NOM Prénom : **Les réponses doivent être justifiées et rédigées**

T^{le} ST_2S : DS numéro 5

16 Mai 2019

Exercice 1 Un QCM (6 points)

Cet exercice se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule réponses est correcte. On demande de choisir celle que vous pensez être correcte.

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-12, 20]$:

x	-12		-5		7		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	7				-1		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-4				-6

1. (1 point) On peut dire que :
   ◯ f est positive sur l'intervalle $[-12; -5]$.
   ◯ f est positive sur l'intervalle $[7; 20]$.
   $\surd$ **f est négative sur l'intervalle $[-5; 20]$.**
2. (1 point) L'équation $f(x) = 2$ possède
   $\surd$ **une seule solution ;** ◯ aucune solution ; ◯ on ne peut pas répondre.
3. (1 point) On cherche à comparer $f'(0)$ et $f'(8)$:
   ◯ $f'(0) < f'(8)$ $\surd$ $f'(0) > f'(8)$ ◯ on ne peut pas répondre.
4. (1 point) On cherche à comparer $f(0)$ et $f(8)$:
   ◯ $f(0) < f(8)$ ◯ $f(0) > f(8)$ $\surd$ **on ne peut pas répondre.**
5. (1 point) Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 20 est :
   ◯ $y = 20x - 6$ ◯ $y = -x - 6$ $\surd$ $y = -x + 14$
6. (1 point) On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
   ◯ Il n'existe aucun point où la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
   ◯ Il existe un seul point où la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
   $\surd$ **Il existe au moins deux points où la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.**

Exercice 2 Étude d'une épidémie (14 points)

Pendant une épidémie observée sur une période de onze jours, un institut de veille sanitaire a modélisé le nombre de personnes malades. La durée, écoulée à partir du début de la période et exprimée en jours, est notée t. Le nombre de cas, en fonction de la durée t est est donné en milliers par la fonction f de la variable réelle t définie et dérivable sur l'intervalle $[0;11]$, dont la représentation graphique C_f est donnée en annexe A.

Cette annexe sur laquelle le candidat pourra faire figurer des traits de constructions utiles au raisonnement, est à rendre avec la copie.

Partie A Étude graphique

Pour cette partie, on se réfèrera à la courbe représentative C_f de la fonction f.

1. (2 points) On considère que la situation est grave lorsque le nombre de cas est d'au moins 150 000 malades. Pendant combien de jours complets cela arrive-t-il ?

   Solution:
   On dépasse les 150 000 malades pendant 6 jours complets.

2. (2 points) La droite (OA) est la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0, où A est le point de coordonnées $(10; 112{,}5)$. Déterminer $f'(0)$ où f' représente ta fonction dérivée de la fonction f.

   Solution:
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en 0, donc de (OA).

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} \\ f'(0) &= \frac{112{,}5 - 0}{10 - 0} \\ f'(0) &= \frac{112{,}5}{10} \\ f'(0) &= 11{,}25 \end{aligned}$$

3. Le nombre $f'(t)$ représente la vitesse d'évolution de la maladie, t jours après l'apparition des premier cas.
   (a) (2 points) Déterminer graphiquement le nombre maximal de malades sur la période de 11 jours observés et le moment où il est atteint. Que peut-on dire alors de la vitesse d'évolution de la maladie ?

   Solution:
   Sur la période observée, il y a eu au maximum environ 253 malades, c'est arrivé dans le courant du huitième jour ($x = 7{,}5$).

   (b) (1 point) Déterminer graphiquement à quel moment de l'épidémie la maladie progresse le plus.

   Solution:
   Le moment où la maladie progresse le plus est celui où la pente de la courbe est la plus importante, cela arrive durant le quatrième jour.

Partie B Étude théorique

La fonction f de la Partie A est définie par :

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + \frac{45}{4}t$$

1. (2 points) recopier et compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau suivant :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(t)$							229,5					

Solution:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(t)$	0	20,75	56,5	101,25	149	193,75	229,5	250,25	250	222,75	165,5	63,25

2. (2 points) Calculer $f'(t)$ et vérifier que, pour tout t de l'intervalle $[0; 11]$:

$$f'(t) = -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right)$$

Solution:
Calcul de la fonction dérivée $f'(t)$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3 \times -t^2 + 2 \times \frac{21}{2}t + \frac{45}{4} \\ f'(t) &= -3t^2 + 21t + \frac{45}{4} \end{aligned}$$

Développement de la forme factorisée

$$\begin{aligned} -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right) &= -3\left(t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{1}{2}t - \frac{15}{4}\right) \\ -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right) &= -3\left(t^2 - \frac{14}{2}t - \frac{15}{4}\right) \\ -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right) &= -3t^2 + 3 \times 7t + \frac{3 \times 15}{4} \\ -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right) &= -3t^2 + 21t + \frac{45}{4} \end{aligned}$$

On a donc bien $f'(t) = -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right)$.

3. (2 points) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0; 11]$. Cette réponse est-elle cohérente avec la courbe C_f ? Expliquer.

Solution:
Étude du signe de $(t + \frac{1}{2})$ et de $(t - \frac{15}{2})$

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{2} &\geq 0 \\ t &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} t - \frac{15}{2} &\geq 0 \\ t &\geq \frac{15}{2} \end{aligned}$$

On a donc :

t	0		$\frac{15}{2}$		11
-3		$-$		$-$	
$(t + \frac{1}{2})$		$+$		$+$	
$(t - \frac{15}{2})$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

Sur l'intervalle $[0; 7{,}5]$ la courbe en annexe est croissante et la dérivée positive. Sur $[7{,}5; 11]$ la courbe est décroissante et la dérivée négative. Cette réponse est donc cohérente avec la courbe.

4. (1 point) Retrouver la résultat de la question 2 de la partie Partie A.

Solution:
Calcul de $f'(0)$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= -3 \times 0^2 + 21 \times 0 + \frac{45}{4} \\ f'(0) &= \frac{45}{4} \\ f'(0) &= 11{,}25 \end{aligned}$$

On retrouve bien la valeur de $f'(0)$ trouvée à la question 2 de la partie Partie A.

A Courbe représentative de la fonction f de l'Exercice 2