POLITECHNIKA POZNAŃSKA

WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

Instytut Matematyki

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

TESTY PIERWSZOŚCI LICZB I ICH ZASTOSOWANIA W KRYPTOGRAFII

Małgorzata Lipińska

Promotor:
dr hab. Małgorzata Migda

POZNAŃ 2018

KARTA PRACY DYPLOMOWEJ Z DZIEKANATU
(kserokopia z podpisami)

Spis treści

Wstęp

Liczby pierwsze, elementy budujące liczby całkowite, były szczegółowo badane już od czasów starożytnych. Możliwość przedstawiania liczb całkowitych za pomocą iloczynu liczb pierwszych jest głównym powodem powstania całej teorii liczb i kryje się za interesującymi wynikami z tej dziedziny. Carl Friedrich Gauss powiedział, że jeśli matematyka jest królową nauk, to teoria liczb jest królową matematyki. To właśnie na podstawie właściwości liczb pierwszych zostało sformułowanych wiele interesujących twierdzeń, wniosków i przypuszczeń, które rozwijane są do dziś.

Celem niniejszej pracy jest zebranie w jednym miejscu najważniejszych faktów i informacji dotyczących liczb pierwszych i ich zastosowań w kryptografii, która w ostatnich latach rozwija się bardzo szybko. Praca została podzielona na trzy główne rozdziały, zaczynając od rzeczy bardziej teoretycznych, a kończąc na praktycznych zastosowaniach.

W pierwszym rozdziale zawarty jest zbiór najważniejszych i kluczowych dla niniejszej pracy zagadnień z zakresu teorii liczb. Na początek zajmiemy się podstawowymi twierdzeniami z tej dziedziny, między innymi zdefiniujemy zasadnicze twierdzenie arytmetyki o rozkładzie liczb naturalnych na czynniki pierwsze i twierdzenie Euklidesa o nieskończonej liczbie liczb pierwszych. W podrozdziale na temat kongruencji omówimy własności przystawania modulo, które wykorzystamy później w dowodach twierdzenia Wilsona, małego twierdzenia Fermata i twierdzenia Eulera. Zajmiemy się także algorytmami wyszukującymi liczby pierwsze z zadanego przedziału, czyli sitami Eratostenesa, Atkina i Sundarama. Na koniec tego rozdziału przedstawimy pewne szczególne rodzaje liczb pierwszych, miedzy innymi liczby pierwsze Mersenne'a i Fermata.

Drugi rozdział w całości poświęcony jest testom pierwszości liczb, zarówno deterministycznym, jak i probabilistycznym. W tych pierwszych algorytmy wydają tak zwany certyfikat pierwszości, czyli ich wynik jest prawidłowy z prawdopodobieństwem 1. Testy deterministyczne, które omówimy w tym rozdziale, to metoda naiwna, wykorzystująca działanie sita, test pierwszości AKS, który swoje działanie opiera na małym twierdzeniu Fermata dla wielomianów, oraz test Lucasa-Lehmera - test pierwszości dla liczb Mersenne'a. Testy probabilistyczne, czyli testy używające w swoim działaniu losowości, znajdują się w drugiej części tego rozdziału. Omówimy test pierwszości Fermata, czyli test opierający się na założeniu, że zachodzi

wynikanie odwrotne do małego twierdzenia Fermata. Przy okazji omawiania tego algorytmu wprowadzimy pojęcie liczb Carmichaela, czyli liczb złożonych, które mogą dawać błędny wynik działania testu Fermata. Następnie krótko zajmiemy się testem pierwszości Lehmana i przejdziemy do testu Solovaya-Strassena, gdzie poznamy tak zwany symbol Legendre'a. Ostatnim omówionym w niniejszej pracy testem będzie test pierwszości Millera-Rabina, który wyznacza liczby silnie pseudopierwsze. Rozdział ten wzbogacimy również o konkretne przykłady i przedstawimy działanie skryptów z programu Matlab, napisanych na podstawie algorytmów działania wyżej wymienionych testów. Będziemy porównywać szybkość testu i jakość wyniku dla zadanych liczb o różnej wielkości, a otrzymane wnioski przedstawimy w tabelach.

W trzecim rozdziale poznamy praktyczne zastosowania liczb pierwszych i testów pierwszości liczb w kryptografii. Na początku nakreślimy krótko historię tej dziedziny oraz wyjaśnimy, w jaki sposób omawiane przez nas liczby znalazły swoje zastosowanie właśnie w szyfrowaniu. Następnie przejdziemy do przedstawienia systemów kryptograficznych RSA i Rabina, w których klucze publiczne i prywatne generowane są właśnie w oparciu o duże liczby pierwsze. Jak się okaże, do znalezienia takich liczb niezbędne będą testy pierwszości. Na koniec wprowadzimy pojęcie generatorów liczb pseudolosowych, które są stosowane w kryptografii i których bezpieczne działanie determinowane jest przez użycie liczb pierwszych.

Spis oznaczeń i symboli

a, b - liczby naturalne

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Z}_+$ - zbiór liczb całkowitych dodatnich

$\mathbb{P}$ - zbiór liczb pierwszych

$a \mid b$ - a dzieli b

$a \nmid b$ - a nie dzieli b

$NWW(a, b)$ - największa wspólna wielokrotność a i b

$NWD(a, b)$ - największy wspólny dzielnik a i b

$(a, b) = 1$ - a i b są względnie pierwsze

$o_n(a)$ - rząd elementu a modulo n

1. Liczby pierwsze

W poniższym rozdziale zawarte zostały najważniejsze zagadnienia z zakresu teorii liczb. Poznamy w nim podstawowe twierdzenia o liczbach pierwszych, między innymi zasadnicze twierdzenie arytmetyki o rozkładzie liczb naturalnych na czynniki pierwsze i twierdzenie Euklidesa o nieskończonej liczbie liczb pierwszych. W rozdziale tym zajmiemy się również kongruencjami, których znajomość jest niezbędna do zrozumienia twierdzenia Wilsona, małego twierdzenia Fermata i twierdzenia Eulera. Oprócz tego przedstawimy algorytmy wyszukiwania liczb pierwszych z zadanego przedziału oraz pewne szczególne rodzaje takich liczb.

1.1. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki

Jednym z najważniejszymi twierdzeń dotyczących liczb pierwszych jest zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Jego wprowadzenie i udowodnienie wymaga zdefiniowania kilku podstawowych pojęć z zakresu teorii liczb, które zostaną omówione w tym podrozdziale.

Definicja 1.1. [4, s. 3] Mówimy, że *liczba całkowita b jest podzielna przez liczbę całkowitą a*, jeśli istnieje taka liczba całkowita e, że zachodzi $b = ae$. Wtedy liczba a jest dzielnikiem liczby b, z kolei o liczbie b mówi się, że jest wielokrotnością a.

Jeśli liczba b jest podzielna przez a (a dzieli b), to używamy oznaczenia $a \mid b$, natomiast w przeciwnym przypadku stosujemy oznaczenie $a \nmid b$.

Definicja 1.2. *Liczbą pierwszą* nazywamy liczbę naturalną większą od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: jedynkę i samą siebie.

Zbiór wszystkich liczb pierwszych oznacza się literą $\mathbb{P}$. Liczbą złożoną jest więc liczba, która ma więcej niż dwa dzielniki. Warto zauważyć, że 1 nie jest liczbą ani pierwszą, ani złożoną.

Definicja 1.3. *Najmniejszą wspólną wielokrotnością* dla zadanych liczb całkowitych nazywamy najmniejszą liczbę naturalną, którą dzieli się bez reszty przez każdą z tych liczb.

Najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b oznacza się symbolem $NWW(a, b)$, np. $NWW(2, 15) = 30$.

Definicja 1.4. *Największym wspólnym dzielnikiem* dla zadanych dwóch lub więcej liczb całkowitych nazywamy największą liczbę naturalną, która dzieli każdą z tych liczb.

Największy wspólny dzielnik liczb a i b oznaczany jest symbolem $NWD(a, b)$, np. $NWD(18, 15) = 3$.

Definicja 1.5. *Liczbami względnie pierwszymi* nazywamy liczby całkowite, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1.

Jeśli dwie liczby a i b są względnie pierwsze to zapisuje się to jako $NWD(a, b) = 1$ lub $(a, b) = 1$.

Lemat 1.1. (Euklides) [8, s. 10] Jeśli liczba pierwsza p dzieli iloczyn ab, to dzieli przynajmniej jeden z tych czynników. Inaczej, jeśli $p \in \mathbb{P}$ oraz $p \mid ab$, to $p \mid a$ lub $p \mid b$.

Dowód. Przyjmijmy, że $p \nmid a$, czyli $NWD(a, p) = 1$, gdyż $p \in \mathbb{P}$. Wtedy $p \mid b$.

■

Lemat 1.2. [4, s. 9] Jeżeli $p \in \mathbb{P}$ i $p \mid a_1 \cdot ... \cdot a_n$, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leq k \leq n)$ takie, że $p \mid a_k$.

Dowód. Z lematu 1.1 wiemy, że jeżeli $p \in \mathbb{P}$ oraz $p \mid ab$, to $p \mid a$ lub $p \mid b$. Iloczyn $a_1 \cdot ... \cdot a_n$ można przedstawić w postaci $(a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1})a_n$. Wtedy $p \mid (a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1})a_n$, czyli $p \mid a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1}$ lub $p \mid a_n$. Jeżeli $p \mid a_n$, to lemat jest prawdziwy. Jeśli $p \mid a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1}$ i $p \nmid a_n$ to powtarzamy powyższe rozumowanie dla $p \mid (a_1 \cdot ... \cdot a_{n-2})a_{n-1}$ i postępujemy podobnie do chwili znalezienia takiego k, że $p \mid a_k$ lub do momentu, gdy przedmiotem naszych rozważań będzie $p \mid a_1 a_2$. Wtedy zgodnie z lematem 1.1 $p \mid a_1$ lub $p \mid a_2$, co kończy dowód.

■

Lemat 1.3. [4, s. 9] Jeśli liczby $p, q_1, ..., q_n \in \mathbb{P}$ oraz $p \mid q_1 \cdot ... \cdot q_n$, to $p = q_k$ dla pewnego k, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$.

Dowód. Z lematu 1.2 wiadomo, że istnieje takie k, że $p \mid q_k$, ale $q_k \in \mathbb{P}$ oraz $p > 1$, skąd wynika, że $p = q_k$.

■

Trzy powyższe lematy to lematy pomocnicze, które posłużą do udowodnienia zasadniczego twierdzenia arytmetyki, mówiącego o tym, że liczby pierwsze są czynnikami, na które można rozłożyć wszystkie złożone liczby naturalne.

Twierdzenie 1.1. *(Zasadnicze twierdzenie arytmetyki) [4, s. 10] Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.*

Dowód. Dowód powyższego twierdzenia podzielimy na dwie części. Pierwsza dotyczyć będzie istnienia rozkładu, a druga jego jednoznaczności.

Istnienie rozkładu. Załóżmy, że liczba n jest liczbą złożoną. Wtedy

$$D = \{d \in N, 1 < d < n, d \mid n\}$$

jest niepustym zbiorem dzielników liczby n. Niech p_1 będzie najmniejszą liczbą zawartą w tym zbiorze. Zatem p_1 jest liczbą pierwszą, gdyż w przeciwnym przypadku istniałoby $q < p_1$ takie, że $q > 1$ i $q \mid p_1$, co byłoby sprzeczne z wyborem p_1. Stąd wynika, że

$$n = p_1 \cdot n_1,$$

gdzie $1 < n_1 < n$. Jeżeli liczba $n_1 \in \mathbb{P}$, to żądany rozkład został osiągnięty, w przeciwnym wypadku rozumowanie należy powtórzyć dla n_1, skąd dostajemy

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_1,$$

gdzie $1 < n_2 < n_1$, $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Na koniec uzyskuje się rozkład

$$n = p_1 \cdot ... \cdot p_k,$$

ponieważ $n_1 > n_2 > ... > 1$ jest malejącym ciągiem liczb naturalnych, czyli jest ciągiem skończonym.

Jednoznaczność rozkładu. Załóżmy przeciwnie, że rozkład nie jest jednoznaczny, czyli $n = p_1 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot ... \cdot q_s$, $(r \leqslant s)$, gdzie p_i i q_j dla $i = 1, 2, ..., r$ i $j = 1, 2, ..., s$ są pierwsze i uporządkowane niemalejąco. Ponieważ $p_1 \mid q_1 ... q_s$, zatem z lematu 1.3 wynika, że $p_1 = q_k$ dla pewnego k, gdzie $1 \leqslant k \leqslant s$, skąd wynika, że $p_1 \geqslant q_1$. Analogicznie $q_1 \mid p_1 ... p_r$, więc $q_1 \geqslant p_1$, czyli $p_1 = q_1$. Dzieląc początkową równość przez $p_1 = q_1$ i powtarzając to samo rozumowanie dla kolejnych czynników obu rozkładów, otrzymujemy

$$1 = q_{r+l} \cdot ... \cdot q_s,$$

jeśli $r < s$. Jest to sprzeczne dla $q_{r+l}, ..., q_s \in \mathbb{P}$, a więc $r = s$ oraz $p_i = q_i$ dla każdego $i = 1, 2, ..., r$, czyli rozkład jest jednoznaczny.

■

Z zasadniczego twierdzenia arytmetyki (twierdzenie 1.1) wynika bezpośrednio poniższy wniosek.

Wniosek 1.1. [4, s. 10] Każda liczba naturalna $n > l$ może być jednoznacznie zapisana w postaci kanonicznej

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r},$$

gdzie $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ dla każdego $i = 1, 2, ..., r$ oraz $p_1 < p_2 < ... < p_r$.

Do obliczania NWW i NWD stosuje się najczęściej rozkład badanych liczb na iloczyn liczb pierwszych.

Przykład 1.1. Obliczymy NWW i NWD liczb 123 i 567.
Rozkład danych liczb na czynniki pierwsze:

$$123 = 3 \cdot 41,$$
$$567 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Aby obliczyć $NWW(a, b)$ należy pomnożyć wszystkie czynniki pierwsze liczby a i czynniki pierwsze liczby b, które się nie powtarzają przy rozkładzie a. Zatem

$$NWW(123, 567) = 3 \cdot 41 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^4 \cdot 7 \cdot 41 = 23247.$$

$NWD(a, b)$ to iloczyn czynników pierwszych, które powtarzają się w rozkładzie liczby a i b. Stąd

$$NWS(123, 567) = 3.$$

Wniosek 1.2. [8, s. 8] Dla liczb $a, b \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = ab.$$

Dowód. Niech

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n},$$
$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n},$$

będą rozkładami liczb a i b na czynniki pierwsze. Wówczas

$$NWD(a, b) = p_1^{min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot ... \cdot p_n^{min(\alpha_n, \beta_n)},$$
$$NWW(a, b) = p_1^{max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot ... \cdot p_n^{max(\alpha_n, \beta_n)}.$$

Po pomnożeniu $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b)$ otrzymujemy

$$p_1^{min(\alpha_1, \beta_1) + max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{min(\alpha_2, \beta_2) + max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot ... \cdot p_n^{min(\alpha_n, \beta_n) + max(\alpha_n, \beta_n)} =$$
$$= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n + \beta_n} =$$
$$= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n} = a \cdot b.$$

■

1.2. Twierdzenie i algorytm Euklidesa

Euklides, żyjący około 300 roku p.n.e., to grecki matematyk pochodzący z Aten, uczeń Akademii Platońskiej i wykładowca w słynnej Szkole Aleksandryjskiej. Zaliczany jest do grona największych matematyków w historii, znany głównie jako twórca podstaw geometrii klasycznej. Jego największym dziełem są *Elementy*, które stanowią jedną z pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Podręcznik ten zawiera między innymi dwa klasyczne i bardzo ważne pojęcia z zakresu teorii liczb - twierdzenie Euklidesa o liczbach pierwszych i algorytm pozwalający znaleźć największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych.

Twierdzenie 1.2. *(Euklides) [8, s. 5] Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Powstało kilkanaście dowodów twierdzenia 1.2. Poniżej przedstawiono pierwszy z nich, który został sformułowany w IV wieku p.n.e. przez Euklidesa w *Elementach*.
Dowód. Załóżmy, że istnieje skończony zbiór liczb pierwszych ponumerowanych kolejno $p_1, p_2, ..., p_k$. Rozważmy liczbę

$$n = p_1 p_2 ... p_k + 1.$$

Z twierdzenia 1.1 wynika, że n może być liczbą pierwszą różną od wszystkich p_i lub ma rozkład na czynniki pierwsze. Załóżmy, że jednym z tych czynników jest p. Liczba n przy dzieleniu przez każde z p_i daje resztę 1, więc p jest różne od wszystkich p_i. Z tego wynika, że albo p jest pierwsze lub samo n jest kolejną liczbą pierwszą, większą od każdego p_i, co jest sprzeczne z założeniem.

