Fonctions et représentations graphiques

5

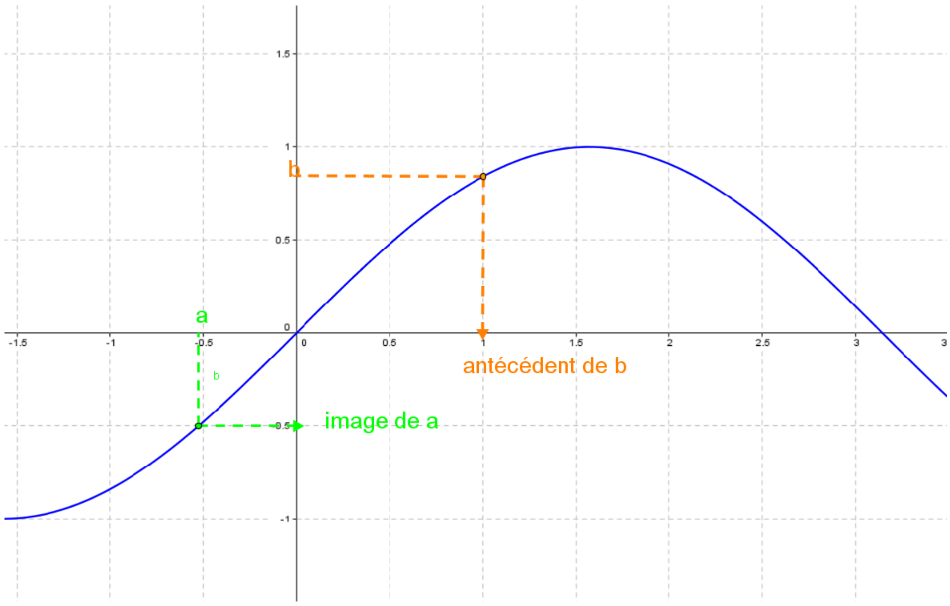
Olivier FINOT, 24 janvier 2019

I. Rappels

1) Notion de fonction

Définition

Définir une fonction f sur un intervalle $[a\,;b[$, c'est fournir une **relation** qui à chaque valeur x de l'intervalle $[a\,;b[$ associe un nombre appelé **image** et noté $f(x)$. On dit que x a pour **antécédent** le nombre x.



2) Variations d'une fonction

Définitions

- Si une fonction f est **croissante** sur un intervalle I alors les images sont rangées dans le même ordre que leur antécédent ; c'est à dire que **$f(x)$ augmente quand x augmente**.
- Si une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I alors les images sont rangées dans l'ordre inverse de leur antécédent ; c'est à dire que **$f(x)$ diminue quand x augmente**.

II. Fonctions linéaires, fonctions affines

1) Définition

Définition

a et b sont des nombres quelconques; la fonction qui à tout nombre x, associe le nombre $\boldsymbol{ax+b}$, est une **fonction affine**.

Cas particuliers :

- Si $\boldsymbol{b=0}$, la fonction est **linéaire**.
- Si $\boldsymbol{a=0}$, la fonction est **constante**.

Exemples

On considère les fonctions f, g, h et i :

- $f(x) = 2x$
- $g(x) = -x+2$
- $h(x) = 3x-4$
- $i(x) = 5$

- f est une fonction **linéaire (On a $\boldsymbol{a=2}$ et $\boldsymbol{b=0}$)**.
- g est une fonction **affine (On a $\boldsymbol{a=-1}$ et $\boldsymbol{b=2}$)**.
- h est une fonction **affine (On a $\boldsymbol{a=3}$ et $\boldsymbol{b=-4}$)**.
- i est une fonction **constante (On a $\boldsymbol{a=0}$ et $\boldsymbol{b=5}$)**.

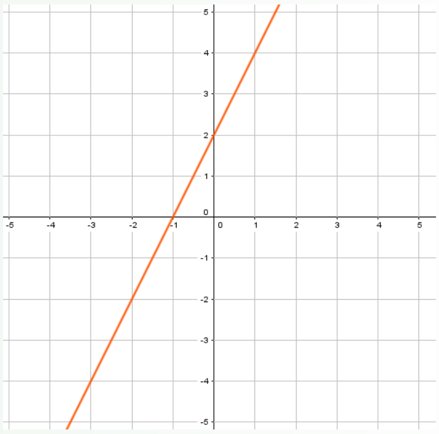
2) Représentation graphique

Propriétés

- La **représentation graphique** d'une fonction affine $f(x) = ax+b$ et **une droite**. On dit que $y = ax+b$ est l'équation de la droite. **a** est le **coefficient directeur** (ou la pente) de la droite. **b** est l'**ordonnée à l'origine**.
- La droite passe par le point de coordonnées $(0;b)$, si la fonction est linéaire elle passe par l'origine du repère.

Exemple

On considère la fonction affine $f(x) = 2x + 4$. Elle ne passe pas par l'origine du repère, elle n'est pas linéaire. Elle passe par le point de coordonnées $(0;4)$.



3) Variations

Propriétés

- Si $\boldsymbol{a > 0}$, alors la fonction f est **strictement croissante**.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$, alors la fonction f est **strictement décroissante**.

$a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

4) Détermination d'une équation de droite

Á retenir

On détermine l'équation ($y = ax + b$) d'une droite à partir de deux points de cette droite $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Le coefficient directeur a, est obtenu par le calcul suivant :

$$a = \frac{y_B - x_A}{x_B - x_A}$$

L'ordonnée à l'origine b est obtenue en remplaçant x et y dans l'équation par les coordonnées d'un des points.

