I. Vocabulaire

1) Expérience, issue et probabilité

Définitions

- En probabilités, on étudie les **issues** d'une **expérience aléatoire**.
- L'ensemble des issues de l'expérience forme **l'univers**.
- On associe une **probabilité** p_i à chaque issue.
- La **somme des probabilités** de toutes les issues d'une expérience vaut **1**.
- L'**équiprobabilité** correspond au cas où toutes les issues de l'expérience ont la même probabilité de se produire.

Exemple

Expérience : On lance un dé à 6 faces non truqué et on note le numéro de la face du dessus.

- L'ensemble des issues possibles est $\{1; 2; 3, 4; 5; 6\}$.
- La probabilité de chaque face est $1/6$:
  $p_1 = 1/6, p_2 = 1/6, p_3 = 1/6, p_4 = 1/6, p_5 = 1/6, p_6 = 1/6$.
- La somme de toutes les probabilités est 1 :
  $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6/6 = 1$.

2) Événements

Définitions

- Un **événement** A regroupe une partie des issues d'une expérience.
- La probabilité d'un événement A est $p(A)$.
- $\bar{A}$ est l'événement **contraire** de A (voir figure **??**), on a $\bar{A}$ est $p(\bar{A}) = 1-p(A)$.
- L'intersection de deux événements $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (au moins un des deux). (Dans la figure 3, la partie hachurée dans les deux sens)
- L'union de deux événements $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B. (Dans la figure 3, toutes les parties hachurées)

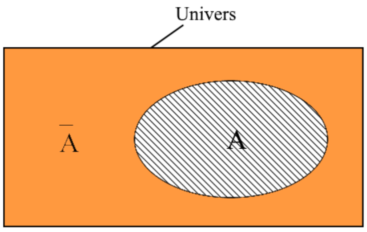


FIGURE 1: Un événement et son contraire

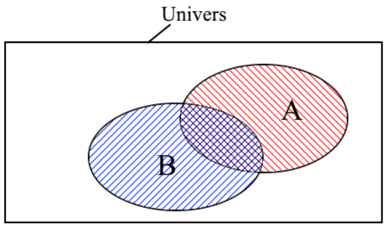


FIGURE 2: Union et intersection d'événements

Exemple

Au lancer d'un dé cubique, on considère les événements A : «Obtenir au moins 5», et B : «Obtenir un nombre pair». On a :

- $A = \{5; 6\}$.
- $B = \{2; 4; 6\}$.
- $\bar{A} = \{1; 2; 3; 4\}$.
- $A \cap B = \{6\}$.
- $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$.

II. Calculs de probabilités

1) Probabilité d'un événement

Propriétés

- La probabilité $p(A)$ d'un événement A est la somme des propriétés des issues qui réalisent l'événement.
- En cas d'équiprobabilité on a : $p(A) = \dfrac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ à\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$.

Exemple

On lance un dé à 6 faces truqué. Une étude statistique donne le tableau suivant :

Issue x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,2$	$0,3$

On s'intéresse à l'événement A : «le nombre obtenu est pair». On a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p_2 + p_4 + p_6 \\ &= 0,125 + 0,125 + 0,3 \\ &= 0,55 \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est de 0,55.

Exemple

On lance un dé à 6 faces non truqué. Puisque le de n'est pas truqué, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. On s'intéresse à l'événement A : «le nombre obtenu est pair». On a :

$$\begin{aligned}
p(A) &= p_2 + p_4 + p_6 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{3}{6} \\
&= 0,5
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la probabilité d'obtenir un résultat pair est de 0,5.

2) Utilisation d'un tableau de probabilités

Méthode

On peut regrouper les différentes issues d'une expérience aléatoire dans un tableau. En transformant ce tableau en tableau de probabilités, on peut calculer plus facilement des combinaisons de deux événements.

Exemple

Pour 500 personnes respirant des poussières pendant leur activité professionnelle on dispose des données suivantes :

	Atteints de toux chronique	non atteins de toux chronique	Total
Fumeurs	60	140	200
Non fumeurs	40	260	300
Total	100	400	500

On prélève au hasard le dossier d'une personne parmi les 500.

On note A l'événement « Le dossier est celui d'une personne atteinte de toux chronique» et F «Le dossier est celui d'un fumeur».

Le tirage de chaque dossier est équiprobable donc on peut utiliser les formule (nombre de cas favorables) divisé par (nombre de cas possibles).

	A	$\bar{A}$	Total
F	$\frac{60}{500} = 0,12$	$\frac{140}{500} = 0,28$	0.4
$\bar{F}$	$\frac{40}{500} = 0,08$	$\frac{260}{500} = 0,52$	0.6
Total	0,2	0,8	1

$p(A \cup F) = 0,12 + 0,08 + 0,28 = 0,48.$

3) Utilisation d'un arbre de probabilités

Méthode

On utilise un arbre de probabilité pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements.

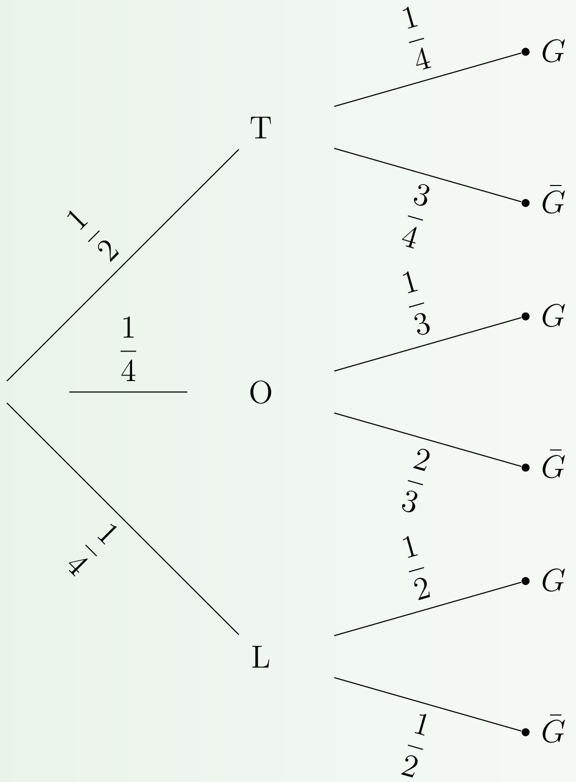
- La somme des probabilités pour les branches d'un même nœud est égale à 1.
- Un chemin est une intersection d'événements.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilité des chemins qui y aboutissent.

Exemple

Sur sa console de jeux, Dorian s'apprête à affronter en duel l'un des trois monstres Thor, Odin et Loki. Ces monstres sont de forces inégales : la probabilité pour que Dorian l'emporte contra Thor ; Odin ou Loki est respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. De plus Dorian a une chance sur deux d'affronter Thor, et autant de chances de rencontrer Odin que Loki.

On considère un duel au hasard et les événements :

- T : Dorian combat Thor.
- O : Dorian combat Odin.
- L : Dorian combat Loki.
- G : Dorian gagne son combat.



$\rightarrow p(T \cap G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\rightarrow p(T \cap \bar{G}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\rightarrow p(O \cap G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\rightarrow p(O \cap \bar{G}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$\rightarrow p(L \cap G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\rightarrow p(L \cap \bar{G}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$p(G) = p(T \cap G) + p(O \cap G) + p(L \cap G)$$
$$p(G) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$$
$$p(G) = \frac{32}{96}$$
$$p(G) = \frac{1}{3}$$

Dorian a une chance sur trois de gagner son duel.