■

Algorytm Euklidesa to szybki sposób wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.

Do zrozumienia działania powyższego algorytmu potrzebne będzie zdefiniowanie pojęcia reszty z dzielenia.

Definicja 1.6. [8, s. 8] Dla dowolnej liczby całkowitej n i dowolnej liczby naturalnej k istnieje tylko jedna para liczb całkowitych q i r taka, że

$$n = qk + r, \text{ gdzie } 0 \leq r \leq k - 1.$$

Liczbę r nazywa się wtedy *resztą z dzielenia.*

Zasadę działania algorytmu Euklidesa najlepiej wyjaśnić przy pomocy przykładu.

Przykład 1.2. Za pomocą algorytmu Euklidesa wyznaczymy $NWD(1628, 374)$. Działanie algorytmu przebiega następująco:

$$\begin{aligned} 1628 &= 4 \cdot 374 + 132 \\ 374 &= 2 \cdot 132 + 110 \\ 132 &= 1 \cdot 110 + 22 \\ 110 &= 5 \cdot 22 + 0. \end{aligned}$$

Ostatnia niezerowa reszta jest szukanym największym wspólnym dzielnikiem badanych liczb. W przypadku powyższego przykładu $NWD(1628, 374) = 22$.

Lemat 1.4. (Bézout) [8, s. 9] Niech $NWD(a, b) = d$. Wówczas istnieją dwie liczby całkowite k i l takie, że

$$d = ka + lb.$$

Dowód. Niech a i b będą niezerowymi liczbami całkowitymi, a K oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych postaci $am + bn$, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$. Zbiór K jest niepusty, więc istnieje w nim element najmniejszy d, gdzie $d = ax + by$. Zgodnie z algorytmem dzielenia z resztą, istnieją takie liczby $q, r \in \mathbb{Z}$, dla których zachodzi $a = qd + r$, przy czym $0 \leq r < d$. Z drugiej strony

$$r = a - qd = a - q(ax + by) = a - aqx - bqy = a(1 - qx) + b(-qy).$$

Jeżeli $0 < r < d$, to znaczy, że $r \in K$, co jest sprzeczne ze stwierdzeniem, że d jest najmniejszym elementem w K. Stąd $r = 0$, a z tego wynika, że $a = qd$, a to oznacza, że $d|a$. Podobnie można wykazać, że $d|b$, skąd wynika, że d jest wspólnym dzielnikiem dla a i b. Jeśli c jest innym wspólnym dzielnikiem liczb a i b, to c dzieli również $ax + by = d$, co z definicji oznacza, że $d = NWD(a, b)$.

■

Wniosek 1.3. Niech $(a, b) = 1$. Wtedy istnieją dwie liczby całkowite k i l takie, że

$$ka + lb = 1.$$

1.3. Kongruencje i ich zastosowania

W poniższym rozdziale zawarte zostały najważniejsze informacje i twierdzenia związane z kongruencją. Będą one wielokrotnie wykorzystywane w dalszej części pracy.

Definicja 1.7. [6, s. 41] Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Mówimy, że liczby całkowite a i b *przystają modulo* n, jeżeli ich różnica $a-b$ jest podzielna przez n. Symbolicznie zapisuje się to jako

$$a \equiv b \ (mod\ n).$$

Relację tę nazywamy kongruencją lub przystawaniem modulo.

Jeśli zachodzi kongruencja $a \equiv b \ (mod\ n)$, to b jest resztą z dzielenia liczby a przez n. Jeżeli $a \equiv 0 \ (mod\ n)$, to znaczy, że $n \mid a$.

Twierdzenie 1.3. *Kongruencja jest relacją równoważności, tzn. jest ona*

1. *Zwrotna, tj.*

$$\bigvee_{a\in\mathbb{Z}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a \equiv a \ (mod\ n).$$

2. *Symetryczna, tj.*

$$\bigvee_{a,b\in\mathbb{Z}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a \equiv b \ (mod\ n) \Leftrightarrow b \equiv a \ (mod\ n).$$

3. *Przechodnia, tj.*

$$\bigvee_{a,b,c\in\mathbb{Z}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (a \equiv b \ (mod\ n) \wedge b \equiv c \ (mod\ n)) \Rightarrow a \equiv c \ (mod\ n).$$

Dowód. 1 Jeżeli zachodzi $a \equiv a \ (mod\ n)$, to oznacza, że prawdziwa jest kongruencja $a - a \equiv 0 \ (mod\ n)$, co kończy dowód, ponieważ liczba 0 jest podzielna przez każde $n \in \mathbb{N}$.

2 Jeżeli $a \equiv b \ (mod\ n)$, to $a-b = kn$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to $b-a = -kn$. Stąd wynika, że $b \equiv a \ (mod\ n)$.

3 Jeżeli $a \equiv b \ (mod\ n)$ i $b \equiv c \ (mod\ n)$, to $a-b \equiv 0 \ (mod\ n)$ i $b-c \equiv 0 \ (mod\ n)$. Opierając się na tożsamości

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

otrzymujemy, że $a - c \equiv 0 \ (mod\ n)$, skąd wynika, że $a \equiv c \ (mod\ n)$.

■

Twierdzenie 1.4. *[5, s. 37] Kongruencje mają następujące własności:*

(i) Jeżeli $a \equiv b \ (mod\ n)$ *oraz* $c \equiv d \ (mod\ n)$, *to*

$$a + c \equiv b + d \ (mod\ n),$$

$$a - c \equiv b - d \ (mod\ n),$$

$$ac \equiv bd \ (mod\ n).$$

(ii) Kongruencja $a \equiv b \pmod{n}$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $n|(a-b)$.

(iii) Jeżeli $ab \equiv ac \pmod{n}$ *i* $(a,n)=1$, *to* $b \equiv c \pmod{n}$.

(iv) Jeżeli $a \in \mathbb{N}$ *i* $ab \equiv ac \pmod{an}$, *to* $b \equiv c \pmod{n}$.

(v) Jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$, *to* $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Dowód. (i) Wiemy, że $a-b=hn$ i $c-d=gn$, gdzie $g,h \in \mathbb{Z}$. Z tożsamości

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)=(h+g)n,$$

wynika, że

$$(a+c)-(b+d) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{n}$$

Podobnie dla odejmowania prawdziwa jest tożsamość

$$(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)=(h-g)n,$$

skąd wynika, że

$$(a-c)-(b-d) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a-c \equiv b-d \pmod{n}.$$

Opierając się na tożsamości

$$ac-bd=(a-b)c+(c-d)b=hnc+gnb=(hc+gb)n,$$

otrzymujemy, że

$$ac-bd=0 \pmod{n} \Rightarrow ac=bd \pmod{n}.$$

(ii) Jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$ to $a-b \equiv 0 \pmod{n}$, więc $a-b=hn$, gdzie $h \in \mathbb{Z}$. Zachodzi $n|hn$, skąd wynika, że $n|a-b$. Dowód implikacji w drugą stronę przebiega analogicznie.

(iii) Jeżeli $ab \equiv ac \pmod{n}$, to znaczy, że $n|(b-c)a$. Założenie $(a,n)=1$ oznacza, że $n \nmid a$, więc $n|(b-c)$. Stąd wynika, że $b \equiv c \pmod{n}$.

(iv) Jeżeli $ab \equiv ac \pmod{an}$, to $an|a(b-c)$, z czego wynika, że $n|(b-c)$, więc $b \equiv c \pmod{n}$.

(v) Dowód indukcyjny. Dla $k=1$ kongruencja zachodzi. Załóżmy, że teza jest spełniona dla pewnego k. Mamy więc $a \equiv b \pmod{n}$ oraz $a^k \equiv b^k \pmod{n}$. Wykorzystując własność (i) mnożymy przez siebie obie kongruencje, otrzymując

$$aa^k \equiv bb^k \pmod{n} \Rightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{n},$$

co kończy dowód.

■

Za pomocą powyższych własności kongruencji możemy między innymi wykonywać tak zwane szybkie potęgowanie modulo, co przedstawione jest w poniższym przykładzie.

Przykład 1.3. Korzystając z twierdzenia 1.4 obliczymy 4^{22} $(mod\ 23)$.

Wiemy, że

$$4 \equiv 4\ (mod\ 23). \tag{1.1}$$

Na mocy własności (i) i (v) twierdzenia 1.4 możemy przemnożyć stronami kongruencję (1.1) przez samą siebie, czyli możemy podnieść ją do drugiej potęgi. Otrzymujemy

$$4^2 \equiv 16\ (mod\ 23) \equiv -7\ (mod\ 23). \tag{1.2}$$

Następnie podnosimy do potęgi drugiej kongruencję (1.2), skąd otrzymujemy

$$4^4 \equiv 49\ (mod\ 23) \equiv 3\ (mod\ 23). \tag{1.3}$$

Powtarzamy potęgowanie dla kongruencji (1.3), a następnie dla kongruencji (1.4)

$$4^8 \equiv 9\ (mod\ 23), \tag{1.4}$$

$$4^{16} \equiv 81\ (mod\ 23) \equiv 12\ (mod\ 23). \tag{1.5}$$

Następnie mnożymy stronami kongruencje (1.3) i (1.5). Mamy

$$4^{20} \equiv 36\ (mod\ 23) \equiv 13\ (mod\ 23). \tag{1.6}$$

Ostatnim krokiem jest pomnożenie kongruencji (1.2) i (1.6), skąd otrzymujemy

$$4^{22} \equiv -91\ (mod\ 23) \equiv 1\ (mod\ 23).$$

Z powyższych obliczeń wynika, że $4^{22} \equiv 1\ (mod\ 23)$.

Definicja 1.8. [4, s. 30] *Klasami reszt modulo m* nazywamy warstwy (klasy abstrakcji) kongruencji w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Każdą liczbę całkowitą a można zapisać w postaci $a = qm + r$, gdzie $0 \leq r < m$, więc każda liczba całkowita przystaje modulo m do jednej z liczb ze zbioru $\{0, 1, ..., m-1\}$. Żadne dwie liczby spośród liczb 0,1, ... , $m-1$ nie przystają do siebie modulo m, więc zbiór postaci $\{0, 1, ..., m-1\}$ tworzy pełny układ reprezentantów warstw.

Definicja 1.9. [4, s. 31] *Pełnym układem reszt modulo m* nazywamy pełny układ reprezentantów klas relacji przystawania modulo m.

Definicja 1.10. [4, s. 31] *Zredukowanym układem reszt modulo* m nazywamy układ reprezentantów tych klas relacji przystawania modulo m, które składają się z liczb względnie pierwszych z modułem m.

Poniżej wprowadzimy pojęcie funkcji arytmetycznej, które jest niezbędne do zdefiniowania funkcji Eulera, wykorzystującej pojęcie zredukowanego układu reszt modulo.

Definicja 1.11. [1, s. 67] *Funkcją arytmetyczną* nazywamy funkcję działającą ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb zespolonych.

Rozważane w tej pracy funkcje przyjmują wartości całkowite.

Definicja 1.12. [1, s. 67] Funkcję arytmetyczną f nazywamy *funkcją addytywną*, gdy dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ takich, że $(m, n) = 1$, zachodzi równość

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi dla dowolnych m i n (również dla $(m, n) > 1$), to funkcję f nazywamy funkcją w pełni addytywną.

Definicja 1.13. [1, s. 68] Funkcję arytmetyczną f nazywamy *funkcją multiplikatywną*, jeżeli f nie jest tożsamościowo równa 0 i dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ takich, że $(m, n) = 1$, zachodzi równość

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi dla dowolnych m i n (również dla $(m, n) > 1$), to funkcję f nazywamy funkcją w pełni multiplikatywną.

Definicja 1.14. [8, s. 31] *Funkcją φ (Eulera)* lub tocjentem nazywamy funkcję arytmetyczną, która każdej liczbie naturalnej n przypisuje liczbę elementów zredukowanego układu reszt modulo n.

Możemy zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej n zbiór

$$\phi(n) := \{k : 1 \leq k \leq n, (k, n) = 1\}$$

tworzy zredukowany układ reszt modulo n.

Fakt 1.1. Funkcji Eulera ma następujące własności:

(1) Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $\varphi(n) \leq n - 1$.
(2) Jeśli liczby naturalne n i m są względnie pierwsze to $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(3) Jeśli p jest liczbą pierwszą to $\varphi(p) = p - 1$.

(4) Jeśli p jest liczbą pierwszą to $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$.

(5) Jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi to $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$.

(6) Jeśli $p_1, p_2, ..., p_k$ są wszystkimi czynnikami pierwszymi liczby n bez powtórzeń, to

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Przykład 1.4. Obliczymy $\varphi(9)$, $\varphi(12)$, $\varphi(13)$.

Pełnym układem reszt modulo 9 jest zbiór $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Jeśli usuniemy z niego wszystkie liczby, które nie są względnie pierwsze z 9, otrzymamy zbiór $R = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Liczba elementów zbioru R jest równa 6, więc $\varphi(9) = 6$. Wartość funkcji Eulera dla liczby 9 można obliczyć również korzystając z własności (4) stwierdzenia 1.1. Wtedy $\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3(3-1) = 3 \cdot 2 = 6$.

Pełnym układem reszt modulo 12 jest zbiór $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Usuwamy z niego wszystkie liczby, które nie są względnie pierwsze z 12 i otrzymujemy zbiór $R = \{1, 5, 7, 11\}$. Liczba elementów zbioru R wynosi 4, więc $\varphi(12) = 4$.

Wartość funkcji φ dla liczby 13 można obliczyć z własności (3) stwierdzenia 1.1:

$$\varphi(13) = 13 - 1 = 12.$$

Funkcja Eulera jest bardzo prosta do zaimplementowania w środowisku Matlab (skrypt 3.3). Poniżej przedstawiono tabelę z wynikami i czasem działania powyższej funkcji dla liczb o różnej wielkości.

Lp.	Liczba n	Wartość funkcji $\varphi(n)$	Czas działania funkcji $[s]$
1	23	22	0.023398
2	100	40	0.029472
3	567	324	0.047793
4	1000	400	0.051363
5	12345	6576	0.496064
6	123456	41088	5.326313
7	1234567	1224720	65.953887

Tabela 1.1. Wartość funkcji $\varphi(n)$ dla liczb o różnej wielkości.

Fakt 1.2. Jeśli zbiór $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(m)}\}$ tworzy zredukowany układ reszt modulo m i $(k, m) = 1$, to zbiór $\{ka_1, ka_2, ..., ka_{\varphi(m)}\}$ także tworzy zredukowany układ reszt modulo m.

Definicja 1.15. [8, s. 15] *Odwrotnością elementu a modulo n* nazywamy taki element, oznaczany przez a^{-1}, że

$$aa^{-1} \equiv 1 \ (mod \ n).$$

Twierdzenie 1.5. *Liczba naturalna a jest odwracalna modulo n wtedy i tylko wtedy, gdy a i n są względnie pierwsze.*

Dowód. Niech $(a, n) = 1$. Wtedy na mocy lematu Bézouta (lemat 1.4) dla pewnych k i l zachodzi $ka + ln = 1$. Korzystając z własności (i) twierdzenia 1.4 otrzymujemy

$$ka + ln = 1 \ (mod \ n),$$

skąd

$$ka = 1 \ (mod \ n),$$

więc k jest odwrotnością elementu a modulo n.

Implikacja w drugą stronę: Odwracalność elementu a modulo n oznacza, że istnieje k, dla którego prawdziwa jest kongruencja $ka \equiv 1 \ (mod \ n)$. Wówczas $ka - 1 \equiv 0 \ (mod \ n)$, skąd wynika, że

$$ka - 1 = ln \Rightarrow ka + (-l)n = 1.$$

Z powyższej tożsamości wynika, że a i n są liczbami względnie pierwszymi.

■

Przykład 1.5. Znajdziemy odwrotność liczby 12 modulo 5. Zachodzi $(12, 5) = 1$, więc odwrotność liczby 12 istnieje. Zgodnie z definicją odwrotności modulo sprawdzamy kolejne iloczyny

$$12 \cdot 1 = 12 \equiv 2 \ (mod \ 5),$$

$$12 \cdot 2 = 24 \equiv 4 \ (mod \ 5),$$

$$12 \cdot 3 = 36 \equiv 1 \ (mod \ 5).$$

Stąd wynika, że odwrotnością liczby 12 modulo 5 jest liczba 3.

1.4. Sito Eratostenesa, Atkina i Sundarama

Problem z liczbami pierwszymi polega na ich nieregularnym rozmieszczeniu pośród liczb naturalnych. Nie odkryto dotąd żadnego wzoru pozwalającego na wyszukiwanie kolejnych liczb pierwszych, ale powstało kilka metod znajdowania takich

liczb w zadanym przedziale. Metody te są nazywane sitami, ponieważ aby znaleźć wszystkie liczby pierwsze mniejsze od liczby n wystarczy ze zbioru liczb naturalnych mniejszych lub równych n *odsiać* liczby złożone i jedynkę. Pierwszy służący do tego algorytm został przedstawiony przez Eratostenesa z Cyreny (III-II w. p.n.e.). Sito to zostało później ulepszone przez Arthura Atkina i D.J. Bernsteina. Innym, mniej znanym sitem, jest sito Sundarama.