Exemple

La droite Δ passe par les points de coordonnées $(2; 5)$ et $(4; 9)$, on a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{9-5}{4-2} \\ a &= \frac{4}{2} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Donc l'équation de la droite Δ est de la forme $y = 2x+b$. Pour trouver b on remplace x et y par les coordonnées de A, on a :

$$\begin{aligned} y &= 2x + b \\ 5 &= 2 \times 2 + b \\ 5 &= 4 + b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

Donc Δ est la droite d'équation $y = 2x + 1$.

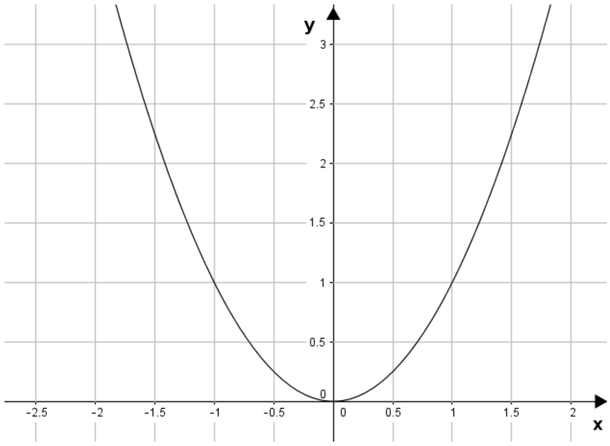
III. Fonction carré

Á retenir

La **fonction carré** est définie par $x \mapsto x^2$.
Elle est :

- définie sur $]-\infty\,; +\infty[$.
- décroissante sur $]-\infty\,; 0]$ et croissante sur $[0\,; +\infty[$.

Courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ et tableau de variations associé :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

IV. Fonction inverse

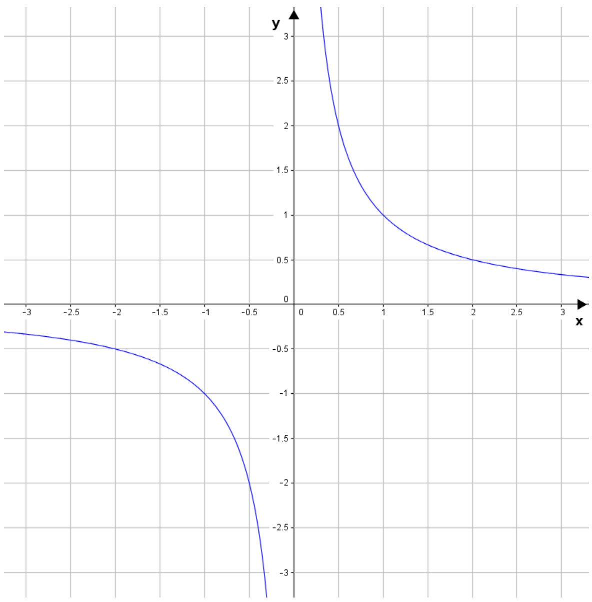
Á retenir

La **fonction inverse** est définie par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Elle est :

- définie sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$.
- décroissante sur $]-\infty\,; 0[$ et sur $]0\,; +\infty[$.

Courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et tableau de variations associé :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	

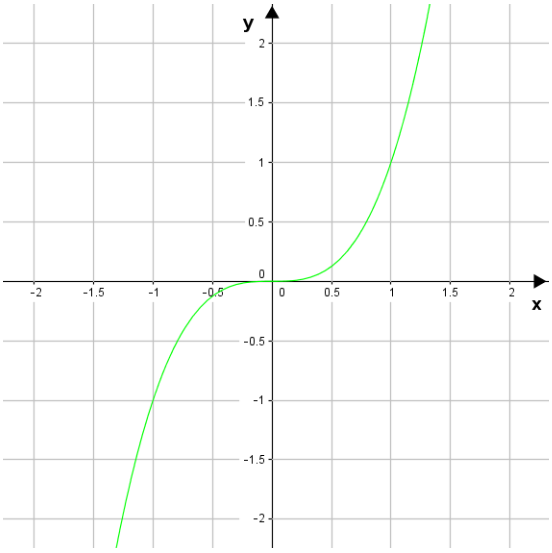
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

V. Fonction cube

Á retenir

La **fonction cube** est définie par $x \mapsto x^3$.
Elle est définie et croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

Courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ et tableau de variations associé :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

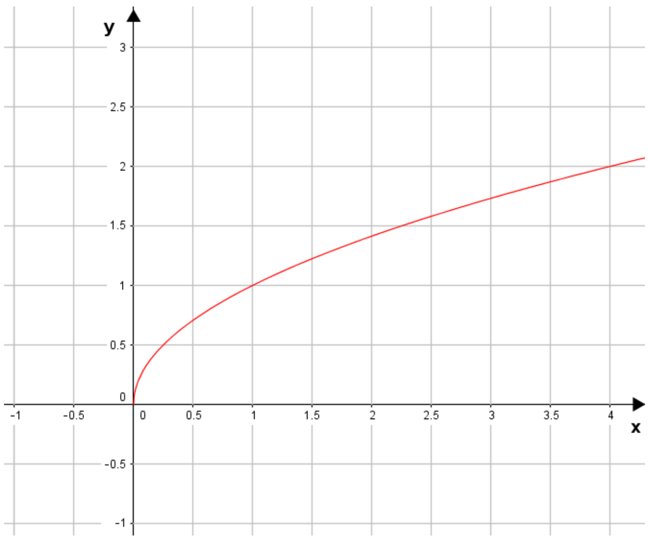
x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

VI. Fonction racine

Á retenir

La **fonction racine carrée** est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$.
Elle est définie et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et tableau de variations associé :



x	0 $\qquad +\infty$
$\sqrt{x}$	$+$

x	0 $\qquad\qquad +\infty$
$\sqrt{x}$	$\nearrow$