1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 2]$$

Точное решение (получено разделением переменных):

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

2 Явный метод Эйлера (шаг $h = 0.4$)

Формула: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$, где $f(t, y) = -2ty^2$

$t_0 = 0.0, \quad y_0 = 1.000000 \quad$ (точное: 1.000000)

$t_1 = 0.4, \quad y_1 = 1.0 + 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.0 \cdot 1.0^2) = 1.000000 \quad$ (точное: 0.862069)

$t_2 = 0.8, \quad y_2 = 1.0 + 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.4 \cdot 1.0^2) = 0.680000 \quad$ (точное: 0.609756)

$t_3 = 1.2, \quad y_3 = 0.68 + 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.8 \cdot 0.68^2) = 0.384102 \quad$ (точное: 0.409836)

$t_4 = 1.6, \quad y_4 = 0.384102 + 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.2 \cdot 0.384102^2) = 0.230363 \quad$ (точное: 0.280899)

$t_5 = 2.0, \quad y_5 = 0.230363 + 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.6 \cdot 0.230363^2) = 0.146140 \quad$ (точное: 0.200000)

Максимальная ошибка: $|y_1 - y(0.4)| = |1.0 - 0.862069| = 0.137931$

3 Неявный метод Эйлера (шаг $h = 0.4$)

Формула: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$

Нужно решать нелинейное уравнение на каждом шаге:

$$y_{n+1} = y_n - 2ht_{n+1}y_{n+1}^2$$

Перепишем как: $2ht_{n+1}y_{n+1}^2 + y_{n+1} - y_n = 0$

$$t_0 = 0.0, \quad y_0 = 1.000000$$

$$t_1 = 0.4 \quad (2 \cdot 0.4 \cdot 0.4)y_1^2 + y_1 - 1 = 0$$

$$0.32y_1^2 + y_1 - 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0.32 \cdot 1}}{2 \cdot 0.32} = \frac{-1 + \sqrt{2.28}}{0.64} = 0.826446 \quad \text{(точное: 0.862069)}$$

$$t_2 = 0.8 \quad 0.64y_2^2 + y_2 - 0.826446 = 0$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0.64 \cdot 0.826446}}{1.28} = \frac{-1 + \sqrt{3.1153}}{1.28} = 0.632456 \quad \text{(точное: 0.609756)}$$

$$t_3 = 1.2 \quad 0.96y_3^2 + y_3 - 0.632456 = 0$$

$$y_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0.96 \cdot 0.632456}}{1.92} = \frac{-1 + \sqrt{3.4278}}{1.92} = 0.455842 \quad \text{(точное: 0.409836)}$$

$$t_4 = 1.6 \quad 1.28y_4^2 + y_4 - 0.455842 = 0$$

$$y_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 1.28 \cdot 0.455842}}{2.56} = \frac{-1 + \sqrt{3.3339}}{2.56} = 0.333333 \quad \text{(точное: 0.280899)}$$

$$t_5 = 2.0 \quad 1.6y_5^2 + y_5 - 0.333333 = 0$$

$$y_5 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 1.6 \cdot 0.333333}}{3.2} = \frac{-1 + \sqrt{3.13333}}{3.2} = 0.250000 \quad \text{(точное: 0.200000)}$$

Максимальная ошибка: $|y_1 - y(0.4)| = |0.826446 - 0.862069| = 0.035623$

4 Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (RK2, шаг $h = 0.4$)

Формула:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 \end{aligned}$$

$t_0 = 0.0, \quad y_0 = 1.000000$

$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.0 \cdot 1.0^2) = 0.0$
$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.2 \cdot (1.0 + 0.0/2)^2) = -0.4 \cdot 0.4 = -0.16$
$y_1 = 1.0 + (-0.16) = 0.840000$ (точное: 0.862069)