Sito Eratostenesa [2, s. 55] jest algorytmem wyszukiwania kolejnych liczb pierwszych z przedziału $\{2, n\}$.

Algorytm polega na usuwaniu liczb złożonych ze zbioru liczb naturalnych większych od 1 i mniejszych bądź równych n. Na początek z zadanego zbioru wybieramy liczbę najmniejszą i usuwamy wszystkie jej wielokrotności z wyjątkiem jej samej. Następnie wybieramy najmniejszą liczbę z pozostałych i znów usuwamy wielokrotności tej liczby większe od niej. Postępujemy tak dopóki liczba, której wielokrotności mamy usuwać, jest mniejsza niż $\sqrt{n}$. Na koniec procesu w zbiorze pozostaną tylko liczby pierwsze.

Przykład 1.6. Za pomocą sita Eratostenesa wyznaczymy wszystkie liczby pierwsze należące do zbioru $P = \{2, 3, ..., 40\}$.

I. Najmniejszą liczbą w zbiorze P jest 2, więc usuwamy wszystkie większe od 2 wielokrotności liczby 2.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}.$$

II. Kolejną najmniejszą liczbą w zbiorze (nie biorąc pod uwagę liczby 2) jest liczba 3, więc usuwamy wszystkie jej wielokrotności, przy czym nie usuwamy samej trójki.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37\}.$$

III. Następną najmniejszą liczbą w zbiorze (nie biorąc pod uwagę liczb 2 i 3) jest liczba 5, więc wyrzucamy ze zbioru P wszystkie jej wielokrotności, zostawiając samą 5.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}.$$

Krok trzeci jest ostatni, ponieważ w czwartym kroku najmniejszą liczbą, której wielokrotności musielibyśmy usunąć, jest liczba 7, ale $n = 40$, a $\sqrt{40} \approx 6,32$. Liczba 7 jest więc większa niż 6.32, możemy zatem zatrzymać algorytm. Po trzecim kroku w zbiorze P pozostały jedynie liczby pierwsze.

Sito Eratostenesa można teoretycznie zapisać w postaci funkcji, na przykład w programie Matlab (skrypt 3.1). Poniżej przedstawiona została tabela z wynikami działania algorytmu dla przedziałów o różnej długości.

Lp.	Koniec przedziału $\{2, n\}$	Czas działania programu $[s]$	Liczba liczb pierwszych
1	100	0.002345	25
2	1000	0.00219	168
3	10 000	0.107349	1229
4	100 000	0.191775	9592
5	1 000 000	0.253845	78 498
6	10 000 000	6.684239	664 579
7	100 000 000	174.164354	5 761 455

Tabela 1.2. Wyniki działania funkcji szukającej liczb pierwszych sitem Eratostenesa.

Niestety w przypadku większego zakresu liczb czas oczekiwania na wynik jest bardzo długi. Na przykład przeszukiwanie zbioru liczb naturalnych $\{2, 1\,000\,000\,000\}$ może trwać już kilka godzin. Co więcej, największa znana obecnie liczba pierwsza jest o wiele większa od liczb, które można znaleźć za pomocą tego algorytmu nawet na nowoczesnych komputerach o dużej wydajności.

Sito Atkina lub *sito Atkina-Bernsteina* [2, s. 55] to algorytm autorstwa dwóch matematyków - Arthura Atkina i D.J. Bernsteina, który służy do wyszukiwania liczb pierwszych w dużych przedziałach.

Metoda ta działa podobnie do sita Eratostenesa, jednak dzięki wykorzystaniu pewnych zależności jest efektywniejsza i wymaga znacznie mniej pamięci. Na przykład algorytm całkowicie pomija wszystkie liczby podzielne przez 2, 3 lub 5, liczby z parzystą resztą z dzielenia przez 60, liczby, które mają resztę z dzielenia przez 60 podzielną przez 3 oraz liczby z resztą z dzielenia przez 60 podzielną przez 5. Pierwszość pozostałych liczb rozpatrywana jest na podstawie ich reszty z dzielenia przez liczbę 12. Jeżeli wynosi ona:

- 1 lub 5 — liczba jest pierwsza, jeśli liczba rozwiązań równania $4x^2 + y^2 = n$ (gdzie n jest analizowaną przez nas liczbą, a x i y to dowolne liczby naturalne) jest nieparzysta, a n nie jest kwadratem innej liczby naturalnej,
- 7 — liczba jest pierwsza, jeśli liczba rozwiązań równania $3x^2 + y^2 = n$ (gdzie n to analizowana przez nas liczba, a x i y to dowolne liczby naturalne) jest nieparzysta, a n nie jest kwadratem innej liczby naturalnej,

- 11 — liczba jest pierwsza, jeśli liczba rozwiązań równania $3x^2 - y^2 = n$ (gdzie n to analizowana przez nas liczba, a x i y to dowolne liczby naturalne i $x > y$) jest nieparzysta, a n nie jest kwadratem innej liczby naturalnej.

Sito Sundarama [2, s. 55] to prosty algorytm autorstwa XX-wiecznego indyjskiego matematyka Sundarama, który służy do wyszukiwania liczb pierwszych w przedziale $\{1, n\}$.

Algorytm przebiega w następujący sposób:

1. Wybieramy przedział $\{1, n\}$.
2. Z zadanego przedziału usuwamy liczby obliczone za pomocą wzoru $l = i+j+2ij$, gdzie $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq j$ oraz $i + j + 2ij \leq n$.
3. Pozostałe liczby ze zbioru mnożymy przez 2 i dodajemy 1.

Po przeprowadzeniu algorytmu uzyskujemy listę liczb pierwszych z przedziału $\{3, 2n+1\}$.

Sito Sundarama można zapisać w postaci funkcji, na przykład w programie Matlab (skrypt 3.2). Poniższa tabela zawiera wyniki działania sita Sundarama dla przedziałów o różnej długości.

Lp.	Koniec przedziału $\{1, n\}$	Czas działania programu $[s]$	Liczba liczb pierwszych w przedziale $\{2, 2n+1\}$
1	50	0.000764	26
2	500	0.000663	168
3	5000	0.001613	1229
4	50 000	0.006975	9592
5	500 000	0.055643	78 498
6	5 000 000	0.639726	664 579
7	50 000 000	7.374154	5 761 455
8	500 000 000	137.090207	50 847 534

Tabela 1.3. Wyniki działania funkcji szukającej liczb pierwszych sitem Sundarama.

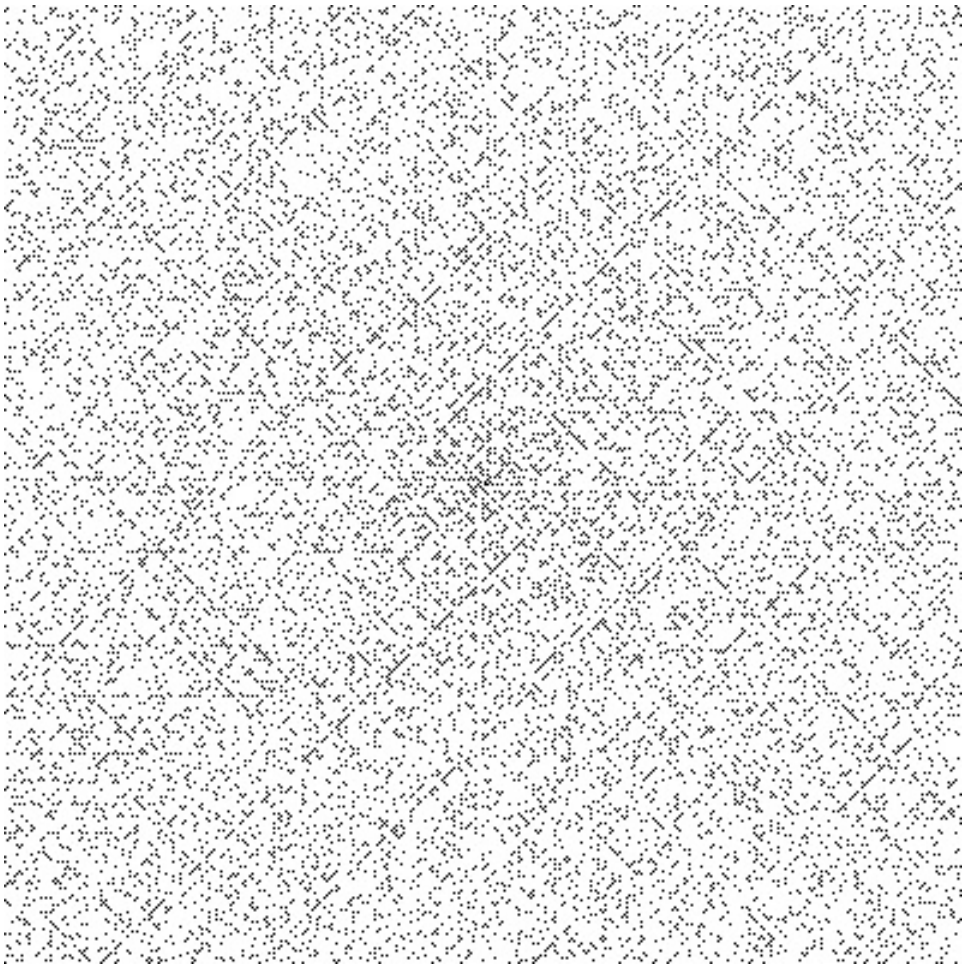
Jak łatwo zauważyć, algorytm Sundarama jest o wiele szybszy niż sito Eratostenesa.

1.5. Spirala Ulama

Stanisław Marcin Ulam (ur. 13 kwietnia 1909 we Lwowie, zm. 13 maja 1984 w Santa Fe) to polski matematyk i przedstawiciel lwowskiej szkoły matematycznej. W swoim dorobku ma wiele dokonań w zakresie matematyki i fizyki matematycznej oraz metod numerycznych. W 1963 roku zaprezentował przedstawienie rozkładu liczb pierwszych w formie graficznej, zwanej dziś spiralą Ulama.

Spirala Ulama lub *spirala liczb pierwszych* [11] to graficzna metoda przedstawiania rozkładu liczb pierwszych.

Sposób zapisu polega na tym, że na kwadratowej tablicy zaczynając od 1 w środku spiralnie wypisuje się kolejne liczby naturalne. Okazuje się, że na pewnych przekątnych liczby pierwsze pojawiają się o wiele częściej niż na innych. Co więcej, zjawisko nie zależy od wyboru pierwszej liczby w spirali. Na rysunku 1.5 przedstawiono spiralę Ulama o rozmiarze 400x400.



Rysunek 1.1. Spirala Ulama o rozmiarze 400x400 [11].

1.6. Twierdzenie Wilsona, małe twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera

Podrozdział ten jest poświęcony trzem klasycznym twierdzeniom z zakresu teorii liczb - twierdzeniu Wilsona, małemu twierdzeniu Fermata oraz twierdzeniu Eulera. Mają one szerokie zastosowanie w testach pierwszości liczb, które zostaną przedstawione w rozdziale drugim.

Twierdzenie 1.6. *(Twierdzenie Wilsona, 1770 r.) [8, s. 18] Liczba naturalna $p > 1$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \ (mod\ p). \tag{1.7}$$

Za odkrywcę powyższego twierdzenia uznaje się Johna Wilsona, zostało jednak opublikowane przez Edwarda Waringa. Jak się okazuje, wcześniej mówił o nim już al-Hajsam (X/XI w.) i Leibniz (XVII w.). Pierwszy dowód twierdzenia Wilsona pochodzi od Lagrange'a i został przedstawiony w 1777 roku.

Dowód. Na początek pokażemy, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to zachodzi kongruencja (1.7). Dla $p = 2$ implikacja jest spełniona, więc ograniczamy się do liczb pierwszych nieparzystych. Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc każda z liczb

$$1, 2, 3, ..., p-2, p-1$$

ma swoją odwrotność modulo p. Poszukujemy, dla jakich a spośród tych liczb zachodzi

$$a \equiv a^{-1} \ (mod\ p),$$

tzn.

$$a^2 \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Ostatni warunek oznacza, że liczba p musi dzielić

$$a^2 - 1 = (a+1)(a-1).$$

Z lematu Euklidesa (lemat 1.1) wynika, że p dzieli $a+1$ lub $a-1$, więc $a = p-1$ lub $a = 1$. Te dwie liczby na razie pomijamy. Wówczas liczby $2, 3, ..., p-2$ dzielą się na pary, liczba i jej odwrotność modulo p, skąd wynika, że

$$2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2) \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Mnożąc obie strony powyższej kongruencji przez $p-1$ otrzymujemy

$$(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \ (mod\ p),$$

co kończy dowód pierwszej implikacji.

Teraz pokażemy implikację w drugą stronę. Musimy udowodnić, że jeżeli zachodzi

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \ (mod\ n),$$

to n jest liczbą pierwszą. Przypuśćmy, że n jest liczbą złożoną. Wtedy istnieją dwie liczby p i q takie, że $n = pq$. Załóżmy, że $p < q$. Wówczas

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) \cdot p \cdot ... \cdot (q-1) \cdot q \cdot ... \cdot (n-1),$$

więc $(n-1)!$ jest podzielne przez n. Stąd $(n-1)! + 1$ nie może być podzielne przez n. Wynika stąd, że

$$(n-1)! + 1 \not\equiv 0 \ (mod\ n),$$

co kończy dowód.

■

Twierdzenie 1.7. *(Małe twierdzenie Fermata, 1640 r.) [8, s. 19] Jeśli p jest liczą pierwszą, to dla każdej liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi*

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Dowód. Jeśli liczba pierwsza p nie dzieli a, to ciąg reszt z dzielenia a przez p $1, 2, 3, ..., p-1$ oraz ciąg liczb

$$a, 2a, 3a, ..., (p-1)a \ (mod\ p) \tag{1.8}$$

różnią się jedynie kolejnością. Łatwo zauważyć, że jeśli p nie dzieli a, to niemożliwe jest, aby $ka \equiv 0 \ (mod\ p)$ dla $k = 1, 2, ..., p-1$. Z tego wynika, że wszystkie reszty $ka \ (mod\ p)$ są liczbami naturalnymi od 1 do $p-1$. Ponieważ liczb tych jest dokładnie $p-1$, więc musimy pokazać, że są one parami różne.

Załóżmy, że dla $i, j < p$, gdzie $i \neq j$ zachodzi $ai \equiv aj \ (mod\ p)$. Z treści twierdzenia wiemy, że a nie jest podzielne przez p, więc obie strony możemy podzielić przez a, skąd otrzymujemy $i \equiv j \ (mod\ p)$. Obie liczby są z założenia mniejsze od p, więc $i = j$, co prowadzi do sprzeczności.

Jak wcześniej zauważyliśmy, ciąg liczb (1.8) modulo p to ciąg $1, 2, ..., p-1$, więc

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) \ (mod\ p),$$

a po przekształceniu

$$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \ (mod\ p).$$

Z twierdzenia 1.6 wiemy, że liczba $(p-1)!$ jest względnie pierwsza z p, więc obie strony kongruencji możemy podzielić przez $(p-1)!$, co kończy dowód.

■

Uogólnieniem małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7) jest twierdzenie Eulera.

Twierdzenie 1.8. *(Eulera) [4, s. 33] Jeżeli n i a są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to zachodzi*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

Dowód. Niech układ

$$r_1, r_2, ..., r_{\varphi(n)}$$

będzie zredukowanym układem reszt modulo n. Po pomnożeniu każdej z nich przez a i podzieleniu przez m powstaje nowy układ reszt $r_i^{'}$:

$$r_i a = q_i n + r_i^{'},\ i = 1, 2, ..., \varphi(n).$$

Układ można również przedstawić w postaci kongruencji

$$r_i a = r_i^{'}\ (mod\ n),\ i = 1, 2, ..., \varphi(n). \tag{1.9}$$

Po wymnożeniu przez siebie wszystkich $\varphi(n)$ kongruencji układu (1.9) otrzymujemy

$$a^{\varphi(n)} r_1 r_2 ... r_{\varphi(n)} \equiv r_1^{'} r_2^{'} ... r_{\varphi(n)}^{'}\ (mod\ n). \tag{1.10}$$

Zarówno r_i i $r_i^{'}$ dla $i = 1, 2, ..., \varphi(n)$ są względnie pierwsze z n, więc obie strony kongruencji (1.10) można podzielić przez ich identyczny iloczyn, co daje

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

■

Twierdzenie Eulera (twierdzenie 1.8) można wykorzystać do szybkiego potęgowania modulo.

