Методическое пособие по численной интерполяции

Содержание

1 Введение в интерполяцию

Численная интерполяция — это фундаментальный метод вычислительной математики, позволяющий восстановить значение функции в произвольной точке внутри некоторого интервала по известным значениям в дискретных узлах. Исторически задача интерполяции возникла из практических потребностей астрономии и геодезии, когда требовалось определить положение небесных тел или географические координаты в моменты времени, для которых непосредственные измерения отсутствовали.

В современной вычислительной практике интерполяция находит применение в самых различных областях: от компьютерной графики и обработки сигналов до финансового моделирования и машинного обучения. Понимание методов интерполяции является фундаментальным для любого специалиста, работающего с численными методами.

1.1 Постановка задачи

Пусть имеется набор из $n + 1$ узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые обычно упорядочены по возрастанию: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. В этих узлах известны значения некоторой функции $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Требуется найти функцию $F(x)$ такую, что:

$$F(x_i) = y_i \quad \text{для всех } i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

При этом функция $F(x)$ должна быть достаточно гладкой и позволять вычислить значение в любой точке x из интервала $[x_0, x_n]$.

1.2 Основные понятия и классификация

Определение 1. *Интерполяционным многочленом называется алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям интерполяции $P_n(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Определение 2. *Узлы интерполяции — это точки x_i, в которых заданы значения интерполируемой функции. Распределение узлов может быть равномерным или неравномерным, причем выбор распределения существенно влияет на точность интерполяции.*

Существует несколько основных подходов к интерполяции:

- **Полиномиальная интерполяция** — использование алгебраических многочленов
- **Кубические сплайны** — кусочно-полиномиальная интерполяция с повышенной гладкостью
- **Тригонометрическая интерполяция** — использование тригонометрических полиномов
- **Рациональная интерполяция** — использование отношений многочленов

В данном пособии мы сосредоточимся на полиномиальной интерполяции, которая является наиболее изученной и часто применяемой на практике.

2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

2.1 Идея метода и вывод формулы

Метод Лагранжа основан на элегантной идее представления интерполяционного многочлена в виде линейной комбинации специальных базисных полиномов. Основная идея заключается в том, чтобы построить такие базисные полиномы $\ell_k(x)$, каждый из которых равен 1 в одном из узлов интерполяции и 0 во всех остальных узлах.

Ищем многочлен степени n в виде:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \ell_k(x) \tag{2}$$

где $\ell_k(x)$ — базисные полиномы Лагранжа, обладающие фундаментальным свойством:

$$\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{3}$$

Такой полином можно построить как произведение:

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{4}$$

2.2 Доказательство корректности построения

Доказательство того, что построенные базисные полиномы обладают требуемыми свойствами, проводится непосредственной проверкой:

- При $x = x_k$: каждый множитель в произведении принимает вид $\frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} = 1$, следовательно $\ell_k(x_k) = 1$
- При $x = x_j$ $(j \neq k)$: один из множителей будет $\frac{x_j - x_j}{x_k - x_j} = 0$, что обращает всё произведение в ноль, следовательно $\ell_k(x_j) = 0$

Таким образом, при подстановке в формулу (2) в узле x_k все слагаемые, кроме k-го, обращаются в ноль, а k-е слагаемое даёт $y_k \cdot 1 = y_k$, что и требовалось.

2.3 Явный вид многочлена Лагранжа

Подставляя выражение для базисных полиномов (4) в формулу (2), получаем классическую форму интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{5}$$

2.4 Развернутая форма записи без знака произведения

Для лучшего понимания структуры многочлена Лагранжа полезно записать его в развернутой форме без использования знака произведения. Для общего случая $n + 1$ узлов многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + y_n \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1}{(x_n-x_0)(x_n-x_1} \tag{6}$$

Или в более компактной записи:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \tag{7}$$

Такая запись наглядно демонстрирует, что каждое слагаемое в сумме представляет собой отношение двух произведений: в числителе — произведение разностей $(x - x_i)$ для всех $i \neq k$, в знаменателе — произведение разностей $(x_k - x_i)$ для всех $i \neq k$.

