Численное интегрирование

Варианты заданий для практической работы

Содержание

1 Введение

1.1 Цель работы

Научиться применять численные методы интегрирования для вычисления определённых интегралов, сравнивать точность различных методов при фиксированном числе разбиений.

1.2 Единое задание для всех вариантов

Вычислить приближённое значение интеграла тремя методами:

1. Методом средних прямоугольников
2. Методом трапеций
3. Методом Симпсона

при числе разбиений $n = 4$.

1.3 Алгоритм выполнения

Для каждого варианта:

1. Вычислить точное значение интеграла аналитически
2. Найти шаг интегрирования $h = \dfrac{b-a}{4}$
3. Вычислить значения функции в узлах
4. Применить формулы трёх методов
5. Сравнить результаты с точным значением
6. Проанализировать точность методов

2 Формулы методов интегрирования

2.1 Общие обозначения

- $h = \dfrac{b-a}{n}$ — шаг интегрирования
- $x_i = a + ih$ — узлы интегрирования, $i = 0, 1, \ldots, n$
- $n = 4$ — число разбиений (во всех вариантах)

2.2 Формулы методов

1. **Метод средних прямоугольников**:

$$I_M \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

2. **Метод трапеций**:

$$I_T \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

3. **Метод Симпсона** (n должно быть чётным):

$$I_S \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right]$$

3 Варианты заданий

3.1 Таблица вариантов

Вариант	Интеграл	Функция	Пределы	Точное значение
1	$\int_0^2 f(x)dx$	$f(x) = x^2$	$a = 0, b = 2$	$\frac{8}{3} \approx 2.666667$
2	$\int_0^1 f(x)dx$	$f(x) = x^3$	$a = 0, b = 1$	$\frac{1}{4} = 0.25$
3	$\int_1^2 f(x)dx$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$a = 1, b = 2$	$\ln 2 \approx 0.693147$
4	$\int_0^{\pi/2} f(x)dx$	$f(x) = \sin x$	$a = 0, b = \pi/2$	1
5	$\int_0^{\pi} f(x)dx$	$f(x) = \cos x$	$a = 0, b = \pi$	0
6	$\int_0^1 f(x)dx$	$f(x) = e^x$	$a = 0, b = 1$	$e - 1 \approx 1.718282$
7	$\int_0^2 f(x)dx$	$f(x) = x^2 + 1$	$a = 0, b = 2$	$\frac{14}{3} \approx 4.666667$
8	$\int_0^1 f(x)dx$	$f(x) = 2x + 3$	$a = 0, b = 1$	4
9	$\int_{-1}^1 f(x)dx$	$f(x) = x^2$	$a = -1, b = 1$	$\frac{2}{3} \approx 0.666667$
10	$\int_0^2 f(x)dx$	$f(x) = 3x^2 - 2x$	$a = 0, b = 2$	4
11	$\int_0^1 f(x)dx$	$f(x) = \sqrt{x}$	$a = 0, b = 1$	$\frac{2}{3} \approx 0.666667$
12	$\int_0^2 f(x)dx$	$f(x) = \frac{x}{2}$	$a = 0, b = 2$	1
13	$\int_0^{\pi} f(x)dx$	$f(x) = \sin^2 x$	$a = 0, b = \pi$	$\frac{\pi}{2} \approx 1.570796$
14	$\int_0^1 f(x)dx$	$f(x) = x^4$	$a = 0, b = 1$	$\frac{1}{5} = 0.2$
15	$\int_1^e f(x)dx$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$a = 1, b = e$	1
16	$\int_0^2 f(x)dx$	$f(x) = 4 - x^2$	$a = 0, b = 2$	$\frac{16}{3} \approx 5.333333$
17	$\int_0^{\pi/2} f(x)dx$	$f(x) = \cos x$	$a = 0, b = \pi/2$	1
18	$\int_0^1 f(x)dx$	$f(x) = x(1 - x)$	$a = 0, b = 1$	$\frac{1}{6} \approx 0.166667$
19	$\int_0^2 f(x)dx$	$f(x) = e^{-x}$	$a = 0, b = 2$	$1 - e^{-2} \approx 0.864665$
20	$\int_{-1}^1 f(x)dx$	$f(x) = x^3$	$a = -1, b = 1$	0

