Olivier FINOT, 20 novembre 2018

Objectifs

Être capable :

1. de reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ;
2. de calculer le terme de rang n d'une suite arithmétique ou géométrique ;
3. de représenter graphiquement une suite arithmétique ou géométrique ;
4. de calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
5. de déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique.

I. Suites numériques

Définition

Une **suite numérique** est constituée de **plusieurs nombres rangés dans un certain ordre**. Ces nombres sont les **termes** de la suite. u_1 est le premier terme de la suite, u_2 le deuxième, u_n est le n-ième. Le terme suivant est noté u_{n+1}.

II. Suites arithmétiques

1) Définition et terme de rang n

Activite La suite des nombres impairs

On considère la suite des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, ..., que l'on note successivement u_1, u_2, u_3, u_4... Donc $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$...

1. Compléter : $u_4 =$ ....., $u_? = 15$, $u_{10} =$ ....
2. Quel est le premier terme de la suite ?
3. Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
4. n est est nombre entier positif non nul, on s'intéresse au terme de rang n (donc le $n^{ième}$ nombre impair). Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
5. Exprimer u_n en fonction de n.
6. Calculer u_{100}, u_{150}, u_{1000}.

Á retenir

- Une **suite arithmétique** est une suite de nombres, où chaque terme, à partir du deuxième est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre, la **raison** de la suite (notée r). On note :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

- Dans une suite arithmétique de raison r, le terme u_n est obtenu à partir du premier terme par la relation :
  $\rightarrow$ $u_n = u_0 + nr$ (lorsque le terme initial est u_0)
  $\rightarrow$ $u_n = u_1 + (n-1)r$ (lorsque le terme initial est u_1)

2) Sens de variation

Á retenir

Une suite arithmétique de raison r est :

- croissante, si $r > 0$;
- décroissante, si $r < 0$;
- constante, si $r = 0$.

3) Somme des termes d'une suite arithmétique

Activite Somme de nombres impairs

On note $S_1 = u_1 = 1$; $S_2 = u_1 + u_2 = 1 + 3 = 4$; puis, plus généralement $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

1. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	3	5					
S_n	1	4						

2. En déduire une relation entre S_{n+1}, S_n, et u_{n+1}.
3. En observant les résultats du tableau conjecturer une expression de S_n en fonction de n.

Á retenir

S_n est la somme des termes d'une suite arithmétique jusqu'à u_n, on a :

- $S_n = \dfrac{(n+1)\times(u_0+u_n)}{2}$ (lorsque le terme initial est u_0)
- $S_n = \dfrac{n\times(u_1+u_n)}{2}$ (lorsque le terme initial est u_1)

III. Suites Géométriques

1) Définition et terme de rang n

Activite Augmentation d'un loyer

Le loyer d'un appartement augmente chaque année de 3%. En 2005, le loyer annuel s'élève à 6000 €. On note v_n, le montant du loyer annuel en $2005+n$

1. Calculer le montant du loyer en 2006, 2007, 2008 et 2009.
2. Quel est le premier terme de la suite ?
3. Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
4. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
5. Exprimer v_n en fonction de n.
6. Calculer v_{10}, u_{15}, u_{35}.

Á retenir

Une **suite géométrique** est une suite de nombres, où chaque terme, à partir du deuxième est obtenu multipliant le précédent par un même nombre, la **raison** de la suite (notée q).

On note :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Dans une suite géométrique de raison q, le terme u_n est obtenu à partir du premier terme par la relation :

- $u_n = u_0 \times q^n$ (lorsque le terme initial est u_0)
- $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ (lorsque le terme initial est u_1)

2) Sens de variation

Á retenir

Une suite géométrique de raison q positive et de premier terme positif est :

- croissante, si $q > 1$;
- décroissante, si $q < 1$;
- constante, si $q = 1$.

3) Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Á retenir

(u_n) est une suite géométrique de raison q, S_n est la somme de ses termes jusqu'à u_n ; on a :

- $\boldsymbol{S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (lorsque le terme initial est u_0)
- $\boldsymbol{S_n = u_1 \times \dfrac{1 - q^{n}}{1 - q}}$ (lorsque le terme initial est u_1)

Exemples

1 (u_n) est la suite des puissances de 2 ($u_0 = 1$ et $q = 2$), on a :

$$\begin{aligned} S_8 &= u_0 \times \frac{1 - q^{8+1}}{1 - q} \\ S_8 &= 1 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} \\ S_8 &= 1 \times \frac{1 - 512}{1 - 2} \\ S_8 &= 511 \end{aligned}$$

2 (v_n) est la suite définie par ($u_0 = 100\,000$ et $q = 1{,}2$), on a :

$$\begin{aligned} S_4 &= u_0 \times \frac{1 - q^{4+1}}{1 - q} \\ S_4 &= 100\,000 \times \frac{1 - 1{,}2^5}{1 - 1{,}2} \\ S_4 &= 100\,000 \times \frac{1 - 2{,}488\,32}{1 - 1{,}2} \\ S_4 &= 744\,160 \end{aligned}$$