Przykład 1.7. Korzystając z twierdzenia Eulera obliczymy 8^{24} $(mod\ 25)$.

Z twierdzenia Eulera (twierdzenie 1.8) wiemy, że jeśli n i a są względnie pierwsze, to zachodzi kongruencja

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

W powyższym przykładzie $n = 25$ i $a = 8$, więc $(n, a) = (25, 8) = 1$. Korzystając z własności (4) stwierdzenia 1.1 obliczamy wartość funkcji Eulera dla liczby 25

$$\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5(5-1) = 5 \cdot 4 = 20.$$

Wiemy zatem, że

$$8^{20} \equiv 1 \ (mod\ 25). \tag{1.11}$$

Obliczamy

$$8^2 \equiv 64 \equiv 14 \equiv -11 \ (mod\ 25), \tag{1.12}$$

a następnie podnosimy obie strony kongruencji (1.12) do kwadratu

$$8^4 \equiv 121 \equiv 21 \ (mod\ 25). \tag{1.13}$$

W ostatnim kroku mnożymy kongruencje (1.11) i (1.13)

$$8^{24} \equiv 21 \cdot 1 \equiv 21 \ (mod\ 25).$$

Na mocy powyższych obliczeń otrzymujemy

$$8^{24} \equiv 21 \ (mod\ 25).$$

Definicja 1.16. Jeżeli n jest nieparzystą liczbą złożoną, a liczba b, względnie pierwsza z n, spełnia warunek

$$b^{n-1} \equiv 1 \ (mod\ n),$$

to n nazywamy *liczbą pseudopierwszą* przy podstawie b.

Z twierdzenia 1.7 wynika, że dla każdej liczby a, która jest względnie pierwsza z modułem n, istnieje liczba naturalna k taka, że $a^k \equiv 1 \ (mod\ n)$.

Definicja 1.17. [13] *Rzędem multiplikatywnym* liczby całkowitej a modulo n, gdzie $(a, n) = 1$, nazywamy najmniejszą liczbę naturalną k, dla której zachodzi

$$a^k \equiv 1 \ (mod\ n).$$

Rząd elementu a modulo n oznacza się $ord_n(a)$ lub $o_n(a)$.

Przykład 1.8. Obliczymy rząd multiplikatywny liczby 4 modulo 7.

Szukamy najmniejszej liczby $k \in \mathbb{N}$, dla której prawdziwa jest kongruencja

$$4^k \equiv 1 \ (mod\ 7).$$

Sprawdzamy kongruencję dla kolejnych wartości liczby k:

$$k = 1 \Rightarrow 4^1 = 4 \equiv 4 \ (mod\ 7) \neq 1 \ (mod\ 7),$$
$$k = 2 \Rightarrow 4^2 = 16 = 2 \cdot 7 + 2 \equiv 2 \ (mod\ 7) \neq 1 \ (mod\ 7),$$
$$k = 3 \Rightarrow 4^3 = 64 = 9 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \ (mod\ 7).$$

Rzędem multiplikatywnym liczby 4 modulo 7 jest 3, czyli $o_7(4) = 3$.

Obliczanie rzędu elementu a modulo n jest również proste do zaimplementowania w środowisku Matlab (skrypt 3.4). Poniżej przedstawiono tabelę z wynikami i czasem działania powyższej funkcji.

Lp.	Liczba n	Liczba a	Wartość funkcji $o_n(a)$	Czas działania funkcji $[s]$
1	7	4	3	0.033575
2	4	7	2	0.025657
3	100	387	20	0.031364
4	167	379	166	0.036658
5	1000	37	100	0.035297

Tabela 1.4. Wartość funkcji $o_n(a)$ dla liczb o różnej wielkości.

1.7. Własności liczb pierwszych

Liczby pierwsze mogą przyjmować różne postaci. W podrozdziale tym skupimy się na różnych rodzajach liczb pierwszych, takich jak liczby pierwsze Fermata, bliźniacze, czworacze, Sophie Germain czy Mersenne'a. W części tej znajduje się również zestawienie dziesięciu największych znanych liczb pierwszych (odkrytych do 3 stycznia 2018 roku).

Twierdzenie 1.9. *[4, s. 46] Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci* $4k - 1$.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że $\{q_1, q_2, ..., q_r\}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych postaci $4k - 1$. Zdefiniujmy $N = 4q_1q_2...q_r - 1$.

Ponieważ N jest liczbą nieparzystą, więc wszystkie dzielniki liczby N również są nieparzyste. Z kolei każda liczba nieparzysta ma postać $4k-1$ lub $4k+1$. Wiadomo także, że iloczyn liczb postaci $4k+1$ jest też liczbą postaci $4k+1$, więc N musi mieć

dzielnik pierwszy q postaci $4k-1$. Jak wiadomo, $q_1 \nmid N$, $q_2 \nmid N$, ..., $q_r \nmid N$, skąd wynika, że $q \notin \{q_1, q_2, ..., q_r\}$, co jest sprzeczne z założeniem.

■

Nieco trudniej jest udowodnić tę samą własność dla zbioru liczb postaci $4k+1$.

Twierdzenie 1.10. *[4, s. 46] Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci* $4k+1$.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [4, s. 46].

Twierdzenia 1.9 i 1.10 są szczególnymi przypadkami twierdzenia Dirichleta.

Twierdzenie 1.11. *(Dirichlet) [4, s. 47] Jeśli* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ *oraz* $(a, m) = 1$, *to w ciągu arytmetycznym* $a + mk$, *gdzie* $k = 1, 2, ...$, *istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Dowód twierdzenia Dirichleta jest trudny i nieelementarny. Można go znaleźć w [5] (rodział 5).

Definicja 1.18. [2, s. 57] Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczbę postaci

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \tag{1.14}$$

gdzie $n \geq 1$, nazywa się *n-tą liczbą Fermata* .

Fermat obliczył, że $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 2575$, $F_4 = 65537$ są liczbami pierwszymi i założył, że każda liczba postaci (1.14) jest liczbą pierwszą. Hipotezę tę obalił Euler, który udowodnił, że F_5 jest podzielne przez 641.

Definicja 1.19. [9] Liczby pierwsze p i $q = p + 2$ nazywane są *liczbami pierwszymi bliźniaczymi* .

Liczbami pierwszymi bliźniaczymi są np.: (3, 5), (11, 13), (1949, 1951), (4967, 4969). Największe znane dziś liczby bliźniacze, każda składająca się z 388 342 cyfr, to

$$2\,996\,863\,034\,895 \cdot 2^{1\,290\,000} \pm 1,$$

znalezione zostały w 2016 roku.

Definicja 1.20. [9] *Liczbą pierwszą Sophie Germain* nazywamy dowolną liczbę pierwszą p, dla której liczba $2p+1$ także jest liczbą pierwszą.

Przykładem takiej liczby jest 23, gdyż $2 \cdot 23 + 1 = 47$. Największa znana obecnie liczba pierwsza Sophie Germain to

$$2\,618\,163\,402\,417 \cdot 2^{1\,290\,000} - 1,$$

a jej zapis dziesiętny wymaga 388 342 cyfr. Została ona odkryta w 2016 roku.

Definicja 1.21. [4, s. 52] *Liczbami Mersenne'a* nazywamy liczby postaci $M_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$. Jeżeli liczba Mersenne'a jest pierwsza to nazywamy ją *liczbą pierwszą Mersenne'a* .

Nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersenne'a. Do 2018 roku znanych jest 50 takich liczb. Co więcej, dziewięć na dziesięć największych odkrytych do tej pory liczb pierwszych to właśnie liczby Mersenne'a. Zostały one przedstawione w tabeli 1.5. Ich poszukiwaniem zajmuje się projekt GIMPS (ang. Great Internet Mersenne Prime Search), w którym mogą wziąć udział ochotnicy z całego świata.

Nr	Liczba pierwsza	Liczba cyfr	Data odkrycia	Odkrywcy
1	$2^{77\,232\,917} - 1$	23 249 425	2018-01-03	J. Pace, GIMPS
2	$2^{74\,207\,281} - 1$	22 338 618	2016-01-07	Cooper, GIMPS
3	$2^{57\,885\,161} - 1$	17 425 170	2013-01-25	Cooper, GIMPS
4	$2^{43\,112\,609} - 1$	12 978 189	2008-08-23	Edson Smith, GIMPS
5	$2^{42\,643\,801} - 1$	12 837 064	2009-06-04	Strindmo, GIMPS
6	$2^{37\,156\,667} - 1$	11 185 272	2008-09-06	H. Elvenich, GIMPS
7	$2^{32\,582\,657} - 1$	9 808 358	2006-09-04	Boone, Cooper, GIMPS
8	$2^{30\,402\,457} - 1$	9 152 052	2005-12-15	Boone, Cooper, GIMPS
9	$2^{25\,964\,951} - 1$	7 816 230	2005-02-18	Nowak, GIMPS
10	$2^{24\,036\,583} - 1$	7 235 733	2004-05-15	Findley, GIMPS

Tabela 1.5. Dziesięć największych znanych liczb pierwszych Mersenne'a na 2018 rok [10].

2. Testy pierwszości liczb

Test pierwszości to algorytm, który określa, czy zadana liczba jest liczbą pierwszą, czy złożoną. Poniższy rozdział ma na celu przedstawienie algorytmów, które testują pierwszość zadanej liczby.

2.1. Testy deterministyczne

Testy deterministyczne to testy, które wydają certyfikat pierwszości, czyli ich wynik jest prawidłowy z prawdopodobieństwem 1. Zwracają odpowiedź, że podana na wejściu liczba n jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy naprawdę tak jest, czyli wynik działania testu jest jednoznaczny.

2.1.1. Metoda naiwna

Najprostszą deterministyczną metodą testowania pierwszości jest *metoda naiwna*. Algorytm działania jest bardzo prosty: dla danej liczby $n > 2$ wystarczy sprawdzić, czy dzieli się ona kolejno przez $2, 3, ..., n-1$. Jeżeli wśród tych liczb nie ma dzielnika liczby n, wtedy n jest pierwsza. Jeśli chociaż przez jedną z tych liczb n dzieli się bez reszty, wtedy n jest złożona.

Jak się okazuje, nie trzeba testować podzielności przez wszystkie liczby od 2 do $n-1$, wystarczy ograniczyć się do przedziału $2, 3, ..., \sqrt{n}$.

Co więcej, algorytm można ulepszyć dzieląc liczbę n jedynie przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze lub równe $\sqrt{n}$. Listę takich liczb możemy wyznaczyć sitem Eratostenesa, które omówione zostało w podrozdziale 1.4.

Warto zauważyć, że jeśli liczba n okaże się być złożona, to jednocześnie wyznaczany jest jej nietrywialny dzielnik (dzielnik różny od 1).

Algorytm metody naiwnej w wersji udoskonalonej działa następująco:

1. Pobieramy liczbę n.
2. Wyznaczamy zbiór p wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych $\sqrt{n}$.
3. Dzielimy liczbę n przez kolejne liczby ze zbioru p.
4. Jeśli n dzieli się przez przynajmniej jedną z liczb ze zbioru p bez reszty, wtedy n jest złożona.
5. Jeśli wśród liczb p nie ma dzielnika liczby n, wtedy n jest pierwsza.

Jest to algorytm deterministyczny, który uznaje pierwszość liczby ze stuprocentową pewnością. W związku z tym, że metoda jest bardzo dokładna, wymaga dużej liczby dzieleń, więc jej efektywność spada dla większych liczb.

Przykład 2.1. Za pomocą algorytmu metody naiwnej sprawdzimy, czy liczba 53 jest pierwsza.

Zgodnie z algorytmem działania metody naiwnej, wyznaczamy zbiór p wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych $\sqrt{53} \approx 7,28$. Zbiór ten ma więc postać

$$p = \{2, 3, 5, 7\}.$$

W następnym kroku sprawdzamy reszty z dzielenia liczby 53 przez liczby pierwsze ze zbioru p:

$$53 = 1 \ (mod\ 2),$$
$$53 = 2 \ (mod\ 3),$$
$$53 = 3 \ (mod\ 5),$$
$$53 = 4 \ (mod\ 7).$$

Liczba 53 nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb ze zbioru p, więc 53 jest liczbą pierwszą.

Przykład 2.2. Za pomocą algorytmu metody naiwnej sprawdzimy, czy liczba 25 jest pierwsza.

W pierwszym kroku wyznaczamy zbiór p wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych $\sqrt{25} = 5$. Zbiór ten jest postaci

$$p = \{2, 3, 5\}.$$

W następnym kroku sprawdzamy reszty z dzielenia liczby 25 przez liczby pierwsze ze zbioru p:

$$25 = 1 \ (mod\ 2),$$
$$25 = 1 \ (mod\ 3),$$
$$25 = 0 \ (mod\ 5).$$

Liczba 25 dzieli się bez reszty przez liczbę 5, więc jest liczbą złożoną.

Algorytm metody naiwnej w programie Matlab został przedstawiony na końcu tej pracy (skrypt 3.5). Tabela 2.1 przedstawia wyniki i czas działania algorytmu dla liczb o różnej wielkości.

Lp.	Testowana liczba	Czas działania programu $[s]$	Liczba pierwsza/złożona
1	7	0.005050	pierwsza
2	23	0.004529	pierwsza
3	365	0.002450	złożona
4	5737	0.002264	pierwsza
5	99 487	0.015185	pierwsza
6	99 489	0.014734	złożona
7	100 001	0.013290	złożona
8	12 192 109	9.409341	pierwsza
9	14 476 001	11.304216	pierwsza
10	100 000 001	215.084406	złożona

Tabela 2.1. Wyniki działania funkcji testującej pierwszość liczb metodą naiwną z sitem Eratostenesa.

Łatwo zauważyć, że dla niewielkich liczb czas działania jest bardzo krótki, ale dla liczb rzędu 10^8 sprawdzanie pierwszości trwa już kilka minut.

2.1.2. Test pierwszości AKS

Test pierwszości AKS (lub inaczej test pierwszości Agrawal-Kayal-Saxena lub cyklotomiczny test AKS) jest deterministycznym testem pierwszości liczb opracowanym przez trójkę indyjskich naukowców - Manindra Agrawala, Neeraja Kayala i Nitina Saxena z Indyjskiego Instytutu Technologii w Kanpurze. Test został po raz pierwszy opublikowany 6 sierpnia 2002 roku w artykule zatytułowanym *PRIMES is in P*. W 2006 roku autorzy otrzymali za to odkrycie dwie nagrody - Nagrodę Gödla, którą przyznaje się za osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej, oraz nagrodę Fulkersona, przyznawaną za wybitne prace z zakresu matematyki dyskretnej.

Poniższy podrodział oparty jest na artykule *PRIMES is in P* [12].

Test AKS jest pierwszym opublikowanym algorytmem testującym czy dana liczba jest pierwsza, który jest jednocześnie szybki, jednoznaczny i bezwarunkowy. Oznacza to, że algorytm ten zawsze zwróci poprawną odpowiedź (w przeciwieństwie

do testów probabilistycznych), a jego działanie nie bazuje na żadnych nieudowodnionych hipotezach.

Test pierwszości AKS opiera się na pewnej tożsamości liczb pierwszych, która jest uogólnieniem małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7).

Lemat 2.1. (małe twierdzenie Fermata dla wielomianów) Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$ oraz $(a, n) = 1$. Wówczas n jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \ (mod\ n). \tag{2.1}$$

Dowód. Równanie (2.1) możemy zapisać w postaci

$$(X + a)^n - (X^n + a) \equiv 0 \ (mod\ n).$$

Dla $0 < i < n$ współczynnik przy X^i w wyrażeniu $((X + a)^n - (X^n + a))$ wynosi $\binom{n}{i}\ a^{n-i}$.

Załóżmy, że n jest liczbą pierwszą. Wtedy $\binom{n}{i} \equiv 0 \ (mod\ n)$, a więc wszystkie współczynniki są zerowe.

Załóżmy, że n jest liczbą złożoną. Rozważmy liczbę pierwszą q, która jest dzielnikiem n i dla pewnego k niech $q^k \mid n$. Wtedy q^k nie dzieli $\binom{n}{q}$ i jest względnie pierwsza z a^{n-q}. Stąd współczynnik przy X^q jest niezerowy (mod n). Zatem wyrażenie $((X + a)^n - (X^n + a))$ nie jest tożsamościowo równe zero (mod n).

