NOM Prénom : **Les réponses doivent être justifiées et rédigées**

T^{le} ST_2S : DS numéro 4

1er Avril 2018

Exercice 1 Un arbre pondéré est donné (7 points)

Les résulats approchés sont à arrondir à 10^{-4}.

Pour combattre les risques d'épidémie dus à une maladie, un laboratoire à mis au point un vaccin. Il a testé ce vaccin et a obtenu les données suivantes :

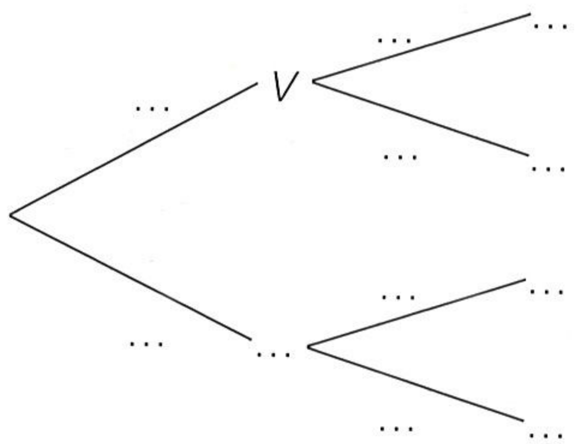
— la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il a été vacciné est égale à 0,09 ;

— la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il n'a pas été vacciné est égale à 0,5.

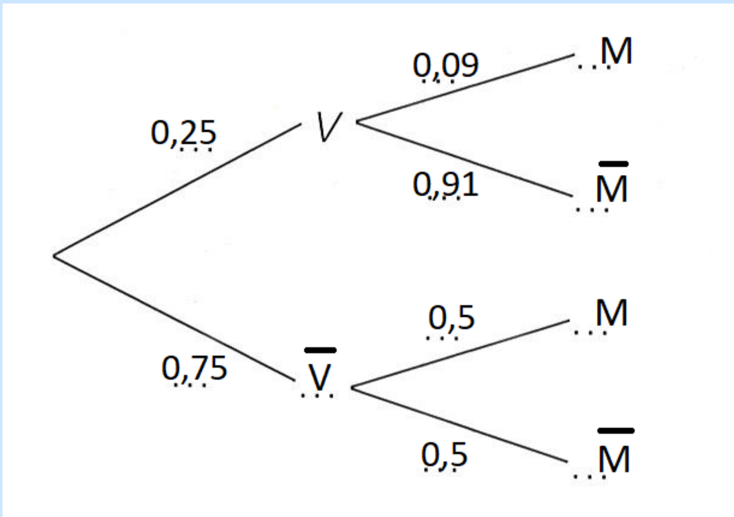
Un quart de la population a été vaccinée contre la maladie. Une épidémie survient. Pour une personne choisie au hasard dans la population, on notera Ml'événement «être malade», $\bar{M}$ l'événement contraire, V l'événement «être vaccine», $\bar{V}$ l'événement contraire.

1) *(2 points)*

Compléter l'arbre de probabilité traduisant les informations de l'énoncé :



Solution:



2) *(1 point)*
Calculer la probabilité des événements $M \cap V$ et $M \cap \bar{V}$.

Solution:
Calcul de $P(M \cap V)$:

$$\begin{aligned} P(M \cap V) &= P(V) \times P_V(M) \\ P(M \cap V) &= 0{,}25 \times 0{,}09 \\ P(M \cap V) &= 0{,}0225 \end{aligned}$$

Calcul de $P(M \cap \bar{V})$:

$$\begin{aligned} P(M \cap \bar{V}) &= P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(M) \\ P(M \cap \bar{V}) &= 0{,}75 \times 0{,}5 \\ P(M \cap \bar{V}) &= 0{,}375 \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement $M \cap V$ est 0,0225 et celle de $M \cap \bar{V}$ est 0,375.

3) *(2 points)*
Calculer la probabilité de l'événement M puis de l'événement $\bar{M}$.

Solution:
Calcul de $P(M)$:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V}) \\ P(M) &= 0{,}0225 + 0{,}375 \\ P(M) &= 0{,}3975 \end{aligned}$$

Calcul de $P(\bar{M})$:

$$\begin{aligned} P(\bar{M}) &= 1 - P(M) \\ P(\bar{M}) &= 1 - 0{,}3975 \\ P(\bar{M}) &= 0{,}6025 \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement M est 0,3975 et celle de $\bar{M}$ est 0,6025.

4) *(2 points)*
Sachant qu'un individu choisi au hasard dans la population n'est pas malade, quelle est la probabilité qu'il ait été vacciné ?

Solution:

Calcul de la probabilité qu'un individu soit vacciné sachant qu'il n'est pas malade :

$$\begin{aligned}
P_{\bar{M}}(V) &= \frac{P(V \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} \\
P_{\bar{M}}(V) &= \frac{P(V) \times P_V(\bar{M})}{P(\bar{M})} \\
P_{\bar{M}}(V) &= \frac{0{,}25 \times 0{,}91}{0{,}6025} \\
P_{\bar{M}}(V) &\approx 0{,}3776
\end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu non malade ait été vacciné est $0{,}3776$.

