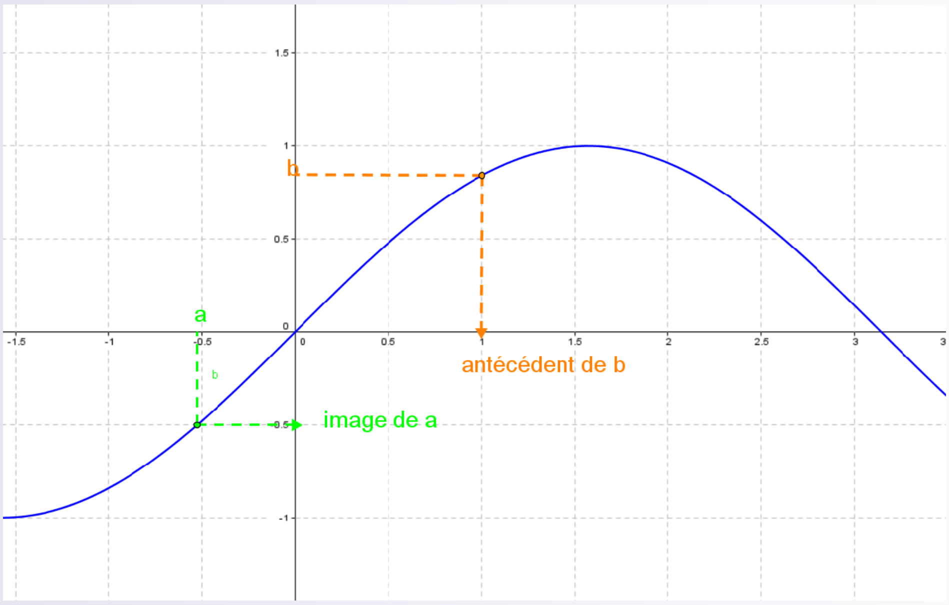
Olivier FINOT, 23 septembre 2015

I. Rappels

Définitions

Définir une fonction f sur un intervalle $[a\,;b[$, c'est fournir une **relation** qui à chaque valeur x de l'intervalle $[a\,;b[$ associe un nombre appelé **image** et noté $f(x)$. On dit que x a pour **antécédent** le nombre x.

Illustration



II. Variations et parité d'une fonction

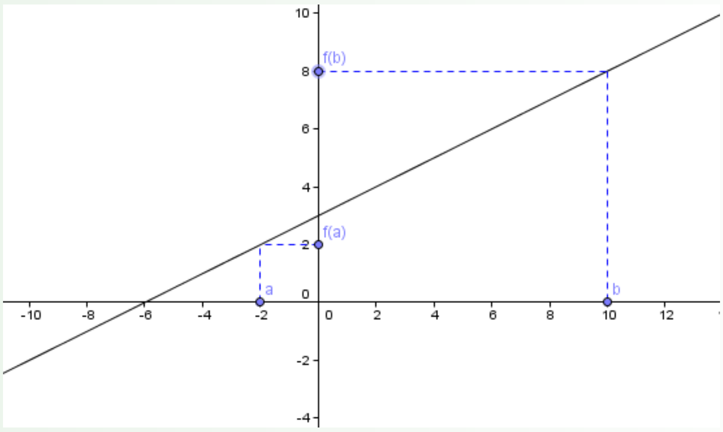
1) Fonction croissante

Définition

Si une fonction f est **croissante** sur un intervalle I alors les images sont rangées dans le même ordre que leur antécédent ; c'est à dire que $f(x)$ **augmente quand** x **augmente**.

Exemple

La fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ est croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.



- a et b appartiennent à $]-\infty\,;+\infty[$, on a $a \leq b$ donc $f(a) \leq f(b)$.
- $-2 \leq 10$ donc $f(-2) \leq f(10)$ $(2 \leq 8)$.

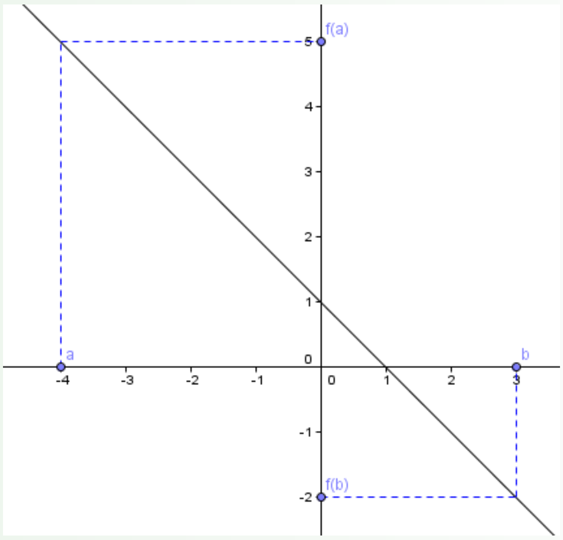
2) Fonction décroissante

Définition

Si une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I alors les images sont rangées dans l'ordre inverse de leur antécédent ; c'est à dire que $f(x)$ **diminue quand** x **augmente**.

