Olivier FINOT, 5 mars 2018

Objectifs

Être capable :

1. d'utiliser le vocabulaire des probabilités ;
2. de reconnaître une situation d'équiprobabilité ;
3. ce calculer la probabilité d'un événement ;
4. de calculer la probabilité de l'union et/ou de l'intersection de deux événements ;
5. d'utiliser un arbre de probabilités.

I. Vocabulaire

1) Expérience aléatoire et univers

Définitions

Une expérience dont on ne peut pas prévoir en avance le résultat est une **expérience aléatoire**. Le résultat obtenu est l'**issue** de l'expérience. L'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience est l'**univers**, noté Ω (omega)

Exemple

Soit l'expérience suivante : lancé d'un dé cubique *non pipé* :

- 2 est une issue de l'expérience.
- L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2) Événements

Définitions

Un **événement** est une partie de l'univers.

- Un événement qui contient toutes les issues de l'univers est un événement **certain**.
- Un événement qui contient une seule issue est un **événement élémentaire**.
- Un événement qui ne contient aucune issue est **impossible**
- L'**événement contraire** d'un événement A est noté $\bar{A}$, il contient toutes les issues qui ne correspondent pas à A.

Exemple

Dans le cas du lancé d'un dé à 6 faces non truqué, on appelle A l'événement «obtenir un nombre pair», B l'événement «obtenir un nombre supérieur ou égal à 5», C l'événement «obtenir un 3», et D «obtenir un nombre inférieur ou égal à 6».

- L'événement C correspond à l'ensemble $\{3\}$, c'est un événement élémentaire.
- On a $A = \{2; 4; 6\}$.
- L'événement contraire de A est «obtenir un résultat impair», on a $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$.
- L'événement D est certain, on a $D = \Omega$.
- L'événement $\bar{D}$ est impossible, on a $\bar{D} = \emptyset$.

II. Calcul de probabilités

1) Définition

Définition

- La **probabilité** d'un événement A, notée $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- Pour tout événement A, $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$
- Si A est un événement **certain**, alors $\boldsymbol{P(A) = 1}$.
- Si A est un événement **impossible**, alors $\boldsymbol{P(A) = 0}$.

2) Équiprobailité

Á retenir

Il y a **équiprobabilté** dans le cas où tous les évévnements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, la probabilité d'un événement élémentaire est :

$$\frac{1}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$$

Exemple

Il y a équiprobabilité dans le cas où l'on lance un dé à 6 faces non truqué. Ici l'univers Ω contient 6 éléments ($\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$). Donc la probabilité de chaque événement élémentaire est :

$$\frac{1}{6}$$

Á retenir

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{nombre\ d'\ éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorbales}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces.

- Soit A l'événement «obtenir un nombre pair». A est constitué de 3 événements élémentaires, $A = 2; 4; 6$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ P(A) &= \frac{3}{6} \\ P(A) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Soit B l'événement «obtenir un nombre supérieur à 5», B est constitué des 2 événements élémentaires, $B = \{5; 6\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{2}{6} \\ P(B) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3) Propriétés

Définition

Soient A et B deux événements :

- l'événement $\bar{A}$ est **l'événement contraire** de l'événement A, il est constitué de tous les éléments de Ω qui ne sont **pas inclus dans A**.
- l'événement $\boldsymbol{A \cap B}$ (A inter B), est l'événement constitué de tous les événements élémentaires de Ω qui sont **inclus à la fois dans A et dans B**.
- l'événement $\boldsymbol{A \cup B}$ (A union B), est l'événement constitué de tous les événements élémentaires de Ω qui sont **inclus dans A ou dans B**.
- A et B sont **disjoints ou incompatibles** si et seulement si $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$

Exemples

On lance un dé à 6 faces. Soient les événements A et B définis ci-dessus, et l'événement C «obtenir 3» on a :

- L'événement $\bar{A}$ est «ne pas obtenir un nombre pair», $\bar{A} = \{1;3;5\}$.
- L'événement $\bar{C}$ est «ne pas obtenir un nombre pair», $\bar{C} = \{1;2;4;5;6\}$.
- L'événement $A \cap B$ est «obtenir un nombre pair et supérieur ou égal à 5 » , $A \cap B = \{6\}$, A et B ne sont pas disjoints.
- L'événement $A \cup B$ est «obtenir un nombre pair ou supérieur ou égal à 5 » , $A \cap B = \{2;4;5;6\}$.
- $A \cap C = \emptyset$, donc A et C sont disjoints.

Á retenir

Soient A et B deux événements :

- $\bar{A} \cup A = \Omega$, donc $P(\bar{A} \cup A) = 1$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Si les événements A et B sont disjoints : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Cas général, pour tous événements A et B,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple

On lance un dé à 6 faces, soient les événements A, B et C définis ci-dessus.

- C est un événement élémentaire, $P(C) = \dfrac{1}{6}$, donc
$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
- A et C sont disjoints donc :
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
- A et B ne sont pas disjoints donc :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$