2.5 Пример для трех узлов (n=2)

Рассмотрим подробно случай трех точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Многочлен Лагранжа второй степени имеет вид:

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Проанализируем структуру этого выражения:

- Первое слагаемое: принимает значение y_0 при $x = x_0$, и 0 при $x = x_1$ и $x = x_2$
- Второе слагаемое: принимает значение y_1 при $x = x_1$, и 0 при $x = x_0$ и $x = x_2$
- Третье слагаемое: принимает значение y_2 при $x = x_2$, и 0 при $x = x_0$ и $x = x_1$

Таким образом, при подстановке $x = x_k$ все слагаемые, кроме k-го, обращаются в ноль, а k-е слагаемое даёт ровно y_k.

2.6 Алгоритм вычисления и практическая реализация

Для практического вычисления значения интерполяционного многочлена Лагранжа в точке x можно использовать следующий алгоритм:

1. Инициализировать $result = 0$
2. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$:
    (a) Вычислить числитель: $numer = 1$
    (b) Вычислить знаменатель: $denom = 1$
    (c) Для каждого $i = 0, 1, \ldots, n$ при $i \neq k$:
        i. $numer = numer \cdot (x - x_i)$
        ii. $denom = denom \cdot (x_k - x_i)$
    (d) Вычислить $term = y_k \cdot (numer/denom)$
    (e) $result = result + term$
3. Вернуть $result$

Вычислительная сложность этого алгоритма составляет $O(n^2)$, что делает его неэффективным при большом количестве узлов. Однако для небольших n метод Лагранжа вполне практичен.

3 Интерполяционный многочлен Ньютона

3.1 Мотивация и основные понятия

В то время как форма Лагранжа проста и симметрична, она обладает существенным недостатком: при добавлении нового узла интерполяции требуется пересчитывать все базисные полиномы. Многочлен Ньютона лишен этого недостатка благодаря использованию аппарата разделенных разностей.

Определение 3. *Разделенной разностью k-го порядка называется величина, определяемая рекуррентно:*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{8}$$

При этом разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах:

$$f[x_i] = y_i \tag{9}$$

3.2 Рекуррентные формулы для разделенных разностей

Для практических вычислений удобно использовать явные формулы для разделенных разностей низших порядков:

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= y_i \\
f[x_i, x_j] &= \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \\
f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \\
f[x_i, x_j, x_k, x_l] &= \frac{f[x_j, x_k, x_l] - f[x_i, x_j, x_k]}{x_l - x_i}
\end{aligned}$$

Разделенные разности обладают свойством симметрии: их значение не зависит от порядка узлов в аргументах.

3.3 Вывод интерполяционного многочлена Ньютона

Многочлен Ньютона записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned}
P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
+ f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)
\end{aligned} \tag{10}$$

Или в компактной записи:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \tag{11}$$

где произведение по пустому множеству (при $k = 0$) полагается равным 1.

3.4 Доказательство методом индукции

Доказательство того, что многочлен Ньютона удовлетворяет условиям интерполяции, удобно провести методом математической индукции.

База индукции: Для $n = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся:

- При $x = x_0$: $P_1(x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_0 - x_0) = y_0$
- При $x = x_1$: $P_1(x_1) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = y_1$

Предположение индукции: Пусть для $n = k$ многочлен Ньютона $P_k(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции в узлах $x_0, \ldots, x_k$.

Шаг индукции: Рассмотрим $n = k + 1$. Построим многочлен:

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + f[x_0, \ldots, x_{k+1}] \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)$$

В узлах $x_0, \ldots, x_k$ дополнительное слагаемое обращается в ноль (поскольку один из множителей произведения равен нулю), поэтому благодаря предположению индукции $P_{k+1}(x_j) = P_k(x_j) = y_j$ для $j = 0, \ldots, k$.

В узле x_{k+1} имеем:

$$P_{k+1}(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1}) + f[x_0, \ldots, x_{k+1}] \prod_{i=0}^{k} (x_{k+1} - x_i)$$

Из определения разделенных разностей следует, что это выражение равно y_{k+1}, что завершает доказательство.

