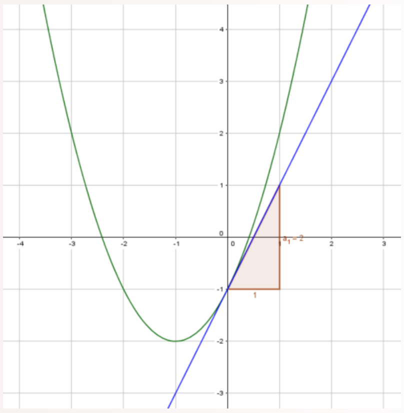
Dérivée et sens de variation d'une fonction 4

I. Tangente et nombre dérivé

Propriétés

On considère la courbe représentative de la fonction f, définie par $f(x) = x^2 + 2x - 1$; cette courbe est une parabole.

La droite d'équation $y = 2x - 1$ possède **un seul point commun avec la parabole**, le point $(0\,;1)$. La droite est la **tangente** en 0 de la parabole. La **pente de la tangente** est 2, c'est le **nombre dérivé** en 0.



II. Fonction dérivée

Définition

Soit une fonction f. Pour tout x, la **fonction dérivée** f' est la fonction qui donne le nombre dérivé en x (noté $\boldsymbol{f'(x)}$).
Une fonction est **dérivable** en x si et seulement si sa fonction dérivée f' est définie en x.

Exemple

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

Sa fonction dérivée, est la fonction f' telle que :

$$f'(x) = 2x + 2$$

III. Dérivation d'une fonction

1) Dérivées des fonctions usuelles

Pour dériver une fonction, on utilise les formule du tableau ci dessous :

Fonction	**Dérivée**	**Pour tout x appartenant à**
$f(x) = k\ (k \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$]-\infty\ ;+\infty[$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$]-\infty\ ;+\infty[$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$]-\infty\ ;+\infty[$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$]-\infty\ ;+\infty[$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$]-\infty\ ;+\infty[$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$]-\infty\ ;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}(x \neq 0)$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\ ;0[$ ou $]0\ ;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}(x > 0)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\ 0\ ;+\infty]$

2) Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions dérivables.

Fonction	**Dérivée**
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = ku$ (k constante)	$f'(x) = ku'$

IV. Utilisation de la dérivée

Activite 1

Exploitation du nombre dérivé :
Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x + 4 \quad (1)$$
$$g(x) = 5 - 4x \quad (2)$$
$$h(x) = -3x^2 + 6x - 4 \quad (3)$$
$$i(x) = x^2 - 2x - 2 \quad (4)$$
$$j(x) = -4x^3 - 8x^2 + 2x + 3 \quad (5)$$
$$k(x) = 5 \quad (6)$$

1. Tracez-la sur votre calculatrice
2. Dressez son tableau de variations entre -5 et 5
3. Dérivez la.
4. Calculez la valeur du nombre dérivé en -2, -1, 0, 1 et 2.
5. D'après-vous, y a t il un lien entre le nombre dérivé et les variations d'une fonction ?

Propriété

Les variations d'une fonction en un point sont liées au signe du nombre dérivé de la fonction en ce point :

- Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, alors la fonction $\boldsymbol{f}$ **est croissante** en x.
- Si $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, alors la fonction $\boldsymbol{f}$ **est constante** en x.
- Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, alors la fonction $\boldsymbol{f}$ **est décroissante** en x.

Exemple

On considère la fonction f, définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$.
Sa fonction dérivée f' est définie par $f'(x) = -6x + 6$.
On résous l'inéquation $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} -6x + 6 &> 0 \\ -6x &> -6 \\ x &< \frac{-6}{-6} \\ x &< 1 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est croissante avant 1 et décroissante après.
On a donc :

x	-12		-5		7		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-6