⑤ Fractions

Compétences

- **Représenter** : Je passe d'une fraction à un nombre décimal ;
- **Représenter** : Je passe d'une fraction à une autre égale à la première ;
- **Raisonner** : je compare des fractions ;
- **Raisonner** : j'utilise l'égalité des produits en croix

I. Quotients et fractions

Définition

a et b sont deux nombres ($b \neq 0$). Le **quotient** de a par b se note $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$, en écriture fractionnaire.

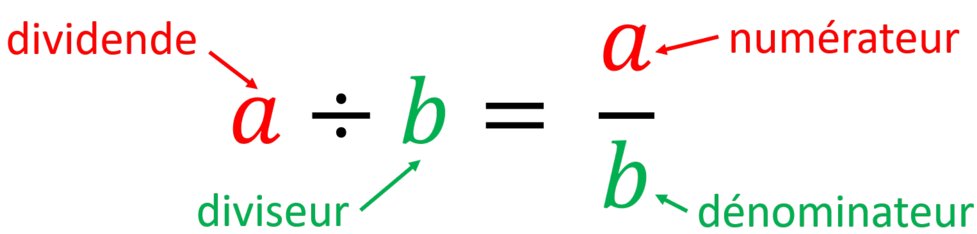
Exemple :

Le quotient de 5 par 4 est $\frac{5}{4}$, c'est le nombre qui multiplié par 4 donne 5.

$$\frac{5}{4} \times 4 = 5$$

Définition

Si a et b sont entiers, alors $\frac{a}{b}$ est une **fraction**. a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.



Exemple :

$\frac{4{,}2}{2}$, $\frac{5}{2{,}4}$, $\frac{1{,}3}{3{,}7}$ et $\frac{2}{3}$ sont toutes des écritures fractionnaires, mais seule $\frac{2}{3}$ est une fraction.

II. Fractions égales et simplification

Propriété

Une fraction ne change pas quand on **multiplie (ou on divise)** le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple :

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \times 10}{5 \times 10} = \frac{70}{50} \qquad \frac{12}{27} = \frac{12 \div 3}{27 \div 3} = \frac{4}{9}$$

Définition

Simplifier une fraction, c'est trouver une autre fraction **égale à la première** avec le numérateur et le dénominateur **les plus petits possibles**.

Exemple :

$$\frac{27}{72} = \frac{27 \div 9}{72 \div 9} = \frac{3}{8} \qquad \frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

Méthode :

Je veux simplifier la fraction $\frac{105}{60}$

***a*)** Je cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur : 105 et 60 sont divisibles par 5.

***b*)** Je calcule les divisions :

$$\frac{105}{60} = \frac{105 \div 5}{60 \div 5} = \frac{21}{12}$$

***c*)** Je recommence si je peux, autant de fois que possible, le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 3.

$$\frac{21}{12} = \frac{21 \div 3}{12 \div 3} = \frac{7}{4}$$

***d*)** Si je ne peux pas continuer, j'ai terminé :

$$\frac{105}{60} = \frac{7}{4}$$

III. Comparaison de fractions

Propriétés

- Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a **le plus grand numérateur**.
- Pour comparer deux fractions qui ont un dénominateur différent, on les écrit avec le même dénominateur.

Exemples :

- On veut comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$:

  $3 < 5$; donc $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$

- On veut comparer $\frac{7}{3}$ et $\frac{13}{6}$:
  - On peut écrire $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}$
  - On a $13 < 14$ donc $\frac{13}{6} < \frac{14}{6}$ en conclusion $\frac{13}{6} < \frac{7}{3}$

Propriété

a et b désignent deux nombres ($b > 0$).

- Si $a > b$ alors $\frac{a}{b} > 1$
- Si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$
- Si $a = b$ alors $\frac{a}{b} = 1$

Exemple :

On veut comparer 1 ; $\frac{3}{4}$ et $\frac{15}{12}$:

- $3 < 4$ donc $\frac{3}{4} < 1$; $15 > 12$ donc $\frac{15}{12} > 1$.

- On peut conclure que $\frac{3}{4} < 1 < \frac{15}{12}$.

IV. Égalité des produits en croix

Propriété

a, b, c et d sont des nombres entiers avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ signifie que $a \times d = b \times c$.

Exemples :

— $\dfrac{34}{51} = \dfrac{2}{3}$ car $34 \times 3 = 51 \times 2 = 102$

— Je veux compléter $\dfrac{23}{15} = \dfrac{207}{?}$

On a :

$$\begin{aligned} 23 \times \ldots &= 15 \times 207 \\ 23 \times \ldots &= 3105 \end{aligned}$$

Je calcule $3105 \div 23 = 135$

Donc $\dfrac{23}{15} = \dfrac{207}{135}$