Пример интерполяции многочленами Лагранжа и Ньютона
и задания для самостоятельной работы

Методы численного анализа

Постановка задачи

Даны 4 точки интерполяции:

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$
$$(x_1, y_1) = (2, 3)$$
$$(x_2, y_2) = (3, 5)$$
$$(x_3, y_3) = (4, 7)$$

Требуется найти значение функции в точке $x = 2.5$ с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона.

1 Интерполяция многочленом Лагранжа

1.1 Формула многочлена Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа степени n имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \ell_i(x) \tag{1}$$

где базисные полиномы Лагранжа определяются как:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2}$$

1.2 Базисные полиномы Лагранжа

Выпишем все базисные полиномы:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)(-3)} = -\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6}$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(1)(-1)(-2)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(2)(1)(-1)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2}$$
$$\ell_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(3)(2)(1)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

1.3 Построение многочлена Лагранжа

Составим многочлен Лагранжа:

$$\begin{aligned}L_3(x) &= 2\cdot\ell_0(x) + 3\cdot\ell_1(x) + 5\cdot\ell_2(x) + 7\cdot\ell_3(x)\\ &= 2\cdot\left[-\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6}\right] + 3\cdot\left[\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}\right]\\ &\quad + 5\cdot\left[-\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2}\right] + 7\cdot\left[\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}\right]\end{aligned}$$

Упростим выражение, умножив на 6 чтобы избавиться от знаменателей:

$$\begin{aligned}6L_3(x) &= -2(x-2)(x-3)(x-4) + 9(x-1)(x-3)(x-4)\\ &\quad - 15(x-1)(x-2)(x-4) + 7(x-1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

Раскроем произведения. Сначала вычислим каждое слагаемое отдельно:
Первое слагаемое:

$$\begin{aligned}-2(x-2)(x-3)(x-4) &= -2[(x-2)(x^2-7x+12)]\\ &= -2[x^3-7x^2+12x-2x^2+14x-24]\\ &= -2[x^3-9x^2+26x-24] = -2x^3+18x^2-52x+48\end{aligned}$$

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned}9(x-1)(x-3)(x-4) &= 9[(x-1)(x^2-7x+12)]\\ &= 9[x^3-7x^2+12x-x^2+7x-12]\\ &= 9[x^3-8x^2+19x-12] = 9x^3-72x^2+171x-108\end{aligned}$$

Третье слагаемое:

$$\begin{aligned}-15(x-1)(x-2)(x-4) &= -15[(x-1)(x^2-6x+8)]\\ &= -15[x^3-6x^2+8x-x^2+6x-8]\\ &= -15[x^3-7x^2+14x-8] = -15x^3+105x^2-210x+120\end{aligned}$$

Четвертое слагаемое:

$$\begin{aligned}7(x-1)(x-2)(x-3) &= 7[(x-1)(x^2-5x+6)]\\ &= 7[x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6]\\ &= 7[x^3-6x^2+11x-6] = 7x^3-42x^2+77x-42\end{aligned}$$

Сложим все слагаемые:

$$\begin{aligned}6L_3(x) &= (-2x^3+18x^2-52x+48) + (9x^3-72x^2+171x-108)\\ &\quad + (-15x^3+105x^2-210x+120) + (7x^3-42x^2+77x-42)\\ &= (-2+9-15+7)x^3 + (18-72+105-42)x^2\\ &\quad + (-52+171-210+77)x + (48-108+120-42)\\ &= (-1)x^3 + (9)x^2 + (-14)x + (18)\\ &= -x^3+9x^2-14x+18\end{aligned}$$

Таким образом, многочлен Лагранжа:

$$L_3(x) = \frac{-x^3+9x^2-14x+18}{6}$$

1.4 Вычисление значения в точке $x = 2.5$

Подставим $x = 2.5$ в полученный многочлен:

$$\begin{aligned} L_3(2.5) &= \frac{-(2.5)^3 + 9(2.5)^2 - 14(2.5) + 18}{6} \\ &= \frac{-15.625 + 9 \cdot 6.25 - 35 + 18}{6} \\ &= \frac{-15.625 + 56.25 - 35 + 18}{6} \\ &= \frac{23.625}{6} = 3.9375 \end{aligned}$$

2 Интерполяция многочленом Ньютона

2.1 Формула многочлена Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Таблица разделенных разностей

Построим таблицу разделенных разностей:

x_i	$f[x_i]$	1-я разность	2-я разность	3-я разность
1	2			
2	3	$\frac{3-2}{2-1} = 1$		
3	5	$\frac{5-3}{3-2} = 2$	$\frac{2-1}{3-1} = 0.5$	
4	7	$\frac{7-5}{4-3} = 2$	$\frac{2-2}{4-2} = 0$	$\frac{0-0.5}{4-1} = -0.1667$

2.3 Построение многочлена Ньютона

Используя коэффициенты из таблицы, получаем многочлен Ньютона:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 2 + 1 \cdot (x - 1) + 0.5 \cdot (x - 1)(x - 2) - 0.1667 \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