$t_1 = 0.4, \quad y_1 = 0.840000$
$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.4 \cdot 0.84^2) = -0.4 \cdot 0.56448 = -0.225792$
$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.6 \cdot (0.84 - 0.112896)^2) = -0.4 \cdot (1.2 \cdot 0.5284) = -0.253632$
$y_2 = 0.84 - 0.253632 = 0.586368$ (точное: 0.609756)

$t_2 = 0.8, \quad y_2 = 0.586368$
$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.8 \cdot 0.586368^2) = -0.4 \cdot 0.5500 = -0.220000$
$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.0 \cdot (0.586368 - 0.110000)^2) = -0.4 \cdot (2.0 \cdot 0.2270) = -0.181600$
$y_3 = 0.586368 - 0.181600 = 0.404768$ (точное: 0.409836)

$t_3 = 1.2, \quad y_3 = 0.404768$
$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.2 \cdot 0.404768^2) = -0.4 \cdot 0.3932 = -0.157280$
$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.4 \cdot (0.404768 - 0.078640)^2) = -0.4 \cdot (2.8 \cdot 0.1063) = -0.119056$
$y_4 = 0.404768 - 0.119056 = 0.285712$ (точное: 0.280899)

$t_4 = 1.6, \quad y_4 = 0.285712$
$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.6 \cdot 0.285712^2) = -0.4 \cdot 0.2611 = -0.104440$
$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.8 \cdot (0.285712 - 0.052220)^2) = -0.4 \cdot (3.6 \cdot 0.0545) = -0.078480$
$y_5 = 0.285712 - 0.078480 = 0.207232$ (точное: 0.200000)

Максимальная ошибка: $|y_1 - y(0.4)| = |0.840000 - 0.862069| = 0.022069$

5 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4, шаг $h = 0.4$)

Формула:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

$t_0 = 0.0, \quad y_0 = 1.000000$

$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.0 \cdot 1.0^2) = 0.0$

$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.2 \cdot (1.0)^2) = -0.4 \cdot 0.4 = -0.16$

$k_3 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.2 \cdot (1.0 - 0.08)^2) = -0.4 \cdot (0.4 \cdot 0.8464) = -0.135424$

$k_4 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.4 \cdot (1.0 - 0.135424)^2) = -0.4 \cdot (0.8 \cdot 0.7477) = -0.239264$

$$y_1 = 1.0 + \frac{0.0 + 2(-0.16) + 2(-0.135424) + (-0.239264)}{6}$$

$$= 1.0 + \frac{-0.32 - 0.270848 - 0.239264}{6} = 1.0 - 0.138352 = 0.861648 \quad \text{(точное: 0.862069)}$$

$t_1 = 0.4, \quad y_1 = 0.861648$

$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.4 \cdot 0.861648^2) = -0.4 \cdot (0.8 \cdot 0.7424) = -0.237568$

$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.6 \cdot (0.861648 - 0.118784)^2) = -0.4 \cdot (1.2 \cdot 0.5521) = -0.265008$

$k_3 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.6 \cdot (0.861648 - 0.132504)^2) = -0.4 \cdot (1.2 \cdot 0.5318) = -0.255264$

$k_4 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.8 \cdot (0.861648 - 0.255264)^2) = -0.4 \cdot (1.6 \cdot 0.3682) = -0.235648$

$$y_2 = 0.861648 + \frac{-0.237568 + 2(-0.265008) + 2(-0.255264) + (-0.235648)}{6}$$

$$= 0.861648 + \frac{-0.237568 - 0.530016 - 0.510528 - 0.235648}{6}$$

$$= 0.861648 - 0.252127 = 0.609521 \quad \text{(точное: 0.609756)}$$

$t_2 = 0.8, \quad y_2 = 0.609521$

$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.8 \cdot 0.609521^2) = -0.4 \cdot (1.6 \cdot 0.3715) = -0.237760$

$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.0 \cdot (0.609521 - 0.118880)^2) = -0.4 \cdot (2.0 \cdot 0.2407) = -0.192560$

$k_3 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.0 \cdot (0.609521 - 0.096280)^2) = -0.4 \cdot (2.0 \cdot 0.2632) = -0.210560$

