# VERİ SIKIŞTIRMA

# İstatistiksel Yöntemler-5

Prof.Dr. Banu DİRİ

## Move –To –Front  Kodlama

- Bölgesel adaptif bir entropy kodlama yöntemidir
- Eldeki mevcut alfabe kullanılarak, input stream'de yer alan karakterlere kullanım sıklıklarına bağlı olarak bir kod verilir
- Yöntem gereği sıklıklar önceden hesaplanmaz
- Sıkıştırma performansını artırmak için, öncesinde kullanılan bir kodlamadır

Input stream a b c d d c b a m n o p p o n m

alfabe {abcdmnop}

Code 0 1 2 3 0 1 2 3 4 5 6 7 0 1 2 3

| Input | move-to-front | code |
|---|---|---|
| a | abcdmnop | 0 |
| b | abcdmnop | 1 |
| c | bacdmnop | 2 |
| d | cbadmnop | 3 |
| d | dcbamnop | 0 |
| c | dcbamnop | 1 |
| b | cdbamnop | 2 |
| a | bcdamnop | 3 |
| m | abcdmnop | 4 |
| n | mabcdnop | 5 |
| o | nmabcdop | 6 |
| p | onmabcdp | 7 |
| p | ponmabcd | 0 |
| o | ponmabcd | 1 |
| n | opnmabcd | 2 |
| m | nopmabcd | 3 |
| | mnopabcd | |

Entropy = H = 2.81 bits/char
Output stream deki her code ortalama 2.81 bit ile kodlanır.

Kod Çözme İşlemi

Kod çözme işleminde Input tersten okunur ve alfabenin ilk hali oluşturulur

Code içerisindeki değerleri kodlamak için Huffman veya Aritmetik Kodlama kullanılır

| | m n o p a b c d |
|---|---|
| m | m n o p a b c d |
| n | n m o p a b c d |
| o | o n m p a b c d |
| p | p o n m a b c d |
| p | p o n m a b c d |
| o | o p n m a b c d |
| n | n o p m a b c d |
| m | m n o p a b c d |
| a | a m n o p b c d |
| b | b a m n o p c d |
| c | c b a m n o p d |
| d | d c b a m n o p |
| d | d c b a m n o p |
| c | c d b a m n o p |
| b | b c d a m n o p |
| a | a b c d a m n o p |

Aynı işlemi Move-To-Front kodlama kullanmadan yapalım

Input stream **a b c d d c b a m n o p p o n m**

alfabe {abcdmnop}

**Input move-to-front code**

| | | |
|---|---|---|
| a | abcdmnop | 0 |
| b | abcdmnop | 1 |
| c | abcdmnop | 2 |
| d | abcdmnop | 3 |
| d | abcdmnop | 3 |
| c | abcdmnop | 2 |
| b | abcdmnop | 1 |
| a | abcdmnop | 0 |
| m | abcdmnop | 4 |
| n | abcdmnop | 5 |
| o | abcdmnop | 6 |
| p | abcdmnop | 7 |
| p | abcdmnop | 7 |
| o | abcdmnop | 6 |
| n | abcdmnop | 5 |
| m | abcdmnop | 4 |

Entropy = H = 3 bits/char
Output stream deki her code ortalama 3 bit ile kodlanır.

Kod Çözme İşlemi

Kod çözme işleminde Input tersten okunur ve alfabenin ilk hali oluşturulur

Code içerisindeki değerleri kodlamak için Huffman veya Aritmetik Kodlama kullanılır

Entropy nin daha yüksek çıkmasının sebebi arka arkaya tekrar eden kod olmamasıdır.

