

# Варианты по численному решению ОДУ

## 1 Общие требования для всех вариантов

Для каждого варианта решить задачу Коши на отрезке  $[0, 1]$ :

1. Найти аналитическое решение (разделением переменных).
2. Решить численно с шагом  $h = 0.2$  методами:
  - Явный метод Эйлера
  - Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (модифицированный Эйлер)
  - Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
3. Вычислить погрешность в каждой точке.
4. Сравнить точность методов.

## 2 Варианты заданий

Все уравнения имеют вид  $y' = f(t)y$  или  $y' = f(y)$  с гладкими функциями. Начальные условия подобраны так, чтобы решение было ограничено на  $[0, 1]$ .

**Вариант 1:** Уравнение:  $y' = -2y$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-2t}$

**Вариант 2:** Уравнение:  $y' = -3y$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-3t}$

**Вариант 3:** Уравнение:  $y' = -1.5y$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-1.5t}$

**Вариант 4:** Уравнение:  $y' = -2.5y$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-2.5t}$

**Вариант 5:** Уравнение:  $y' = -\frac{y}{2}$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-t/2}$

**Вариант 6:** Уравнение:  $y' = -\frac{y}{3}$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-t/3}$

**Вариант 7:** Уравнение:  $y' = -ty$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-t^2/2}$

**Вариант 8:** Уравнение:  $y' = -2ty$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-t^2}$

**Вариант 9:** Уравнение:  $y' = -\frac{t}{2}y$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-t^2/4}$

**Вариант 10:** Уравнение:  $y' = -\frac{t}{3}y$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = e^{-t^2/6}$

**Вариант 11:** Уравнение:  $y' = -y^2$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = \frac{1}{t+1}$

**Вариант 12:** Уравнение:  $y' = -\frac{y^2}{2}$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = \frac{2}{t+2}$

**Вариант 13:** Уравнение:  $y' = -2y^2$ , Начальное условие:  $y(0) = 0.5$   
Точное решение:  $y(t) = \frac{1}{2t+2}$

**Вариант 14:** Уравнение:  $y' = -\frac{y^2}{3}$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = \frac{3}{t+3}$

**Вариант 15:** Уравнение:  $y' = -\frac{y}{t+1}$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = \frac{1}{t+1}$

**Вариант 16:** Уравнение:  $y' = -\frac{y}{t+2}$ , Начальное условие:  $y(0) = 1$   
Точное решение:  $y(t) = \sqrt{\frac{2}{t+2}}$

### 3 Пошаговые инструкции

#### 3.1 Аналитическое решение (для всех вариантов)

Уравнения вида  $y' = ky$  решаются как:

$$\frac{dy}{y} = k dt \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = kt + C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{kt}$$

Уравнения вида  $y' = ky^2$  решаются как:

$$\frac{dy}{y^2} = k dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = kt + C \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{kt + C}$$

#### 3.2 Численные методы

1. **Явный метод Эйлера:**

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

2. **Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (модифицированный Эйлер):**

$$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2$$

### 3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

### 3.3 Вычисление погрешности

Абсолютная погрешность:  $\varepsilon_n = |y_n - y(t_n)|$

Относительная погрешность:  $\delta_n = \frac{|y_n - y(t_n)|}{|y(t_n)|} \times 100\%$

## 4 Таблицы для заполнения (для всех вариантов)

### 4.1 Таблица численных решений

$t$	Точное решение	Явный Эйлер	RK2	RK4
0.0				
0.2				
0.4				
0.6				
0.8				
1.0				

### 4.2 Таблица погрешностей

$t$	Ошибка Эйлера	Ошибка RK2	Ошибка RK4
0.2			
0.4			
0.6			
0.8			
1.0			

### 4.3 Сводная таблица

Параметр	Явный Эйлер	RK2	RK4
Максимальная погрешность			
Средняя погрешность			
Относительная погрешность в $t = 1$ (%)			

## 5 Анализ сходимости (дополнительное задание)

Для своего варианта выполнить:

1. Решить с шагом  $h = 0.1$  (вдвое меньше)
2. Вычислить максимальную погрешность для каждого метода

3. Найти экспериментальный порядок сходимости по формуле:

$$p \approx \frac{\log(E_h/E_{h/2})}{\log(2)}$$

где  $E_h$  - максимальная погрешность при шаге  $h$

4. Сравнить с теоретическим порядком методов (1 для Эйлера, 2 для RK2, 4 для RK4)

## 6 Физическая интерпретация (для всех вариантов)

Уравнения вида  $y' = -ky$  описывают:

- Радиоактивный распад ( $y$  - количество вещества)
- Охлаждение тела ( $y$  - разность температур)
- Разряд конденсатора ( $y$  - напряжение)

Уравнения вида  $y' = -ky^2$  описывают:

- Химические реакции второго порядка
- Торможение при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости