{Z}_q$  liczb całkowitych modulo  $q$ . Niech  $X = \mathbb{Z}_q(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}_q$ . Grupa ta jest zamknięta ze względu na

mnożenie (jeśli  $x, y \in X$ , to  $x \cdot y \in X$ ), więc możemy pomnożyć dwa elementy z grupy

$$\begin{aligned} & (a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) \\ &= (a_1a_2 + 3b_1b_2 + a_1b_2\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3}) \\ &= (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \end{aligned}$$

i zredukować nowe współczynniki modulo  $q$  tak, aby pozostało wyrażenie w formie  $a + b\sqrt{3}$ . Dla zbioru  $X$  zachodzi tożsamość  $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{3}$ . Zatem  $X^*$ , czyli zbiór odwracalnych elementów zbioru  $X$ , również jest grupą.

Rząd  $X^*$  jest równy co najwyżej  $q^2 - 1$ , ponieważ rząd  $X$  wynosi  $q^2$  i w zbiorze  $X$  istnieje co najmniej jeden nieodwracalny element, zwany zerem. Zauważmy, że  $\omega$  jest elementem zbioru  $X$ . Z faktu, że  $q|M_p$ , wynika kongruencja

$$RM_p\omega^{2^{p-2}} \equiv 0 \pmod{q},$$

więc w zbiorze  $X$  również równa jest 0. Wtedy równania (2.3) i (2.4) możemy zapisać w postaci

$$\omega^{2^{p-1}} \equiv -1 \pmod{q}, \quad (2.5)$$

$$\omega^{2^p} \equiv 1 \pmod{q}. \quad (2.6)$$

Kongruencję (2.6) można przedstawić w postaci  $\omega \cdot \omega^{2^{p-1}} \equiv 1 \pmod{q}$ , skąd wynika, że  $\omega$  ma element odwrotny, a więc należy do  $X^*$ . Ponieważ rząd elementu  $\omega$  dzieli  $2^p$ , musi on być potęgą dwójki. Zatem rząd  $\omega$  wynosi  $2^t$  dla pewnego  $t$ , dla którego  $\omega^{2^t} \equiv 1 \pmod{q}$ . Kongruencja ta może być wielokrotnie podnoszona do kwadratu, tak aby  $\omega^{2^k} \equiv 1 \pmod{q}$  dla wszystkich  $k \geq t$ .

Jednakże, jeśli  $t < p$ , to  $k$  może być równe  $p - 1$ , więc  $\omega^{2^{p-1}} \equiv 1 \pmod{q}$ , co jest sprzecznością z równaniem (2.5). Zatem, ponieważ rząd  $\omega$  jest mniejszy lub równy  $2^p$  i równocześnie większy lub równy  $2^p$ , więc musi być równy  $2^p$ . Rząd elementu nie może być większy od rzędu grupy, więc  $2^p \leq q^2 - 1$ , ale  $q^2 \leq M_p$ , więc  $q^2 - 1 \leq M_p - 1$ , skąd  $2^p \leq M_p - 1$ .  $M_p$  ma postać  $2^p - 1$ , więc  $M_p - 1 = 2^p - 2$ . Podsumowując, otrzymujemy  $2^p \leq 2^p - 2$ , co jest sprzecznością. Stąd założenie, że liczba  $q$  jest dzielnikiem  $M_p$ , jest błędne, więc  $M_p$  musi być liczbą pierwszą. ■

Warunkiem koniecznym na to, aby liczba  $M_n$  była liczbą pierwszą, jest, aby  $n$  było również liczbą pierwszą. Implikacja w drugą stronę nie zachodzi, pierwszość  $n$  nie jest wystarczająca dla pierwszości  $M_n$ , np.  $M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ .

**Przykład 2.4.** Sprawdźmy, czy trzecia liczba Mersenne’a  $M_3$  jest liczbą pierwszą.

Trzecia liczba Mersenne’a wynosi  $M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ . Na początek musimy obliczyć liczbę  $S_2$ . W tym celu musimy użyć wzoru rekurencyjnego  $S_k = S_{k-1}^2 - 2$ , gdzie  $S_1 = 4$ . Mamy

$$S_1 = 4,$$

$$S_2 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14.$$

Sprawdzamy, czy  $M_3$  dzieli  $S_2$

$$S_2 \pmod{M_3} = 14 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Z powyższych obliczeń wynika, że trzecia liczba Mersenne’a  $M_3 = 7$  jest liczbą pierwszą.

Implementacja testu pierwszości Lucasa-Lehmera w programie Matlab znajduje się w skrypcie 3.7. W tabeli 2.3 przedstawione są wyniki działania tego kodu dla różnych liczb pierwszych i złożonych oraz czas działania algorytmu.