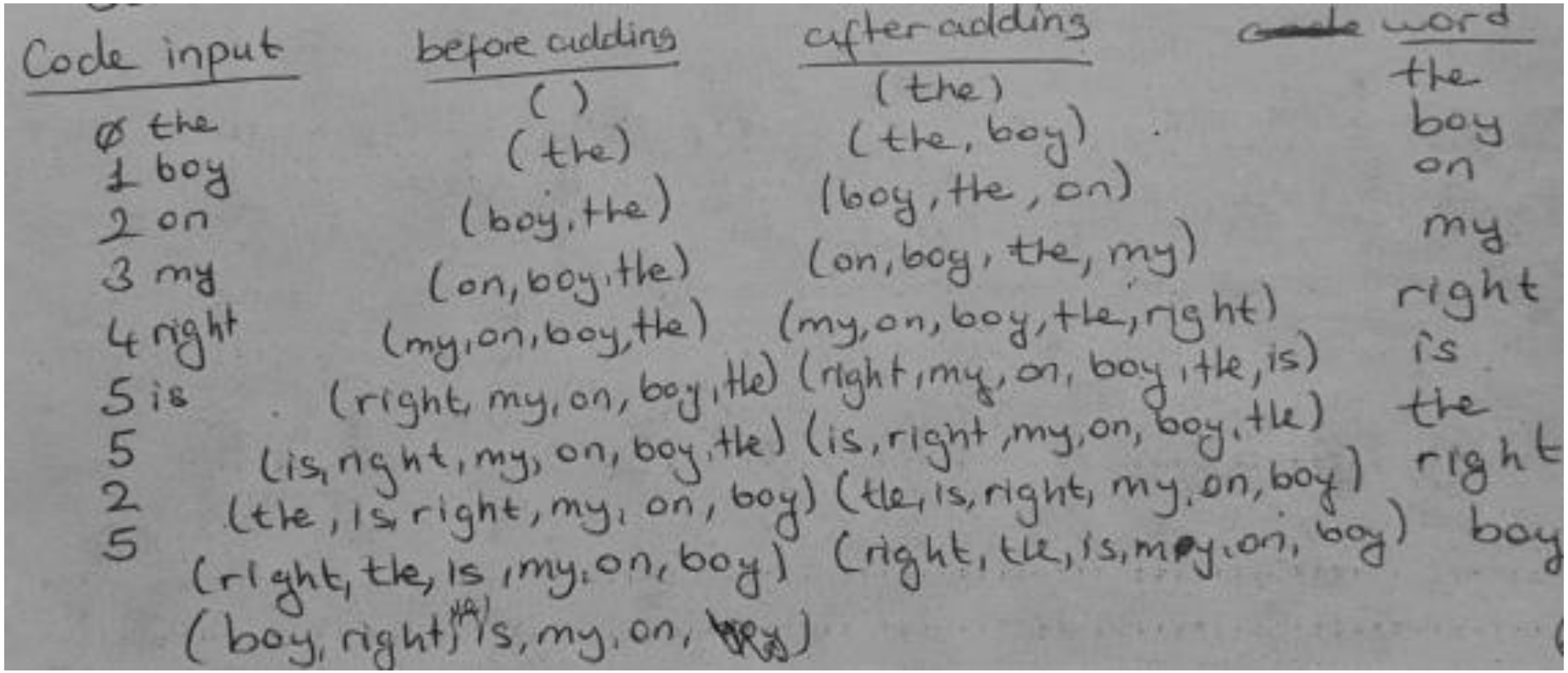
| | **a b c d m n o p** |
|---|---|
| m | a b c d m n o p |
| n | a b c d m n o p |
| o | a b c d m n o p |
| p | a b c d m n o p |
| p | a b c d m n o p |
| o | a b c d m n o p |
| n | a b c d m n o p |
| m | a b c d m n o p |
| a | a b c d m n o p |
| b | a b c d m n o p |
| c | a b c d m n o p |
| d | a b c d m n o p |
| d | a b c d m n o p |
| c | a b c d m n o p |
| b | a b c d m n o p |
| a | a b c d m n o p |

Move-To-Front yönteminde sadece karakterleri değil kelimeleri de kodlayabiliriz.

