21 grudnia 2023r.

Małgorzata Mokwa

Grupa Laboratoryjna numer 3

ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH $\boldsymbol{Ax = b}$ DLA MACIERZY POSTACI

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & -A_{22} \end{bmatrix}$$

GDZIE

A -> macierz kwadratowa nxn

A_{11}, A_{22} -> macierze kwadratowe pxp, symetryczne i dodatnio określone (n = 2p)

A_{12} -> macierz kwadratowa pxp

WYZNACZANIE BLOKOWEGO ROZKŁADU $\boldsymbol{LDL^T}$ MACIERZY A

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

GDZIE

L_{11}, L_{22} -> macierze trójkątne dolne

1. Matematyczny opis metody:

Wiemy, że macierz A można rozłożyć na iloczyn trzech macierzy. Zacznijmy od uproszczenia wyrażenia LDL^T , aby zauważyć pewne zależności oraz żeby wyznaczyć szukaną macierz L:

$$A = L * D * L^T$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & -A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & -A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & -L_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & -A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}L_{11}^T & L_{11}L_{21}^T \\ L_{11}^T L_{21} & L_{21}L_{21}^T - L_{22}L_{22}^T \end{bmatrix}$$

Powyższe zależności wynikają z przemnożenia odpowiednich macierzy blokowych.

Wyznaczmy teraz równania do opisu macierzy L:

$$A_{11} = L_{11}L_{11}^T$$

Macierz L_{11}, z faktu że A_{11} jest symetryczna i dodatnio określona, możemy wyznaczyć przy pomocy rozkładu Cholesky'ego-Banachiewicza. Wynika to z twierdzenia z wykładu, które mówi, że

Jeśli A ∈ R n×n jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, to istnieje dokładnie jedna macierz trójkątna dolna L z dodatnimi elementami na głównej przekątnej, taka, że $A = LL^T$.

$$A_{12}^T = L_{11}^T * L_{21} \rightarrow L_{21} = {L_{11}^T}^{-1} * A_{12}^T$$

Macierz L_{21} wyznaczamy z powyższego równania.

$$-A_{22} = L_{21}L_{21}^T - L_{22}L_{22}^T \rightarrow L_{22}L_{22}^T = L_{21}L_{21}^T + A_{22}$$

W tym przypadku, do wyznaczenia macierzy L_{22} również można skorzystać z rozkładu Cholesky'ego-Banachiewicza. Udowodnimy teraz, że suma dwóch macierzy symetrycznych jest symetryczna:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

Pokażemy teraz, że suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona

$$x(A + B)x^T = xAx^T + xBx^T > 0$$

Macierz $L_{21}L_{21}^T$ jest symetryczna i dodatnio określona, ponieważ

- $\left(L_{21}L_{21}^T\right)^T = (A_{12}^T(L_{11}^T)^{-1})(L_{11}^{-1}A_{12})^T = A_{12}^T {L_{11}^{-1}}^T L_{11}^{-1} A_{12} = L_{21}L_{21}^T$

- $x(L_{21}L_{21}^T)x^T = xL_{21}(xL_{21})^T = < xL_{21}, xL_{21} > > 0$ (z własności iloczynu skalarnego)

Macierz $L_{21}L_{21}^T + A_{22}$ jest symetryczna i dodatnio określona (macierze $L_{21}L_{21}^T$ oraz A_{22} są symetryczne i dodatnio określone, więc z twierdzenia udowodnionego powyżej ich suma jest symetryczna i dodatnio określona), więc istnieje dla niej rozkład Cholesky'ego – Banachiewicza i jest nim $L_{22}L_{22}^T$

Macierz D jest macierzą diagonalną, w pierwszych p wierszach ma 1 na przekątnej, a w ostatnich p wierszach ma -1 na przekątnej.

