Objectifs

Être capable :

1. de reconnaître une situation d'équiprobabilité ;
2. ce calculer la probabilité d'un événement ;
3. de calculer la probabilité de l'union et/ou de l'intersection de deux événements ;
4. de calculer des probabilités conditionnelles ;
5. d'utiliser un arbre pondéré.

I. Vocabulaire

Á retenir

- Dans une **expérience aléatoire**, l'**univers Ω** est l'ensemble des événements possibles.
- Un **événement** est une partie de l'univers.
- Un événement qui possède un seul élément est un **événement élémentaire**.
- Deux événements A et B sont **disjoints ou incompatibles** si et seulement si $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$.
- L'**événement contraire** d'un événement A est l'**événement $\bar{A}$** constitué des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

II. Calculs de probabilités

1) Defintion

Définition

- La **probabilité** d'un événement A, notée $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- Pour tout événement A, $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

2) Équiprobailité

Á retenir

- Il y a **équiprobabilté** dans le cas où tous les évévnements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, la probabilité d'un événement élémentaire est :

$$\frac{1}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$$

- Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{nombre\ d'\ éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorbales}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

- Pour tout événement A, $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$.
- Pour tous événements A et B, $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.
- Pour tous événements A et B **disjoints**, $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

III. Probabilités conditionnelles et arbre pondéré

1) Probabilités conditionnelles

Á retenir

- $\boldsymbol{P_B(A)}$ est la **probabilité de A sachant que B** est réalisé.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Pour tous événements A et B de probabilités non nulles,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

2) Événements indépendants

Á retenir

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ou

$$P_B(A) = P(A)$$

3) Utilisation d'un arbre de probabilité pondéré

Méthode

On peut représenter une situation de probabilité par un arbre et l'utiliser pour faire des calculs.

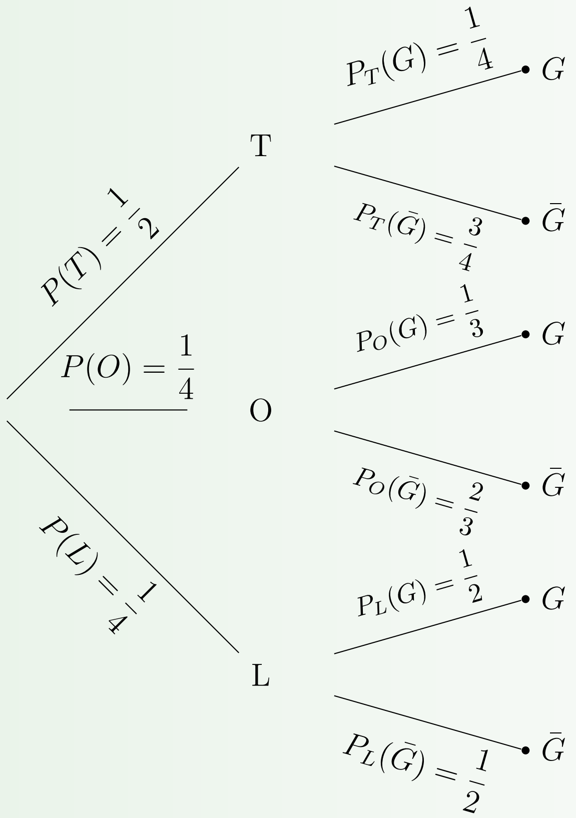
- La somme des probabilités pour les branches d'un même nœud est égale à 1.
- Les branches de niveau 2 portent des probabilités conditionnelles.
- Un chemin est une intersection d'événements.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilité des chemins qui y aboutissent.

Exemple

Sur sa console de jeux, Dorian s'apprête à affronter en duel l'un des trois monstres Thor, Odin et Loki. Ces monstres sont de forces inégales : la probabilité pour que Dorian l'emporte contra Thor ; Odin ou Loki est respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. De plus Dorian a une chance sur deux d'affronter Thor, et autant de chances de rencontrer Odin que Loki.

On considère un duel au hasard et les événements :

- T : Dorian combat Thor.
- O : Dorian combat Odin.
- L : Dorian combat Loki.
- G : Dorian gagne son combat.



$\rightarrow p(T \cap G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\rightarrow p(T \cap \bar{G}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\rightarrow p(O \cap G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\rightarrow p(O \cap \bar{G}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$\rightarrow p(L \cap G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\rightarrow p(L \cap \bar{G}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$p(G) = p(T \cap G) + p(O \cap G) + p(L \cap G)$$
$$p(G) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$$
$$p(G) = \frac{32}{96}$$
$$p(G) = \frac{1}{3}$$

Dorian a une chance sur trois de gagner son duel.