Lp.	Liczba $n$	Liczba Mersenne’a $n$	Wynik	Czas działania funkcji [s]
1	5	$2^5 - 1$	pierwsza	0.001195
2	7	$2^7 - 1$	pierwsza	0.001416
3	11	$2^{11} - 1$	złożona	0.001071
4	13	$2^{13} - 1$	pierwsza	0.000686
5	17	$2^{17} - 1$	pierwsza	0.000768
6	19	$2^{19} - 1$	pierwsza	0.000783
7	23	$2^{23} - 1$	złożona	0.000745
8	29	$2^{29} - 1$	złożona	0.000682
9	37	$2^{37} - 1$	złożona	0.000776
10	43	$2^{43} - 1$	złożona	0.000608

Tabela 2.3. Wyniki działania testu pierwszości Lucasa-Lehmera.

## 2.2. Testy probabilistyczne

*Testy probabilistyczne* (znane także jako testy randomizacyjne) są obecnie najczęściej stosowanymi i najbardziej efektywnymi testami pierwszości liczb, które w swoim działaniu używają losowości. Wykorzystuje się w nich losowo wygenerowane

liczby z danego przedziału. Zależność od takich elementów powoduje, że algorytm może dać błędny wynik testu pierwszości, lecz prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe.

### 2.2.1. Test pierwszości Fermata

Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata (twierdzenie 1.7) dla liczb pierwszych  $p$  zachodzi kongruencja

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2.7)$$

*Test pierwszości Fermata* [7, s. 49] to probabilistyczny test pierwszości, który opiera się na założeniu, że zachodzi wynikanie odwrotne do twierdzenia 1.7, czyli jeśli prawdziwa jest kongruencja (2.7), to liczba  $p$  jest pierwsza z dużym prawdopodobieństwem.

Algorytm testu pierwszości Fermata dla zadanej liczby  $p$  wygląda następująco:

1. Losujemy  $a \in [2, p-2]$ .
2. Obliczamy  $d = \text{NWD}(a, p)$ . Jeśli  $d > 1$  to  $p$  jest liczbą złożoną.
3. Sprawdzamy, czy zachodzi kongruencja  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .
4. Jeśli zachodzi, to  $p$  może być liczbą pierwszą, w innym przypadku  $p$  jest liczbą złożoną.

Przy kilkukrotnym powtórzeniu losowania dla różnych liczb test Fermata daje bardzo wiarygodny wynik.

**Przykład 2.5.** Używając testu pierwszości Fermata sprawdzimy, czy liczba 23 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy  $a \in [2, 21]$ . Niech  $a = 4$ .
2.  $d = \text{NWD}(4, 23) = 1$ .
3. Kongruencja  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  jest spełniona, ponieważ  $4^{22} \equiv 1 \pmod{23}$  (przebieg obliczeń znajduje się w przykładzie 1.3).
4. Liczba 23 może być liczbą pierwszą.

**Przykład 2.6.** Używając testu pierwszości Fermata sprawdzimy, czy liczba 25 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy  $a \in [2, 24]$ . Niech  $a = 8$ .
2.  $d = \text{NWD}(8, 25) = 1$ .
3. Kongruencja  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  nie zachodzi, ponieważ  $8^{24} \equiv 21 \pmod{25}$  (przebieg obliczeń znajduje się w przykładzie 1.7).

4. Liczba 25 jest liczbą złożoną.

Implementacja testu pierwszości Fermata w programie Matlab zawarta została w skrypcie 3.8. W tabeli 2.4 przedstawione są wyniki działania tego kodu dla różnych liczb pierwszych i złożonych oraz czas działania algorytmu.

Lp.	Liczba $p$	Liczba powtórzeń $n$	Wynik	Czas działania funkcji [s]
1	5	2	pierwsza (100%)	0.069366
2	15	8	złożona (100%)	0.097156
3	47	18	pierwsza (100%)	0.102425
4	199	28	pierwsza (100%)	0.090658
5	1999	68	pierwsza (100%)	0.092615
6	6899	190	pierwsza (100%)	0.095254
7	94 427	19	pierwsza (100%)	0.080347
8	94 428	19	złożona (100%)	0.070723
9	15 472 147	30	pierwsza (100%)	0.071718
10	15 472 147	5530	pierwsza (100%)	0.733975
11	15 472 148	5530	złożona (100%)	0.575719

Tabela 2.4. Wyniki działania testu pierwszości Fermata dla liczb o różnej wielkości.

Łatwo zauważyć, że algorytm działa niezwykle szybko i zwraca stuprocentowo pewny wynik nawet dla bardzo dużych liczb. Czas działania zależy głównie od wyboru liczby powtórzeń  $n$  - im liczba  $n$  jest większa, tym czas działania algorytmu się wydłuża. Jednak już dla niewielkich  $n$  wynik jest podawany z prawdopodobieństwem równym 1.