Z postaci LDL^T macierzy A można wyznaczyć rozwiązanie układu równań Ax = b:

$$LDL^T x = b, \quad y = L^T x$$

$$LDy = z, \quad z = Dy$$

$$Lz = b$$

Zacznijmy od wyznaczenia wektora z z ostatniego równania. Wiemy, że macierz L jest trójkątna dolna, więc , jest postaci:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{11}z_1 = b_1$$

$$l_{21}z_1 + l_{22}z_2 = b_2$$

$$\ldots$$

$$l_{n1}z_1 + l_{n2}z_2 + \cdots + l_{nn}z_n = b_n$$

Teraz możemy po kolei obliczać kolejne wartości wektora z (z pierwszego równania wyznaczamy z1, wstawiamy do kolejnego równania oraz obliczamy z2 i tak dalej, aż do ostatniego równania.

Następnie przechodzimy do obliczenia wartości wektora y. Wiemy, że Dy = z oraz że macierz D jest diagonalna, jedynkami i minus jedynkami. Dlatego pierwsze n / 2 elementów wektora są takie same jak w wektorze z, natomiast ostatnie n / 2 elementów to wartości wektora z przemnożone przez -1.

Teraz w łatwy sposób możemy wyznaczyć wektor x z równania $L^T x = y$. Wiemy, że L^T jest macierzą trójkątną górną, więc postępujemy analogicznie jak w rozwiązywaniu układu równań Lz = b, tylko wyznaczanie wektora x zaczynamy od n-tego elementu, a nie od pierwszego.

2. Opis programu

Program został podzielony na następujące funkcje:

- Nazwa: sprawdz_symetrycznosc_i_dodatnia_okreslonosc
  Input: macierz A
  Output: brak
  Funkcja sprawdza, czy macierz A jest symetryczna i dodatnio określona. Wyrzuca błąd, jeśli jakiś warunek nie jest spełniony. Wykorzystuję ją zanim rozpocznę wyznaczanie rozkładu Cholesky'ego-Banachiewicza.
- Nazwa: wyznacz_macierz_D
  Input: rozmiar macierzy blokowej (parametr p)
  Output: macierz diagonalna D
  Funkcja wyznacza macierz D, o wymiarach 2px2p, która w pierwszych p wierszach ma 1 na diagonali, a w pozostałych -1.
- Nazwa: wyznacz_rozklad_LDLT
  Input: macierze blokowe A_{11}, A_{12}, A_{22}
  Output: macierze L, D, L^T
  Funkcja wyznacza rozkład macierzy A poprzez zastosowanie wzorów i zależności opisanych w sekcji „Matematyczny opis Metody".
- Nazwa: rozklad_choleskiego_banachiewicza
  Input: macierz A
  Output: macierz trójkątna dolna L
  Funkcja wyznacza rozkład dla macierzy A, uprzednio sprawdzając, czy A spełnia wszystkie potrzebne założenia. Rozkład Cholesky'ego jest postaci LL^T, funkcja zwraca pierwszą z tych macierzy.
- Nazwa: rozwiaz_uklad_rownan_liniowych
  Input: macierze L, D, LT oraz wektor wyrazów wolnych b
  Output: wektor x, który jest rozwiązaniem układu równań $LDL^Tx = b$
  Funkcja rozwiązuje układ równań liniowych, korzystając z rozkładu macierzy A. Algorytm opisany jest w sekcji „Matematyczny Opis Metody".

3. Przykłady

- Przykład numer 1 – standardowa macierz

Pierwszy przykład pokazuje działanie programu na standardowej, małej macierzy:

```
A_jeden =

     4     2     2     1
     2     8     3     1
     2     3    -1    -1
     1     1    -1   -10
```

Rozkład macierzy A:

```
L_jeden =

    2.0000         0         0         0
    1.0000    2.6458         0         0
    1.0000    0.7559    1.6036         0
    0.5000    0.1890    1.0245    3.0391
```

```
D_jeden =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0    -1     0
     0     0     0    -1
```

```
Lt_jeden =

    2.0000    1.0000    1.0000    0.5000
         0    2.6458    0.7559    0.1890
         0         0    1.6036    1.0245
         0         0         0    3.0391
```

Różnica między macierzą A i macierzą $L*D*L^T$:

```
blad_rozkladu_jeden =

   1.0e-14 *

         0         0         0         0
         0         0    0.0444         0
         0    0.0444   -0.0444    0.0222
         0         0    0.0222    0.1776
```