3.5 Таблица разделенных разностей

Для удобства вычислений разделенных разностей используют табличную форму:

x_i	$f[x_i]$	1-я разность	2-я разность	3-я разность	$\cdots$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Заполнение таблицы происходит последовательно: сначала вычисляются разности первого порядка, затем второго, и так далее. Каждый элемент вычисляется через два соседних элемента из предыдущего столбца.

4 Погрешность интерполяции

4.1 Основная теорема о погрешности

Точность интерполяционного многочлена фундаментально зависит от гладкости интерполируемой функции и расположения узлов интерполяции.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции $x_0, \ldots, x_n$, то для погрешности интерполяции в любой точке $x \in [a, b]$ справедливо представление:*

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{12}$$

где $\xi = \xi(x) \in [\min(x, x_0, \ldots, x_n), \max(x, x_0, \ldots, x_n)]$ — некоторая точка, зависящая от x.

4.2 Доказательство теоремы

Доказательство этой фундаментальной теоремы основано на применении теоремы Ролля к специально построенной вспомогательной функции.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K \cdot \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \tag{13}$$

где константа K выбирается так, чтобы $\varphi(x) = 0$:

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)} \tag{14}$$

Функция $\varphi(t)$ имеет $n+2$ различных нуля: $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. По теореме Ролля её первая производная $\varphi'(t)$ имеет не менее $n+1$ нуля на рассматриваемом интервале, вторая производная — не менее n нулей, и так далее. Наконец, $(n+1)$-я производная $\varphi^{(n+1)}(t)$ имеет хотя бы один нуль ξ на интервале.

Вычислим $\varphi^{(n+1)}(t)$. Заметим, что $(n+1)$-я производная многочлена $L_n(t)$ степени n равна нулю, а $(n+1)$-я производная произведения $\prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$ равна $(n+1)!$. Поэтому:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K \cdot (n+1)! \tag{15}$$

При $t = \xi$ получаем:

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - K \cdot (n+1)! \tag{16}$$

Отсюда находим:

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{17}$$

Подставляя это выражение в формулу для K, получаем искомое представление погрешности.

4.3 Практические оценки погрешности

На практике точное значение производной $f^{(n+1)}(\xi)$ обычно неизвестно, поэтому используют оценку:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \tag{18}$$

где $M_{n+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$

Эта оценка позволяет априори оценить погрешность интерполяции, если известна оценка для производной $(n+1)$-го порядка.

4.4 Явление Рунге

При интерполяции на равномерной сетке многочленами высокой степени может наблюдаться феномен Рунге — сильные колебания многочлена краев интервала. Это связано с быстрым ростом произведения $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ около границ при увеличении n.

Для борьбы с явлением Рунге рекомендуется:

- Использовать интерполяцию на неравномерных сетках
- Применять кусочно-полиномиальную интерполяцию (сплайны)
- Ограничивать степень интерполяционного многочлена

5 Интерполяция сплайнами

5.1 Введение в сплайн-интерполяцию

Сплайн-интерполяция — это кусочно-полиномиальная интерполяция, которая устраняет основные недостатки полиномиальной интерполяции высокой степени, в частности, явление Рунге. Идея метода заключается в том, что на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция аппроксимируется своим полиномом невысокой степени, причем эти полиномы "склеиваются" в узлах с определенной гладкостью.

Название "сплайн" происходит от английского слова "spline" — гибкая линейка, которую использовали чертежники для проведения гладких кривых через заданные точки.

5.2 Кубические сплайны

Наиболее распространенными на практике являются **кубические сплайны**, которые обеспечивают непрерывность второй производной и визуальную гладкость кривой.

Определение 4. *Кубическим сплайном называется функция $S(x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$S(x)$ — кубический полином на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$*
2. *$S(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$ (условие интерполяции)*
3. *$S(x) \in C^2[a, b]$ (непрерывность самой функции и её первых двух производных)*

5.3 Построение кубического сплайна

Рассмотрим отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, на котором сплайн имеет вид:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{19}$$

Для $n+1$ узлов имеем $4n$ неизвестных коэффициентов. Условия интерполяции и гладкости дают:

- Условия интерполяции ($n+1$ условий):

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1 \tag{20}$$

- Непрерывность первой производной ($n-1$ условий):

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, n-2 \tag{21}$$

- Непрерывность второй производной ($n-1$ условий):

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, n-2 \tag{22}$$

Всего получаем $4n-2$ условий. Недостающие 2 условия задаются **граничными условиями**.