Trzeba zaznaczyć, że kongruencja (2.7) może zachodzić także w pewnych przypadkach, gdy liczba  $p$  nie jest liczbą pierwszą.

**Definicja 2.1.** [7, s. 49] *Liczbami Carmichaela* nazywamy złożone liczby naturalne, dla których teza małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7) jest prawdziwa.

Liczba naturalna  $n$  jest liczbą Carmichaela wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą złożoną i dla każdej liczby naturalnej  $a$  z przedziału  $1 < a < n$ , względnie pierwszej z  $n$ , liczba  $a^{n-1} - 1$  jest podzielna przez  $n$ .

Najmniejszą liczbą Carmichaela jest  $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ . Innymi z nich są na przykład  $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ ,  $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$  lub  $2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29$ .

**Przykład 2.7.** Używając testu pierwszości Fermata sprawdzimy, czy liczba 561 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy  $a \in [2, 559]$ . Niech  $a = 5$ .
2.  $d = NWD(5, 561) = 1$ .
3. Kongruencja  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  zachodzi, gdyż  $5^{560} \equiv 1 \pmod{561}$ .
4. Liczba 561 może być liczbą pierwszą.

Po zastosowaniu algorytmu liczba 561 została błędnie wskazana jako liczba prawdopodobnie pierwsza. Stało się tak, ponieważ dla liczby Carmichaela równość z małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7) zachodzi dla wszystkich  $a$  takich, że  $NWD(a, p) = 1$ .

Test Fermata zastosowany do liczby Carmichaela jest nieskuteczny, co przedstawione zostało w tabeli 2.5.

Lp.	L. Carmichaela	Liczba powtórzeń $n$	Wynik	Czas działania [s]
1	561	5	pierwsza (60%)	0.064905
2	561	15	pierwsza (73%)	0.097156
3	561	150	pierwsza (58%)	0.102425
4	1105	5	pierwsza (100%)	0.067776
5	1105	15	pierwsza (73%)	0.068222
6	1105	150	pierwsza (70.6%)	0.088589
7	1729	5	pierwsza (60%)	0.069128
8	1729	15	złożona (66.67%)	0.078923
9	1729	150	pierwsza (76.67%)	0.082983
10	2465	5	pierwsza (80%)	0.064879
11	2465	15	pierwsza (60%)	0.070719
12	2465	150	pierwsza (75.3%)	0.090890

Tabela 2.5. Wyniki działania testu pierwszości Fermata dla liczb Carmichaela.

Jak wynika z powyższej tabeli, liczby Carmichaela przechodzą test pierwszości Fermata z dużym prawdopodobieństwem.

### 2.2.2. Test pierwszości Lehmana

*Test Lehmana* [2, s. 60] jest kolejnym probabilistycznym testem pierwszości liczb. Algorytm testu Lehmana dla dużej liczby  $p$  wygląda następująco:

1. Losujemy dużą liczbę  $a < p$ .
2. Obliczamy  $b \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}$ .
3. Jeśli  $b \equiv 1 \pmod{p}$  lub  $b \equiv -1 \pmod{p}$  to  $p$  jest liczbą pierwszą z prawdopodobieństwem większym lub równym 50%. W przeciwnym wypadku  $p$  jest liczbą złożoną.

**Przykład 2.8.** Stosując test pierwszości Lehmana sprawdzimy, czy 31 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy dużą liczbę  $a < 31$ . Niech  $a = 21$ .
2. Obliczamy  $b = a^{(31-1)/2} = 21^{15} \equiv 30 \pmod{31}$ .
3.  $b = 30 \equiv -1 \pmod{31}$ , stąd 31 może być liczbą pierwszą z prawdopodobieństwem większym lub równym 50%.

Skrypt 3.9 przedstawia algorytm Lehmana w programie Matlab. Wyniki działania programu przedstawione zostały w tabeli 2.6.

Lp.	Liczba $p$	Wynik	Czas działania funkcji [s]
1	5	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.023871
2	47	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.032829
3	199	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.031084
4	1999	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.026158
5	6899	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.029798
6	94 427	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.023563
7	94 428	złożona (100%)	0.015226
8	15 472 145	złożona (100%)	0.027043
9	15 472 147	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.026316
10	15 485 857	pierwsza ( $\geq 50\%$ )	0.024070

Tabela 2.6. Wyniki działania testu pierwszości Lehmana dla liczb o różnej wielkości.

Algorytm Lehmana jest bardzo szybki i zwraca prawidłowe wyniki dla liczb o różnej wielkości.

### 2.2.3. Test pierwszości Solovaya-Strassena

Kolejnym probabilistycznym testem pierwszości jest test Solovaya-Strassena, opracowany przez dwóch matematyków - amerykańskiego profesora Roberta M. Solovaya

i profesora Volkera Strassena z Niemiec. Do wprowadzenia algorytmu testowania niezbędna jest definicja symbolu Legendre'a.

