Методическое пособие
«Численные методы решения нелинейных уравнений»

Введение

Данное пособие посвящено численным методам решения уравнений вида:

$$f(x) = 0$$

где $f(x)$ — нелинейная функция. Для многих уравнений не существует аналитических формул для нахождения точного решения, поэтому используются **численные методы**, позволяющие найти приближенное значение корня с заданной точностью ε.

1 Предварительный этап: Отделение корней

Перед применением численных методов необходимо выполнить **отделение корней** — найти отрезки $[a, b]$, на которых функция меняет знак и имеется ровно один корень.

- Строится график функции $y = f(x)$
- Ищутся такие a и b, что $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Больцано-Коши на этом отрезке существует хотя бы один корень

2 Критерии остановки

Итерационный процесс прекращается при выполнении одного из условий:

- **По невязке:** $|f(x_n)| < \varepsilon$
- **По приращению:** $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$
- **По относительной погрешности:** $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$

Важно: Критерий по приращению $|x_n - x_{n-1}|$ более надежно отражает фактическую точность нахождения корня, особенно для функций с малыми производными в окрестности корня.

3 Метод половинного деления (дихотомии)

3.1 Теоретическое обоснование

Теорема Больцано-Коши: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

3.2 Алгоритм для ручного вычисления

1. **Инициализация:**
   - Выбрать отрезок $[a, b]$ с условием $f(a) \cdot f(b) < 0$
   - Задать точность ε
   - Создать таблицу для записи итераций
2. **Итерационный процесс:**
   - Вычислить $c = \dfrac{a+b}{2}$
   - Вычислить $f(c)$
   - Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то $b = c$ (корень в $[a, c]$)
   - Иначе $a = c$ (корень в $[c, b]$)
   - Записать результаты в таблицу
3. **Завершение:** Процесс повторяется пока $b - a > 2\varepsilon$
4. **Результат:** $x^* \approx \dfrac{a+b}{2}$

3.3 Сходимость и оценка погрешности

- **Скорость сходимости:** Линейная
- **Погрешность после n итераций:** $|x^* - x_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$
- **Количество итераций:** $n \geq \log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$

3.4 Пример вычисления

Решить уравнение $x^3 - 2x - 5 = 0$ на $[2, 3]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

n	a	b	c	$f(c)$	Примечание
0	2.0000	3.0000	2.5000	+1.6250	$f(2) < 0$, $f(3) > 0$
1	2.0000	2.5000	2.2500	-0.3594	Корень в $[2.25, 2.5]$
2	2.2500	2.5000	2.3750	+0.5996	Корень в $[2.25, 2.375]$
3	2.2500	2.3750	2.3125	+0.1130	Корень в $[2.25, 2.3125]$
4	2.2500	2.3125	2.2812	-0.1249	Корень в $[2.2812, 2.3125]$

После 12 итераций: $x^* \approx 2.0946$

3.5 Преимущества и недостатки

- **Преимущества:** Абсолютная надежность, простота, не требует производных
- **Недостатки:** Медленная сходимость, не работает для кратных корней

4 Метод простых итераций

4.1 Основная идея

Уравнение $f(x) = 0$ преобразуется к эквивалентному виду:

$$x = \varphi(x)$$

Строится итерационный процесс:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

4.2 Условия сходимости

Если на $[a, b]$ выполняется:

1. $\varphi(x) \in [a, b]$ для всех $x \in [a, b]$
2. $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ для всех $x \in [a, b]$

то метод сходится и верна оценка:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

4.3 Алгоритм для ручного вычисления

1. **Подготовка:**
   - Преобразовать $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$
   - Проверить условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$
   - Выбрать начальное приближение x_0
   - Создать таблицу для итераций
2. **Итерационный процесс:**
   - Вычислить $x_1 = \varphi(x_0)$
   - Вычислить $x_2 = \varphi(x_1)$
   - Продолжать пока $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon$
   - Записывать все промежуточные результаты
3. **Завершение:** Когда $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

4.4 Пример вычисления

Решить уравнение $x - \cos x = 0$.