Exemple

La fonction $f(x) = -x + 1$ est décroissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.



- a et b appartiennent à $]-\infty\,;+\infty[$, on a $a \leq b$ donc $f(a) \geq f(b)$.
- $-4 \leq 3$ donc $f(-4) \geq f(3)$ $(5 \geq -2)$.

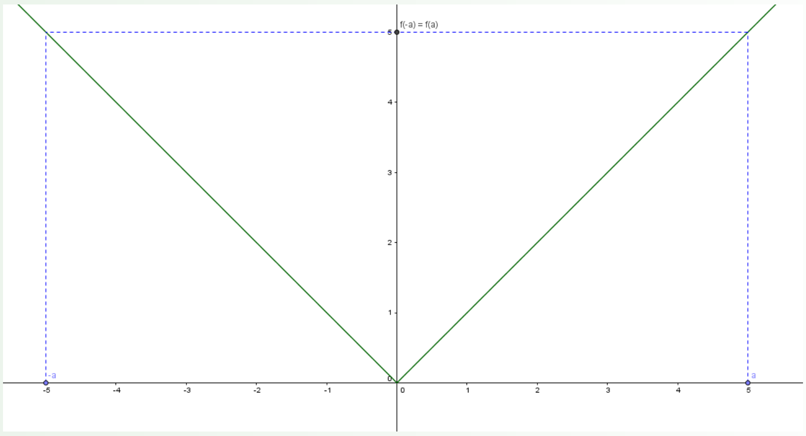
3) Fonction paire

Définition

Si une fonction f est **paire** sur un intervalle I, alors pour tout x de I $f(-x) = f(x)$
.

Exemple

La fonction $f(x) = |x|$ (valeur absolue de x) est définie et paire sur $]-\infty\,;+\infty[$.



On a $f(-5) = f(5) = 5$.

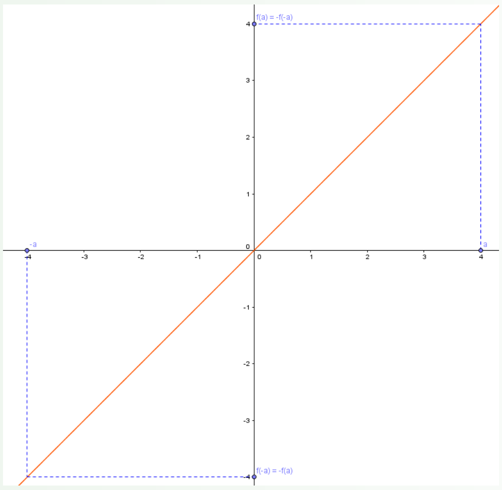
4) Fonction impaire

Définition

Si une fonction f est **impaire** sur un intervalle I, alors pour tout x de I on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

La fonction $f(x) = x$ est définie et impaire sur $]-\infty\,;+\infty[$.



On a $f(-4) = -f(4) = -4$.

III. Fonctions de référence

1) Fonction carré

Définition

La **fonction carré** est définie par $x \mapsto x^2$.

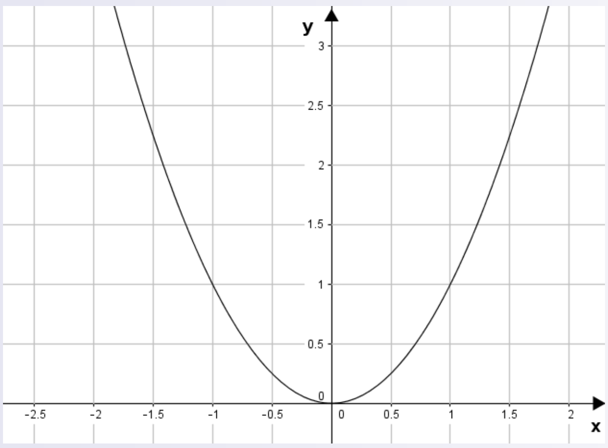
Propriétés

La fonction carré est :

- définie sur $]-\infty\,;+\infty[$.
- décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- paire.