5.4 Граничные условия

Наиболее распространенные типы граничных условий:

1. **Естественный сплайн:**

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \tag{23}$$

2. **Сплайн с заданными наклонами:**

$$S'(x_0) = y_0', \quad S'(x_n) = y_n' \tag{24}$$

3. **Периодический сплайн** (если $y_0 = y_n$):

$$S'(x_0) = S'(x_n), \quad S''(x_0) = S''(x_n) \tag{25}$$

5.5 Вывод системы уравнений

Введем обозначения:

- $h_i = x_{i+1} - x_i$ — длина отрезка
- $m_i = S'(x_i)$ — значения первой производной в узлах

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн можно записать в виде:

$$S_i(x) = \frac{m_i}{h_i}(x_{i+1}-x)^2\left[\frac{2}{h_i}(x-x_i)+1\right] + \frac{m_{i+1}}{h_i}(x-x_i)^2\left[\frac{2}{h_i}(x_{i+1}-x)+1\right] + y_i\frac{(x_{i+1}-x)^2(2(x-x_i)+h_i)}{h_i^3} + \tag{26}$$

Из условия непрерывности второй производной получаем систему:

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{27}$$

где

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i},$$
$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i},$$
$$d_i = 3\left(\lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)$$

5.6 Решение системы

Система уравнений (12) является трехдиагональной и решается эффективным методом прогонки.

1. **Прямой ход** (вычисление прогоночных коэффициентов):

$$\alpha_1 = -\frac{\mu_1}{2}$$
$$\beta_1 = \frac{d_1}{2}$$
$$\alpha_i = -\frac{\mu_i}{2 + \lambda_i \alpha_{i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n-1$$
$$\beta_i = \frac{d_i - \lambda_i \beta_{i-1}}{2 + \lambda_i \alpha_{i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n-1$$

2. **Обратный ход**:

$$m_n = 0 \quad \text{(для естественного сплайна)}$$
$$m_i = \alpha_i m_{i+1} + \beta_i, \quad i = n-1, \ldots, 1$$
$$m_0 = 0 \quad \text{(для естественного сплайна)}$$

5.7 Алгоритм построения кубического сплайна

1. Вычислить $h_i = x_{i+1} - x_i$ для $i = 0, \ldots, n-1$

2. Вычислить коэффициенты λ_i, μ_i, d_i для $i = 1, \ldots, n-1$

3. Решить трехдиагональную систему методом прогонки и найти m_i

4. Для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ вычислить коэффициенты:

$$a_i = y_i$$
$$b_i = m_i$$
$$c_i = \frac{3(y_{i+1} - y_i)}{h_i^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{h_i}$$
$$d_i = \frac{2(y_i - y_{i+1})}{h_i^3} + \frac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2}$$

5.8 Пример построения кубического сплайна

Рассмотрим интерполяцию функции по точкам:

x	0	1	2
y	1	3	2

Построим естественный кубический сплайн.
Шаг 1: Вычисляем h_i:

$$h_0 = 1 - 0 = 1$$
$$h_1 = 2 - 1 = 1$$

Шаг 2: Вычисляем коэффициенты:

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{h_0 + h_1} = \frac{1}{2}$$
$$\mu_1 = \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{1}{2}$$
$$d_1 = 3\left(\lambda_1 \frac{y_1 - y_0}{h_0} + \mu_1 \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) = 3\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3-1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2-3}{1}\right) = 3\,(1 - 0.5) = 1.5$$

Шаг 3: Решаем систему:

$$2m_1 = 1.5 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0.75$$

Для естественного сплайна: $m_0 = m_2 = 0$
Шаг 4: Вычисляем коэффициенты сплайнов:
На отрезке $[0, 1]$:

$$a_0 = 1$$
$$b_0 = 0$$
$$c_0 = \frac{3(3-1)}{1^2} - \frac{0.75 + 0}{1} = 6 - 0.75 = 5.25$$
$$d_0 = \frac{2(1-3)}{1^3} + \frac{0.75 + 0}{1^2} = -4 + 0.75 = -3.25$$