■

Równanie (2.1) sugeruje prosty test pierwszości: pobieramy badane n, wybieramy a i sprawdzamy, czy kongruencja (2.1) jest spełniona. Jednak wymaga to czasu, ponieważ w najgorszym przypadku należy oszacować n współczynników po lewej stronie równania. Prostym sposobem na zmniejszenie liczby tych współczynników jest oszacowanie obu stron kongruencji (2.1) modulo wielomian postaci $X^r - 1$ dla odpowiednio wybranego małego r. Innymi słowy, sprawdzić, czy spełnione jest równanie

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \ (mod\ X^r - 1, n). \tag{2.2}$$

Z lematu 2.1 wynika natychmiast, że wszystkie liczby pierwsze n spełniają równanie (2.2) dla wszystkich wartości a i r. Problem polega na tym, że niektóre liczby złożone n mogą również spełnić równanie dla kilku wartości a i r. Jednak możemy pokazać, że dla odpowiednio dobranego r, jeśli równanie (2.2) jest spełnione dla kilku a, to n musi być potęgą liczby pierwszej.

Algorytm działania metody AKS jest następujący:

1. Wybieramy testowaną liczbę $n > 1$.
2. Jeśli istnieje takie $a \in \mathbb{N}$ i $b > 1$, że $n = a^b$, to liczba n jest złożona - stop.
3. Znajdujemy najmniejsze r takie, że $o_r(n) > (log_2 n)^2$.
4. Jeśli $1 < NWD(a, n) < n$ dla pewnego $a \leq r$, wtedy n jest złożona - stop.
5. Jeśli $n \leq r$, n jest pierwsza - stop.
6. Dla $a = 1$ do $\lfloor \sqrt{\varphi(r)} log_2 n \rfloor$ sprawdzamy
   jeśli $((X + a)^n \neq X^n + a \ (mod\ X^r - 1, n))$, n jest złożona - stop.
7. n jest pierwsza.

Przykład 2.3. Za pomocą algorytmu testu AKS sprawdzimy, czy liczba 11 jest pierwsza.

1. $n = 11 > 1$.
2. n nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej.
3. $(log_2 11)^2 \approx 11,97$, więc $r = 13$, ponieważ $o_{13}(11) = 12$.
4. Dla każdego $a \leq 13$ i $a \neq 11$ $NWD(a, 11) = 1$. Dla $a = 11$ $NWD(a, 11) = 11$, więc $NWD(a, 11) \notin (1, 11)$.
5. $11 \leq 13$, więc 11 jest pierwsza.

Kod metody AKS zaimplementowany w środowisku Matlab został przedstawiony w części pracy poświęconej skryptom (skrypt 3.6). Tabela poniżej przedstawia wyniki i czas działania testu pierwszości AKS.

Lp.	Liczba n	Pierwsza/złożona	Czas działania funkcji $[s]$
1	3	pierwsza	0.034859
2	23	pierwsza	0.047291
3	25	złożona	0.009026
4	123	złożona	0.045841
5	199	pierwsza	4.284376
6	1000	złożona	0.020794
7	1001	złożona	0.047622
8	1223	pierwsza	35.298198
9	3313	pierwsza	113.642901
10	3315	złożona	0.044053

Tabela 2.2. Wartość funkcji $\varphi(n)$ dla liczb o różnej wielkości.

Łatwo zauważyć, że algorytm radzi sobie bardzo szybko z liczbami złożonymi i niewielkimi liczbami pierwszymi, jednak już dla liczb pierwszych czterocyfrowych potrzebne jest ponad pół minuty na potwierdzenie ich pierwszości. Test AKS ma niestety znikomą wartość praktyczną, ponieważ złożoność tego algorytmu jest duża, a to oznacza, że liczba wykonywanych operacji rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem wielkości badanej liczby.

2.1.3. Test Lucasa-Lehmera

Test Lucasa-Lehmera [7] jest testem pierwszości dla liczb Mersenne'a. Test ten został stworzony przez francuskiego matematyka Edwarda Lucasa w 1856 roku, a następnie zmodyfikowany przez niego w roku 1878. Ponad 50 lat później algorytm Lucasa został udoskonalony przez Derricka Henry'ego Lehmera, skąd pochodzi dwuczłonowa nazwa testu.

Test Lucasa-Lehmera opiera się na poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $m^n - 1$ jest liczbą pierwszą, a $m, n \in \mathbb{Z}_+$ i $n > 1$, wtedy $m = 2$ i n jest liczbą pierwszą.*

Dowód. Ponieważ $m - 1$ dzieli $m^n - 1$, warunkiem na to, aby $m^n - 1$ była liczbą pierwszą, jest aby $m - 1$ było równe 1, skąd wynika, że $m = 2$. Załóżmy, że n jest liczbą złożoną. Wtedy $n = r \cdot s$ dla pewnych $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Rozważmy wielomian

$$x^n - 1 = x^{r \cdot s} - 1.$$

Zgodnie ze wzorami skróconego mnożenia wielomian ten może być zapisany w postaci

$$x^{r \cdot s} - 1 = (x^s - 1)(x^{s(r-1)} + x^{s(r-2)} + ... + x^s + 1).$$

Jeśli $n = r \cdot s$ jest liczbą złożoną, to $2^n - 1$ jeśli również liczbą złożoną, ponieważ jest podzielne przez $2^s - 1$. Stąd wynika, że n musi być liczbą pierwszą.

■

Twierdzenie 2.2. *(Test Lucasa-Lehmera) Dodatnia liczba całkowita Mersenne'a postaci $M_p = 2^p - 1$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli S_{p-1}, gdzie ciąg (S_k) definiuje się w sposób rekurencyjny jako $S_k = S_{k-1}^2 - 2$ i $S_1 = 4$.*

Dowód. Niech $\omega = 2 + \sqrt{3}$ i $\mu = 2 - \sqrt{3}$. Wtedy

$$\mu\omega = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = 1.$$

Pokażemy przez indukcję, że $S_m = \omega^{2^{m-1}} + \mu^{2^{m-1}}$ dla wszystkich m, gdzie S_s są elementami ciągu zdefiniowanego w twierdzeniu. Dla S_1 mamy

$$S_1 = (2+\sqrt{3})^{2^0} + (2-\sqrt{3})^{2^0} = (2+\sqrt{3})^1 + (2-\sqrt{3})^1 = 2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 4.$$

Przypuśćmy teraz, że $S_t = \omega^{2^{t-1}} + \mu^{2^{t-1}}$ dla wszystkich $t = 2, ..., n-1$. Wtedy

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1}^2 - 2 = (\omega^{2^{n-1}} + \mu^{2^{n-1}})^2 - 2 \\ &= ((2+\sqrt{3})^{2^{n-1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{n-1}})^2 - 2 \\ &= (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n} + 2((2+\sqrt{3})^{2^{n-1}}(2-\sqrt{3})^{2^{n-1}}) - 2 \\ &= \omega^{2^n} + \mu^{2^n} + 2(\omega\mu)^{2^{n-1}} - 2 \\ &= \omega^{2^n} + \mu^{2^n} + 2 \cdot 1 - 2 \\ &= \omega^{2^n} + \mu^{2^n} = Sn. \end{aligned}$$

Jeśli M_p dzieli S_{p-1}, to

$$S_{p-1} = \omega^{2^{p-1-1}} + \mu^{2^{p-1-1}} \equiv 0 \ (mod\ M_p),$$

więc

$$\omega^{2^{p-2}} + \mu^{2^{p-2}} = RM_p$$

dla pewnej liczby całkowitej R. Następnie mnożymy obie strony powyższego równania przez $\omega^{2^{p-2}}$, skąd otrzymujemy

$$RM_p\omega^{2^{p-2}} = \omega^{2^{p-2}}\omega^{2^{p-2}} + \mu^{2^{p-2}}\omega^{2^{p-2}},$$

$$RM_p\omega^{2^{p-2}} - \mu^{2^{p-2}}\omega^{2^{p-2}} = \omega^{2^{p-2}}\omega^{2^{p-2}},$$

$$RM_p\omega^{2^{p-2}} - 1 = \omega^{2^{p-1}}. \tag{2.3}$$

Na koniec podnosimy obie strony równania do kwadratu

$$\omega^{2^p} = (RM_p\omega^{2^{p-2}} - 1)^2. \tag{2.4}$$

Załóżmy teraz, że M_p jest liczbą złożoną. Wtedy musi istnieć liczba pierwsza q, która jest dzielnikiem liczby M_p takim, że $q^2 \leq M_p$. Liczba M_p jest postaci $2^p - 1$, więc jest liczbą nieparzystą, stąd $q \neq 2$. Rozważmy grupę $\mathbb{Z}_q$ liczb całkowitych modulo q. Niech $X = \mathbb{Z}_q(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}_q$. Grupa ta jest zamknięta ze względu na

mnożenie (jeśli $x, y \in X$, to $x \cdot y \in X$), więc możemy pomnożyć dwa elementy z grupy

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) \\ = (a_1a_2 + 3b_1b_2 + a_1b_2\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3}) \\ = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3}\end{aligned}$$

i zredukować nowe współczynniki modulo q tak, aby pozostało wyrażenie w formie $a + b\sqrt{3}$. Dla zbioru X zachodzi tożsamość $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{3}$. Zatem X^*, czyli zbiór odwracalnych elementów zbioru X, również jest grupą.

Rząd X^* jest równy co najwyżej $q^2 - 1$, ponieważ rząd X wynosi q^2 i w zbiorze X istnieje co najmniej jeden nieodwracalny element, zwany zerem. Zauważmy, że ω jest elementem zbioru X. Z faktu, że $q|M_p$, wynika kongruencja

$$RM_p\omega^{2^{p-2}} \equiv 0 \ (mod\ q),$$

więc w zbiorze X również równa jest 0. Wtedy równania (2.3) i (2.4) możemy zapisać w postaci

$$\omega^{2^{p-1}} \equiv -1 \ (mod\ q), \tag{2.5}$$

$$\omega^{2^p} \equiv 1 \ (mod\ q). \tag{2.6}$$

Kongruencję (2.6) można przedstawić w postaci $\omega \cdot \omega^{2^{p-1}} \equiv 1 \ (mod\ q)$, skąd wynika, że ω ma element odwrotny, a więc należy do X^*. Ponieważ rząd elementu ω dzieli 2^p, musi on być potęgą dwójki. Zatem rząd ω wynosi 2^t dla pewnego t, dla którego $\omega^{2^t} \equiv 1 \ (mod\ q)$. Kongruencja ta może być wielokrotnie podnoszona do kwadratu, tak aby $\omega^{2^k} \equiv 1 \ (mod\ q)$ dla wszystkich $k \geq t$.

Jednakże, jeśli $t < p$, to k może być równe $p - 1$, więc $\omega^{2^{p-1}} \equiv 1 \ (mod\ q)$, co jest sprzecznością z równaniem (2.5). Zatem, ponieważ rząd ω jest mniejszy lub równy 2^p i równocześnie większy lub równy 2^p, więc musi być równy 2^p. Rząd elementu nie może być większy od rzędu grupy, więc $2^p \leq q^2 - 1$, ale $q^2 \leq M_p$, więc $q^2 - 1 \leq M_p - 1$, skąd $2^p \leq M_p - 1$. M_p ma postać $2^p - 1$, więc $M_p - 1 = 2^p - 2$. Podsumowując, otrzymujemy $2^p \leq 2^p - 2$, co jest sprzecznością. Stąd założenie, że liczba q jest dzielnikiem M_p, jest błędne, więc M_p musi być liczbą pierwszą.

■

Warunkiem koniecznym na to, aby liczba M_n była liczbą pierwszą, jest, aby n było również liczbą pierwszą. Implikacja w drugą stronę nie zachodzi, pierwszość n nie jest wystarczająca dla pierwszości M_n, np. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Przykład 2.4. Sprawdzimy, czy trzecia liczba Mersenne'a M_3 jest liczbą pierwszą.

Trzecia liczba Mersenne'a wynosi $M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$. Na początek musimy obliczyć liczbę S_2. W tym celu musimy użyć wzoru rekurencyjnego $S_k = S_{k-1}^2 - 2$, gdzie $S_1 = 4$. Mamy

$$S_1 = 4,$$
$$S_2 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14.$$

Sprawdzamy, czy M_3 dzieli S_2

$$S_2 \ (mod\ M_3) = 14 \ (mod\ 7) \equiv 0 \ (mod\ 7).$$

Z powyższych obliczeń wynika, że trzecia liczba Mersenne'a $M_3 = 7$ jest liczbą pierwszą.

Implementacja testu pierwszości Lucasa-Lehmera w programie Matlab znajduje się w skrypcie 3.7. W tabeli 2.3 przedstawione są wyniki działania tego kodu dla różnych liczb pierwszych i złożonych oraz czas działania algorytmu.

Lp.	Liczba n	Liczba Mersenne'a n	Wynik	Czas działania funkcji $[s]$
1	5	$2^5 - 1$	pierwsza	0.001195
2	7	$2^7 - 1$	pierwsza	0.001416
3	11	$2^{11} - 1$	złożona	0.001071
4	13	$2^{13} - 1$	pierwsza	0.000686
5	17	$2^{17} - 1$	pierwsza	0.000768
6	19	$2^{19} - 1$	pierwsza	0.000783
7	23	$2^{23} - 1$	złożona	0.000745
8	29	$2^{29} - 1$	złożona	0.000682
9	37	$2^{37} - 1$	złożona	0.000776
10	43	$2^{43} - 1$	złożona	0.000608

Tabela 2.3. Wyniki działania testu pierwszości Lucasa-Lehmera.

2.2. Testy probabilistyczne

Testy probabilistyczne (znane także jako testy randomizacyjne) są obecnie najczęściej stosowanymi i najbardziej efektywnymi testami pierwszości liczb, które w swoim działaniu używają losowości. Wykorzystuje się w nich losowo wygenerowane

liczby z zadanego przedziału. Zależność od takich elementów powoduje, że algorytm może dać błędny wynik testu pierwszości, lecz prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe.

2.2.1. Test pierwszości Fermata

Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata (twierdzenie 1.7) dla liczb pierwszych p zachodzi kongruencja

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p). \tag{2.7}$$

Test pierwszości Fermata [8, s. 49] to probabilistyczny test pierwszości, który opiera się na założeniu, że zachodzi wynikanie odwrotne do twierdzenia 1.7, czyli jeśli prawdziwa jest kongruencja (2.7), to liczba p jest pierwsza z dużym prawdopodobieństwem.

Algorytm testu pierwszości Fermata dla zadanej liczby p wygląda następująco:

1. Losujemy $a \in [2, p-2]$.
2. Obliczamy $d = NWD(a, p)$. Jeśli $d > 1$ to p jest liczbą złożoną.
3. Sprawdzamy, czy zachodzi kongruencja $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.
4. Jeśli zachodzi, to p może być liczbą pierwszą, w innym przypadku p jest liczbą złożoną.

Przy kilkukrotnym powtórzeniu losowania dla różnych liczb test Fermata daje bardzo wiarygodny wynik.

Przykład 2.5. Używając testu pierwszości Fermata sprawdzimy, czy liczba 23 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy $a \in [2, 21]$. Niech $a = 4$.
2. $d = NWD(4, 23) = 1$.
3. Kongruencja $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ jest spełniona, ponieważ $4^{22} \equiv 1 \ (mod\ 23)$ (przebieg obliczeń znajduje się w przykładzie 1.3).
4. Liczba 23 może być liczbą pierwszą.

Przykład 2.6. Używając testu pierwszości Fermata sprawdzimy, czy liczba 25 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy $a \in [2, 24]$. Niech $a = 8$.
2. $d = NWD(8, 25) = 1$.
3. Kongruencja $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ nie zachodzi, ponieważ $8^{24} \equiv 21 \ (mod\ 25)$ (przebieg obliczeń znajduje się w przykładzie 1.7).

4. Liczba 25 jest liczbą złożoną.

Implementacja testu pierwszości Fermata w programie Matlab zawarta została w skrypcie 3.8. W tabeli 2.4 przedstawione są wyniki działania tego kodu dla różnych liczb pierwszych i złożonych oraz czas działania algorytmu.

Lp.	Liczba p	Liczba powtórzeń n	Wynik	Czas działania funkcji $[s]$
1	5	2	pierwsza (100%)	0.069366
2	15	8	złożona (100%)	0.097156
3	47	18	pierwsza (100%)	0.102425
4	199	28	pierwsza (100%)	0.090658
5	1999	68	pierwsza (100%)	0.092615
6	6899	190	pierwsza (100%)	0.095254
7	94 427	19	pierwsza (100%)	0.080347
8	94 428	19	złożona (100%)	0.070723
9	15 472 147	30	pierwsza (100%)	0.071718
10	15 472 147	5530	pierwsza (100%)	0.733975
11	15 472 148	5530	złożona (100%)	0.575719

Tabela 2.4. Wyniki działania testu pierwszości Fermata dla liczb o różnej wielkości.

Łatwo zauważyć, że algorytm działa niezwykle szybko i zwraca stuprocentowo pewny wynik nawet dla bardzo dużych liczb. Czas działania zależy głównie od wyboru liczby powtórzeń n - im liczba n jest większa, tym czas działania algorytmu się wydłuża. Jednak już dla niewielkich n wynik jest podawany z prawdopodobieństwem równym 1.