Преобразование: $x = \cos x$

Проверка сходимости: $\varphi'(x) = -\sin x$, $|\varphi'(x)| \leq 1$

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	0.5000000000	0.8775825619	—
1	0.8775825619	0.6390124942	0.3775825619
2	0.6390124942	0.8026851007	0.2385700677
3	0.8026851007	0.6947780267	0.1636660740
4	0.6947780267	0.7681958280	0.0734178013
5	0.7681958280	0.7191654440	0.0490303840

После 15 итераций: $x^* \approx 0.7390851332$

4.5 Способы преобразования уравнения

- $x = x + \alpha f(x)$ (простой сдвиг)
- $x = x - \dfrac{f(x)}{M}$, где $M \approx f'(x)$
- Аналитическое преобразование

5 Метод Ньютона (касательных)

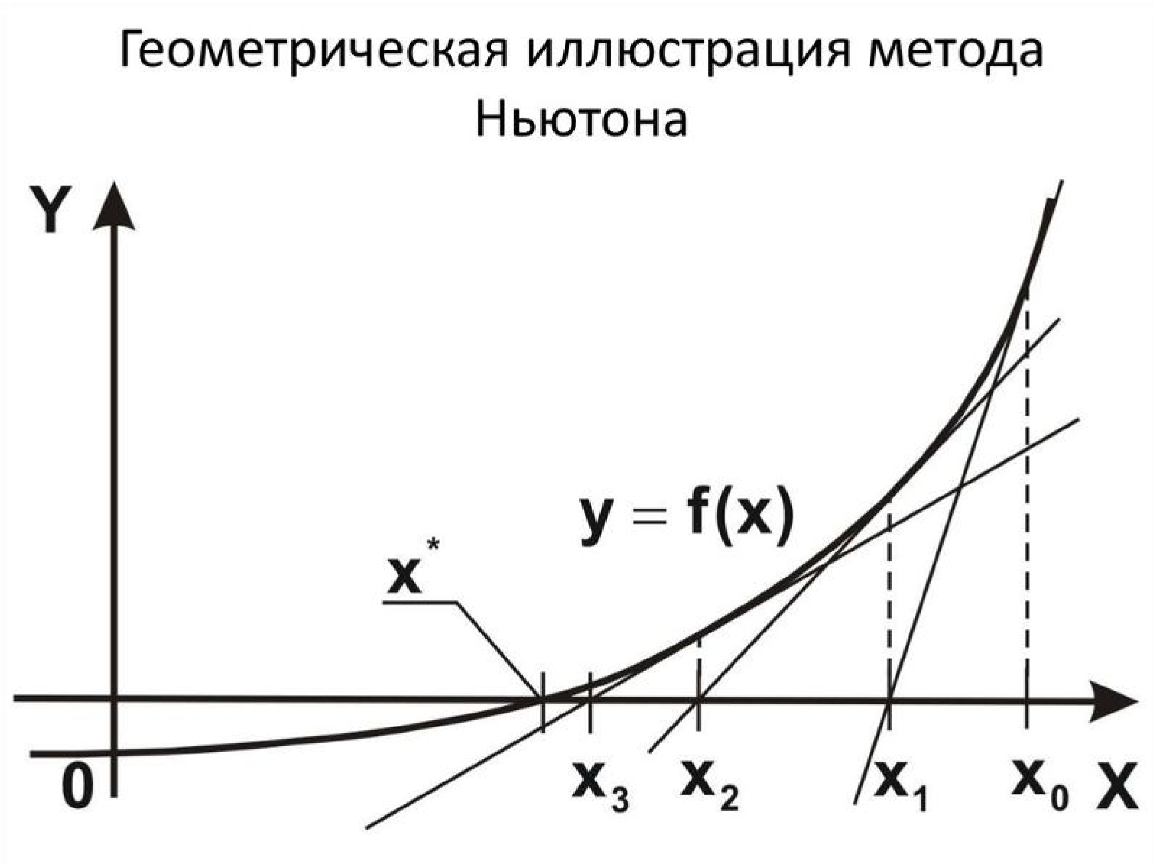
5.1 Геометрический вывод

В точке x_n проводим касательную:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Пересечение с осью OX ($y = 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