**Definicja 2.2.** [7, s. 119] Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą większą od 2, a  $a$  liczbą całkowitą. Symbol Legendre'a  $\left(\frac{a}{p}\right)$  definiuje się następująco

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } a \text{ jest wielokrotnością liczby } p, \\ 1, & \text{jeśli istnieje } b \text{ takie, że } b^2 = a \pmod{p}, \\ -1, & \text{jeśli nie istnieje żadne } b \text{ takie, że } b^2 = a \pmod{p}. \end{cases}$$

Symbol Legendre'a można obliczyć korzystając z następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.3.** (*Kryterium Eulera w formie Legendre'a*) [7, s. 120] Niech  $p$  będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

**Twierdzenie 2.4.** [7, s. 120] Niech  $p$  będzie nieparzystą liczbą pierwszą, Wówczas dla liczb całkowitych  $a$  i  $b$  zachodzi

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p}.$$

**Dowód.** Zauważmy, że

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p}.$$

■

Symbol Legendre'a może być uogólniony do symbolu Jacobiego  $\left(\frac{a}{n}\right)$ , gdzie  $n$  jest dowolną liczbą nieparzystą, która ma rozkład na czynniki pierwsze

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}.$$

Wtedy symbol Jacobiego można zapisać w postaci

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{a}{p_2}\right)^{m_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{m_k}.$$

Jeżeli  $n$  jest liczbą pierwszą, to symbol Jacobiego i symbol Legendre'a są sobie równe.

**Definicja 2.3.** Nieparzystą liczbę złożoną  $n$  nazywamy pseudopierwszą liczbą Eulera przy podstawie  $b$ , jeśli  $(n, b) = 1$  i spełniony jest warunek

$$b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{n}\right) \pmod{n}.$$



Test pierwszości liczby  $n$  algorytmem Solovaya-Strassena przebiega następująco:

1. Losujemy  $b \in \{2, \dots, n-2\}$ .
2. Obliczamy  $r = b^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}$ . Jeśli  $r \neq \pm 1$ , to  $n$  jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego  $s = \left(\frac{b}{n}\right)$ . Jeśli  $r \neq s$ , to  $n$  jest złożona.

Jeżeli po zakończeniu algorytmu nie ma odpowiedzi " $n$  jest złożona", to test należy powtórzyć. Po  $k$ -krotnym powtórzeniu testu i stwierdzeniu, że  $n$  jest liczbą pseudopierwszą Eulera przy każdej z wybranych podstaw  $b$ , prawdopodobieństwo, że liczba  $n$  jest jednak złożona wynosi  $\frac{1}{2^k}$ .

**Przykład 2.9.** Używając testu Solovaya-Strassena sprawdzimy, czy liczba  $n = 29$  jest liczbą pierwszą.

Dla otrzymania wiarygodnego wyniku przeprowadzimy test trzykrotnie.

Pierwsze sprawdzenie:

1. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 27\}$ . Niech  $b = 7$ .
2.  $r = 7^{\frac{29-1}{2}} = 7^{14} \equiv 1 \pmod{29}$ .  $r = \pm 1$ , więc nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że 29 jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego  $s = \left(\frac{7}{29}\right) = 1$ .  $r = s$ , więc liczba 29 może być liczbą pierwszą.

Drugie sprawdzenie:

1. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 27\}$ . Niech  $b = 9$ .
2.  $r = 9^{\frac{29-1}{2}} = 9^{14} \equiv 1 \pmod{29}$ .  $r = \pm 1$ , więc nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że 29 jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego  $s = \left(\frac{9}{29}\right) = 1$ .  $r = s$ , więc liczba 29 może być liczbą pierwszą.

Trzecie sprawdzenie:

1. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 27\}$ . Niech  $b = 15$ .
2.  $r = 15^{\frac{29-1}{2}} = 15^{14} \equiv 28 \equiv -1 \pmod{29}$ .  $r = \pm 1$ , więc nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że 29 jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego  $s = \left(\frac{15}{29}\right) = -1$ .  $r = s$ , więc liczba 29 może być liczbą pierwszą.

Po trzykrotnym powtórzeniu testu prawdopodobieństwo, że liczba 29 jest jednak złożona wynosi  $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ .

**Przykład 2.10.** Używając testu Solovaya-Strassena sprawdzimy, czy liczba  $n = 33$  jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 31\}$ . Niech  $b = 5$ .
2. Obliczamy  $r = 5^{\frac{33-1}{2}} = 5^{16} \equiv 16 \pmod{33}$ .  $r \neq \pm 1$ , więc 33 jest liczbą złożoną.