`the␣boy␣on␣my␣right␣is␣the␣right␣boy`

| Word | A (before adding) | A (after adding) | Code emitted |
|---|---|---|---|
| the | () | (the) | 0the |
| boy | (the) | (the, boy) | 1boy |
| on | (boy, the) | (boy, the, on) | 2on |
| my | (on, boy, the) | (on, boy, the, my) | 3my |
| right | (my, on, boy, the) | (my, on, boy, the, right) | 4right |
| is | (right, my, on, boy, the) | (right, my, on, boy, the, is) | 5is |
| the | (is, right, my, on, boy, the) | (is, right, my, on, boy, the) | 5 |
| right | (the, is, right, my, on, boy) | (the, is, right, my, on, boy) | 2 |
| boy | (right, the, is, my, on, boy) | (right, the, is, my, on, boy) | 5 |
| | (boy, right, the, is, my, on) | | |

# Move-To-Front yönteminde decode işlemi



| Code input | before adding | after adding | word |
|---|---|---|---|
| | ( ) | (the) | the |
| ∅ the | (the) | (the, boy) | boy |
| 1 boy | (boy, the) | (boy, the, on) | on |
| 2 on | (on, boy, the) | (on, boy, the, my) | my |
| 3 my | (my, on, boy, the) | (my, on, boy, the, right) | right |
| 4 right | (right, my, on, boy, the) | (right, my, on, boy, the, is) | is |
| 5 is | (is, right, my, on, boy, the) | (is, right, my, on, boy, the) | the |
| 5 2 | (the, is, right, my, on, boy) | (the, is, right, my, on, boy) | right |
| 5 | (right, the, is, my, on, boy) | (right, the, is, my, on, boy) | boy |
| | (boy, right, is, my, on, ~~boy~~) | | |

# İstatistiksel Yöntemler

- Prefix Kodlar
- Shannon Fano Coding
- Huffman Coding
- Arithmetic Coding
- Diğer Yöntemler

## Değişken Uzunluktaki Kodlar ( Variable Size Code)

{a1, a2, a3, a4} hepsi eşit olasılığa sahip olsun (Pi=0,25)

$H = -(4 * 0{,}25 \log_2 0{,}25) = 2$ bits

Her sembolü kodlamak için ortalama 2 bit yeterli olmaktadır.
(00 01 10 11)

{a1, a2, a3, a4} sembollerin farklı olasılık değerlerine sahip olduğunu düşünelim.
P(a1) = 0,49 P(a2) = 0,25 P(a3) = 0,25 P(a4) = 0,01

$H = -(0{,}49 \log_2 0{,}49 + 0{,}25 \log_2 0{,}25 + 0{,}25 \log_2 0{,}25 + 0{,}01 \log_2 0{,}01) = 1{,}57$ bits

**Redundancy = R = |2 – 1,57| = 0,43**

Input {a1 a3 a2 a1 a3 a3 a4 a2 a1 a1 a2 a2 a1 a1 a3 a1 a1 a2 a3 a1}

| Sembol | Olasılık | Code1 | code2 |
|---|---|---|---|
| a1 | 0,49 | 1 | 1 |
| a2 | 0,25 | 01 | 01 |
| a3 | 0,25 | 010 | 000 |
| a4 | 0,02 | 001 | 001 |

Code1 ile kodlandığında

9 a1 → 1 bit
5 a2 → 2 bit
5 a3 → 3 bit
1 a4 → 3 bit

20 sembol 37 bit ile kodlanıyor.

Ortalama Mesaj Uzunluğu = S = 37/20 = 1,85 bit
H = 1,57
R = |H – S| = 0,28

**Sıkıştırma performansı iyi, ancak bu kodun geri dönüşü yoktur.**

NEDEN ?

| Sembol | Olasılık | Code1 | code2 |
|---|---|---|---|
| a1 | 0,49 | 1 | 1 |
| a2 | 0,25 | 01 | 01 |
| a3 | 0,25 | 010 | 000 |
| a4 | 0,02 | 001 | 001 |

Code2 kullanmak gerekir. Code2 **prefix** (ön ek) özelliğine sahiptir.

**Prefix Code** : Bir sembolün sahip olduğu kodun bit pattern, diğer sembolün ön eki olamaz.

Değişken uzunlukta kod oluşturulurken iki temel özelliğe dikkat edilmelidir.