На отрезке $[1, 2]$:

$$a_1 = 3$$
$$b_1 = 0.75$$
$$c_1 = \frac{3(2-3)}{1^2} - \frac{0 + 1.5}{1} = -3 - 1.5 = -4.5$$
$$d_1 = \frac{2(3-2)}{1^3} + \frac{0 + 0.75}{1^2} = 2 + 0.75 = 2.75$$

Таким образом, кубический сплайн имеет вид:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 5.25x^2 - 3.25x^3, & x \in [0, 1] \\ 3 + 0.75(x-1) - 4.5(x-1)^2 + 2.75(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Характеристика	**Полиномиальная интерполяция**	**Сплайн-интерполяция**
Гладкость	C^∞	C^2 (для кубических сплайнов)
Устойчивость	Подвержена явлению Рунге	Устойчива, нет осцилляций
Вычислительная сложность	$O(n^2)$	$O(n)$ после построения
Гибкость	Жесткая структура	Гибкая, локальные изменения
Область применения	Гладкие функции, теоретические исследования	Реальные данные, CAD системы, графика

Таблица 1: Сравнение полиномиальной и сплайн-интерполяции

5.9 Сравнение с полиномиальной интерполяцией

5.10 Преимущества и недостатки сплайн-интерполяции

Преимущества:

- Отсутствие явления Рунге при увеличении числа узлов
- Локальность изменений (изменение одного узла влияет только на соседние отрезки)
- Хорошая численная устойчивость
- Естественный вид получаемых кривых

Недостатки:

- Более сложный алгоритм построения
- Требуется решать систему уравнений
- Меньшая гладкость по сравнению с полиномами высокой степени

5.11 Применение сплайн-интерполяции

Сплайн-интерполяция широко применяется в:

- Компьютерной графике и анимации
- Системах автоматизированного проектирования (CAD)
- Обработке сигналов и изображений
- Географических информационных системах (ГИС)
- Финансовом моделировании

В заключение отметим, что сплайн-интерполяция является мощным инструментом для работы с реальными данными, обеспечивая хороший компромисс между точностью, гладкостью и вычислительной эффективностью.

6 Оптимальный выбор узлов интерполяции

6.1 Многочлены Чебышева и чебышевские узлы

Для минимизации максимальной погрешности интерполяции на отрезке $[a, b]$ узлы следует выбирать как корни многочленов Чебышева:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{28}$$

Многочлены Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ обладают свойством минимаксности: среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1 многочлен $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ имеет наименьшую равномерную норму на $[-1, 1]$.

6.2 Сравнение равномерных и чебышевских узлов

- **Равномерные узлы:** $x_k = a + kh$, где $h = \frac{b-a}{n}$
  - Простота построения
  - Подвержены явлению Рунге
  - Неоптимальны с точки зрения минимизации погрешности
- **Чебышевские узлы:** $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$
  - Сгущаются near краев интервала
  - Минимизируют максимальную погрешность
  - Позволяют использовать многочлены более высоких степеней

7 Практические аспекты и примеры

7.1 Численный пример интерполяции

Рассмотрим задачу интерполяции функции $f(x)$ по следующим точкам:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	7	13

Решение методом Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 3 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ + 7 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 13 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \end{aligned}$$

После упрощения получаем:

$$\begin{aligned} L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)} + 3 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{(1)(-1)(-2)} \\ + 7 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)}{(2)(1)(-1)} + 13 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{(3)(2)(1)} \end{aligned}$$

Решение методом Ньютона:
Построим таблицу разделенных разностей:

x_i	$f[x_i]$	1-я разность	2-я разность	3-я разность
0	1			
1	3	$\frac{3-1}{1-0} = 2$		
2	7	$\frac{7-3}{2-1} = 4$	$\frac{4-2}{2-0} = 1$	
3	13	$\frac{13-7}{3-2} = 6$	$\frac{6-4}{3-1} = 1$	$\frac{1-1}{3-0} = 0$