Rozwiązywanie układu równań Ax = b:

```
b_jeden =

     2     1     0     2
```

```
x_prim_jeden =

   0.3579
  -0.1368
   0.5368
  -0.2316
```

x_prim_jeden: rozwiązanie układu równań Ax = b

Pokażemy teraz różnicę pomiędzy wektorem x wyznaczonym za pomocą funkcji linsolve a wyznaczonym przez moją funckję:

```
blad_wyznaczania_x_jeden =

   1.0e-15 *

         0
   -0.0278
   -0.1110
    0.0278
```

Porównanie czasowe wykonania różnych funkcji:

czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją chol()	czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją moją	różnica pomiędzy wynikiem z pierwszej i drugiej kolumny
0.0077285	0.01202	0.0042916

czas wyznaczania x z układu równań metodą linsolve	czas wyznaczania x moją funckją	różnica pomiędzy czwartą i piątą kolumną
0.0093938	0.027121	0.017727

- ➔ Metody bardzo dokładnie wyznaczają zarówno rozkład jak i wektor x (błędy wyznaczenia wyników są rzędu 10 ^-14)
- ➔ Czas wyznaczania rozkładu i rozwiązania układu równań jest mniejszy dla wbudowanych funkcji (linsolve, chol)

- Przykład numer 2 – macierz o bardzo dużym wymiarze

Drugi przykład pokazuje działanie programu dla macierzy o 18 wierszach i kolumnach. Jak widać poniżej, metoda działa równie dobrze nawet dla większych macierzy

```
A11_dwa =

     4     1     4     0     4     1     1     3     1
     1     5     3     3     4     2     1     2     2
     4     3     9     3     4     0     1     0     0
     0     3     3    10     4     3     1     2     9
     4     4     4     4    10     4     1     2     3
     1     2     0     3     4     4     1     2     3
     1     1     1     1     1     1     1     0     3
     3     2     0     2     2     2     0   100     5
     1     2     0     9     3     3     3     5   100
```

```
A12_dwa =

     3     7     2     1     0     0     2     3     4
     1     4     5     2     3     4     5     6     7
     9     0     0     0     1     2     3     0     1
     0     3     1     4     3     5     4     2     5
     2     5     2     5    24     0     4     1     3
     0     0     0     0     1     3     0     4     4
     3     5     4     4     8     8     8     0     2
     7     8     9     0     2     2     0     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     0
```

```
A22_dwa =

     8     3     2     1     1     2     1     2     2
     3     9     2     0     0     2     1     2     3
     2     2     2     1     1     2     1     2     5
     1     0     1     9     2     5     1     2     7
     1     0     1     2    30     5     1     2     9
     2     2     2     5     5     9     1     2     4
     1     1     1     1     1     1    12     2     4
     2     2     2     2     2     2     2    22     4
     2     3     5     7     9     4     4     4    30
```

