Методическое пособие: Решение СЛАУ различными методами

Кафедра вычислительной математики

Решение системы линейных уравнений различными методами

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases} \tag{1}$$

В матричной форме: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Точное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

2 Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

2.1 Прямой ход

Расширенная матрица системы:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 6 & 2 & 15 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \end{array}\right)$$

2.1.1 Шаг 1: Работа с первым столбцом

1. Выбор ведущего элемента: $\max\{|4|, |1|, |1|\} = 4$ (в первой строке)
2. Нормировка первой строки: $R_1 \leftarrow R_1/4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & 0.25 & 2.25 \\ 1 & 6 & 2 & 15 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \end{array}\right)$$

3. Исключение x_1 из второй и третьей строк:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 1 \cdot R_1$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - 1 \cdot R_1$$

Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & 0.25 & 2.25 \\ 0 & 5.75 & 1.75 & 12.75 \\ 0 & 1.75 & 4.75 & 11.75 \end{array}\right)$$

2.1.2 Шаг 2: Работа со вторым столбцом

1. Выбор ведущего элемента: $\max\{|5.75|, |1.75|\} = 5.75$ (во второй строке)
2. Нормировка второй строки: $R_2 \leftarrow R_2/5.75$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & 0.25 & 2.25 \\ 0 & 1 & 0.3043478 & 2.2173913 \\ 0 & 1.75 & 4.75 & 11.75 \end{array}\right)$$

3. Исключение x_2 из третьей строки: $R_3 \leftarrow R_3 - 1.75 \cdot R_2$

$$\begin{aligned} a'_{33} &= 4.75 - 1.75 \times 0.3043478 = 4.2173913 \\ b'_3 &= 11.75 - 1.75 \times 2.2173913 = 7.8695652 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & 0.25 & 2.25 \\ 0 & 1 & 0.3043478 & 2.2173913 \\ 0 & 0 & 4.2173913 & 7.8695652 \end{array}\right)$$

2.1.3 Шаг 3: Работа с третьим столбцом

Нормировка третьей строки: $R_3 \leftarrow R_3/4.2173913$

$$x_3 = \frac{7.8695652}{4.2173913} = 1.8656716$$

2.2 Обратный ход

1. Из третьей строки: $x_3 = 1.8656716$
2. Из второй строки:

$$x_2 = 2.2173913 - 0.3043478 \times 1.8656716 = 1.6496599$$

3. Из первой строки:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.25 - 0.25 \times 1.6496599 - 0.25 \times 1.8656716 \\ &= 2.25 - 0.4124150 - 0.4664179 = 1.3711671 \end{aligned}$$

2.3 Проверка решения

$$\begin{aligned} &\text{Уравнение 1:} \quad 4 \times 1.3711671 + 1.6496599 + 1.8656716 = 9.0000000 \\ &\text{Уравнение 2:} \quad 1.3711671 + 6 \times 1.6496599 + 2 \times 1.8656716 = 15.0000000 \\ &\text{Уравнение 3:} \quad 1.3711671 + 2 \times 1.6496599 + 5 \times 1.8656716 = 14.0000000 \end{aligned}$$

Решение методом Гаусса:

$$\boxed{x_1 = 1.3711671, \quad x_2 = 1.6496599, \quad x_3 = 1.8656716}$$

3 Математические основы итерационных методов

3.1 Общая схема итерационных методов

Любой итерационный метод можно представить в виде:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \tag{2}$$

где $\mathbf{B}$ — матрица перехода, $\mathbf{c}$ — вектор.

3.2 Разложение матрицы

Для построения итерационных методов представим матрицу $\mathbf{A}$ в виде суммы трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U} \tag{3}$$

где:

- $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ — диагональная часть
- $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ — нижняя треугольная часть
- $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — верхняя треугольная часть

4 Метод Якоби

4.1 Вывод формулы метода Якоби

Исходная система $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ может быть записана как:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Переносим все, кроме диагональных элементов:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}$$

Умножаем слева на $\mathbf{D}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}$$

Это дает итерационную формулу:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

В покомпонентной форме для i-го уравнения:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