Trzeba zaznaczyć, że kongruencja (2.7) może zachodzić także w pewnych przypadkach, gdy liczba p nie jest liczbą pierwszą.

Definicja 2.1. [8, s. 49] *Liczbami Carmichaela* nazywamy złożone liczby naturalne, dla których teza małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7) jest prawdziwa.

Liczba naturalna n jest liczbą Carmichaela wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą złożoną i dla każdej liczby naturalnej a z przedziału $1 < a < n$, względnie pierwszej z n, liczba $a^{n-1} - 1$ jest podzielna przez n.

Najmniejszą liczbą Carmichaela jest $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Innymi z nich są na przykład $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ lub $2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29$.

Przykład 2.7. Używając testu pierwszości Fermata sprawdzimy, czy liczba 561 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy $a \in [2, 559]$. Niech $a = 5$.
2. $d = NWD(5, 561) = 1$.
3. Kongruencja $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$ zachodzi, gdyż $5^{560} \equiv 1 \ (mod\ 561)$.
4. Liczba 561 może być liczbą pierwszą.

Po zastosowaniu algorytmu liczba 561 została błędnie wskazana jako liczba prawdopodobnie pierwsza. Stało się tak, ponieważ dla liczby Carmichaela równość z małego twierdzenia Fermata (twierdzenie 1.7) zachodzi dla wszystkich a takich, że $NWD(a, p) = 1$.

Test Fermata zastosowany do liczby Carmichaela jest nieskuteczny, co przedstawione zostało w tabeli 2.5.

Lp.	L. Carmichaela	Liczba powtórzeń n	Wynik	Czas działania $[s]$
1	561	5	pierwsza (60%)	0.064905
2	561	15	pierwsza (73%)	0.097156
3	561	150	pierwsza (58%)	0.102425
4	1105	5	pierwsza (100%)	0.067776
5	1105	15	pierwsza (73%)	0.068222
6	1105	150	pierwsza (70.6%)	0.088589
7	1729	5	pierwsza (60%)	0.069128
8	1729	15	złożona (66.67%)	0.078923
9	1729	150	pierwsza (76.67%)	0.082983
10	2465	5	pierwsza (80%)	0.064879
11	2465	15	pierwsza (60%)	0.070719
12	2465	150	pierwsza (75.3%)	0.090890

Tabela 2.5. Wyniki działania testu pierwszości Fermata dla liczb Carmichaela.

Jak wynika z powyższej tabeli, liczby Carmichaela przechodzą test pierwszości Fermata z dużym prawdopodobieństwem.

2.2.2. Test pierwszości Lehmana

Test Lehmana [2, s. 60] jest kolejnym probabilistycznym testem pierwszości liczb. Algorytm testu Lehmana dla dużej liczby p wygląda następująco:

1. Losujemy dużą liczbę $a < p$.
2. Obliczamy $b \equiv a^{(p-1)/2} \ (mod\ p)$.
3. Jeśli $b \equiv 1 \ (mod\ p)$ lub $b \equiv -1 \ (mod\ p)$ to p jest liczbą pierwszą z prawdopodobieństwem większym lub równym 50%. W przeciwnym wypadku p jest liczbą złożoną.

Przykład 2.8. Stosując test pierwszości Lehmana sprawdzimy, czy 31 jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy dużą liczbę $a < 31$. Niech $a = 21$.
2. Obliczamy $b = a^{(31-1)/2} = 21^{15} \equiv 30 \ (mod\ 31)$.
3. $b = 30 \equiv -1 \ (mod\ 31)$, stąd 31 może być liczbą pierwszą z prawdopodobieństwem większym lub równym 50%.

Skrypt 3.9 przedstawia algorytm Lehmana w programie Matlab. Wyniki działania programu przedstawione zostały w tabeli 2.6.

Lp.	Liczba p	Wynik	Czas działania funkcji $[s]$
1	5	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.023871
2	47	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.032829
3	199	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.031084
4	1999	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.026158
5	6899	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.029798
6	94 427	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.023563
7	94 428	złożona (100%)	0.015226
8	15 472 145	złożona (100%)	0.027043
9	15 472 147	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.026316
10	15 485 857	pierwsza ($\geq 50\%$)	0.024070

Tabela 2.6. Wyniki działania testu pierwszości Lehmana dla liczb o różnej wielkości.

Algorytm Lehmana jest bardzo szybki i zwraca prawidłowe wyniki dla liczb o różnej wielkości.

2.2.3. Test pierwszości Solovaya-Strassena

Kolejnym probabilistycznym testem pierwszości jest test Solovaya-Strassena, opracowany przez dwóch matematyków - amerykańskiego profesora Roberta M. Solovaya

i profesora Volkera Strassena z Niemiec. Do wprowadzenia algorytmu testowania niezbędna jest definicja symbolu Legendre'a.

Definicja 2.2. [8, s. 119] Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 2, a a liczbą całkowitą. *Symbol Legendre'a* $\left(\frac{a}{p}\right)$ definiuje się następująco

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } a \text{ jest wielokrotnością liczby } p, \\ 1, & \text{jeśli istnieje } b \text{ takie, że } b^2 = a \ (mod\ p), \\ -1, & \text{jeśli nie istnieje żadne } b \text{ takie, że } b^2 = a \ (mod\ p). \end{cases}$$

Symbol Legendre'a można obliczyć korzystając z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.3. *(Kryterium Eulera w formie Legendre'a) [8, s. 120] Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas*

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \ (mod\ p).$$

Twierdzenie 2.4. *[8, s. 120] Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, Wówczas dla liczb całkowitych a i b zachodzi*

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \ (mod\ p).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \ (mod\ p).$$

■

Symbol Legendre'a może być uogólniony do *symbolu Jacobiego* $\left(\frac{a}{n}\right)$, gdzie n jest dowolną liczbą nieparzystą, która ma rozkład na czynniki pierwsze

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}.$$

Wtedy symbol Jacobiego można zapisać w postaci

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{m_1} \cdot \left(\frac{a}{p_2}\right)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{m_k}.$$

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to symbol Jacobiego i symbol Legendre'a są sobie równe.

Definicja 2.3. Nieparzystą liczbę złożoną n nazywamy *pseudopierwszą liczbą Eulera* przy podstawie b, jeśli $(n, b) = 1$ i spełniony jest warunek

$$b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{n}\right) \ (mod\ n).$$

Test pierwszości liczby n algorytmem Solovaya-Strassena przebiega następująco:

1. Losujemy $b \in \{2, ..., n-2\}$.
2. Obliczamy $r = b^{\frac{n-1}{2}} \ (mod\ n)$. Jeśli $r \neq \pm 1$, to n jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego $s = \left(\frac{b}{n}\right)$. Jeśli $r \neq s$, to n jest złożona.

Jeżeli po zakończeniu algorytmu nie ma odpowiedzi "n jest złożona", to test należy powtórzyć. Po k-krotnym powtórzeniu testu i stwierdzeniu, że n jest liczbą pseudopierwszą Eulera przy każdej z wybranych podstaw b, prawdopodobieństwo, że liczba n jest jednak złożona wynosi $\frac{1}{2^k}$.

Przykład 2.9. Używając testu Solovaya-Strassena sprawdzimy, czy liczba $n = 29$ jest liczbą pierwszą.

Dla otrzymania wiarygodnego wyniku przeprowadzimy test trzykrotnie.

Pierwsze sprawdzenie:

1. Losujemy $b \in \{2, ..., 27\}$. Niech $b = 7$.
2. $r = 7^{\frac{29-1}{2}} = 7^{14} \equiv 1 \ (mod\ 29)$. $r = \pm 1$, więc nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że 29 jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego $s = \left(\frac{7}{29}\right) = 1$. $r = s$, więc liczba 29 może być liczbą pierwszą.

Drugie sprawdzenie:

1. Losujemy $b \in \{2, ..., 27\}$. Niech $b = 9$.
2. $r = 9^{\frac{29-1}{2}} = 9^{14} \equiv 1 \ (mod\ 29)$. $r = \pm 1$, więc nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że 29 jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego $s = \left(\frac{9}{29}\right) = 1$. $r = s$, więc liczba 29 może być liczbą pierwszą.

Trzecie sprawdzenie:

1. Losujemy $b \in \{2, ..., 27\}$. Niech $b = 15$.
2. $r = 15^{\frac{29-1}{2}} = 15^{14} \equiv 28 \equiv -1 \ (mod\ 29)$. $r = \pm 1$, więc nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że 29 jest liczbą złożoną.
3. Obliczamy symbol Jacobiego $s = \left(\frac{15}{29}\right) = -1$. $r = s$, więc liczba 29 może być liczbą pierwszą.

Po trzykrotnym powtórzeniu testu prawdopodobieństwo, że liczba 29 jest jednak złożona wynosi $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Przykład 2.10. Używając testu Solovaya-Strassena sprawdzimy, czy liczba $n = 33$ jest liczbą pierwszą.

1. Losujemy $b \in \{2, ..., 31\}$. Niech $b = 5$.
2. Obliczamy $r = 5^{\frac{33-1}{2}} = 5^{16} \equiv 16 \ (mod\ 33)$. $r \neq \pm 1$, więc 33 jest liczbą złożoną.

Skrypt jednorazowego przejścia algorytmu testu pierwszości Solovaya-Strassena w programie Matlab został przedstawiony na końcu niniejszej pracy (skrypt 3.10). Tabela 2.7 zawiera wyniki otrzymane za pomocą powyższego algorytmu i czas działania funkcji dla każdej operacji.

Lp.	Liczba n	Wynik	Czas działania funkcji $[s]$
1	5	pierwsza	0.034387
2	47	pierwsza	0.032534
3	199	pierwsza	0.039209
4	1999	pierwsza	0.032661
5	6899	pierwsza	0.036613
6	94 427	pierwsza	0.034677
7	94 428	złożona	0.017758
8	15 472 145	złożona	0.027369
9	15 472 147	pierwsza	0.056256
10	15 485 857	pierwsza	0.033962

Tabela 2.7. Wyniki działania testu pierwszości Solovaya-Strassena dla liczb o różnej wielkości.

2.2.4. Test pierwszości Millera-Rabina

Test pierwszości Millera-Rabina [14] jest kolejnym testem probabilistycznym, który z pewnym prawdopodobieństwem określa, czy dana liczba jest pierwsza, czy złożona. Oryginalna wersja tego testu, stworzona przez profesora Gary'ego L. Millera, jest testem deterministycznym, lecz jego prawidłowość bazuje na uogólnionej hipotezie Riemanna, która nie została dotychczas udowodniona. W 1975 roku kryptolog Michael O. Rabin przekształcił algorytm Millera do algorytmu probabilistycznego.

Fakt 2.1. Niech n będzie nieparzystą liczbą pierwszą i niech $n - 1 = 2^s \cdot t$, gdzie $2 \nmid t$. Niech $b \in \varphi(n)$. Wtedy albo $b^t \equiv 1 \pmod{n}$, albo $b^{2^r t} \equiv -1 \pmod{n}$ dla pewnego $r \in \{0, 1, ..., s-1\}$.

Definicja 2.4. Niech n będzie nieparzystą liczbą złożoną i niech $n-1 = 2^s \cdot t$, gdzie $2 \nmid t$. Niech $b \in \varphi(n)$. Jeżeli

- $b^t \equiv 1 \pmod{n}$ lub
- $b^{2^r t} \equiv -1 \pmod{n}$ dla pewnego $r \in \{0, 1, ..., s-1\}$

to liczbę n nazywamy *liczbą silnie pseudopierwszą* przy podstawie b.

Fakt 2.2. Jeśli n jest nieparzystą liczbą złożoną, to jest silnie pseudopierwsza przy podstawie b dla co najwyżej 25% wszystkich podstaw b takich, że $0 < b < n$.

Algorytm działania testu pierwszości Millera-Rabina przebiega następująco:

1. Obliczamy $n - 1 = 2^s \cdot t$, gdzie t jest liczbą nieparzystą.
2. Losujemy $b \in \{2, ..., n-2\}$.
3. Obliczamy $a = b^t \pmod{n}$. Jeśli $a = \pm 1$, to n może być pierwsza.
4. Obliczamy $a = b^{2^r t} \pmod{n}$ dla $0 < r < s$. Jeśli dla pewnego r otrzymamy $a = -1$, to n może być pierwsza, w przeciwnym razie n jest złożona.

Po otrzymaniu odpowiedzi "n jest pierwsza" powtarzamy kroki algorytmu 2-4.

Przykład 2.11. Stosując test pierwszości Millera-Rabina sprawdzimy, czy liczba $n = 53$ jest liczbą pierwszą.

1. Obliczamy $53 - 1 = 52 = 2^2 \cdot 13$, więc $s = 2$, a $t = 13$.
2. Losujemy $b \in \{2, ..., 51\}$. Niech $b = 5$.
3. Obliczamy $a = 5^{13} \equiv 23 \pmod{53}$. Nie możemy nic stwierdzić o liczbie 53, ponieważ $a \neq \pm 1$, więc wykonujemy następny krok.
4. Obliczamy $a = 5^{2^r \cdot 13} \pmod{53}$ dla $0 < r < 2$. Weźmy $r = 1$. Wtedy

$$a = 5^{2 \cdot 13} \equiv 52 \equiv -1 \ (mod\ 53).$$

Z powyższych obliczeń wynika, że 53 może być pierwsza.

Poniżej sprawdzimy działanie algorytmu Millera-Rabina przy wyborze nowego b.

1. $n = 53$, więc $s = 2$, a $t = 13$.
2. Losujemy $b \in \{2, ..., 51\}$. Niech $b = 15$.
3. Obliczamy $a = 15^{13} \equiv 1 \pmod{53}$. 53 może być liczbą pierwszą, ponieważ $a = \pm 1$.

Przykład 2.12. Stosując test pierwszości Millera-Rabina sprawdzimy, czy liczba $n = 65$ jest liczbą pierwszą.

1. Obliczamy $65 - 1 = 64 = 2^6 \cdot 1$, więc $s = 6$, a $t = 1$.
2. Losujemy $b \in \{2, ..., 63\}$. Niech $b = 7$.
3. Obliczamy $a = 7^1 \equiv 7 \pmod{65}$. $a \neq \pm 1$, więc nie możemy nic stwierdzić na temat pierwszości liczby 65. W związku z tym przechodzimy do następnego kroku.
4. Obliczamy $a = 7^{2^r \cdot 1} \pmod{65}$ dla $0 < r < 6$. Sprawdzamy wyniki dla $r \in \{1, 2, ..., 5\}$:

$$r = 1 \Rightarrow a = 7^{2^1} = 7^2 \equiv 49 \ (mod\ 65),$$
$$r = 2 \Rightarrow a = 7^{2^2} = 7^4 \equiv 61 \ (mod\ 65),$$
$$r = 3 \Rightarrow a = 7^{2^3} = 7^8 \equiv 16 \ (mod\ 65),$$
$$r = 4 \Rightarrow a = 7^{2^4} = 7^{16} \equiv 61 \ (mod\ 65),$$
$$r = 5 \Rightarrow a = 7^{2^5} = 7^{32} \equiv 16 \ (mod\ 65).$$

Dla żadnej wartości r nie otrzymaliśmy $a = -1$, więc 65 jest liczbą złożoną.

Skrypt testu pierwszości Millera-Rabina przedstawiony został w dalszej części pracy (skrypt 3.11). Tabela 2.8 zawiera wyniki otrzymane za pomocą powyższego algorytmu i czas działania funkcji dla każdej operacji.

Lp.	Liczba n	Wynik	Czas działania funkcji $[s]$
1	5	pierwsza	0.036212
2	47	pierwsza	0.036644
3	199	pierwsza	0.038669
4	1999	pierwsza	0.037960
5	6899	pierwsza	0.037959
6	94 427	pierwsza	0.040197
7	94 428	złożona	0.018025
8	15 472 145	złożona	0.049525
9	15 472 147	pierwsza	0.035766
10	15 485 857	pierwsza	0.045164

Tabela 2.8. Wyniki działania testu pierwszości Millera-Rabina dla liczb o różnej wielkości.

3. Kryptografia

Pojęcie *kryptografia* [2, s. 20] wywodzi się z języka greckiego (od wyrazów *kryptos* — ukryty i *graphein* — pisać). Głównym zadaniem kryptografii jest utajnienie znaczenia przesyłanej wiadomości, zwanej tekstem jawnym.

3.1. Historia kryptografii

Najstarsze znane nam przykłady szyfrowania informacji pochodzą ze starożytnego Egiptu, z okresu około 1900 roku p.n.e. Pierwsze tego typu zapisy służyły jednak najczęściej do nadawania wiadomościom formy bardziej wzniosłej lub zagadkowej, a nie do ukrywania treści. Nie była to więc kryptografia w ścisłym znaczeniu tego słowa, zawierała jednak podstawowy dla tej nauki element, czyli przekształcanie tekstu.