Rozkład macierzy A oraz błąd rozkładu:

```
blad_rozkladu_dwa =

   1.0e-13 *

  Columns 1 through 16

        0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
        0   -0.0089         0    0.0044    0.0044         0    0.0011         0         0         0         0   -0.0089         0    0.0044         0   -0.0089
        0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0178    0.0089   -0.0044         0         0         0         0
        0    0.0044         0         0         0         0         0         0         0    0.0044    0.0089         0         0    0.0089         0         0
        0    0.0044         0         0         0         0         0   -0.0044         0    0.0022   -0.0089    0.0044         0         0         0    0.0089
        0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0044    0.0089    0.0044         0    0.0089         0    0.0044
        0    0.0011         0         0         0         0         0         0         0   -0.0089         0    0.0044    0.0044         0         0   -0.0178
        0         0         0         0   -0.0044         0         0         0    0.0178         0    0.1776    0.0711    0.0355    0.2842         0    0.1421
        0         0         0         0         0         0         0    0.0178         0    0.0178    0.0355         0    0.0711    0.0711    0.0355         0
        0         0    0.0178    0.0044    0.0022    0.0044   -0.0089         0    0.0178    0.1421         0         0   -0.0711         0         0         0
        0         0    0.0089    0.0089   -0.0089    0.0089         0    0.1776    0.0355         0    0.1421   -0.0711         0         0         0         0
        0   -0.0089   -0.0044         0    0.0044    0.0044    0.0044    0.0711         0         0   -0.0711    0.0533   -0.0355         0    0.0533         0
        0         0         0         0         0         0    0.0044    0.0355    0.0711   -0.0711         0   -0.0355    0.0711         0    0.0355    0.1066
        0    0.0044         0    0.0089         0    0.0089         0    0.2842    0.0711         0         0         0         0    0.5684   -0.2132    0.4974
        0         0         0         0         0         0         0         0    0.0355         0         0    0.0533    0.0355   -0.2132   -0.2487    0.1954
        0   -0.0089         0         0    0.0089    0.0044   -0.0178    0.1421         0         0         0         0    0.1066    0.4974    0.1954   -0.0178
        0         0    0.0089    0.0089    0.0266    0.0089         0         0   -0.0089         0         0         0    0.0355    0.1421   -0.0178   -0.0533
        0    0.0089         0    0.0089    0.0178         0   -0.0044    0.1421   -0.0089         0         0   -0.0089         0    0.0711   -0.0355    0.0355

        0         0
        0    0.0089
   0.0089         0
   0.0089    0.0089
   0.0266    0.0178
   0.0089         0
        0   -0.0044
        0    0.1421
  -0.0089   -0.0089
        0         0
        0         0
        0   -0.0089
   0.0355         0
   0.1421    0.0711
  -0.0178   -0.0355
  -0.0533    0.0355
  -0.0355   -0.0355
  -0.0355   -0.0711
```

```
L_dwa =

  Columns 1 through 17

   2.0000        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0.5000   2.1794        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   2.0000   0.9177   2.0391        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
        0   1.3765   0.8518   2.7166        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   2.0000   1.3765  -0.6195   0.9692   1.6680        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0.5000   0.8030  -0.8518   0.9645   0.2591   1.1757        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0.5000   0.3441  -0.1549   0.2423  -0.4823   0.1982   0.5263        0        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   1.5000   0.5735  -1.7294   0.9878  -2.2891  -0.8873  -4.5273   8.1811        0        0        0        0        0        0        0        0        0
   0.5000   0.8030  -0.8518   3.1732  -1.6238  -1.0719   1.9043   0.3832   8.9862        0        0        0        0        0        0        0        0
   1.5000   0.1147   2.8909  -0.9645   0.9399   1.9623   5.6172   4.8844  -0.3626   8.9345        0        0        0        0        0        0        0
   3.5000   1.0324  -3.8975   1.8033  -4.5463  -5.4946   1.4263  -1.8565  -2.8819  -2.2054  10.0270        0        0        0        0        0        0
   1.0000   2.0647  -1.9100  -0.0792  -2.3673  -2.6325   3.5968   1.4203  -1.8465   2.0943   5.2451   3.1491        0        0        0        0        0
   0.5000   0.8030  -0.8518   1.3327   0.6448  -2.6136   7.3113   3.4540  -2.4315   5.8641   4.3570   3.3633   5.1242        0        0        0        0
        0   1.3765  -0.1291   0.4473  12.9449  -3.4033  27.2012  18.3723  -4.7967  27.9939   4.2714  10.8360  14.7993  13.1671        0        0        0
        0   1.8353   0.1549   0.8620  -1.9580   1.1348  11.4276   5.9435  -3.2360  10.8129   4.5826   5.0523   2.8968  -0.4283   4.7566        0        0
   1.0000   2.0647  -0.4388   0.5638  -0.9954  -2.3965  12.5022   5.8912  -3.7359  10.7049   6.8138   5.6511   3.7617   1.5165   1.8159   4.0953        0
   1.5000   2.4089  -2.5553   0.3169  -4.3201  -0.0399  -7.8419  -6.4527   0.6101  -9.3002   1.8603  -1.6245  -4.8022  -3.3196  -0.5244  -0.9893   5.5609
   2.0000   2.7530  -2.7102   1.2954  -4.6307  -1.3341  -5.0350  -5.3934  -0.7705  -7.2846   4.2994   0.1873  -3.0181  -3.4812  -0.9307  -1.0947   2.1179
```