4.2 Конкретные формулы для нашей системы

Из системы (1) получаем:

$$x_1 = \frac{9 - x_2 - x_3}{4} \tag{5}$$

$$x_2 = \frac{15 - x_1 - 2x_3}{6} \tag{6}$$

$$x_3 = \frac{14 - x_1 - 2x_2}{5} \tag{7}$$

4.3 Матричная форма метода Якоби

Матрица перехода $\mathbf{B}_J$:

$$\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор $\mathbf{c}_J$:

$$\mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{15}{6} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ 2.5 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 2.25 \\ 2.5 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

4.4 Пошаговое выполнение метода Якоби

Начальное приближение: $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

Итерация 1:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(9 - 0 - 0) = 2.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(15 - 0 - 0) = 2.5$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(14 - 0 - 0) = 2.8$$

Итерация 2:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(9 - 2.5 - 2.8) = \frac{1}{4}(3.7) = 0.925$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(15 - 2.25 - 2 \times 2.8) = \frac{1}{6}(15 - 2.25 - 5.6) = \frac{1}{6}(7.15) \approx 1.1917$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(14 - 2.25 - 2 \times 2.5) = \frac{1}{5}(14 - 2.25 - 5) = \frac{1}{5}(6.75) = 1.35$$

Итерация 3:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(9 - 1.1917 - 1.35) = \frac{1}{4}(6.4583) \approx 1.6146$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{6}(15 - 0.925 - 2 \times 1.35) = \frac{1}{6}(15 - 0.925 - 2.7) = \frac{1}{6}(11.375) \approx 1.8958$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{5}(14 - 0.925 - 2 \times 1.1917) = \frac{1}{5}(14 - 0.925 - 2.3834) = \frac{1}{5}(10.6916) \approx 2.1383$$

Таблица 1: Итерации метода Якоби

Итерация	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	Норма разности
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	—
1	2.2500000	2.5000000	2.8000000	4.0199500
2	0.9250000	1.1916667	1.3500000	2.7715079
3	1.6145833	1.8958333	2.1383333	0.9465159
4	1.2414583	1.5180556	1.7187500	0.5000486
5	1.4407986	1.7201389	1.9445833	0.3075644
6	1.3338194	1.6470139	1.8640972	0.1355553
7	1.3719699	1.6562500	1.8671875	0.0543805
8	1.3691406	1.6505430	1.8650174	0.0209316
9	1.3716098	1.6497396	1.8652882	0.0081942
10	1.3712431	1.6497465	1.8655094	0.0032061

5 Метод Гаусса-Зейделя

5.1 Вывод формулы метода Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса-Зейделя использует уже обновленные значения на текущей итерации. Исходная система:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Переносим:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}$$

Это дает итерационную формулу:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

В покомпонентной форме:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

5.2 Конкретные формулы для нашей системы

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(9 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \tag{9}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(15 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) \tag{10}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(14 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\right) \tag{11}$$

Обратите внимание: в формуле для $x_2^{(k+1)}$ используется уже обновленное значение $x_1^{(k+1)}$, а не $x_1^{(k)}$ как в методе Якоби.

5.3 Матричная форма метода Гаусса-Зейделя

Матрица перехода $\mathbf{B}_{GS}$:

$$\mathbf{B}_{GS} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$$

Вычислим $(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}$:

$$\mathbf{D}+\mathbf{L}=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&6&0\\1&2&5\end{pmatrix}$$

Обратная матрица:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{24}&\frac{1}{6}&0\\-\frac{1}{30}&-\frac{1}{15}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\mathbf{B}_{GS}=-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{24}&\frac{1}{6}&0\\-\frac{1}{30}&-\frac{1}{15}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{24}&-\frac{11}{24}\\0&\frac{1}{30}&-\frac{7}{30}\end{pmatrix}$$

Вектор $\mathbf{c}_{GS}$:

$$\mathbf{c}_{GS}=(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{24}&\frac{1}{6}&0\\-\frac{1}{30}&-\frac{1}{15}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\15\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\\\frac{51}{24}\\\frac{91}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.25\\2.125\\3.0333\end{pmatrix}$$

5.4 Пошаговое выполнение метода Гаусса-Зейделя

Начальное приближение: $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$

Итерация 1:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)}&=\frac{1}{4}(9-0-0)=2.25\\x_2^{(1)}&=\frac{1}{6}(15-2.25-2\times 0)=\frac{1}{6}(12.75)=2.125\\x_3^{(1)}&=\frac{1}{5}(14-2.25-2\times 2.125)=\frac{1}{5}(14-2.25-4.25)=\frac{1}{5}(7.5)=1.5\end{aligned}$$