W ciągu kolejnych 3000 lat kryptografia rozwijała się powoli. Powstawała niezależnie w odrębnych kulturach, przybierając różne stopnie zaawansowania. Zapiski na temat szyfrowania znaleziono na tabliczkach z pismem klinowym pochodzących z Mezopotamii, a ich powstanie datuje się na rok 1500 p.n.e.

Pierwsze informacje na temat stosowania kryptografii w celach politycznych pochodzą z Indii z IV wieku p.n.e. Wymieniana jest ona jako sposób zdobywania informacji przez przebywających za granicą ambasadorów.

Stosowane w starożytności szyfry dzieliły się na dwa rodzaje — przestawieniowe i podstawieniowe. W pierwszej metodzie zamieniano szyk liter w zdaniach, czyli tworzono anagram. Najprostszym przykładem takiego szyfrowania jest pisanie wspak. Druga metoda polegała na podstawianiu za litery tekstu jawnego innych liter, cyfr bądź symboli. Najbardziej znanym szyfrem podstawieniowym jest szyfr Cezara. Algorytm ten polegał na zastępowaniu każdej litery przez inną, położoną o trzy miejsca dalej w alfabecie.

Szyfry przyporządkowujące każdej literze alfabetu jawnego dokładnie jedną literę alfabetu tajnego nazywamy szyframi monoalfabetycznymi. W przypadku szyfru Cezara układ alfabetu tajnego był zawsze taki sam, więc nie zapewniał odpowiedniej ochrony.

W związku z rozwojem kryptografii narodziła się nowa dziedzina wiedzy zwana kryptoanalizą. Jej zadaniem było łamanie zabezpieczeń oraz deszyfrowanie wiado-

mości, gdy nie jest znany klucz lub schemat szyfrowania. Pierwszy jej opis znaleziony został w traktacie *O odczytywaniu zaszyfrowanych listów* autorstwa Al-Kindiego, arabskiego uczonego z IX wieku.

W dziele tym Al-Kindi zawarł rozważania na temat statystyki fonetyki i składni języka arabskiego oraz opisał swoją autorską technikę poznawania tajnego pisma. Technika ta nosi nazwę kryptoanalizy statystycznej i polega na wyznaczeniu rozkładu znaków w zaszyfrowanym tekście i porównywaniem go z rozkładem w dowolnym tekście jawnym z tego samego języka. Dzięki wynalazkowi Al-Kindiego szyfry monoalfabetyczne przestały być bezpieczne. Był to moment rozpoczęcia się trwającego do dziś wyścigu kryptografów z kryptoanalitykami.

Zastosowanie komputerów diametralnie zmieniło dotychczasowe sposoby szyfrowania. Po pierwsze, proces kodowania przebiegał znacznie szybciej i mógł się opierać na bardziej skomplikowanych algorytmach. Jedna z ważniejszych zmian, jaka nastąpiła dzięki zastosowaniu komputerów, dotyczyła poziomu szyfrowania. Wcześniej odbywało się ono na poziomie liter. W systemie komputerowym do zapisu danych służy tzw. system binarny, więc szyfrowanie liter i znaków zamieniono na szyfrowanie zer i jedynek. W związku z tym należało ustalić reguły konwersji znaków na system binarny. Tak powstał ASCII, czyli kod przyporządkowujący liczby literom, cyfrom i znakom. Liczby w kodzie ASCII można przedstawić w postaci binarnej, co umożliwia ich zapis w komputerze. Po zapisaniu wiadomości w postaci dwójkowej można przejść do szyfrowania.

Komputery okazały się przydatne również w kryptoanalizie, lecz wydajne algorytmy szyfrujące (szybkie i wymagające niewielkich zasobów) nadal są trudne do złamania i wymagają nakładów o wiele rzędów większych.

3.2. Systemy kryptograficzne

Systemem kryptograficznym (lub kryptosystemem) [14] nazywamy system, którego celem jest dokonywanie operacji kryptograficznych. Jest to dowolna piątka (P, C, K, E, D) składająca się ze

- skończonego zbioru możliwych tekstów jawnych P,
- skończonego zbioru możliwych tekstów zaszyfrowanych C,
- skończonego zbioru kluczy K,
- dla każdego $k \in K$ istnieje reguła szyfrowania $e_k \in E$ i odpowiadająca jej reguła deszyfrowania $d_k \in D$, takie że $d_k(e_k(x)) = x$ dla każdego tekstu jawnego x.

Szyfr Cezara jest przykładem systemu kryptograficznego z kluczem prywatnym (tajnym, symetrycznym), w którym znajomość reguły szyfrowania e_k pozwala łatwo wyprowadzić regułę deszyfrowania d_k, więc ujawnienie e_k wystawia system na niebezpieczeństwo. Szyfry symetryczne używają tego samego klucza do szyfrowania i do deszyfrowania wiadomości lub klucz deszyfrujący da się bezpośrednio wyprowadzić z klucza szyfrującego.

Systemem z kluczem publicznym (asymetrycznym) nazywamy rodzaj kryptografii, w którym używa się zestawów dwu lub więcej powiązanych ze sobą kluczy, umożliwiających wykonywanie różnych czynności kryptograficznych. Jeden z kluczy może być udostępniony publicznie bez utraty bezpieczeństwa danych zabezpieczanych tym kryptosystemem.

Najważniejsze zastosowanie kryptografii asymetrycznej, czyli szyfrowanie, zakłada istnienie dwóch kluczy – prywatnego i publicznego, przy czym klucza prywatnego nie da się łatwo odtworzyć na podstawie publicznego. Algorytmy mające zastosowanie w kryptografii asymetrycznej wykorzystują tak zwane operacje jednokierunkowe - takie, które da się łatwo przeprowadzić tylko w jedną stronę (np. mnożenie jest łatwe, a rozkład na czynniki trudny).

Wyznaczenie reguły deszyfrowania d_k na podstawie znajomości reguły szyfrowania e_k jest obliczeniowo niewykonalne. W tych systemach często zamiast o kluczu $k = (e, d)$ będziemy mówić o parze kluczy: kluczu szyfrującym e i deszyfrującym d. Klucz szyfrujący e (zwany kluczem publicznym lub jawnym) może być podany do publicznej wiadomości, a klucz deszyfrujący d (klucz prywatny albo tajny) jest trzymany w tajemnicy.

3.3. Generowanie kluczy

Duże liczby pierwsze znajdują szerokie zastosowanie w dziedzinie kryptografii. Służą one między innymi do generowania kluczy publicznych i prywatnych, które są wykorzystywane w systemach ochrony danych.

Generowanie kluczy [2, s. 67]: wydaje się, że generowanie liczb pierwszych jest zadaniem trudnym. Trzeba wybrać odpowiednio dużą liczbę, a następnie dokonać próby jej faktoryzacji. Jeśli próba się nie powiedzie, to nasza liczba jest liczbą pierwszą. Istnieją jednak algorytmy, zwane testami pierwszości (omówione w rozdziale 2), które nie opierają się na rozkładzie liczby. Pozwalają one stwierdzić, czy n jest liczbą pierwszą lub złożoną, bez próby znalezienia możliwych czynników pierwszych. Właśnie na takich testach pierwszości opierają się współczesne algorytmy generujące

liczby pierwsze. Ważne jest to, że w większości mają one charakter probabilistyczny, czyli określają pierwszość liczby z pewnym prawdopodobieństwem. Wobec tego dla osiągnięcia większej pewności musimy wykonać test kilkukrotnie (im więcej prób, tym większe prawdopodobieństwo otrzymania poprawnego wyniku).

Przykładami systemów, w których klucz generowany jest przy pomocy dużych liczb pierwszych, są między innymi system RSA i system Rabina.

3.3.1. System RSA

Algorytm kryptograficzny RSA [3, s. 58] (zaprezentowany w 1978 roku) jest jednym z najważniejszych systemów z kluczem asymetrycznym, którego nazwa pochodzi od nazwisk jego twórców: R. Rivesta, A. Shamira i L. Adlemana. Jego bezpieczeństwo opiera się na trudności rozkładu dużych liczb na czynniki. W RSA zależność między kluczem publicznym i prywatnym jest symetryczna – uzyskanie klucza publicznego na podstawie prywatnego jest równie trudne jak uzyskanie prywatnego na podstawie publicznego.

Generowanie kluczy przebiega następująco:

1. Losujemy dwie duże liczby pierwsze p i q.
2. Obliczamy wartość funkcji Eulera dla $p \cdot q$: $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$.
3. Wybieramy liczbę e taką, że $(e, \varphi(pq)) = 1$.
4. Znajdujemy takie d, dla którego zachodzi

$$ed \equiv 1 \ (mod \ \varphi(pq)).$$

5. Obliczamy $n =: p \cdot q$ i kasujemy liczby p i q.
6. (e, n) jest wygenerowanym kluczem publicznym, a (d, n) wygenerowanym kluczem prywatnym.

Szyfrowanie: załóżmy, że chcemy zaszyfrować liczbę m taką, że $m < n$. W tym celu pobieramy klucz publiczny (e, n) i obliczamy

$$c \equiv m^e \ (mod \ n).$$

Deszyfrowanie: W celu odszyfrowania wiadomości m pobieramy klucz prywatny (d, n) i obliczamy

$$m \equiv c^d \ (mod \ n).$$

Poprzez rozłożenie liczby n na czynniki pierwsze można odtworzyć generowanie klucza prywatnego. Jednak dla dostatecznie dużego n i dobrze dobranych liczb p i q faktoryzacja n jest praktycznie niemożliwa.

Przykład 3.1. Korzystając z systemu RSA zaszyfrujemy i odszyfrujemy wiadomość $m = 4$.

Na początek generujemy klucz publiczny i prywatny:

1. Losujemy dwie liczby pierwsze $p = 5$ i $q = 11$.
2. Obliczamy wartość funkcji Eulera dla $p \cdot q$

$$\varphi(5 \cdot 11) = (5-1)(11-1) = 4 \cdot 10 = 40.$$

3. Wybieramy liczbę e taką, że $(e, 40) = 1$. Niech $e = 27$.
4. Znajdujemy takie d, dla którego zachodzi $27d \equiv 1 \ (mod\ 40)$

$$27 \cdot 1 \equiv 27 \ (mod\ 40),$$
$$27 \cdot 2 \equiv 14 \ (mod\ 40),$$
$$27 \cdot 3 \equiv 1 \ (mod\ 40).$$

Na podstawie powyższych obliczeń $d = 3$.

5. Obliczamy $n =: p \cdot q = 5 \cdot 11 = 55$.
6. $(e, n) = (27, 55)$ jest wygenerowanym kluczem publicznym, a $(d, n) = (3, 55)$ wygenerowanym kluczem prywatnym.

Szyfrowanie: $c \equiv m^e \ (mod\ n) \equiv 4^{27} \ (mod\ 55)$. Do obliczenia $4^{27} \ (mod\ 55)$ wykorzystamy szybkie potęgowanie modulo

$$4^1 \equiv 4 \ (mod\ 55), \tag{3.1}$$

$$4^2 \equiv 16 \ (mod\ 55), \tag{3.2}$$

$$4^4 \equiv 36 \ (mod\ 55), \tag{3.3}$$

$$4^8 \equiv -24 \ (mod\ 55), \tag{3.4}$$

$$4^{16} \equiv 26 \ (mod\ 55). \tag{3.5}$$

Mnożymy stronami kongruencje (3.4) i (3.5)

$$4^{24} \equiv -19 \ (mod\ 55). \tag{3.6}$$

Mnożymy stronami kongruencje (3.2) i (3.6)

$$4^{26} \equiv 26 \ (mod\ 55). \tag{3.7}$$

Mnożymy stronami kongruencje (3.1) i (3.8)

$$4^{27} \equiv 49 \ (mod\ 55). \tag{3.8}$$

Nasz szyfrogram jest postaci $c = 49$.

Deszyfrowanie: $m \equiv c^d \ (mod\, n) \equiv 49^3 \ (mod\, 55) \equiv -6^3 \ (mod\, 55) \equiv -51 (mod\, 55) \equiv 4 \ (mod\ 55)$.

3.3.2. System Rabina

System Rabina [14] jest kolejnym algorytmem szyfrującym z kluczem publicznym, którego bezpieczeństwo opiera się na trudności rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze.

Algorytm generowania kluczy wygląda następująco:

1. Losujemy dwie duże różne liczby pierwsze p i q przystające do 3 $(mod\ 4)$.
2. Obliczamy $n = pq$.
3. Kluczem publicznym jest n, prywatnym (p, q).

Algorytm szyfrowania:

1. Pobieramy klucz publiczny n.
2. Obliczamy $c = m^2 \ (mod\ n)$.

Algorytm deszyfrowania:

1. Znajdujemy cztery pierwiastki m_1, m_2, m_3 i m_4 modulo n z c.
2. Wysłana wiadomość to jeden z powyższych pierwiastków.

Jeśli $p \equiv 3 \ (mod\ 4)$, to aby wyznaczyć pierwiastki kwadratowe z c modulo n musimy:

1. Znaleźć liczby a, b spełniające równanie $ap + bq = 1$ korzystając z algorytmu Euklidesa.
2. Obliczyć $r \equiv c^{\frac{p+1}{4}} \ (mod\ p)$.
3. Obliczyć $s \equiv c^{\frac{q+1}{4}} \ (mod\ q)$.
4. Obliczyć $x \equiv (aps + bqr) \ (mod\ n)$.
5. Obliczyć $y \equiv (aps - bqr) \ (mod\ n)$.

6. Czterema pierwiastkami kwadratowymi z c modulo n są liczby x, $-x$ $(mod\ n)$, y, $-y$ $(mod\ n)$.

Przykład 3.2. Korzystając z systemu Rabina zaszyfrujemy i odszyfrujemy wiadomość $m = 9$.

Generujemy klucz prywatny i publiczny:

1. Losujemy dwie różne liczby pierwsze p i q przystające do 3 $(mod\ 4)$.

$$p = 7 \equiv 3\ (mod\ 4),$$

$$q = 11 \equiv 3\ (mod\ 4).$$

2. Obliczamy $n = pq = 7 \cdot 11 = 77$.
3. Kluczem publicznym jest $n = 77$, prywatnym $(p, q) = (7, 11)$.

Szyfrowanie: Obliczamy

$$c = m^2\ (mod\ n) \equiv 9^2\ (mod\ 77) \equiv 81\ (mod\ 77) \equiv 4\ (mod\ 77).$$

Deszyfrowanie:

1. Szukamy liczb a, b spełniających równanie $7a + 11b = 1$ korzystając z algorytmu Euklidesa

$$11 = 7 \cdot 1 + 4,$$
$$7 = 4 \cdot 1 + 3,$$
$$4 = 3 \cdot 1 + 1,$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

Powyższe obliczenia przeprowadzamy wstecz

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \cdot 4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7.$$

Stąd $a = -3$, $b = 2$.

2. Obliczamy r

$$r \equiv c^{\frac{p+1}{4}}\ (mod\ p) \equiv 4^{\frac{7+1}{4}}\ (mod\ 7) \equiv 4^2\ (mod\ 7) \equiv 16\ (mod\ 7) \equiv 2\ (mod\ 7).$$

3. Obliczamy s

$$s \equiv c^{\frac{q+1}{4}}\ (mod\ q) \equiv 4^{\frac{11+1}{4}}\ (mod\ 11) \equiv 4^3\ (mod\ 11) \equiv 64\ (mod\ 11) \equiv 9\ (mod\ 11).$$

4. Obliczamy x

$$x \equiv (aps{+}bqr)\ (mod\, n) \equiv (-3{\cdot}7{\cdot}9{+}2{\cdot}11{\cdot}2)\ (mod\, 77) \equiv -145\ (mod\, 77) \equiv 9\ (mod\, 77).$$

5. Obliczamy y

$$\begin{aligned} y &\equiv (aps - bqr)\ (mod\ n) \equiv (-3 \cdot 7 \cdot 9 - 2 \cdot 11 \cdot 2)\ (mod\ 77) \\ &\equiv (-3 \cdot 7 \cdot 9 - 2 \cdot 11 \cdot 2)\ (mod\ 77) \equiv -233\ (mod\ 77) \equiv 75\ (mod\ 77). \end{aligned}$$

6. Czterema pierwiastkami kwadratowymi z $c = 4$ modulo $n = 77$ są liczby

$$\begin{aligned} x &= 9, \\ -x &\equiv -9\ (mod\ 77) \equiv 68, \\ y &= 75, \\ -y &\equiv -75\ (mod\ 77) \equiv 2. \end{aligned}$$

Naszą odszyfrowaną wiadomością jest $x = m = 9$.