4 Подробный пример решения

4.1 Вариант 1: $\int_0^2 x^2 dx$

4.1.1 Точное значение

$$I_{\text{точн}} = \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2.666667$$

4.1.2 Параметры интегрирования

- $a = 0$, $b = 2$, $n = 4$
- $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$

4.1.3 Узлы и значения функции

x_i	$f(x_i) = x_i^2$
$x_0 = 0.0$	0.0
$x_1 = 0.5$	0.25
$x_2 = 1.0$	1.0
$x_3 = 1.5$	2.25
$x_4 = 2.0$	4.0

4.1.4 Вычисление методом средних прямоугольников

Средние точки: 0.25, 0.75, 1.25, 1.75
Значения функции: $f(0.25) = 0.0625$, $f(0.75) = 0.5625$, $f(1.25) = 1.5625$, $f(1.75) = 3.0625$

$$I_M = 0.5 \times (0.0625 + 0.5625 + 1.5625 + 3.0625) = 0.5 \times 5.25 = 2.625$$

4.1.5 Вычисление методом трапеций

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{0.5}{2} \times [0.0 + 2(0.25 + 1.0 + 2.25) + 4.0] \\ &= 0.25 \times [0.0 + 2 \times 3.5 + 4.0] \\ &= 0.25 \times 11.0 = 2.75 \end{aligned}$$

4.1.6 Вычисление методом Симпсона

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{0.5}{3} \times [0.0 + 4 \times 0.25 + 2 \times 1.0 + 4 \times 2.25 + 4.0] \\ &= \frac{0.5}{3} \times [0.0 + 1.0 + 2.0 + 9.0 + 4.0] \\ &= \frac{0.5}{3} \times 16.0 = \frac{8}{3} \approx 2.666667 \end{aligned}$$

4.1.7 Сравнение точности

Метод	Результат	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность, %
Средние прямоугольники	2.625	0.041667	1.56
Трапеции	2.75	0.083333	3.13
Симпсон	2.666667	0.000000	0.00

4.1.8 Вывод

Для квадратичной функции $f(x) = x^2$ метод Симпсона дал точный результат, что соответствует теории (метод Симпсона точен для многочленов до третьей степени).

5 Шаблон для оформления решения

5.1 Титульный лист

```
Вариант N
Вычислить [a,b] f(x)dx тремя методами при n=4
ФИО студента
Группа
Дата
```

5.2 Основная часть

1. **Дано:**
   - Функция: $f(x) = \dots$
   - Пределы интегрирования: $a = \dots$, $b = \dots$
   - Число разбиений: $n = 4$
2. **Точное значение интеграла:**
   $$I_{\text{точн}} = \cdots = \dots$$
3. **Вычисление параметров:**
   $$h = \frac{b-a}{4} = \dots$$
4. **Таблица значений:**

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = \dots$	$\dots$
$x_1 = a + h = \dots$	$\dots$
$x_2 = a + 2h = \dots$	$\dots$
$x_3 = a + 3h = \dots$	$\dots$
$x_4 = b = \dots$	$\dots$

5. **Метод средних прямоугольников:**
   - Средние точки: $\dots$
   - Значения функции: $\dots$

- Вычисление: $I_M = h \times (\dots) = \dots$

6. **Метод трапеций:**

$$I_T = \frac{h}{2} \times [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)] = \dots$$

7. **Метод Симпсона:**

$$I_S = \frac{h}{3} \times [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] = \dots$$

8. **Сравнение результатов:**

Метод	Результат	|I-точн|	Отн. погр., %
Ср. прямоуг.			
Трапеции			
Симпсон			

9. **Выводы:**

- Самый точный метод: ...
- Самый неточный метод: ...
- Особенности вычислений: ...

6 Теоретическая справка

6.1 Порядки точности методов

- **Метод средних прямоугольников:** $O(h^2)$
- **Метод трапеций:** $O(h^2)$
- **Метод Симпсона:** $O(h^4)$

6.2 Точность для многочленов

- **Метод средних прямоугольников:** точен для многочленов 1-й степени
- **Метод трапеций:** точен для многочленов 1-й степени
- **Метод Симпсона:** точен для многочленов до 3-й степени

7 Дополнительное задания

Написать на любом языке программирования функции для вычисления численного интеграла разными методами