Упростим многочлен. Раскроем последовательно:
Первые два слагаемых:

$$2 + (x - 1) = x + 1$$

Добавим третье слагаемое:

$$\begin{aligned} x + 1 + 0.5(x - 1)(x - 2) &= x + 1 + 0.5(x^2 - 3x + 2) \\ &= x + 1 + 0.5x^2 - 1.5x + 1 \\ &= 0.5x^2 - 0.5x + 2 \end{aligned}$$

Добавим четвертое слагаемое:

$$\begin{aligned}
&0.5x^2 - 0.5x + 2 - 0.1667(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= 0.5x^2 - 0.5x + 2 - 0.1667(x-1)(x^2 - 5x + 6) \\
&= 0.5x^2 - 0.5x + 2 - 0.1667(x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6) \\
&= 0.5x^2 - 0.5x + 2 - 0.1667(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \\
&= 0.5x^2 - 0.5x + 2 - 0.1667x^3 + x^2 - 1.8333x + 1 \\
&= -0.1667x^3 + 1.5x^2 - 2.3333x + 3
\end{aligned}$$

Умножим на 6 чтобы получить целые коэффициенты:

$$P_3(x) \approx \frac{-x^3 + 9x^2 - 14x + 18}{6}$$

2.4 Вычисление значения в точке $x = 2.5$

Подставим $x = 2.5$ в полученный многочлен:

$$\begin{aligned}
P_3(2.5) &= \frac{-(2.5)^3 + 9(2.5)^2 - 14(2.5) + 18}{6} \\
&= \frac{-15.625 + 9 \cdot 6.25 - 35 + 18}{6} \\
&= \frac{-15.625 + 56.25 - 35 + 18}{6} \\
&= \frac{23.625}{6} = 3.9375
\end{aligned}$$

Сравнение результатов

Метод	**Результат**
Лагранж	3.9375
Ньютон	3.9375

Оба метода дают одинаковый результат, что подтверждает корректность вычислений.

Выводы

- Оба метода — Лагранжа и Ньютона — дают один и тот же интерполяционный многочлен
- Многочлен имеет вид: $P(x) = \dfrac{-x^3 + 9x^2 - 14x + 18}{6}$
- Метод Лагранжа более громоздкий для вычислений вручную
- Метод Ньютона удобнее при добавлении новых узлов интерполяции
- Для заданного набора точек оба метода обеспечивают точное прохождение через все узлы интерполяции

Задания для самостоятельной работы

Задание для всех вариантов: Для заданных точек построить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, найти значение в указанной точке x^*, сравнить результаты.

Вариант 1.: Точки: $(0,1),(1,3),(2,7),(3,13)$; $x^*=1.5$

Вариант 2.: Точки: $(1,2),(2,4),(3,8),(4,16)$; $x^*=2.5$

Вариант 3.: Точки: $(-1,2),(0,1),(1,2),(2,5)$; $x^*=0.5$

Вариант 4.: Точки: $(0,0),(1,1),(2,8),(3,27)$; $x^*=1.8$

Вариант 5.: Точки: $(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)$; $x^*=2.2$

Вариант 6.: Точки: $(0,2),(1,1),(2,2),(3,5)$; $x^*=1.2$

Вариант 7.: Точки: $(-2,-8),(-1,-1),(0,0),(1,1)$; $x^*=-0.5$

Вариант 8.: Точки: $(0,3),(1,1),(2,-1),(3,-3)$; $x^*=1.7$

Вариант 9.: Точки: $(1,0),(2,1),(3,4),(4,9)$; $x^*=2.8$

Вариант 10.: Точки: $(0,4),(1,2),(2,0),(3,-2)$; $x^*=1.3$

Вариант 11.: Точки: $(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)$; $x^*=0.7$

Вариант 12.: Точки: $(0,1),(1,2),(2,4),(3,8)$; $x^*=1.6$

Вариант 13.: Точки: $(1,3),(2,6),(3,11),(4,18)$; $x^*=2.4$

Вариант 14.: Точки: $(0,5),(1,3),(2,1),(3,-1)$; $x^*=1.8$

Вариант 15.: Точки: $(-1,-2),(0,1),(1,4),(2,7)$; $x^*=0.3$

Вариант 16.: Точки: $(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)$; $x^*=1.9$

Вариант 17.: Точки: $(1,5),(2,7),(3,11),(4,17)$; $x^*=2.7$

Вариант 18.: Точки: $(0,2),(1,4),(2,6),(3,8)$; $x^*=1.4$

Вариант 19.: Точки: $(-1,3),(0,1),(1,-1),(2,-3)$; $x^*=0.6$

Вариант 20.: Точки: $(0,-1),(1,0),(2,3),(3,8)$; $x^*=1.1$

Требования к оформлению

1. Решение должно содержать подробные вычисления для обоих методов
2. Для метода Лагранжа выписать базисные полиномы и упростить итоговый многочлен
3. Для метода Ньютона построить таблицу разделенных разностей и упростить многочлен
4. Только после получения упрощенных многочленов подставлять значение x^*
5. Сравнить результаты, полученные разными методами
6. Все вычисления проводить с точностью до 0.001