Exercice 2 Un jeu de cartes (5 points)

On tire au hasard une carte dans un jeu de trente-deux. Les trente-deux événements élémentaires sont équiprobables.

1) *(1 point)*

Donner deux événements incompatibles.

Solution:
Les événements «la carte tirée est un cœur» et «la carte tirée est un pique» sont incompatibles.

2) *()*

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

(a) (2 points) A : «la carte tirée est une dame » ; B : «la carte tirée est noire».

Solution:

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \tag{1}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} \tag{3}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1 \times 1}{8 \times 2} = \frac{1}{16} \tag{4}$$

On a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc les événements A et B sont indépendants.

(b) (2 points) A : «la carte tirée est une dame » ; B : «la carte tirée est une figure».

Solution:

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \tag{5}$$

$$P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \tag{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \tag{7}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1 \times 3}{8 \times 8} = \frac{3}{64} \tag{8}$$

On a $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 3 Tabac pendant la grossesse (8 points)

En 2007, une enquête réalisé sur le lien de cause à effet entre l'état tabagique de la mère pendant la grossesse et les troubles respiratoires de l'enfant. Cette enquête est réalisée sur un échantillon de 1500 enfants de 10 ans. Chaque enfant est classé dans un des trois groupe suivants :

— les asthmatiques ;

— ceux qui présentent des troubles asthmatiformes (considérés comme non asthmatiques) ;

— ceux sans troubles.

Le recueil des données est réalisé sous couvert de l'anonymat auprès des professionnels médicaux, 1500 fiches de renseignements anonymes ont été créées. Ces fiches indiquent que :

— 1223 enfants n'ont aucun troubles.

— 4,8 % des enfants sont asthmatiques ; 75 % d'entre eux ont une mère ayant fumé pendant la grossesse.

— 16 % des mères ont fumé pendant la grossesse.

— 40 % des enfants ayant des allergies asthmatiformes ont une mère n'ayant pas fumé pendant la grossesse.

1) *(2 points)*
Compléter le tableau suivant :

	Mère fumeuse pendant la grossesse	Mère non fumeuse pendant la grossesse	Total
Enfants asthmatiques			72
Enfants présentant un trouble asthmatiforme	123		
Enfant ne présentant aucun trouble			1223
Total	240		1500

Solution:

	Mère fumeuse pendant la grossesse	Mère non fumeuse pendant la grossesse	Total
Enfants asthmatiques	54	18	72
Enfants présentant un trouble asthmatiforme	123	82	205
Enfant ne présentant aucun trouble	63	1160	1223
Total	240	1260	1500

2) *()*

On prélève au hasard une fiche de renseignement d'un enfant. ON admet que chacun des choix est équiprobable. On considère les événements suivants :

— A : « La fiche indique que l'élève est asthmatique» ;

— T : « La fiche indique que l'élève présente des troubles asthmatiformes» ;

— F : « La fiche indique que la mère a fumé pendant la grossesse» ;

Les résultats approchés sont à arrondir au millième.

(a) ($1\frac{1}{2}$ points) Calculer la probabilité des événements T et F.

Solution:

$$P(T) = \frac{205}{1500} \approx 0{,}137$$
$$P(F) = \frac{240}{1500} = 0{,}16$$

(b) ($1\frac{1}{2}$ points) Définir par une phrase l'événement $T \cap F$ puis calculer sa probabilité.

Solution:
L'événement $T \cap F$ est «La fiche indique que l'élève présente des troubles asthmatiformes et sa mère a fumé pendant la grossesse. Sa probabilité est 0,082 ($\frac{123}{1500}$).

(c) (1 point) Calculer la probabilité que l'enfant ait des troubles asthmatiformes ou que sa mère soit fumeuse.

Solution:

$$\begin{aligned}P(T \cup F) &= P(T)+P(F)-P(T \cap F)\\ P(T \cup F) &= 0{,}137+0{,}16-0{,}082\\ P(T \cup F) &= 0{,}215\end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant ait des troubles asthmatiques ou que sa mère soit fumeuse est 0,311.

(d) (1 point) Calculer la probabilité que l'enfant soit asthmatique sachant que sa mère est fumeuse.

Solution:

$$\begin{aligned}P_F(A) &= \frac{54}{240}\\ P_F(A) &= 0{,}225\end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant soit asthmatique sachant que sa mère est fumeuse est 0,225.

3) *(1 point)*
On prélève au hasard une fiche parmi celles indiquant que la mère a fumé pendant la grossesse. Calculer la probabilité que l'enfant n'ait aucun trouble.

Solution:
Soit N l'événement : «La fiche tirée indique que l'élève ne présente aucun trouble».

$$\begin{aligned}P_F(N) &= \frac{63}{240}\\ P_F(N) &\approx 0{,}263\end{aligned}$$

La probabilité que l'enfant n'ait aucun trouble sachant que sa mère a fumé pendant la grossesse est 0,263.