Exponentielles et logarithme décimal

6

O. FINOT, 23 août 2018

I. Fonction exponentielle de base a

1) Définition

Définition

Pour tout nombre réel a strictement positif, et pour tout entier positif n, le nombre a^n est défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$$

La fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = a^x$, est appelée **fonction exponentielle de base a**.

Exemple

- La fonction f, définie par $f(x) = 2^x$, est la **fonction exponentielle de base 2**.
- La fonction g, définie par $g(x) = 0,5^x$, est la **fonction exponentielle de base $0,5$**.

2) Propriétés et variations

Propriétés

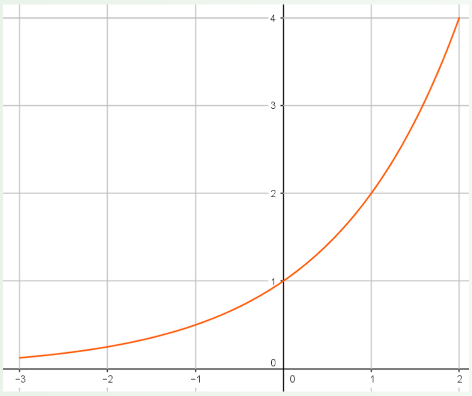
1 Propriétés :
- Si $a \neq 1$, alors $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
- Si $a > 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- Si $a < 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

2 Valeurs particulières :
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$

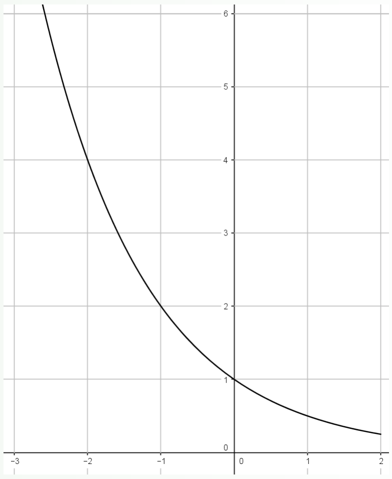
3 Variations :
- Si $\boldsymbol{a > 0}$, alors la fonction est **croissante**.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$, alors la fonction est **décroissante**.

Exemple

$f(x) = 2^x$, $2 > 1$
la fonction f est croissante



$g(x) = 0,5^x$, $0,5 > 1$
la fonction g est décroissante



3) Règles de calcul

Propriétés

Les règles de calculs sont les mêmes que pour les puissances entières.
a et b sont deux nombres quelconques et q un nombre strictement positif.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$

Exemples

- $2^{0.5} \times 2^{1,5} = 2^{0,5+1,5} = 2^2 = 4$
- $8^{-2} = \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{1}{64}$
- $\dfrac{5^{5,2}}{5^{2,2}} = 5^{5,2-2,2} = 5^3 = 125$
- $(10^{0,4})^5 = 10^{0,4\times 5} = 10^2 = 100$

II. Fonction logarithme décimal

1) Définition

Définition

Pour tout nombre réel x strictement positif, il existe un unique nombre a tel que $10^a = x$.
Ce nombre a est le **logarithme décimal** de x, noté $\log(x)$.

On a donc :

$$\log(x) = a \Leftrightarrow x = 10^a$$

La **fonction logarithme décimal** est la fonction f, telle que $f(x) = \log(x)$.

2) Propriétés et variations

Propriétés

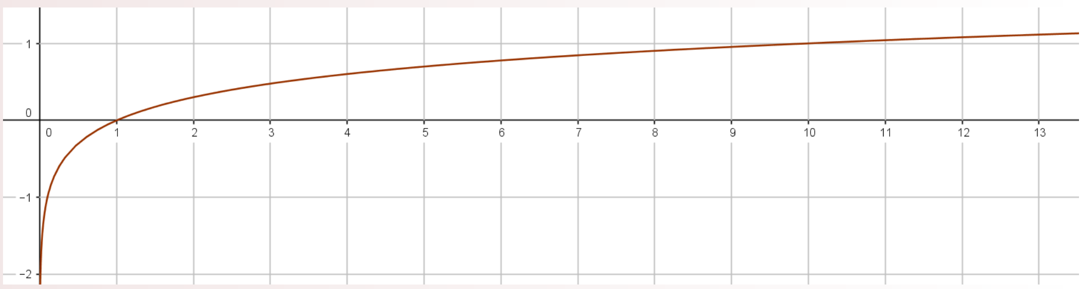
1 Propriétés :

- Pour tout nombre réel a : $\log(10^a) = a$
- Pour tous nombre réels positifs a et b : $\log(a) = \log(b) \Leftrightarrow a = b$
- Pour tous nombre réels positifs $\log(a) < \log(b) \Leftrightarrow a < b$

2 Valeurs particulières :

- $\log 1 = 0$
- $\log 10 = 1$
- $\log 100 = 2$

3 Signe et variations :



- La fonction $\log(x)$ est **croissante** pour $x > 0$.
- Si $0 \leq x < 1$, alors $\log(x) \leq 0$.
- Si $x \geq 1$, alors $\log(x) \geq 0$.

x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	||	$-$	0	$+$	

3) Règles de calcul

Propriétés

a et b sont deux nombres strictement positifs :

- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^x) = x \times log(a)$

III. Résolutions d'équations et d'inéquations

1) Équations du type $a^x = b$

Exemple

Résoudre l'équation $1{,}3^x = 2$:

$$\begin{array}{rcl} 1{,}3^x & = & 2 \\ \log(1{,}3^x) & = & \log(2) \\ x \times \log(1{,}3) & = & \log(2) \\ x & = & \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}3)} \end{array}$$

La solution est donc $\dfrac{\log(2)}{\log(1{,}3)}$**, soit** `environ` $2{,}64$**.**

2) Inéquations du type $a^x < b$ et $a^x > b$

Exemple

Déterminer les nombres entiers n tels que $4^n \leq 200$. On résout l'équation $4^x \leq 200$:

$$\begin{array}{rcl} 4^x & \leq & 200 \\ \log(4^x) & \leq & \log(200) \\ x\log(4) & \leq & \log(200) \\ x & \leq & \dfrac{\log(200)}{\log(4)} \\ & & (car\ \log(4) > 0\ puisque\ 4 > 1) \end{array}$$

Or $\dfrac{\log(200)}{\log(4)} \approx 3{,}82$.

Les nombres entiers n cherchés sont donc les entiers inférieurs ou égaux à 3.

Exemple

Déterminer les nombres entiers n tels que $1000 \times 0{,}95^n < 800$. On résout l'équation $0{,}95^x < \dfrac{800}{1000}$:

$$\begin{array}{rcl} 0{,}95^x & < & 0{,}8 \\ \log(0{,}95^x) & < & \log(0{,}8) \\ x \times \log(0{,}95) & < & \log(0{,}8) \\ x & > & \dfrac{\log(0{,}8)}{\log(0{,}95)} \\ & & (car\ \log(0{,}95 < 0\ puisque\ 0 < 0{,}95 < 1) \end{array}$$

Or $\dfrac{\log(0{,}8)}{\log(0{,}95)} \approx 4{,}35$.

Les nombres entiers n cherchés sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 5.