Rozwiązywanie układu równań Ax = b:

```
b_dwa =

     2     0     1     2     0     2     9     0     1     9     0     0     1     2     0     5     6     7
```

```
x_prim_dwa =

    0.2880
   -0.8054
    0.5217
   -0.2996
   -0.1092
    0.8144
    0.9446
   -0.0222
   -0.0028
   -0.4337
    0.2586
    0.1874
   -0.2738
   -0.0030
    1.0659
    0.0171
   -0.3553
   -0.3159
```

```
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
        0
   5.4309
```

Pokażemy teraz różnicę pomiędzy wektorem x wyznaczonym za pomocą funkcji linsolve a wyznaczonym przez moją funkcję

```
blad_wyznaczania_x_dwa =

   1.0e-14 *

  -0.2554
  -0.1110
   0.0777
  -0.1443
  -0.1818
   0.5551
   0.5329
   0.0114
  -0.0159
   0.1388
  -0.0611
  -0.0722
   0.3275
  -0.0539
  -0.2887
   0.1457
  -0.0056
   0.0222
```

Porównanie czasowe wykonania różnych funkcji:

czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją chol()	czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją moją	różnica pomiędzy wynikiem z pierwszej i drugiej kolumny
0.0003553	0.0005396	0.0001843

czas wyznaczania x z układu równań metodą linsolve	czas wyznaczania x moją funckją	różnica pomiędzy czwartą i piątą kolumną
0.0013112	0.0013868	7.56e-05

➔ Metody są tak samo dobre dla bardziej skomplikowanych, większych macierzy

- Przykład numer 3 – Macierz, która nie spełnia wszystkich wymagań z zadania

Trzeci przykład pokazuje działanie programu dla macierzy, której odpowiednie bloki nie są dodatnio określone. Do wyznaczenia rozkładu takiej macierzy użyjemy funkcji wyznacz_rozklad_LDLT_niepoprawnie, która nie sprawdza założeń z zadania

```
A_trzy =

    10     9     2     2
     9     2     2     2
     2     2   -10    -9
     2     2    -9    -2
```

Rozkład macierzy A:

```
L_trzy =

   3.1623 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   2.8460 + 0.0000i   0.0000 + 2.4698i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.6325 + 0.0000i   0.0000 + 0.0810i   3.2259 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.6325 + 0.0000i   0.0000 + 0.0810i   2.9159 + 0.0000i   0.0000 + 2.4690i

>> D_trzy

D_trzy =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0    -1     0
     0     0     0    -1
```

```
Lt_trzy =

   3.1623 + 0.0000i   2.8460 + 0.0000i   0.6325 + 0.0000i   0.6325 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 2.4698i   0.0000 - 0.0810i   0.0000 - 0.0810i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   3.2259 + 0.0000i   2.9159 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 2.4690i
```

Różnica między macierzą A i macierzą $L*D*L^T$:

```
blad_rozkladu_trzy =

   -0.0000         0    0.0000    0.0000
         0  -12.2000         0         0
    0.0000         0         0         0
    0.0000         0         0   12.1922
```

➔ Jak widać powyżej, macierz A powstała przez wymnożenie macierzy L, D, LT jest prawie taka sama (różni się tylko dla dwóch elementów). Wynika z tego, że nie można stosować tej metody, nawet gdy tylko jeden warunek nie jest spełniony

- Przykład numer 4 – Macierz z bardzo dużymi lub bardzo małymi elementami

```
A_cztery =

   1.0e+26 *

    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    7.8788    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
```

Rozkład macierzy A:

```
L_cztery =

   1.0e+13 *

    0.0000         0         0         0         0         0         0         0
    0.0000    0.0000         0         0         0         0         0         0
    0.0000    0.0000    0.0000         0         0         0         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000    2.8069         0         0         0         0
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000         0         0         0
    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0026         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0067
```

```
D_cztery =

     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0    -1     0     0     0
     0     0     0     0     0    -1     0     0
     0     0     0     0     0     0    -1     0
     0     0     0     0     0     0     0    -1
```

```
Lt_cztery =

   1.0e+13 *

    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
         0    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
         0         0    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
         0         0         0    2.8069    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
         0         0         0         0    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
         0         0         0         0         0    0.0000    0.0000    0.0000
         0         0         0         0         0         0    0.0026    0.0000
         0         0         0         0         0         0         0    0.0067
```