Illustration

Courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ et tableau de variations associé :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$		$\nearrow$

2) Fonction inverse

Définition

La **fonction inverse** est définie par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

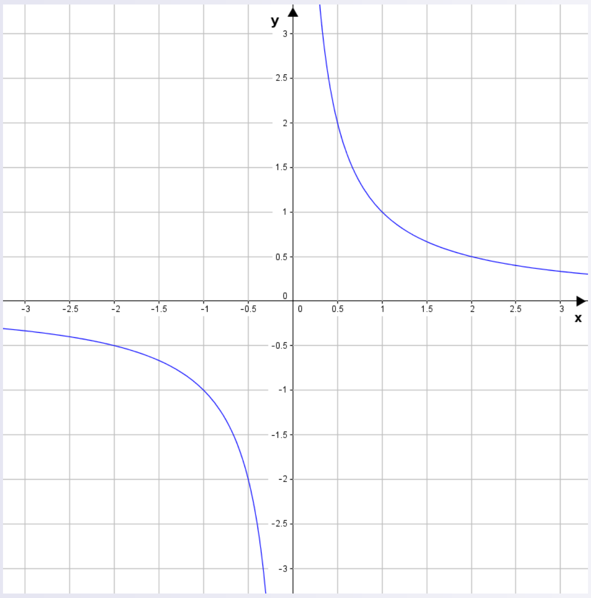
Propriétés

La fonction inverse est :

- définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
- décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Illustration

Courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et tableau de variations associé :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

3) Fonction racine

Définition

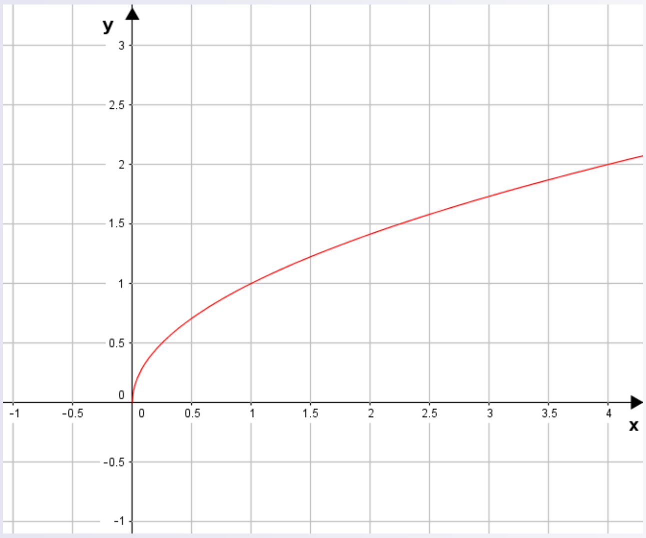
La **fonction racine carrée** est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$.

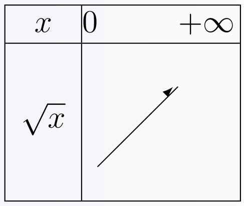
Propriétés

Elle est définie et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Illustration

Courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et tableau de variations associé :





4) Fonction cube

Définition

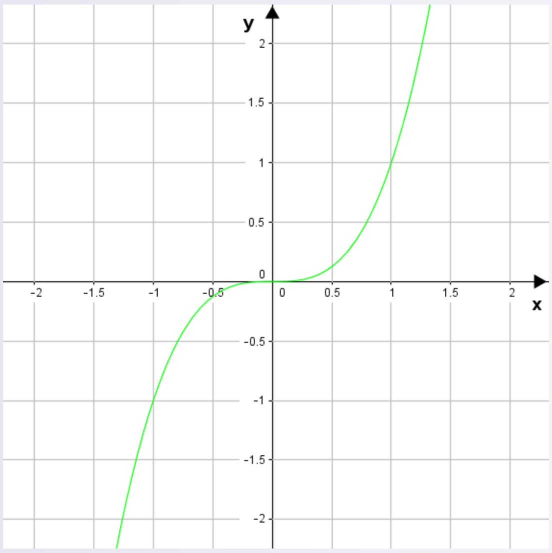
La **fonction cube** est définie par $x \mapsto x^3$.

Propriétés

Elle est définie et croissante sur l'intervalle $]-\infty\,; +\infty[$.