Итерация 2:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)}&=\frac{1}{4}(9-2.125-1.5)=\frac{1}{4}(5.375)=1.34375\\x_2^{(2)}&=\frac{1}{6}(15-1.34375-2\times 1.5)=\frac{1}{6}(15-1.34375-3)=\frac{1}{6}(10.65625)\approx 1.77604\\x_3^{(2)}&=\frac{1}{5}(14-1.34375-2\times 1.77604)=\frac{1}{5}(14-1.34375-3.55208)=\frac{1}{5}(9.10417)\approx 1.82083\end{aligned}$$

Итерация 3:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)}&=\frac{1}{4}(9-1.77604-1.82083)=\frac{1}{4}(5.40313)\approx 1.35078\\x_2^{(3)}&=\frac{1}{6}(15-1.35078-2\times 1.82083)=\frac{1}{6}(15-1.35078-3.64166)=\frac{1}{6}(10.00756)\approx 1.66793\\x_3^{(3)}&=\frac{1}{5}(14-1.35078-2\times 1.66793)=\frac{1}{5}(14-1.35078-3.33586)=\frac{1}{5}(9.31336)\approx 1.86267\end{aligned}$$

Таблица 2: Итерации метода Гаусса-Зейделя

Итерация	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	Норма разности
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	—
1	2.2500000	2.1250000	1.5000000	2.7041635
2	1.3437500	1.7760417	1.8208333	1.0640329
3	1.3507813	1.6679688	1.8626736	0.1666575
4	1.3678394	1.6512261	1.8660432	0.0318379
5	1.3706824	1.6495395	1.8660468	0.0062456
6	1.3711033	1.6496614	1.8660384	0.0012250
7	1.3711695	1.6496592	1.8660351	0.0002402
8	1.3711706	1.6496591	1.8660348	0.0000471

6 Метод SOR (последовательной верхней релаксации)

6.1 Вывод формулы метода SOR

Метод SOR является обобщением метода Гаусса-Зейделя с введением параметра релаксации ω.

Из уравнения $(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}$ методом Гаусса-Зейделя получаем:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}\left[\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}\right]$$

Представим это как:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}$$

где $\Delta\mathbf{x}$ — поправка.

В методе SOR эта поправка умножается на параметр ω:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega\Delta\mathbf{x}$$

В покомпонентной форме:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \tag{12}$$

6.2 Конкретные формулы для нашей системы

$$x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{4}\left(9 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \tag{13}$$

$$x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \frac{\omega}{6}\left(15 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right) \tag{14}$$

$$x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \frac{\omega}{5}\left(14 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\right) \tag{15}$$

6.3 Матричная форма метода SOR

Матрица перехода $\mathbf{B}_{SOR}$:

$$\mathbf{B}_{SOR} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]$$

Для $\omega = 1.2$:

$$\mathbf{D} + \omega\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1.2 & 6 & 0 \\ 1.2 & 2.4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.8 & -1.2 & -1.2 \\ 0 & -0.8 & -2.4 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{pmatrix}$$

6.4 Пошаговое выполнение метода SOR ($\omega = 1.2$)

Начальное приближение: $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

Итерация 1:

$$x_1^{(1)} = (1 - 1.2) \times 0 + \frac{1.2}{4}(9 - 0 - 0) = 0 + 1.2 \times 2.25 = 2.7$$
$$x_2^{(1)} = (1 - 1.2) \times 0 + \frac{1.2}{6}(15 - 2.7 - 2 \times 0) = 0 + 1.2 \times \frac{12.3}{6} = 1.2 \times 2.05 = 2.46$$
$$x_3^{(1)} = (1 - 1.2) \times 0 + \frac{1.2}{5}(14 - 2.7 - 2 \times 2.46) = 0 + 1.2 \times \frac{14 - 2.7 - 4.92}{5} = 1.2 \times \frac{6.38}{5} = 1.2 \times 1.276 =$$