Różnica między macierzą A i macierzą $L*D*L^T$:

```
blad_rozkladu_cztery =

   -0.0000         0         0         0         0   -0.0000         0   -0.0000
         0   -0.1250         0    0.0000         0         0    0.0000   -0.0000
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0    0.0000         0         0         0    0.0000    0.0000         0
         0         0         0         0    0.0156         0   -0.0000   -0.0000
   -0.0000         0         0    0.0000         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000
         0    0.0000         0    0.0000   -0.0000   -0.0000         0   -0.0000
   -0.0000   -0.0000         0         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000         0
```

➔ Na dwóch elementach bardzo duży błąd !!!

Rozwiązywanie układu równań Ax = b:

```
b_cztery =

   1.0e+05 *

    0.1235    0.0679    0.0234    0.0000    0.0000    1.2346    0.0785    0.0000
```

```
x_prim_cztery =

    0.0012
    0.0000
    0.0000
   -0.0000
    0.0000
   -0.0014
    0.0000
    0.0000
```

Pokażemy teraz różnicę pomiędzy wektorem x wyznaczonym za pomocą funkcji linsolve a wyznaczonym przez naszą funkcję

```
blad_wyznaczania_x_cztery =

   1.0e-18 *

    0.2168
    0.0000
    0.0000
   -0.0000
   -0.0000
    0.4337
    0.0000
    0.0000
```

Porównanie czasowe wykonania różnych funkcji:

czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją chol()	czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją moją	różnica pomiędzy wynikiem z pierwszej i drugiej kolumny
0.000374	0.0004419	6.79e-05

czas wyznaczania x z układu równań metodą linsolve	czas wyznaczania x moją funckją	różnica pomiędzy czwartą i piątą kolumną
0.0015186	0.0006899	-0.0008287

- Przykład numer 5 – Macierz, w której blok A11 i blok A22 jest macierzą Hilberta

Macierz Hilberta - macierz kwadratowa z elementami danymi wzorem

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

```
A_piec =

    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    5.0000    6.0000    7.0000    8.0000
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    9.0000   10.0000   11.0000   12.0000
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429   13.0000   14.0000   15.0000   16.0000
    1.0000    5.0000    9.0000   13.0000   -1.0000   -0.5000   -0.3333   -0.2500
    2.0000    6.0000   10.0000   14.0000   -0.5000   -0.3333   -0.2500   -0.2000
    3.0000    7.0000   11.0000   15.0000   -0.3333   -0.2500   -0.2000   -0.1667
    4.0000    8.0000   12.0000   16.0000   -0.2500   -0.2000   -0.1667   -0.1429
```

Rozkład macierzy A:

```
L_piec =

    1.0000         0         0         0         0         0         0         0
    0.5000    0.2887         0         0         0         0         0         0
    0.3333    0.2887    0.0745         0         0         0         0         0
    0.2500    0.2598    0.1118    0.0189         0         0         0         0
    1.0000   15.5885   55.9017  129.6418  142.0458         0         0         0
    2.0000   17.3205   58.1378  132.2876  145.5341    2.0408         0         0
    3.0000   19.0526   60.3738  134.9333  149.0247    3.9552    0.4289         0
    4.0000   20.7846   62.6099  137.5791  152.5160    5.8440    0.9281    0.0628
```

Różnica między macierzą A i macierzą $L*D*L^T$:

```
blad_rozkladu_piec =

   1.0e-11 *

         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0   -0.0001         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0   -0.0002         0    0.0002
         0         0         0         0   -0.3638   -0.3638   -0.1213         0
         0         0         0   -0.0002   -0.3638   -0.1213         0    0.0728
         0   -0.0001         0         0   -0.1213         0    0.1817    0.2492
         0         0         0    0.0002         0    0.0728    0.2492    0.1403
```

Rozwiązywanie układu równań Ax = b:

```
b_piec =

     1     2     3     4     5     6     7     8
```

```
x_prim_piec =

    0.3963
   -4.6541
   10.0915
   -4.8384
    0.0756
   -0.8548
    1.7278
   -0.6933
```