- En fazla sıklıkta kullanılan sembole, en kısa kod atanır
- Prefix özeliğine uyulmalıdır

**Integer sayıların binary gösterilimi prefix kod özelliğine uyar mı?**

HAYIR

# Prefix Kod Örnekleri

i >= 1 olmak şartı ile, i.kodun binary değerinin başlangıcında $\lfloor log_2 i \rfloor$ adet sıfır eklenir.

| i | code | size |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 010 | 3 |
| 3 | 011 | 3 |
| 4 | 00100 | 5 |
| 5 | 00101 | 5 |
| 6 | 00110 | 5 |
| 7 | 00111 | 5 |
| 8 | 0001000 | 7 |
| …. | …… | …… |
| 15 | 0001111 | 7 |
| 16 | 000010000 | 9 |

i kodunun toplam bit uzunluğu nedir ?

$$1 + 2 \lfloor log_2 i \rfloor \quad \text{bits}$$

# UNARY CODE

Negatif olmayan **n** integer sayısının, unary kodu (n-1) adet 1 ve onları takip eden bir tane 0'dan oluşmaktadır veya (n-1) tane 0 ve onları takip eden bir tane 1'den oluşmaktadır.

| n | code | Alter code |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 10 | 01 |
| 3 | 110 | 001 |
| 4 | 1110 | 0001 |
| 5 | 11110 | 00001 |

**Örnek** : 680 adet unary kodu nasıl elde edebiliriz. 680 adet kod için triplet (3,2,9)

| n | a=3+n*2 | $n^{th}$ codeword | #codeword | İnteger sınır |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 0xxx | $2^3 = 8$ | 0-7 |
| 1 | 5 | 10xxxxx | $2^5 = 32$ | 8-39 |
| 2 | 7 | 110xxxxxxx | $2^7 = 128$ | 40-167 |
| 3 | 9 | 111xxxxxxxxx | $2^9 = 512$ | 168-679 |

- Unary kodlar, «start-step-stop» kod olarak da bilinir.
- a = start + n * step
- Eğer a = stop ise a bitinin önündeki 0 düşürülür.

Start, step ve stop değerlerine bağlı olarak kaç adet unary kod oluşturulur?

$$\frac{2^{stop+step}-2^{start}}{2^{step}-1} = \frac{2^{11}-2^3}{2^2-1} = 680$$

Stop parametresine bağlı olarak üstel artar

# Diğer Prefix Kodlar

| $n$ | $B(n)$ | $\overline{B}(n)$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 0\| | 0 | 0\| | 0 |
| 2 | 10 | 0 | 10\|0 | 100 | 100\|0 | 10\|0 |
| 3 | 11 | 1 | 10\|1 | 110 | 100\|1 | 11\|0 |
| 4 | 100 | 00 | 110\|00 | 10100 | 110\|00 | 10\|100\|0 |
| 5 | 101 | 01 | 110\|01 | 10110 | 110\|01 | 10\|101\|0 |
| 6 | 110 | 10 | 110\|10 | 11100 | 110\|10 | 10\|110\|0 |
| 7 | 111 | 11 | 110\|11 | 11110 | 110\|11 | 10\|111\|0 |
| 8 | 1000 | 000 | 1110\|000 | 1010100 | 10100\|000 | 11\|1000\|0 |
| 9 | 1001 | 001 | 1110\|001 | 1010110 | 10100\|001 | 11\|1001\|0 |
| 10 | 1010 | 010 | 1110\|010 | 1011100 | 10100\|010 | 11\|1010\|0 |
| 11 | 1011 | 011 | 1110\|011 | 1011110 | 10100\|011 | 11\|1011\|0 |
| 12 | 1100 | 100 | 1110\|100 | 1110100 | 10100\|100 | 11\|1100\|0 |
| 13 | 1101 | 101 | 1110\|101 | 1110110 | 10100\|101 | 11\|1101\|0 |
| 14 | 1110 | 110 | 1110\|110 | 1111100 | 10100\|110 | 11\|1110\|0 |
| 15 | 1111 | 111 | 1110\|111 | 1111110 | 10100\|111 | 11\|1111\|0 |
| 16 | 10000 | 0000 | 11110\|0000 | 101010100 | 10110\|0000 | 10\|100\|10000\|0 |
| 31 | 11111 | 1111 | 11110\|1111 | 111111110 | 10110\|1111 | 10\|100\|11111\|0 |
| 32 | 100000 | 00000 | 111110\|00000 | 10101010100 | 11100\|00000 | 10\|101\|100000\|0 |
| 63 | 111111 | 11111 | 111110\|11111 | 11111111110 | 11100\|11111 | 10\|101\|111111\|0 |
| 64 | 1000000 | 000000 | 1111110\|000000 | 1010101010100 | 11110\|000000 | 10\|110\|1000000\|0 |
| 127 | 1111111 | 111111 | 1111110\|111111 | 1111111111110 | 11110\|111111 | 10\|110\|1111111\|0 |
| 128 | 10000000 | 0000000 | 11111110\|0000000 | 101010101010100 | 1010100\|0000000 | 10\|111\|10000000\|0 |
| 255 | 11111111 | 1111111 | 11111110\|1111111 | 111111111111110 | 1010100\|1111111 | 10\|111\|11111111\|0 |