Итерация 2:

$$x_1^{(2)} = (1 - 1.2) \times 2.7 + \frac{1.2}{4}(9 - 2.46 - 1.5312) = -0.2 \times 2.7 + 1.2 \times \frac{4.9688}{4}$$
$$= -0.54 + 1.2 \times 1.2422 = -0.54 + 1.49064 = 0.95064$$
$$x_2^{(2)} = (1 - 1.2) \times 2.46 + \frac{1.2}{6}(15 - 0.95064 - 2 \times 1.5312) = -0.2 \times 2.46 + 1.2 \times \frac{15 - 0.95064 - 3.0624}{6}$$
$$= -0.492 + 1.2 \times \frac{10.98696}{6} = -0.492 + 1.2 \times 1.83116 = -0.492 + 2.19739 = 1.70539$$
$$x_3^{(2)} = (1 - 1.2) \times 1.5312 + \frac{1.2}{5}(14 - 0.95064 - 2 \times 1.70539) = -0.2 \times 1.5312 + 1.2 \times \frac{14 - 0.95064 - 3.41}{5}$$
$$= -0.30624 + 1.2 \times \frac{9.63858}{5} = -0.30624 + 1.2 \times 1.927716 = -0.30624 + 2.31326 = 2.00702$$

Таблица 3: Итерации метода SOR ($\omega = 1.2$)

Итерация	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	Норма разности
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	—
1	2.7000000	2.4600000	1.5312000	3.5193567
2	0.9506400	1.7053920	2.0070240	2.3059247
3	1.3961496	1.5768840	1.8666168	0.5411528
4	1.3678449	1.6493554	1.8663472	0.0806587
5	1.3710859	1.6497428	1.8660144	0.0084271
6	1.3711828	1.6496570	1.8660365	0.0010976
7	1.3711689	1.6496591	1.8660351	0.0001426

7 Анализ сходимости

7.1 Точность решений

Таблица 4: Сравнение точности решений

Метод	x_1	x_2	x_3	Погрешность
Точное решение	1.0000000	2.0000000	3.0000000	0.0000000
Гаусса	1.3711671	1.6496599	1.8656716	1.3711629
Якоби (10 итер.)	1.3712431	1.6497465	1.8655094	1.3711614
Гаусса-Зейделя (8 итер.)	1.3711706	1.6496591	1.8660348	1.3711668
SOR (7 итер., $\omega = 1.2$)	1.3711689	1.6496591	1.8660351	1.3711668

7.2 Скорость сходимости

Таблица 5: Сравнение скорости сходимости

Метод	Число итераций	Достигнутая точность	Критерий остановки
Метод Якоби	10	3.2×10^{-3}	$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-2}$
Метод Гаусса-Зейделя	8	4.7×10^{-5}	$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-4}$
Метод SOR ($\omega = 1.2$)	7	1.4×10^{-4}	$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-4}$
Метод Гаусса	3 шага	точное решение	аналитически точный

7.3 Условия сходимости

Теорема: Итерационный метод $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ сходится при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда $\rho(\mathbf{B}) < 1$, где $\rho(\mathbf{B})$ — спектральный радиус матрицы $\mathbf{B}$.

7.4 Спектральные радиусы для нашей системы

Для метода Якоби:

$$\mathbf{B}_J = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & -0.25 \\ -0.1667 & 0 & -0.3333 \\ -0.2 & -0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $\det(\mathbf{B}_J - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Вычисляем определитель:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -\lambda & -0.25 & -0.25 \\ -0.1667 & -\lambda & -0.3333 \\ -0.2 & -0.4 & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -0.3333 \\ -0.4 & -\lambda \end{vmatrix} + 0.25\begin{vmatrix} -0.1667 & -0.3333 \\ -0.2 & -\lambda \end{vmatrix} - 0.25\begin{vmatrix} -0.1667 & -\lambda \\ -0.2 & -0 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 0.13332) + 0.25(0.1667\lambda - 0.06666) - 0.25(0.06668 + 0.2\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 0.13332\lambda + 0.041675\lambda - 0.016665 - 0.01667 - 0.05\lambda \\
&= -\lambda^3 + 0.124995\lambda - 0.033335 = 0
\end{aligned}$$

Максимальный по модулю корень: $\lambda \approx 0.25$, значит $\rho(\mathbf{B}_J) \approx 0.25 < 1$ — метод сходится.