3.4. Generatory liczb pseudolosowych

Liczbą losową nazywamy liczbę r, która należy do pewnego zbioru wartości $R = \{r_1, ..., r_n\}$ wybieranych z pewnym prawdopodobieństwem. Jeżeli jako r może pojawić się każda z liczb zbioru R z tym samym prawdopodobieństwem, to mówimy o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa liczb losowych z tego zbioru. Przykładem takiego rozkładu są wyniki rzutu kostką. Każdy rzut daje liczbę losową r należącą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ z prawdopodobieństwem $P(r) = \frac{1}{6}$.

W związku z tym, że komputer ma charakter deterministyczny, powstaje problem z otrzymywaniem liczb losowych. Gdy rzucamy kością, nie wiemy, co wypadnie. Taka sama operacja na komputerze wymagałaby działania, którego wynik nie jest przewidywalny, a żadna z operacji wykonywanych przez komputer nie ma takiej właściwości.

Z drugiej strony liczby losowe są powszechnie używane przy programowaniu komputerów. Ponieważ nie możemy w prosty sposób otrzymać prawdziwych liczb losowych, musimy użyć ich sztucznych odpowiedników, zwanych liczbami pseudolosowymi. Liczby takie wyglądają jak losowe, lecz tworzone są algorytmicznie.

Generator liczb pseudolosowych, znany również jako deterministyczny generator losowych bitów, jest algorytmem do generowania sekwencji liczb, których właściwości są zbliżone do właściwości sekwencji liczb losowych. Sekwencja generowana przez

generatory liczb pseudolosowych nie jest naprawdę losowa, ponieważ jest zdeterminowana przez wartość początkową, zwaną ziarnem (które może zawierać prawdziwe losowe wartości). Generatory liczb pseudolosowych są ważne w praktyce ze względu na szybkość generowania liczb i możliwość ich odtworzenia.

Generatory liczb pseudolosowych mają kluczowe znaczenie między innymi w kryptografii. Poszukuje się algorytmów bardziej skomplikowanych, gdyż bezpieczeństwo systemów kryptograficznych opiera się na tym, czy dane wyjściowe nie są przewidywalne na podstawie wcześniejszych wyników. Właśnie dlatego potrzebne są złożone algorytmy generujące, które nie dziedziczą liniowości prostszych generatorów.

[2, s. 107] Przykładem szyfrów, które opierają się na generatorach liczb pseudolosowych, są szyfry strumieniowe. Dokonują one szyfrowania w oparciu o pojedyncze bity. Każdy bit z osobna przekształcany jest przez wyznaczony algorytm i w ten sposób powstaje kryptogram. Generator wytwarza kolejne bity klucza, które następnie używane są do szyfrowania bitów tekstu jawnego. Nietrudno zauważyć, że bezpieczeństwo takiego algorytmu opiera się na jakości generatora liczb pseudolosowych. Jest ono tym większe, im bardziej losowy charakter ma wytwarzany strumień bitów klucza. Problem sprowadza się więc do stworzenia dobrego generatora liczb losowych. Strumień klucza powinien być nieprzewidywalny i nieokresowy, gdyż każda prawidłowość zmniejsza bezpieczeństwo szyfru. Co więcej, po każdym uruchomieniu algorytmu powinien być generowany inny strumień klucza.

Liczby pierwsze znajdują swoje zastosowanie w generatorach opartych na teorii złożoności. Są to generatory, które w swoich działaniach wykorzystują problemy matematyczne znane z kryptografii z kluczem publicznym. Wykorzystuje się w nich skomplikowane problemy matematyczne, które powodują, że generatory te wymagają większych nakładów mocy obliczeniowej niż inne (tak samo jak algorytmy szyfrujące oparte na tych samych teoriach i wzorach). Najpopularniejszymi generatorami tego typu są:

- Generator BBS (skrót od ang. *Blum-Blum-Shub*) — opierający się na wzorze

$$x_i \equiv x_{i-1}^2 \ (mod\ n),$$

  gdzie n jest iloczynem dwóch liczb pierwszych p i q przystających do 3 $(mod\ 4)$. Ziarno generatora obliczane jest przez wstawienie do wzoru liczby względnie pierwszej z n. Ciąg wyjściowy tworzą najmniej znaczące bity kolejnych wartości x, czyli bity znajdujące się w słowie maszynowym na miejscach najbardziej wysuniętych w prawo.

- Generator RSA — wykorzystujący liczbę n, która jest iloczynem dwóch liczb pierwszych p i q, a dodatkowo liczbę e, która jest względnie pierwsza z iloczynem $(p-1)(q-1)$. Do obliczania kolejnych wyrazów pseudolosowych stosowany jest wzór

  $$x_i \equiv x_{i-1}^e \ (mod\ n),$$

  gdzie pierwsza wartość x, czyli x_0 wybierana jest losowo, lecz musi być mniejsza niż n. Podobnie jak w generatorze Bluma-Bluma-Shuba, pseudolosowy ciąg wyjściowy utworzony jest przez najmniej znaczące bity kolejnych wyrazów losowych.
- Generator Bluma-Micaliego — wykorzystujący problem logarytmu dyskretnego, który polega na tym, że potęgowanie jest stosunkowo proste w porównaniu z operacją logarytmowania. Do obliczania kolejnych wyrazów pseudolosowych służy wzór

  $$x_i \equiv g^{x_{i-1}} \ (mod\ p),$$

  gdzie g i p to liczby pierwsze. Bit wyjściowy zależy od wygenerowanej wartości x. Jeśli wartość ta jest mniejsza od liczby $\frac{p-1}{2}$, bit przyjmuje wartość 1, w przeciwnym wypadku przyjmuje on wartość 0.

Skrypty z programu Matlab

Sito Eratostenesa

Skrypt 3.1. Skrypt algorytmu sita Eratostenesa.

```
function [n, p] = sitoEratostenesa(N)
  if (N < 1 || N ~= round(N))
     error('N musi być naturalna i większa lub równa 1.')
  end
  sito = 1:N;
  a = 2;
  while a <= sqrt(N)
    sito(a^2:a:N) = 0;
    a = find(sito>a,1);
  end
  p = sito(sito>1);
  n = length(p);
  X = ['Ilość liczb pierwszych mniejszych lub równych '...
      , num2str(N), ' to ', num2str(n),...
      '. Są to liczby:'];
  disp(X)
  disp(p)
end
```

Sito Sundarama

Skrypt 3.2. Skrypt algorytmu sita Sundarama.

```
function L = sitoSundarama(n)
if (n < 1 || n ~= round(n))
   error('n musi być naturalna i większa lub równa 1.')
end
P = 1:n;
for i = 1:n
    for j = i:(n-i)/(2*i+1)
        if i+j+2*i*j<=n
        P(i+j+2*i*j) = -1/2;
        end
    end
end
P = P(P>0);
P = [2, P*2+1];
L = length(P);
X = ['Ilość liczb pierwszych <= 2n+1=',...
    num2str(2*n+1), ' wynosi ', num2str(L), '. Są to:'];
disp(X)
disp(P)
end
```

Funkcja Eulera

Skrypt 3.3. Skrypt funkcji Eulera.

```
function [m] = euler_phi(n)
if (n < 1 || n ~= round(n))
   error('n musi być naturalna i większa lub równa 1.')
end
m = 0;
for i = 1:n
    if gcd(i,n) == 1
       m = m + 1;
    end
end
X = ['Wartość funkcji Eulera dla liczby ',...
    num2str(n), ' wynosi ', num2str(m), '.'];
disp(X)
end
```

Rząd multiplikatywny

Skrypt 3.4. Skrypt funkcji liczącej rząd multiplikatywny.

```
function [k] = mult_order(n,a)
if (n < 1 || n ~= round(n) || a < 1 || a ~= round(a))
   error('n i a muszą być naturalna >= 1.')
end
if gcd(a,n) ~= 1
    error('Liczby nie są względnie pierwsze.')
end
k = 1;
while powermod(a,k,n) ~= 1
    k = k + 1;
end
end
```

Metoda naiwna

Skrypt 3.5. Algorytm metody naiwnej.

```
function MetodaNaiwna(N)
  if (N < 1 || N ~= round(N))
     error('N musi być naturalna i większa lub równa 1.')
  end
  X=['Liczba ', num2str(N), ' jest liczbą złożoną.'];
  Y=['Liczba ', num2str(N), ' jest liczbą pierwszą.'];
  Z=['Liczba ', num2str(N),...
      ' nie jest ani pierwsza, ani złożona.'];
  if (N == 2 || N == 3)
      disp(Y)
      return
  elseif (N == 1)
      disp(Z)
      return
  else
      [n,p] = sitoEratostenesa(N);
      lp = p(p<=sqrt(N));
      l = length(lp);
      m = ones(l,1);
  end
  for i=1:l
      if mod(N, lp(i)) == 0
          disp(X)
          break
      else
          m(i) = 0;
      end
  end
  if sum(m) == 0
      disp(Y)
  end
end
```

Test pierwszości AKS

Skrypt 3.6. Skrypt testu pierwszości AKS.

```
function MetodaAKS(n)
if (n < 1 || n ~= round(n))
     error('n musi być naturalna i większa lub równa 1.')
end
if (n == 2)
      disp('n jest pierwsza')
      return
  elseif (n == 1)
      disp('n nie jest ani pierwsza, ani złożona')
      return
end
for b = 2:n-1
    if round(log(n)/log(b)) == log(n)/log(b)
       disp('n jest złożona')
       return
    end
end
r = 2;
if gcd(r,n) ~= 1
    disp('n jest złożona')
    return
end
k = mult_order(r,n);
while k <= (log2(n))^2
    if gcd(r,n) ~= 1
       disp('n jest złożona')
        return
    end
    k = mult_order(r,n);
    r = r + 1;
    if r >= n
        disp('n jest pierwsza')
```

```
        return
    end
end
for a = 2:min(r,n-1)
    if mod(n,a) == 0
        disp('n jest złożona')
        return
    end
end
if n <= r
    disp('n jest pierwsza')
    return
end
m = euler_phi(r);
syms x
v = sym2poly(x^r-1);
for a = 1:floor(sqrt(m)*log2(n))
    [q1,w1] = deconv(sym2poly((x+a)^n),v);
    [q2,w2] = deconv(sym2poly(x^n+a),v);
    w1 = mod(w1,n); w2 = mod(w2,n);
    if w1 ~= w2
         disp('n jest złożona')
         return
    end
end
disp('n jest pierwsza')
end
```

Test pierwszości Lucasa-Lehmera

Skrypt 3.7. Skrypt testu pierwszości Lucasa-Lehmera.

```
function testLucasaLehmera(n)
   if (n < 3 || n ~= round(n) || isprime(n)==0)
     error('n musi być pierwsza i większa lub równa 3.')
   end
   m = 2^n - 1;
   X = ['Liczba 2^{n}-1 = ', num2str(m),...
       ' jest liczbą złożoną.'];
   Y = ['Liczba 2^{n}-1 = ', num2str(m),...
       ' jest liczbą pierwszą.'];
   s = ones(n-1,1);
   s(1) = 4;
   for i = 2:n-1
       s(i) = mod(power(s(i-1),2)-2,m);
   end
   if s(n-1) == 0
       disp(Y)
   else disp(X)
   end
end
```

Test pierwszości Fermata

Skrypt 3.8. Skrypt testu pierwszości Fermata.

```
function testFermata(p,n)
    %p - zadana liczba, n - liczba powtórzeń testu
    X = ['Liczba ', num2str(p), ' jest liczbą złożoną.'];
    Y = ['Liczba ', num2str(p), ' może być pierwsza.'];
    if (p <= 0 || n <= 0 || p~=round(p) || n~=round(n))
        error('p i n muszą być naturalne i większe od 0.')
    end
    if (p == 2 || p == 3)
        disp(Y)
        return
    end
    if n > (p-3)
        error('Podaj mniejszą liczbę n')
    end
    pierwsza = zeros(n,1); zlozona = zeros(n,1);
    a = randperm(p-3,n)+1;
    for i = 1:n
        if gcd(a(i),p) > 1
           zlozona(i) = 1;
        elseif powermod(a(i),p-1,p) ~= 1
           zlozona(i) = 1;
        else pierwsza(i) = 1;
        end
    end
    if sum(pierwsza) >= sum(zlozona)
        disp(Y)
        disp('Prawdopodobienstwo wynosi:')
        disp(sum(pierwsza)/n*100)
    else disp(X)
    end
end
```

Test pierwszości Lehmana

Skrypt 3.9. Skrypt testu pierwszości Lehmana.

```
function testLehmana(p)
if (p <= 2 || p ~= round(p))
    error('p musi być naturalne i większe od 2.')
end
X = ['Liczba ', num2str(p), ' jest liczbą złożoną.'];
Y = ['Liczba ', num2str(p),...
   ' może być pierwsza z prawdopodobieństwem >= 50%.'];
if mod(p,2) == 0
    disp(X)
    return
end
a = randi([(p-1)/2,p-1]);
b = powermod(a,(p-1)/2,p);
if (mod(b,p) == 1 || mod(b,p) - p == -1)
    disp(Y)
else disp(X)
end
end
```

Test pierwszości Solovaya-Strassena

Skrypt 3.10. Skrypt testu pierwszości Solovaya-Strassena.

```
function testSolovayaStrassena(n)
  if (n < 1 || n ~= round(n))
     error('n musi być naturalna i większa lub równa 1.')
  end
    X = ['Liczba ', num2str(n), ' jest liczbą złożoną.'];
    Y = ['Liczba ', num2str(n), ' może być pierwsza.'];
    Z=['Liczba ', num2str(n),...
      ' nie jest ani pierwsza, ani złożona.'];
    if (n == 2 || n == 3)
```

```
      disp(Y)
      return
    elseif (n == 1)
      disp(Z)
      return
    end
    if mod(n,2) == 0
        disp(X)
        return
    end
    b = randi([2,n-2]);
    r = powermod(b,(n-1)/2,n);
    if (r ~= 1 && r-n ~= -1)
        disp(X)
        return
    else
        s = 1;
        f = factor(n);
        for i = 1:length(f)
            s = s*powermod(b,(f(i)-1)/2,n);
        end
        if r ~= s
            disp(X)
            return
        end
    end
    disp(Y)
end
```

Test pierwszości Millera-Rabina

Skrypt 3.11. Skrypt testu pierwszości Millera-Rabina.

```
function testMilleraRabina(n)
  if (n < 1 || n ~= round(n))
     error('n musi być naturalna i większa lub równa 1.')
  end
    X=['Liczba ', num2str(n), ' jest liczbą złożoną.'];
    Y=['Liczba ', num2str(n), ' może być pierwsza.'];
    Z=['Liczba ', num2str(n),...
      ' nie jest ani pierwsza, ani złożona.'];
    if (n == 2 || n == 3)
        disp(Y)
        return
    elseif (n == 1)
        disp(Z)
        return
    end
    if mod(n,2) == 0
        disp(X)
        return
    end
    f = factor(n-1);
    s = 0;
    for i = 1:length(f)
        if f(i) == 2
            s = s+1;
        end
    end
    t = 1;
    for j = s+1:length(f)
       t = t*f(j);
    end
    b = randi([2,n-2]);
    a1 = powermod(b,t,n);
```

```
    if (a1 == 1 || a1 == n-1)
        disp(Y)
        return
    end
    for r = 1:s
        a2(r) = powermod(b,2^(r-1)*t,n);
    end
    for i = 1:length(a2)
        if a2(i) == n-1
            disp(Y)
            return
        end
    end
    disp(X)
end
```

Bibliografia

[1] A. Iwaszkiewicz-Rudoszańska, *Wstęp do algebry i teorii liczb*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, (2009).

[2] M. Karbowski, *Podstawy kryptografii*, Wydanie III, Helion, Gliwice, (2014).

[3] M. Kutyłowski, W. Strothmann, *Kryptografia. Teoria i praktyka zabezpieczania systemów komputerowych*, Wydanie II, Oficyna Wydawnicza Read Me, Warszawa, (1999).

[4] W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, (2006).

[5] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, (2003).

[6] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne, Warszawa (1950).

[7] J. Wojciechowski, *Mersenne Primes, An Introduction and Overview*, (2005), `https://www.academia.edu/9995980/Mersenne_Primes_An_Introduction_and_Overview` (dostęp 13.05.2018).

[8] M. Zakrzewski, *Teoria liczb*, Wydanie I, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, (2017).

[9] `http://primes.utm.edu/largest.html` (dostęp 25.03.2018)

[10] `https://www.mersenne.org/primes/` (dostęp 25.03.2018)

[11] `http://mathworld.wolfram.com/PrimeSpiral.html`(dostęp 24.03.2018)

[12] `https://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/algebra/primality_v6.pdf` (dostęp 25.03.2018)

[13] `https://en.wikipedia.org/wiki/Multiplicative_order`

[14] *notatki z wykładu Teoria Liczb i Elementy Kryptografii*, dr A. Iwaszkiewicz-Rudoszańska.

Skorowidz