Skrypt jednorazowego przejścia algorytmu testu pierwszości Solovaya-Strassena w programie Matlab został przedstawiony na końcu niniejszej pracy (skrypt 3.10). Tabela 2.7 zawiera wyniki otrzymane za pomocą powyższego algorytmu i czas działania funkcji dla każdej operacji.

Lp.	Liczba $n$	Wynik	Czas działania funkcji [s]
1	5	pierwsza	0.034387
2	47	pierwsza	0.032534
3	199	pierwsza	0.039209
4	1999	pierwsza	0.032661
5	6899	pierwsza	0.036613
6	94 427	pierwsza	0.034677
7	94 428	złożona	0.017758
8	15 472 145	złożona	0.027369
9	15 472 147	pierwsza	0.056256
10	15 485 857	pierwsza	0.033962

Tabela 2.7. Wyniki działania testu pierwszości Solovaya-Strassena dla liczb o różnej wielkości.

#### 2.2.4. Test pierwszości Millera-Rabina

*Test pierwszości Millera-Rabina* [13] jest kolejnym testem probabilistycznym, który z pewnym prawdopodobieństwem określa, czy dana liczba jest pierwsza, czy złożona. Oryginalna wersja tego testu, stworzona przez profesora Gary'ego L. Millera, jest testem deterministycznym, lecz jego prawidłowość bazuje na uogólnionej hipotezie Riemanna, która nie została dotychczas udowodniona. W 1975 roku kryptolog Michael O. Rabin przekształcił algorytm Millera do algorytmu probabilistycznego.

**Fakt 2.1.** Niech  $n$  będzie nieparzystą liczbą pierwszą i niech  $n - 1 = 2^s \cdot t$ , gdzie  $2 \nmid t$ . Niech  $b \in \varphi(n)$ . Wtedy albo  $b^t \equiv 1 \pmod{n}$ , albo  $b^{2^r t} \equiv -1 \pmod{n}$  dla pewnego  $r \in \{0, 1, \dots, s - 1\}$ .

**Definicja 2.4.** Niech  $n$  będzie nieparzystą liczbą złożoną i niech  $n - 1 = 2^s \cdot t$ , gdzie  $2 \nmid t$ . Niech  $b \in \varphi(n)$ . Jeżeli

- $b^t \equiv 1 \pmod{n}$  lub
- $b^{2^r t} \equiv -1 \pmod{n}$  dla pewnego  $r \in \{0, 1, \dots, s - 1\}$

to liczbę  $n$  nazywamy *liczbą silnie pseudopierwszą* przy podstawie  $b$ .

**Fakt 2.2.** Jeśli  $n$  jest nieparzystą liczbą złożoną, to jest silnie pseudopierwsza przy podstawie  $b$  dla co najwyżej 25% wszystkich podstaw  $b$  takich, że  $0 < b < n$ .

Algorytm działania testu pierwszości Millera-Rabina przebiega następująco:

1. Obliczamy  $n - 1 = 2^s \cdot t$ , gdzie  $t$  jest liczbą nieparzystą.
2. Losujemy  $b \in \{2, \dots, n - 2\}$ .
3. Obliczamy  $a = b^t \pmod{n}$ . Jeśli  $a = \pm 1$ , to  $n$  może być pierwsza.
4. Obliczamy  $a = b^{2^r t} \pmod{n}$  dla  $0 < r < s$ . Jeśli dla pewnego  $r$  otrzymamy  $a = -1$ , to  $n$  może być pierwsza, w przeciwnym razie  $n$  jest złożona.

Po otrzymaniu odpowiedzi " $n$  jest pierwsza" powtarzamy kroki algorytmu 2-4.

**Przykład 2.11.** Stosując test pierwszości Millera-Rabina sprawdzimy, czy liczba  $n = 53$  jest liczbą pierwszą.

1. Obliczamy  $53 - 1 = 52 = 2^2 \cdot 13$ , więc  $s = 2$ , a  $t = 13$ .
2. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 51\}$ . Niech  $b = 5$ .
3. Obliczamy  $a = 5^{13} \equiv 23 \pmod{53}$ . Nie możemy nic stwierdzić o liczbie 53, ponieważ  $a \neq \pm 1$ , więc wykonujemy następny krok.
4. Obliczamy  $a = 5^{2^r \cdot 13} \pmod{53}$  dla  $0 < r < 2$ . Weźmy  $r = 1$ . Wtedy

$$a = 5^{2 \cdot 13} \equiv 52 \equiv -1 \pmod{53}.$$

Z powyższych obliczeń wynika, że 53 może być pierwsza.

Poniżej sprawdzimy działanie algorytmu Millera-Rabina przy wyborze nowego  $b$ .