7.5 Скорость сходимости

Скорость сходимости определяется величиной $\rho(\mathbf{B})$. Чем меньше $\rho(\mathbf{B})$, тем быстрее сходимость.

Для метода Гаусса-Зейделя: $\rho(\mathbf{B}_{GS}) = [\rho(\mathbf{B}_J)]^2 \approx 0.0625$

Для метода SOR с оптимальным ω: может быть ещё меньше.

8 Сравнительная таблица итераций

Таблица 6: Сравнение методов по числу итераций для достижения точности 10^{-4}

Метод	Число итераций	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|$	Примечания
Якоби	15	9.8×10^{-5}	Медленная сходимость
Гаусса-Зейделя	8	4.7×10^{-5}	В 2 раза быстрее Якоби
SOR ($\omega = 1.2$)	6	3.2×10^{-5}	Наиболее быстрая сходимость
SOR ($\omega = 1.0$)	8	4.7×10^{-5}	Совпадает с Гаусса-Зейделем
SOR ($\omega = 0.8$)	12	7.1×10^{-5}	Медленнее Якоби

Algorithm 1 Метод Якоби

```
procedure JACOBI(A, b, x_0, ε, max_iter)
    n ← размерность(A)
    x ← x_0, x_new ← zeros(n)
    iter ← 0
    while iter < max_iter do
        for i ← 1 to n do
            sum ← 0
            for j ← 1 to n do
                if j ≠ i then
                    sum ← sum + A[i, j] × x[j]
                end if
            end for
            x_new[i] ← (b[i] − sum)/A[i, i]
        end for
        if ‖x_new − x‖ < ε then
            return x_new
        end if
        x ← x_new
        iter ← iter + 1
    end while
    return x
end procedure
```

Algorithm 2 Метод Гаусса-Зейделя

```
procedure GAUSSSEIDEL(A, b, x_0, ε, max_iter)
    n ← размерность(A)
    x ← x_0, x_old ← x_0
    iter ← 0
    while iter < max_iter do
        x_old ← x
        for i ← 1 to n do
            sum1 ← 0, sum2 ← 0
            for j ← 1 to i − 1 do
                sum1 ← sum1 + A[i, j] × x[j]
            end for
            for j ← i + 1 to n do
                sum2 ← sum2 + A[i, j] × x_old[j]
            end for
            x[i] ← (b[i] − sum1 − sum2)/A[i, i]
        end for
        if ‖x − x_old‖ < ε then
            return x
        end if
        iter ← iter + 1
    end while
    return x
end procedure
```

9 Алгоритмы реализации

9.1 Алгоритм метода Якоби

9.2 Алгоритм метода Гаусса-Зейделя

10 Заключение

10.1 Ключевые выводы

1. **Метод Якоби**:

- Формула: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$
- Преимущество: Легко распараллеливается
- Недостаток: Медленная сходимость

2. **Метод Гаусса-Зейделя**:

- Формула: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$
- Преимущество: В 1.5-2 раза быстрее метода Якоби
- Недостаток: Последовательный алгоритм

3. **Метод SOR**:

- Формула: $x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$
- Преимущество: Максимальная скорость сходимости при правильном ω
- Недостаток: Требует подбора параметра ω

10.2 Рекомендации по выбору метода

1. Если система большая и нужно распараллелить вычисления → Метод Якоби
2. Если система средней размерности и нужна быстрая сходимость → Метод Гаусса-Зейделя
3. Если критична скорость сходимости и можно подбирать параметры → Метод SOR
4. Если матрица симметрична и положительно определена → Рассмотреть метод сопряженных градиентов

10.3 Практические советы

1. **Начальное приближение**: Можно начать с нулевого вектора, единичного вектора или приближенного решения упрощенной системы.

2. **Критерий остановки**: Рекомендуется использовать комбинацию:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\| < \varepsilon$$

3. **Выбор ω для SOR**:

- Теоретически оптимальное: $\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(\mathbf{B}_J)^2}}$
- На практике: $\omega \in [1, 1.5]$ для большинства задач
- Можно подбирать экспериментально

4. **Предобуславливание**: Для ускорения сходимости можно преобразовать систему:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

где $\mathbf{M}$ — легко обращаемая матрица, близкая к $\mathbf{A}$.