

Objectifs

- Savoir si deux fractions sont égales
- Savoir si un nombre est divisible par un autre
- Identifier un nombre premier
- Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers
- Simplifier une fraction
- Comparer des fractions
- Additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont des multiples l'un de l'autre

Compétences travaillées

- **Représenter (Re2)** : produire et utiliser plusieurs représentations d'un nombre ;
- **Calculer (Ca1)** : calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée en combinant astucieusement le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté ;
- **Raisonner (Ra1)** : résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.

I. Quotients et fractions

Définition

a et b sont deux nombres ($b \neq 0$). Le **quotient** de a par b se note $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$, en écriture fractionnaire.

Exemple

Le quotient de 5 par 4 est $\frac{5}{4}$, c'est le nombre qui multiplié par 4 donne 5.

$$\frac{5}{4} \times 4 = 5$$

Définition

Si a et b sont entiers, alors $\frac{a}{b}$ est une **fraction**. a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.

$$\begin{array}{c} \text{dividende} \swarrow \\ a \end{array} \div \begin{array}{c} \nearrow \\ b \\ \text{diviseur} \end{array} = \frac{\begin{array}{c} \swarrow \\ a \\ \text{numérateur} \end{array}}{\begin{array}{c} \nwarrow \\ b \\ \text{dénominateur} \end{array}}$$

Exemple

$\frac{4,2}{2}$, $\frac{5}{2,4}$, $\frac{1,3}{3,7}$ et $\frac{2}{3}$ sont toutes des écritures fractionnaires, mais seule $\frac{2}{3}$ est une fraction.

II. Divisibilité et nombres premiers

Propriété

Un nombre a est **divisible** par un nombre b si le reste de la division de a par b vaut 0.

Exemples

- $5 \times 3 + 0 = 15$, donc 15 est divisible par 3 et 5.
- $5 \times 3 + 2 = 17$, donc 17 n'est pas divisible par 3 et 5.

Propriétés

- Un nombre est divisible par 2 s'il est pair (son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8).
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples

- 20 est divisible par 2 et 5 ;
- 45 est divisible par 3, 5 et 9 ($4 + 5 = 9$) ;
- 2520 est divisible par 2, 3, 5 et 9 ($2 + 5 + 2 = 9$).

Propriétés

- Un **nombre premier** est un nombre qui est divisible uniquement par 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs à 30 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29.

Exemples

- 15 est divisible par 3 et 5, il n'est pas premier.
- 21 est divisible par 3 et 7, il n'est pas premier.

III. Fractions égales et simplification

Propriété

Une fraction ne change pas quand on **multiplie (ou on divise)** le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple

$$\frac{3,2}{1,5} = \frac{3,2 \times 10}{1,5 \times 10} = \frac{32}{15}$$

$$\frac{12}{27} = \frac{12 \div 3}{27 \div 3} = \frac{4}{9}$$

Définition

Simplifier une fraction, c'est trouver une autre fraction **égale à la première** avec le numérateur et le dénominateur **les plus petits possibles**.

Exemple

$$\frac{27}{72} = \frac{27 \div 9}{72 \div 9} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

Méthode

Je veux simplifier la fraction $\frac{105}{60}$

1 Je cherche les diviseurs du numérateur et du dénominateur :

- 105 est divisible par 3, 5 et 9 ;
- 60 est divisible par 2, 3, 5 et 10.

2 J'utilise ces diviseurs pour décomposer le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{105}{60} = \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5}$$

3 J'enlève les facteurs présents au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{105}{60} = \frac{7}{2 \times 2}$$

4 Je calcule les produits qui restent (s'il y en a encore) :

$$\frac{105}{60} = \frac{7}{4}$$

IV. Égalité des produits en croix

Propriété

a , b , c et d sont des nombres entiers avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie que $a \times d = b \times c$.

Exemples

- $\frac{34}{51} = \frac{2}{3}$ car $34 \times 3 = 51 \times 2 = 102$

- Je veux compléter $\frac{23}{15} = \frac{207}{?}$

On a :

$$23 \times \dots = 15 \times 207$$

$$23 \times \dots = 3105$$

Je calcule $3105 \div 23 = 135$

Donc $\frac{23}{15} = \frac{207}{135}$

V. Addition et soustraction de fractions

Méthode

Pour additionner ou soustraire deux fractions :

- 1 Je les écrit avec le **même dénominateur** ;
- 2 Je fais la **somme des numérateurs** ;
- 3 Je ne modifie pas le dénominateur ;

Exemples

$$A = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$$

$$A = \frac{3+1}{5}$$

$$A = \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{14}{3} - 2$$

$$B = \frac{14}{3} - \frac{2 \times 3}{3}$$

$$B = \frac{14}{3} - \frac{6}{3}$$

$$B = \frac{14-6}{3}$$

$$B = \frac{8}{3}$$

$$C = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}$$

$$C = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} + \frac{4}{9}$$

$$C = \frac{6}{9} + \frac{4}{9}$$

$$C = \frac{6+4}{9}$$

$$C = \frac{10}{9}$$