1.  $n = 53$ , więc  $s = 2$ , a  $t = 13$ .
2. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 51\}$ . Niech  $b = 15$ .
3. Obliczamy  $a = 15^{13} \equiv 1 \pmod{53}$ . 53 może być liczbą pierwszą, ponieważ  $a = \pm 1$ .

**Przykład 2.12.** Stosując test pierwszości Millera-Rabina sprawdzimy, czy liczba  $n = 65$  jest liczbą pierwszą.

1. Obliczamy  $65 - 1 = 64 = 2^6 \cdot 1$ , więc  $s = 6$ , a  $t = 1$ .
2. Losujemy  $b \in \{2, \dots, 63\}$ . Niech  $b = 7$ .
3. Obliczamy  $a = 7^1 \equiv 7 \pmod{65}$ .  $a \neq \pm 1$ , więc nie możemy nic stwierdzić na temat pierwszości liczby 65. W związku z tym przechodzimy do następnego kroku.
4. Obliczamy  $a = 7^{2^r \cdot 1} \pmod{65}$  dla  $0 < r < 6$ . Sprawdzamy wyniki dla  $r \in \{1, 2, \dots, 5\}$ :

$$r = 1 \Rightarrow a = 7^{2^1} = 7^2 \equiv 49 \pmod{65},$$

$$r = 2 \Rightarrow a = 7^{2^2} = 7^4 \equiv 61 \pmod{65},$$

$$r = 3 \Rightarrow a = 7^{2^3} = 7^8 \equiv 16 \pmod{65},$$

$$r = 4 \Rightarrow a = 7^{2^4} = 7^{16} \equiv 61 \pmod{65},$$

$$r = 5 \Rightarrow a = 7^{2^5} = 7^{32} \equiv 16 \pmod{65}.$$

Dla żadnej wartości  $r$  nie otrzymaliśmy  $a = -1$ , więc 65 jest liczbą złożoną.

Skrypt testu pierwszości Millera-Rabina przedstawiony został w dalszej części pracy (skrypt 3.11). Tabela 2.8 zawiera wyniki otrzymane za pomocą powyższego algorytmu i czas działania funkcji dla każdej operacji.

Lp.	Liczba $n$	Wynik	Czas działania funkcji [s]
1	5	pierwsza	0.036212
2	47	pierwsza	0.036644
3	199	pierwsza	0.038669
4	1999	pierwsza	0.037960
5	6899	pierwsza	0.037959
6	94 427	pierwsza	0.040197
7	94 428	złożona	0.018025
8	15 472 145	złożona	0.049525
9	15 472 147	pierwsza	0.035766
10	15 485 857	pierwsza	0.045164

Tabela 2.8. Wyniki działania testu pierwszości Millera-Rabina dla liczb o różnej wielkości.

### 3. Zastosowania w kryptografii



# Skrypty z programu Matlab

## Sito Eratostenesa

Listing 3.1. Skrypt funkcji Sito Eratostenesa.

```
1 function [n,p] = sitoEratostenesa(N)
2     sito=1:N;
3     a=2;
4     while a<=sqrt(N)
5         sito(a^2:a:N)=0;
6         a=find(sito>a,1);
7     end
8     p = sito(sito>1);
9     n = length(p);
10 end
```

## Sito Sundarama

Listing 3.2. Skrypt funkcji Sito Sundarama.

```
1 function L = sitoSundarama(n)
2 P = 1:n;
3 for i = 1:n
4     for j = i:(n-i)/(2*i+1)
5         if i+j+2*i*j<=n
6             P(i+j+2*i*j) = -1/2;
7         end
8     end
9 end
10 P = P(P>0);
11 P = [2, P*2+1];
12 L = length(P);
```

## Funkcja Eulera

Listing 3.3. Skrypt funkcji Eulera.

```
1 function [m]=euler_phi(n)
2 m=0;
3 for i=1:n
4     if gcd(i,n)==1
5         m=m+1;
6     end
7 end
8 end
```

## Rząd multiplikatywny

Listing 3.4. Skrypt funkcji liczącej rząd multiplikatywny.

```
1 function [k] = mult_order(n,a)
2
3 if gcd(a,n)~=1
4     disp('liczby nie są względnie pierwsze')
5     return
6 end
7
8 k=1;
9 while powermod(a,k,n) ~= 1
10     k=k+1;
11 end
12 end
```



## Metoda naiwna

Listing 3.5. Algorytm metody naiwnej.

```
1 function MetodaNaiwna(N)
2 tic;
3 X=[ 'Liczba ', num2str(N), ' jest liczbą złożoną.' ];
4 Y=[ 'Liczba ', num2str(N), ' jest liczbą pierwszą.' ];
5 Z=[ 'Liczba ', num2str(N), ...
6     ' nie jest ani pierwsza, ani złożona.' ];
7 if (N==2 || N==3)
8     disp(Y)
9     return
10 elseif (N==1)
11     disp(Z)
12     return
13 else
14     [n,p] = sitoEratostenesa(N);
15     lp = p(p<=sqrt(N));
16     l = length(lp);
17     m = ones(l,1);
18 end
19
20 for i=1:l
21     if mod(N, lp(i))==0
22         disp(X)
23         break
24     else
25         m(i)=0;
26     end
27 end
28 if sum(m)==0
29     disp(Y)
30 end
31 toc;
32 end
```

