NOM Prénom : **Les réponses doivent être justifiées et rédigées**

Terminale ST$_2$S : DS numéro 2

1er Décembre 2017

1 Questions à choix multiple *(5 points)*

Cet exercice se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiple (QCM). Les cinq questions sont indépendantes. Pour chaque question, une seule réponse est exacte, on demande d'indiquer cette réponse sans la justifier. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque réponse incorrecte retire 0,25 point, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

(1) 1. On considère la suite arithmétique (u_n), telle que $u_0 = 16$ et $u_4 = -4$. La raison de la suite (u_n) est :

○ 3,5 ; ○ 3 ; ○ -3 ; $\surd$ **-5.**

(1) 2. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = 3n - 2$. La suite (u_n) est :

○ une suite arithmétique de raison -2 ;

○ une suite géométrique de raison 3 ;

$\surd$ **une suite arithmétique de raison 3 ;**

○ une suite géométrique de raison 2.

(1) 3. On injecte u_0 cm^3 d'un médicament dans le sang d'un patient. La quantité de ce médicament présente dans le sang du patient n heures après l'injection est u_n. La quantité de médicament présente dans le sang baisse de 20 % chaque heure. La suite (u_n) est :

○ une suite arithmétique de raison -20 ;

○ une suite géométrique de raison 1,20 ;

○ une suite arithmétique de raison $-0{,}2$;

$\surd$ **une suite géométrique de raison 0,8.**

(1) 4. On reprend la situation décrite dans la question 3. Cinq heures après l'injection, il reste dans le sang du patient environ :

○ 67 % de la quantité injectée ;

○ 20 % de la quantité injectée ;

○ rien ;

$\surd$ **33 % de la quantité injectée.**

(1) 5. La feuille de calcul ci-dessous est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 5000 et de raison 1,02. La formule à entrer dans la cellule B3 et à recopier vers le bas est :

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	5 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

○ $5000 * 1{,}02$; ○ $= \$B\$2$*1,02 ;

$\surd$ **= $B2$*1,02 ;** ○ = 1,02^$A3$;

2 Des normes antipollution *(7 points)*

Un grand groupe industriel fait le bilan de sa quantité de rejets polluants. En 2001, sa quantité de rejets était de 49 000 tonnes. Elle est passée à 68 000 tonnes en 2004.

De nouvelles normes antipollution ont été mises en place à partir de 2001. Le groupe, pour être aux normes ne doit pas dépasser 42 000 tonnes de rejets par an.

A.

Chaque année, si ses rejets dépassent la quantité autorisée, le groupe doit payer une amende.

Tant que le groupe ne prend pas de mesure pour faire baisser sa quantité de rejets, l'amende augmente de 6000 € tous les ans. En 2001, le groupe a payé une amende de 83 000 €.

Dans toute cette partie, on fait l'hypothèse que le groupe ne prend aucune mesure pour diminuer sa quantité de rejets.

On appelle C_1 l'amende payée en 2001 et C_n l'amende payée l'année $2000 + n$. On a alors $C_1 = 83\,000$ €.

(1) 1. Calculer la valeur de l'amende payée par l'entreprise en 2002 et en 2003.

Solution:
- $C_2 = C_1 + 6000 = 83\,000 + 6000 = 89\,000$;
- $C_3 = C_2 + 6000 = 89\,000 + 6000 = 95\,000$.

L'entreprise a payé 89 000 € en 2002 et 95 000 en 2003.

(1) 2. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

Solution:
Tous les ans, l'amende augmente de 6000 €, donc pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute 6000. C'est donc une suite arithmétique de raison 6000.

(1) 3. Calculer l'amende que le groupe devra payer en 2015.

Solution:
$2015 = 2000 + 15$, on calcule la valeur de C_{15}.

$$\begin{aligned} C_n &= C_1 + (n-1) \times 6000 \\ C_{15} &= 83\,000 + 14 \times 6000 \\ C_{15} &= 83\,000 + 84\,000 \\ C_{15} &= 167\,000 \end{aligned}$$

En 2015, le groupe devra payer 167 000 €.

B.

Au vu des résultats précédents, le groupe a décidé en 2004 de mettre en place un dispositif lui permettant de se mettre aux normes progressivement, l'objectif étant de ramener sa quantité de déchets à une valeur inférieure ou égale à 42 000 tonnes en 2014.

Le groupe s'est engagé à réduire chaque année sa production de déchets de 4 % à partir de 2004.