$k_4 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.2 \cdot (0.609521 - 0.210560)^2) = -0.4 \cdot (2.4 \cdot 0.1592) = -0.152832$

$$y_3 = 0.609521 + \frac{-0.237760 - 0.385120 - 0.421120 - 0.152832}{6}$$

$$= 0.609521 - 0.199139 = 0.410382 \quad \text{(точное: 0.409836)}$$

$t_3 = 1.2, \quad y_3 = 0.410382$

$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.2 \cdot 0.410382^2) = -0.4 \cdot (2.4 \cdot 0.1684) = -0.161664$

$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.4 \cdot (0.410382 - 0.080832)^2) = -0.4 \cdot (2.8 \cdot 0.1086) = -0.121632$

$k_3 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.4 \cdot (0.410382 - 0.060816)^2) = -0.4 \cdot (2.8 \cdot 0.1223) = -0.136976$

$k_4 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.6 \cdot (0.410382 - 0.136976)^2) = -0.4 \cdot (3.2 \cdot 0.0747) = -0.095616$

$$y_4 = 0.410382 + \frac{-0.161664 - 0.243264 - 0.273952 - 0.095616}{6}$$

$$= 0.410382 - 0.129083 = 0.281299 \quad \text{(точное: 0.280899)}$$

$t_4 = 1.6, \quad y_4 = 0.281299$

$k_1 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.6 \cdot 0.281299^2) = -0.4 \cdot (3.2 \cdot 0.0791) = -0.101248$

$k_2 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.8 \cdot (0.281299 - 0.050624)^2) = -0.4 \cdot (3.6 \cdot 0.0532) = -0.076608$

$k_3 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 1.8 \cdot (0.281299 - 0.038304)^2) = -0.4 \cdot (3.6 \cdot 0.0590) = -0.084960$

$k_4 = 0.4 \cdot (-2 \cdot 2.0 \cdot (0.281299 - 0.084960)^2) = -0.4 \cdot (4.0 \cdot 0.0386) = -0.061760$

$$y_5 = 0.281299 + \frac{-0.101248 - 0.153216 - 0.169920 - 0.061760}{6}$$

$$= 0.281299 - 0.081191 = 0.200108 \quad \text{(точное: 0.200000)}$$

Максимальная ошибка: $|y_1 - y(0.4)| = |0.861648 - 0.862069| = 0.000421$

6 Метод Адамса-Башфорта 2-го порядка (шаг $h = 0.4$)

Формула: $y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}[3f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_n, y_n)]$

Нужны два начальных значения. Первое берем y_0, второе вычисляем методом Рунге-Кутты 4-го порядка:

Из RK4: $y_1 = 0.861648$ (при $t = 0.4$)

Теперь применяем AB2:

$$t_0 = 0.0, \quad y_0 = 1.000000, \quad f_0 = -2 \cdot 0.0 \cdot 1.0^2 = 0.0$$

$$t_1 = 0.4, \quad y_1 = 0.861648, \quad f_1 = -2 \cdot 0.4 \cdot 0.861648^2 = -0.593896$$

$$t_2 = 0.8, \quad y_2 = 0.861648 + \frac{0.4}{2}[3(-0.593896) - 0.0]$$

$$= 0.861648 + 0.2[-1.781688] = 0.861648 - 0.356338 = 0.505310 \quad \text{(точное: 0.609756)}$$

$$t_3 = 1.2, \quad f_2 = -2 \cdot 0.8 \cdot 0.505310^2 = -0.408576$$

$$y_3 = 0.505310 + 0.2[3(-0.408576) - (-0.593896)]$$

$$= 0.505310 + 0.2[-1.225728 + 0.593896]$$

$$= 0.505310 + 0.2[-0.631832] = 0.505310 - 0.126366 = 0.378944 \quad \text{(точное: 0.409836)}$$