## Test pierwszości AKS

Listing 3.6. Skrypt testu pierwszości AKS.

```
1 function MetodaAKS(n)
2
3 for b=2:n-1
4     if round(log(n)/log(b))==log(n)/log(b)
5         disp('n jest złożona')
6         return
7     end
8 end
9
10 r=2;
11
12 if gcd(r,n)~=1
13     disp('n jest złożona')
14     return
15 end
16
17 k=mult_order(r,n);
18
19 while k<=(log2(n))^2
20     if gcd(r,n)~=1
21         disp('n jest złożona')
22         return
23     end
24     k=mult_order(r,n);
25     r=r+1;
26     if r>=n
27         disp('n jest pierwsza')
28         return
29     end
30 end
31
32 for a=2:min(r,n-1)
```

```

33     if mod(n,a)==0
34         disp('n jest złożona')
35         return
36     end
37 end
38
39 if n<=r
40     disp('n jest pierwsza')
41     return
42 end
43
44 m=euler_phi(r);
45 syms x
46
47 v=sym2poly(x^r-1);
48
49 for a=1:floor(sqrt(m)*log2(n))
50     [q1,w1]=deconv(sym2poly((x+a)^n),v);
51     [q2,w2]=deconv(sym2poly(x^n+a),v);
52     w1=mod(w1,n); w2=mod(w2,n);
53     if w1~=w2
54         disp('n jest złożona')
55         return
56     end
57 end
58 disp('n jest pierwsza')
59
60 end

```

## Test pierwszości Lucasa-Lehmera

Listing 3.7. Skrypt testu pierwszości Lucasa-Lehmera.

```
1 function testLucasaLehmana(n)
2     %n musi być liczbą pierwszą
3     m = 2^n - 1
4     X=[ 'Liczba ', num2str(m), ' jest liczbą złożoną.' ];
5     Y=[ 'Liczba ', num2str(m), ' jest liczbą pierwszą.' ];
6     s = ones(n-1,1);
7     s(1) = 4;
8     for i=2:n-1
9         s(i) = mod(power(s(i-1),2)-2,m);
10    end
11    if s(n-1)==0
12        disp(Y)
13    else disp(X)
14    end
15 end
```

## Test pierwszości Fermata

Listing 3.8. Skrypt testu pierwszości Fermata.

```
1 function testFermata(p,n)
2     X=[ 'Liczba ', num2str(p), ' jest liczbą złożoną.' ];
3     Y=[ 'Liczba ', num2str(p), ' może być pierwsza.' ];
4     if (p<=0 || n<=0)
5         disp('Liczby p i n muszą być większe od 0')
6         return
7     end
8     if (p==2 || p==3)
9         disp(Y)
10        return
11    end
12    if n>(p-3)
```

```

13         disp('Podaj mniejszą liczbę n')
14         return
15     end
16     pierwsza=zeros(n,1);
17     zlozona=zeros(n,1);
18     a=randperm(p-3,n)+1;
19     for i=1:n
20         if gcd(a(i),p)>1
21             zlozona(i)=1;
22         elseif powermod(a(i),p-1,p)~=1
23             zlozona(i)=1;
24         else
25             pierwsza(i)=1;
26         end
27     end
28     if sum(pierwsza)>=sum(zlozona)
29         disp(Y)
30         disp('Prawdopodobienstwo wynosi:')
31         disp(sum(pierwsza)/n*100)
32     else
33         disp(X)
34     end
35 end

```

## Test pierwszości Lehmana

Listing 3.9. Skrypt testu pierwszości Lehmana.

```

1 function testLehmana(p)
2 X = ['Liczba ', num2str(p), ' jest liczbą złożoną.'];
3 Y = ['Liczba ', num2str(p), ...
4     ' może być pierwsza z prawdopodobieństwem >= 50%.'];
5 if mod(p,2)==0
6     disp(X)
7     return

```

```

8 end
9 a = randi ([ (p-1)/2, p-1]);
10 b = powermod(a, (p-1)/2, p);
11 if (mod(b, p) == 1 || mod(b, p) - p == -1)
12     disp(Y)
13 else disp(X)
14 end
15 end