(1) 1. Si le groupe a rejeté 66 000 tonnes en 2005, a-t-il respecté son engagement ?

Solution:
$68\,000 \times 0{,}96 = 65\,280$
Non le groupe n'a pas respecté son engagement, il aurait du rejeter 65 280 tonnes de déchets.

2. On appelle Q_n la quantité de rejets prévue pour l'année $2004 + n$. Ainsi, $Q_0 = 68\,000$.

(1) (a) Quelle est la nature de la suite (Q_n) ?

Solution:
L'entreprise s'est engagée à diminuer ses rejets de 4 % chaque année. Le coefficient multiplicateur correspondant à cette baisse est 0,96 ; donc chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le précédent par 0,96. J'en déduis que la suite (Q_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

(1) (b) Exprimer Q_n en fonction de n.

Solution:
$Q_n = Q_0 \times q^n = 68\,000 \times 0{,}96^n$.

(1) (c) Calculer à la tonne près, la quantité de rejets prévue pour l'année 2014. L'entreprise aura-t-elle atteint son objectif ?

Solution:
$2014 = 2004 + 10$. Je calcule Q_{10} :
$Q_{10} = 68\,000 \times 0{,}96^{10} = 45\,209$.
La quantité de rejets prévue pour l'année 2014 est de 45 209 tonnes, donc l'entreprise n'aura pas atteint son objectif.

3 Offres de prêt *(8 points)*

Une infirmière souhaitant créer un cabinet a besoin de d'un prêt de 100 000 €. Elle contacte deux banques, A et B.

1. La banque A lui propose un prêt remboursable en 7 annuités. Les annuités sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 15\,000$ (le premier remboursement est de 15 000 €), et de raison 1800.

(1) (a) Calculer le montant des versements u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

Solution:

— $u_1 = u_0 + 1800 = 15\,000 + 1800 = 16\,800$;
— $u_2 = u_1 + 1800 = 16\,800 + 1800 = 18\,600$;
— $u_3 = u_2 + 1800 = 18\,600 + 1800 = 20\,400$;
— $u_4 = u_3 + 1800 = 20\,400 + 1800 = 22\,200$;
— $u_5 = u_4 + 1800 = 22\,200 + 1800 = 24\,000$;
— $u_6 = u_5 + 1800 = 24\,000 + 1800 = 25\,800$.

(1½) (b) Quelle serait la somme totale remboursée si l'infirmière souscrivait le prêt auprès de la banque A ?

Solution:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2} \\
S_6 &= \frac{(u_0 + u_6) \times 7}{2} \\
S_6 &= \frac{(15\,000 + 25\,800) \times 7}{2} \\
S_6 &= \frac{39\,000 \times 7}{2} \\
S_6 &= \frac{273\,000}{2} \\
S_6 &= 136\,500
\end{aligned}$$

Si elle souscrivait le prêt auprès de la banque A, elle devrait rembourser 136 500 €.

2. La banque B propose également de rembourser le prêt sur 7 ans, en 7 versements. Le premier remboursement noté v_0 serait de 20 000 €. Les remboursements suivants, notés v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et v_6 seraient chacun en augmentation de 2 % par rapport au remboursement précédent.

(1) (a) Calculer v_1 en précisant par quel calcul on passe de v_0 à v_1. Calculer v_2.

Solution:

— $v_1 = v_0 \times 1{,}02 = 2000 \times 1{,}02 = 2040$;
— $v_2 = v_1 \times 1{,}02 = 2040 \times 1{,}02 = 2080{,}8$.

(1) (b) Donner pour tout entier n, $0 \leq n \leq 5$, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.

Solution:
$v_{n+1} = v_n \times 1{,}02$.

(1) (c) En déduire que les nombres v_0, ..., v_6 sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme v_0 dont on précisera la raison q.

Solution:
Pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie toujours par 1,02, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$.

(1½) (d) Quelle serait la somme totale remboursée si l'infirmière souscrivait le prêt auprès de la banque B ? Arrondir à l'euro.

Solution:

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ S_6 &= 20\,000 \times \frac{1-1{,}02^7}{1-1{,}02} \\ S_6 &= 148\,686 \end{aligned}$$

Si elle souscrivait le prêt auprès de la banque A, elle devrait rembourser 148 686 €.

(1) 3. Quelle banque offre la solution la plus avantageuse ?

Solution:
$136\,500 < 148\,686$, donc la banque A est plus avantageuse que la banque B.