5.2 Условия сходимости

- $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0$ на $[a, b]$
- $f''(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$
- Начальное приближение x_0 выбрано так, что $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

5.3 Алгоритм для ручного вычисления

1. **Подготовка:**
   - Выбрать x_0 из условия $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$
   - Вычислить $f'(x_0)$
   - Создать таблицу для итераций
2. **Итерационный процесс:**
   - Вычислить $f(x_n)$ и $f'(x_n)$
   - Вычислить $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   - Вычислить разность $|x_{n+1} - x_n|$
   - Записать результаты в таблицу
3. **Завершение:** Когда $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

5.4 Скорость сходимости

Квадратичная сходимость:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

где $C = \frac{\max|f''(x)|}{2\min|f'(x)|}$

5.5 Пример вычисления

Решить уравнение $x^2 - 2 = 0$ (нахождение $\sqrt{2}$).

$f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$

Формула итераций: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.0000000000	-1.0000000000	2.0000000000	—
1	1.5000000000	0.2500000000	3.0000000000	0.5000000000
2	1.4166666667	0.0069444444	2.8333333333	0.0833333333
3	1.4142156863	0.0000060073	2.8284313725	0.0024509804
4	1.4142135624	0.0000000000	2.8284271247	0.0000021239

Результат: $x^* \approx 1.4142135624$

5.6 Особые случаи

- **Нулевая производная:** $f'(x_n) = 0$ — метод неприменим
- **Кратные корни:** Скорость сходимости падает до линейной
- **Осцилляции:** При неудачном выборе x_0

6 Модифицированный метод Ньютона

6.1 Основная идея

Заменить вычисление производной на каждой итерации одним вычислением в начальной точке:

Обычный Ньютон: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Модифицированный Ньютон: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

6.2 Алгоритм для ручного вычисления

1. **Подготовка:**
   - Выбрать x_0
   - Вычислить $f'(x_0)$ один раз
   - Создать таблицу для итераций
2. **Итерационный процесс:**
   - Вычислить $f(x_n)$
   - Вычислить $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$
   - Вычислить разность $|x_{n+1} - x_n|$
   - Записать результаты в таблицу
3. **Завершение:** Когда $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

6.3 Пример вычисления

Решить уравнение $x^2 - 2 = 0$ модифицированным методом.

$f'(x_0) = f'(1) = 2$

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.0000000000	-1.0000000000	—
1	1.5000000000	0.2500000000	0.5000000000
2	1.3750000000	-0.1093750000	0.1250000000
3	1.4296875000	0.0440216064	0.0546875000
4	1.4076843262	-0.0184469223	0.0220031738
5	1.4168967451	0.0075857133	0.0092124189

6.4 Сравнение с обычным методом Ньютона

- **Скорость:** Линейная (хуже чем квадратичная)
- **Вычисления:** Меньше вычислений на итерацию
- **Применение:** Когда производная вычисляется дорого

7 Сравнительный анализ методов

Метод	**Скорость сходимости**	**Начальные данные**	**Производная**
Половинного деления	Линейная	Отрезок $[a, b]$	Нет
Простых итераций	Линейная	x_0	Нет
Ньютона	Квадратичная	x_0	Да
Модифицированный Ньютон	Линейная	x_0	Да (1 раз)

Таблица 1: Сравнительная характеристика методов

7.1 Рекомендации по выбору метода

- **Метод половинного деления** — для надежности и простоты
- **Метод Ньютона** — для высокой скорости при наличии производной
- **Метод простых итераций** — когда трудно вычислить производную
- **Модифицированный Ньютон** — когда производная вычисляется дорого

Заключение

Численные методы решения нелинейных уравнений являются мощным инструментом для решения задач, не имеющих аналитического решения. Каждый метод имеет свои преимущества и область применения:

- Для начального изучения и надежных вычислений рекомендуется метод половинного деления
- Для быстрого получения точного результата при наличии производной оптимален метод Ньютона
- На практике часто используется комбинированный подход: грубая локализация корня методом дихотомии с последующим уточнением методом Ньютона

Важно помнить о необходимости проверки условий сходимости и правильного выбора начальных приближений для обеспечения надежности вычислений.