```

## Test pierwszoŹci Solovaya-Strassena

Listing 3.10. Skrypt testu pierwszoŹci Solovaya-Strassena.

```

1 function testSolovaya(n)
2     X = [ 'Liczba ', num2str(n), ' jest liczbą złożoną.' ];
3     Y = [ 'Liczba ', num2str(n), ' może być pierwsza.' ];
4     if mod(n, 2) == 0
5         disp(X)
6         return
7     end
8     b = randi ([2, n-2]);
9     r = powermod(b, (n-1)/2, n);
10    if (r ~= 1 && r-n ~= -1)
11        disp(X)
12        return
13    else
14        s = 1;
15        f = factor(n);
16        for i = 1:length(f)
17            s = s*powermod(b, (f(i)-1)/2, n);
18        end
19        if r ~= s
20            disp(X)
21            return
22        end

```

```

23     end
24     disp(Y)
25 end

```

## Test pierwszości Millera-Rabina

Listing 3.11. Skrypt testu pierwszości Millera-Rabina.

```

1 function TestMilleraRabina(n)
2     X=[ 'Liczba ', num2str(n), ' jest liczbą złożoną.' ];
3     Y=[ 'Liczba ', num2str(n), ' może być pierwsza.' ];
4     if (n==2 || n==3)
5         disp(Y)
6         return
7     end
8     if mod(n,2) == 0
9         disp(X)
10        return
11    end
12    f = factor(n-1);
13    s = 0;
14    for i = 1:length(f)
15        if f(i) == 2
16            s = s+1;
17        end
18    end
19    t = 1;
20    for j = s+1:length(f)
21        t = t*f(j);
22    end
23    b = randi([2,n-2]);
24    a1 = powermod(b,t,n);
25    if (a1 == 1 || a1 == n-1)
26        disp(Y)
27        return

```

```
28     end
29     for r = 1:s
30         a2(r) = powermod(b,2^(r-1)*t,n);
31     end
32     for i = 1:length(a2)
33         if a2(i) == n-1
34             disp(Y)
35             return
36         end
37     end
38     disp(X)
39 end
```



# Bibliografia

- [1] A. Iwaszkiewicz-Rudoszańska, *Wstęp do algebry i teorii liczb*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, (2009).
- [2] M. Karbowski, *Podstawy kryptografii*, Wydanie III, Helion, Gliwice, (2014).
- [3] W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, (2006).
- [4] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, (2003).
- [5] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne, Warszawa (1950).
- [6] J. Wojciechowski, *Mersenne Primes, An Introduction and Overview*, (2005).
- [7] M. Zakrzewski, *Teoria liczb*, Wydanie I, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, (2017).
- [8] <http://primes.utm.edu/largest.html> (dostęp 25.03.2018)
- [9] <https://www.mersenne.org/primes/> (dostęp 25.03.2018)
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/PrimeSpiral.html>(dostęp 24.03.2018)
- [11] [https://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/algebra/primality\\_v6.pdf](https://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/algebra/primality_v6.pdf) (dostęp 25.03.2018)
- [12] [https://en.wikipedia.org/wiki/Multiplicative\\_order](https://en.wikipedia.org/wiki/Multiplicative_order)
- [13] *notatki z wykładu Teoria Liczb i Elementy Kryptografii*



# Skorowidz

algorytm Euklidesa, 15

funkcja

addytywna, 20

arytmetyczna, 20

Eulera, 20

multiplikatywna, 20

w pełni addytywna, 20

w pełni multiplikatywna, 20

klasy reszt, 19

kongruencja, 17

kryterium Eulera w formie Legendre'a, 48

lemat

Bézout, 16

Euklidesa, 12

liczby

Carmichaela, 45

Fermata, 32

Mersenne'a, 33, 40

pierwsze, 11

pierwsze bliźniacze, 32

pierwsze Mersenne'a, 33

pierwsze Sophie Germain, 32

pseudopierwsze, 30

pseudopierwsze Eulera, 48

silnie pseudopierwsze, 51

względnie pierwsze, 12

złożone, 11

najmniejsza wspólna wielokrotność, 11

największy wspólny dzielnik, 11

odwrotność elementu modulo, 22

przystawanie modulo, 17

reszta z dzielenia, 15, 17

rząd multiplikatywny, 30

sito

Atkina, 24

Eratostenesa, 23

Sundarama, 25

spirala Ulama, 26

symbol

Jacobiego, 48

Legendre'a, 48

test pierwszości

AKS, 37

deterministyczny, 35

Fermata, 44

Lehmana, 46

Lucasa-Lehmera, 40

metoda naiwna, 35

Millera-Rabina, 50

probabilistyczny, 43

Solovaya-Strassena, 47

twierdzenie

Dirichleta, 32

Euklidesa, 15

Eulera, 29

małe Fermata, 28

małe Fermata dla wielomianów, 38

Wilsona, 27

zasadnicze arytmetyki, 12

układ reszt

pełny, 19

zredukowany, 20