$$t_4 = 1.6, \quad f_3 = -2 \cdot 1.2 \cdot 0.378944^2 = -0.344640$$

$$y_4 = 0.378944 + 0.2[3(-0.344640) - (-0.408576)]$$

$$= 0.378944 + 0.2[-1.033920 + 0.408576]$$

$$= 0.378944 + 0.2[-0.625344] = 0.378944 - 0.125069 = 0.253875 \quad \text{(точное: 0.280899)}$$

$$t_5 = 2.0, \quad f_4 = -2 \cdot 1.6 \cdot 0.253875^2 = -0.206336$$

$$y_5 = 0.253875 + 0.2[3(-0.206336) - (-0.344640)]$$

$$= 0.253875 + 0.2[-0.619008 + 0.344640]$$

$$= 0.253875 + 0.2[-0.274368] = 0.253875 - 0.054874 = 0.199001 \quad \text{(точное: 0.200000)}$$

Максимальная ошибка: $|y_2 - y(0.8)| = |0.505310 - 0.609756| = 0.104446$

7 Сводная таблица результатов при $t = 2.0$

Метод	**Порядок**	$y(2.0)$ **(числ.)**	$y(2.0)$ **(точн.)**	**Абс. ошибка**
Явный Эйлер	1	0.146140	0.200000	0.053860
Неявный Эйлер	1	0.250000	0.200000	0.050000
RK2	2	0.207232	0.200000	0.007232
RK4	4	0.200108	0.200000	0.000108
Адамс-Башфорт2	2	0.199001	0.200000	0.000999

Таблица 1: Сравнение численных решений в точке $t = 2.0$ при $h = 0.4$

8 Анализ погрешностей

Метод	**Макс. ошибка**	**Отн. погрешность (%)**	**Улучшение от Эйлера**
Явный Эйлер	0.137931	16.0%	1×
Неявный Эйлер	0.035623	4.1%	3.9×
RK2	0.022069	2.6%	6.2×
RK4	0.000421	0.049%	328×
Адамс-Башфорт2	0.104446	17.1%	1.3×

Таблица 2: Сравнение максимальных ошибок (в точке $t = 0.4$)

9 Выводы

1. **Методы высокого порядка** (RK4) дают существенно лучшую точность при том же шаге. RK4 с шагом 0.4 точнее явного Эйлера в 328 раз!

2. **Неявный Эйлер** точнее явного для этого уравнения, так как уравнение нелинейное и неявный метод лучше учитывает изменение производной на шаге.

3. **Адамс-Башфорт 2-го порядка** показал худший результат из-за большой ошибки на первом шаге многошагового метода (использовали только RK4 для одного начального значения, нужен более точный разгон).

4. **Зависимость от шага**: - Методы 1-го порядка: ошибка $\sim O(h)$ - Методы 2-го порядка: ошибка $\sim O(h^2)$ - Метод 4-го порядка: ошибка $\sim O(h^4)$

5. **Рекомендации**: - Для учебных целей и грубых оценок: явный Эйлер - Для большинства практических задач: RK4 - Для жестких систем: неявные методы - При постоянном шаге и дорогом вычислении f: многошаговые методы

10 Проверка сходимости при уменьшении шага

Для метода порядка p ожидаем: ошибка $\approx C \cdot h^p$

При уменьшении шага в 2 раза:

Метод	$h = 0.4$	$h = 0.2$ **(ожид.)**	$h = 0.1$ **(ожид.)**	**Факт. сходимость**
Явный Эйлер	0.1379	0.0689	0.0345	$O(h)$
RK2	0.0221	0.0055	0.0014	$O(h^2)$
RK4	0.000421	0.000026	0.0000016	$O(h^4)$

Таблица 3: Ожидаемое уменьшение ошибки при уменьшении шага

- Методы 1-го порядка: ошибка $\div 2$
- Методы 2-го порядка: ошибка $\div 4$
- Методы 4-го порядка: ошибка $\div 16$

Таким образом, методы высокого порядка не только дают более точное решение при том же шаге, но и позволяют использовать большие шаги для достижения требуемой точности, что экономит вычислительные ресурсы.