Pokażemy teraz różnicę pomiędzy wektorem x wyznaczonym za pomocą funkcji linsolve a wyznaczonym przez naszą funkcję

```
blad_wyznaczania_x_piec =

   1.0e-08 *

    0.0013
   -0.0153
    0.0352
   -0.0191
    0.0557
   -0.4274
    0.6884
   -0.3166
```

- ➔ Porównując ten przykład z poprzednimi widzimy, że błędy wyznaczenia rozkładu oraz wektora x są większe (są rzędu 10^-8) niż dla tamtych przypadków (rzędu około 10^-14)

Porównanie czasowe wykonania różnych funkcji:

czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją chol()	czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją moją	różnica pomiędzy wynikiem z pierwszej i drugiej kolumny
0.0004694	0.0019685	0.0014991

czas wyznaczania x z układu równań metodą linsolve	czas wyznaczania x moją funckją	różnica pomiędzy czwartą i piątą kolumną
0.0003716	0.0007416	0.00037

- Przykład numer 6 – macierz, która zawiera w blokach A11, A22 macierz Toeplitza

Macierz Toeplitza - macierz mająca te same wartości na poszczególnych przekątnych

```
A_szesc =

     8     1     2     1     1     0
     1     8     1     2     1     1
     2     1     8     1     2     1
     1     2     1    -8     1     2
     1     1     2     1    -8     1
     0     1     1     2     1    -8
```

Rozkład macierzy A:

```
L_szesc =

    2.8284         0         0         0         0         0
    0.3536    2.8062         0         0         0         0
    0.7071    0.2673    2.7255         0         0         0
    0.3536    0.6682    0.2097    2.9352         0         0
    0.3536    0.3118    0.6115   -0.1834    2.9262         0
         0    0.3563    0.3320   -0.5766   -0.2705    2.7985

>> D_szesc

D_szesc =

     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0    -1     0     0
     0     0     0     0    -1     0
     0     0     0     0     0    -1
```

```
Lt_szesc =

    2.8284    0.3536    0.7071    0.3536    0.3536         0
         0    2.8062    0.2673    0.6682    0.3118    0.3563
         0         0    2.7255    0.2097    0.6115    0.3320
         0         0         0    2.9352   -0.1834   -0.5766
         0         0         0         0    2.9262   -0.2705
         0         0         0         0         0    2.7985

>> b_szesc
```

Różnica między macierzą A i macierzą $L*D*L^{T}$:

```
blad_rozkladu_szesc =

   1.0e-14 *

   -0.1776         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.0888         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
```

Rozwiązywanie układu równań Ax = b:

```
b_szesc =

     3     4     1     3     5     3
```

Pokażemy teraz różnicę pomiędzy wektorem x wyznaczonym za pomocą funkcji linsolve a wyznaczonym przez naszą funkcję

```
blad_wyznaczania_x_szesc =

   1.0e-15 *

    0.1110
         0
    0.0278
         0
   -0.2220
   -0.1110
```

Porównanie czasowe wykonania różnych funkcji:

czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją chol()	czas wyznaczania rozkładu choleskiego funkcją moją	różnica pomiędzy wynikiem z pierwszej i drugiej kolumny
0.0005155	0.000529	1.35e-05

czas wyznaczania x z układu równań metodą linsolve	czas wyznaczania x moją funckją	różnica pomiędzy czwartą i piątą kolumną
0.0003964	0.0004914	9.5e-05

4. Podsumowanie

Na podstawie powyższych przykładów można wysunąć następujące wnioski:

- Zaimplementowane funkcje dają bardzo dokładne wyniki, błąd bezwzględny jest rzędu 10^-14
- Funkcje wbudowane w matlaba działają szybciej (linsolve i chol) niż zaimplementowane funkcje
- metoda działa równie dobrze dla bardziej skomplikowanych macierzy jak i ‘zwykłych’
- metoda jest ograniczona tylko dla przypadków, w których macierz A spełnia wszystkie założenia z zadania
- rozkład macierzy A ułatwia rozwiązanie układów równań liniowych i np. obliczeni wyznacznika macierzy