Suites numériques 2

Olivier FINOT, 19 octobre 2017

Objectifs

Être capable :

1. de reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ;
2. de calculer le terme de rang n d'une suite arithmétique ou géométrique ;
3. de représenter graphiquement une suite numérique.

I. Suite numérique

Définition

Une **suite numérique** est constituée de **plusieurs nombres rangés dans un certain ordre**. Ces nombres sont les **termes** de la suite. Le premier terme de la suite est noté u_1 (ou u_0), le deuxième u_2 (ou u_1), u_n est le n-ième (ou n+1-ième). Le terme suivant est noté u_{n+1}.

Exemple

On considère le prix d'un litre de gazole relevé dans une même station au premier janvier entre 1999 et 2008.

$$0,62\ ;\ 0,95\ ;\ 0,82\ ;\ 0,78\ ;\ 0,81\ ;\ 0,80\ ;\ 0,92\ ;\ 1,05\ ;\ 1,01\ ;\ 1,20$$

Le premier terme est $0,62$; le deuxième terme est $0,95$; le troisième est $0,82$, ...
On a $u_1 = 0,62$, $u_2 = 0,95$, $u_3 = 0,82$, ...

II. Suites arithmétiques

Activite La suite des nombres impairs

On considère la suite des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, ..., que l'on note successivement u_1, u_2, u_3, u_4... Donc $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$...

1. Compléter : $u_4 = \ldots\ldots$, $u_? = 15$, $u_{10} = \ldots\ldots$
2. Quel est le premier terme de la suite ?
3. Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
4. n est est nombre entier positif non nul, on s'intéresse au terme de rang n (donc le $n^{ième}$ nombre impair). Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
5. Exprimer u_n en fonction de n.
6. Calculer u_{100}, u_{150}, u_{1000}.

1) Définition

Á retenir

Une **suite arithmétique** est une suite de nombres, où chaque terme, à partir du deuxième est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre, la **raison** de la suite (notée r). On note :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple

1. La suite (u_n) des entiers naturels :
   On a $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$ ...
   C'est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison 1 ;
   $u_{n+1} = u_n + 1$
2. La suite (v_n) des entiers naturels pairs :
   On a $v_0 = 0$; $v_1 = 2$; $v_2 = 4$; $v_3 = 6$ ...
   C'est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 0$ et de raison 2,
   $v_{n+1} = v_n + 2$

Remarque

- Une suite arithmétique est définie par son terme initial et sa raison "r"
- Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de vérifier que la différence entre deux termes consécutifs $(u_{n+1} - u_n)$ est constante ; cette constante est la raison "r".

2) Expression de u_n en fonction de n

Á retenir

Dans une suite arithmétique de raison r, le terme u_n est obtenu à partir du premier terme par la relation :

- $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$ (lorsque le terme initial est u_0)
- $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$ (lorsque le terme initial est u_1)

	+ r	+ r	+ r		
u_0	u_1	u_2	U_3	...	U_n
	$u_1 = u_0 + r$	$u_2 = u_0 + 2r$	$u_3 = u_0 + 3r$	...	$u_n = u_0 + nr$

	+ r	+ r	+ r		
u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_n
	$u_2 = u_1 + r$	$u_3 = u_1 + 2r$	$u_4 = u_1 + 3r$	...	$u_n = u_1 + (n-1)r$

Exemple

(u_n) est la suite des entiers naturels impairs :
On a $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$ ...
C'est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
Calcul du centième nombre impair : On calcule donc u_{99}

$$\begin{aligned} u_{99} &= u_0 + 99 \times r \\ &= 1 + 99 \times 2 \\ &= 1 + 198 \\ u_{99} &= 199 \end{aligned}$$

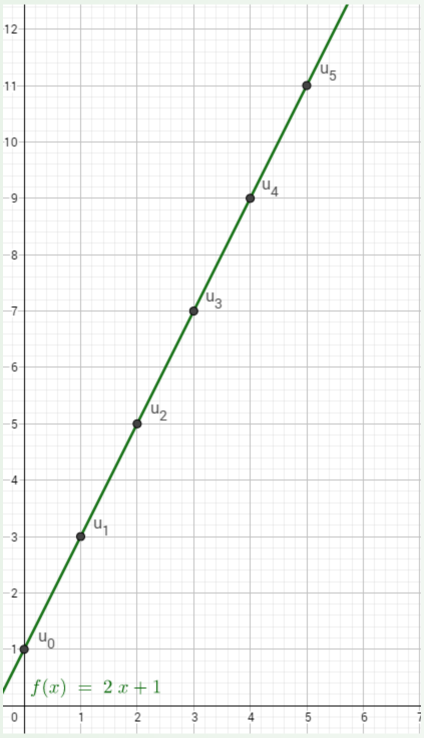
Le centième nombre impair est égal à 199.
Pour cette suite on a :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + n \times r \\ \textit{soit} \quad u_n &= 1 + n \times 2 \\ u_n &= 1 + 2n \\ u_{99} &= 2n + 1 \end{aligned}$$

3) Représentation graphique

Exemple

La suite des nombres impairs est définie par : $u_n = 2n + 1$. On représente graphiquement les termes de la suite :



- La représentation graphique de la suite (u_n) est consituée de points alignés sur la droite d'équation $y = 2x + 1$.
- Le premier terme $u_0 = 1$ est l'ordonnée à l'origine de la droite et la raison $r = 2$ est son coefficient directeur

Á retenir

Représentation graphique La représentation grpahique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés. Il y a le même écart entre chaque couple de points consécutifs.

III. Suites géométrique

Activite Augmentation d'un loyer

Le loyer d'un appartement augmente chaque année de 3%. En 2005, le loyer annuel s'élève à 6000 €. On note v_n, le montant du loyer annuel en $2005 + n$

1. Calculer le montant du loyer en 2006, 2007, 2008 et 2009.
2. Quel est le premier terme de la suite ?
3. Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
4. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
5. Exprimer v_n en fonction de n.
6. Calculer V_{10}, u_{15}, u_{35}.

1) Définition

Á retenir

Une **suite géométrique** est une suite de nombres, où chaque terme, à partir du deuxième est obtenu multipliant le précédent par un même nombre, la **raison** de la suite (notée q).

On note :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Exemple

1. La suite (u_n) des puissances de 2 : On a $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 8$ ...
   C'est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3 ;
   $u_{n+1} = u_n \times 2$
2. La suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{3^n}$:

   On a $v_0 = \dfrac{1}{3^0} = \dfrac{1}{1} = 1$; $v_2 = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$;

   $v_1 = \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$; $v_3 = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$ ...

   C'est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$,
   $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{1}{3}$

Remarque

- Une suite arithmétique est définie par son terme initial et sa raison "q"
- Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de vérifier que le rapport entre deux termes consécutifs ($\frac{u_{n+1}}{u_n}$) est constante ; cette constante est la raison "q".

2) Expression de u_n en fonction de n

Á retenir

Dans une suite géométrique de raison q, le terme u_n est obtenu à partir du premier terme par la relation :

- $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ (lorsque le terme initial est u_0)
- $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ (lorsque le terme initial est u_1)

	x q	x q	x q		
u_0	u_1	u_2	U_3	...	U_n
	$u_1 = u_0$ x q	$u_2 = u_0$ x q^2	$u_3 = u_0$ x q^3	...	$u_n = u_0$ x q^n

	x q	x q	x q		
u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_n
	$u_2 = u_1$ x q	$u_3 = u_1$ x q^2	$u_4 = u_1$ x q^3	...	$u_n = u_1$ x q^{n-1}