Многочлен Ньютона:

$$P_3(x) = 1 + 2(x-0) + 1(x-0)(x-1) + 0(x-0)(x-1)(x-2) = x^2 + x + 1$$

7.2 Анализ результатов

Оба метода дают идентичный результат: $P_3(x) = x^2+x+1$. Проверим выполнение условий интерполяции:

$$\begin{aligned}
P_3(0) &= 0^2 + 0 + 1 = 1 \quad \checkmark \\
P_3(1) &= 1^2 + 1 + 1 = 3 \quad \checkmark \\
P_3(2) &= 2^2 + 2 + 1 = 7 \quad \checkmark \\
P_3(3) &= 3^2 + 3 + 1 = 13 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Интересно отметить, что хотя мы использовали четыре точки (что позволяет построить многочлен третьей степени), получился многочлен второй степени. Это означает, что исходные данные точно лежат на квадратичной параболе.

8 Сравнение методов интерполяции

9 Заключение

Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона представляют собой мощный и гибкий инструмент численного анализа, каждый из которых имеет свои преимущества и области применения.

Многочлен Лагранжа отличается концептуальной простотой и symmetry, что делает его особенно удобным для теоретических исследований и понимания fundamental принципов интерполяции. Его явная формула наглядно демонстрирует структуру интерполяционного процесса. Однако вычислительная неэффективность при добавлении новых узлов ограничивает его практическое применение.

Многочлен Ньютона, основанный на аппарате разделенных разностей, обладает значительными практическими преимуществами. Возможность постепенного добавления новых узлов без полного пересчета делает его идеальным выбором для задач, где данные поступают последовательно или количество узлов может изменяться.

При работе с интерполяцией следует учитывать следующие важные аспекты:

- При увеличении степени многочлена точность не обязательно возрастает due к явлению Рунге
- Выбор узлов интерполяции существенно влияет на точность, с чебышевскими узлами обычно giving лучшие результаты
- Для функций с особенностями или быстрыми изменениями предпочтительнее использовать кусочно-полиномиальную интерполяцию

Характеристика	Многочлен Лагранжа	Многочлен Ньютона
Сложность вычислений	$O(n^2)$ операций для вычисления значения в одной точке	$O(n^2)$ операций для построения таблицы разностей, затем $O(n)$ для вычисления значения
Добавление новых узлов	Требуется пересчет всех базисных полиномов, что эквивалентно полному пересчету	Требуется вычисление только новых разделенных разностей, существующие вычисления сохраняются
Устойчивость к ошибкам округления	Средняя устойчивость, может теряться точность при большом количестве узлов	Более высокая устойчивость, особенно при использовании таблицы разделенных разностей
Простота программирования	Относительно простая реализация, понятный алгоритм	Более сложная реализация, требующая организации таблицы разделенных разностей
Область применения	Теоретические исследования, задачи с небольшим фиксированным числом узлов	Практические вычисления, задачи с постепенным добавлением узлов, последовательные вычисления
Чувствительность к порядку узлов	Абсолютно инвариантен к порядку узлов (симметричная форма)	Зависит от порядка узлов, хотя теоретически результат должен быть одинаковым

Таблица 2: Детальное сравнение методов интерполяции

- Всегда следует оценивать погрешность интерполяции, especially при экстраполяции за пределы интервала узлов

Понимание методов полиномиальной интерполяции создает foundation для изучения более сложных методов численного анализа, таких как сплайн-интерполяция, численное дифференцирование и интегрирование, а также решение дифференциальных уравнений.

Литература

1. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** “Численные методы” — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 632 с.

2. **Самарский А. А., Гулин А. В.** “Численные методы” — М.: Наука, 1989. — 432 с.

3. **Калиткин Н. Н.** “Численные методы” — М.: Наука, 1978. — 512 с.

4. **Демидович Б. П., Марон И. А.** “Основы вычислительной математики” — М.: Наука, 1966. — 664 с.

5. **Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.** “Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing” — Cambridge University Press, 2007. — 1235 p.