Illustration

Courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ et tableau de variations associé :



x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

IV. Opérations avec les fonctions

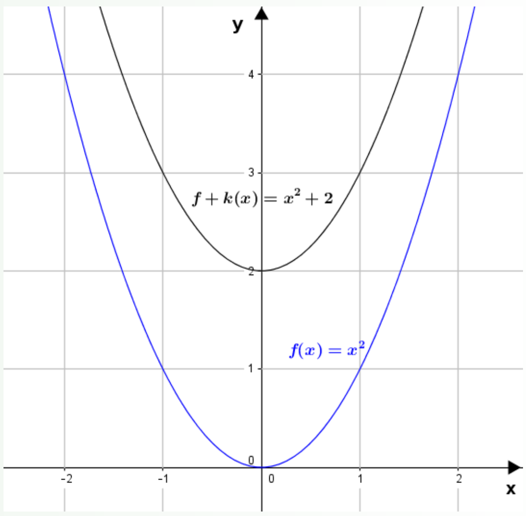
1) Somme d'une fonction et d'un nombre

Propriété

Lorsque l'on **ajoute une constante** k **à une fonction** f, on obtient une nouvelle fonction notée $f+k$ qui a **le même sens de variation que** f.

Exemple

Soit la fonction f, telle que $f(x) = x^2$.
f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc la fonction $f+k(x) = x^2+2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$).



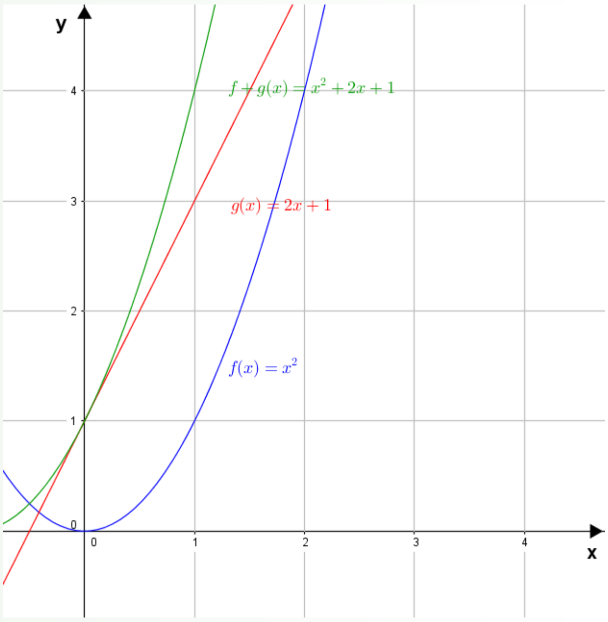
2) Somme de deux fonctions

Propriété

Si on **ajoute deux fonctions f et g** qui possèdent le **même sens de variation**, on obtient alors une fonction $f+g$ qui a **le même sens de variation que f ou g**.

Exemple

Soient les fonctions f et g, telles que $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$.
f et g sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Donc la fonction $f + g(x) = x^2 + 2x + 1$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.



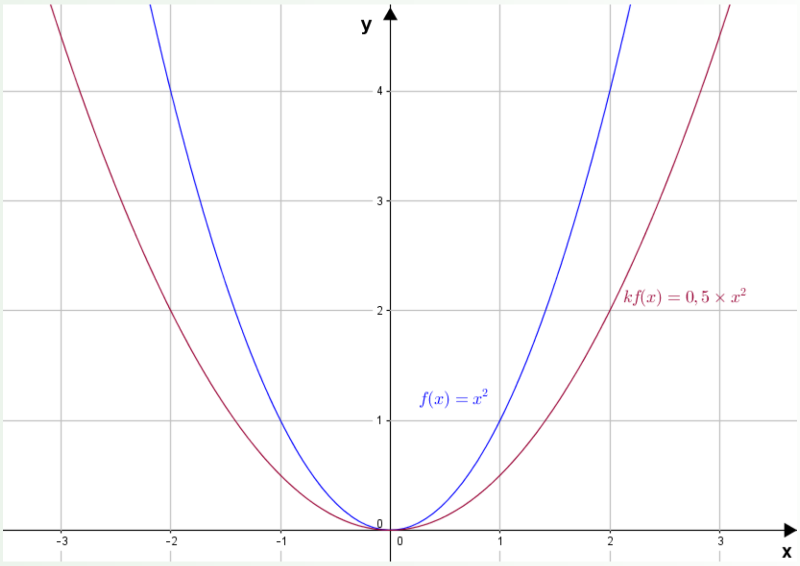
3) Produit d'une fonction et d'un nombre

Propriétés

- Lorsque l'on **multiplie une fonction f par une constante positive k**, on obtient alors une fonction kf qui a **le même sens de variation que f**.
- Lorsque l'on **multiplie une fonction f par une constante négative k**, on obtient alors une fonction kf qui **varie en sens contraire de f**.

Exemple

Soit la fonction f, telle que $f(x) = x^2$.
f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc la fonction $kf(x) = 0,5 \times x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.



Exemple

Soit la fonction f, telle que $f(x) = x^2$. f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donc la fonction $kf(x) = -2 \times x^2$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.