**B(n)** : n sayısının binary karşılığı
**|B(n)|** : Binary sayısının dijit uzunluğu
$\overline{B}$**(n)** : En soldaki bit atıldığında (her zaman 1) kalan bitler

# $C_1$ kodu nasıl elde edilir ?

| $n$ | $B(n)$ | $\overline{B}(n)$ | $C_1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 0 |
| 2 | 10 | 0 | 10 0 |
| 3 | 11 | 1 | 10 1 |
| 4 | 100 | 00 | 110 00 |
| 5 | 101 | 01 | 110 01 |
| 6 | 110 | 10 | 110 10 |
| 7 | 111 | 11 | 110 11 |
| 8 | 1000 | 000 | 1110 000 |
| 9 | 1001 | 001 | 1110 001 |
| 10 | 1010 | 010 | 1110 010 |
| 11 | 1011 | 011 | 1110 011 |
| 12 | 1100 | 100 | 1110 100 |
| 13 | 1101 | 101 | 1110 101 |
| 14 | 1110 | 110 | 1110 110 |
| 15 | 1111 | 111 | 1110 111 |
| 16 | 10000 | 0000 | 11110 0000 |
| 31 | 11111 | 1111 | 11110 1111 |
| 32 | 100000 | 00000 | 111110 00000 |
| 63 | 111111 | 11111 | 111110 11111 |
| 64 | 1000000 | 000000 | 1111110 000000 |
| 127 | 1111111 | 111111 | 1111110 111111 |
| 128 | 10000000 | 0000000 | 11111110 0000000 |
| 255 | 11111111 | 1111111 | 11111110 1111111 |

- $C_1$ iki parçadan oluşur
- n değerinin binary karşılığı olan B(n) nin dijit sayısı değerinin unary karşılığı ile B(n) nin en soldaki bitinin atılmış hali olan $\bar{B}$(n) nin birleşimidir

n= 16
$(10000)_2$
B(n) = 10000
$\bar{B}$(n) = 0000
|B(n)| = 5

$C_1$→ |B(n)| | $\bar{B}$(n)

$C_1$→11110 | 0000
veya
$C_1$→00001 | 0000

**n=5 unary code 11110**

**$C_1$(n) kod uzunluğu** **$2\lfloor log_2 n \rfloor + 1$ bits**

| $n$ | $B(n)$ | $\overline{B}(n)$ | $C_2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 0 |
| 2 | 10 | 0 | 100 |
| 3 | 11 | 1 | 110 |
| 4 | 100 | 00 | 10100 |
| 5 | 101 | 01 | 10110 |
| 6 | 110 | 10 | 11100 |
| 7 | 111 | 11 | 11110 |
| 8 | 1000 | 000 | 1010100 |
| 9 | 1001 | 001 | 1010110 |
| 10 | 1010 | 010 | 1011100 |
| 11 | 1011 | 011 | 1011110 |
| 12 | 1100 | 100 | 1110100 |
| 13 | 1101 | 101 | 1110110 |
| 14 | 1110 | 110 | 1111100 |
| 15 | 1111 | 111 | 1111110 |
| 16 | 10000 | 0000 | 101010100 |
| 31 | 11111 | 1111 | 111111110 |
| 32 | 100000 | 00000 | 10101010100 |
| 63 | 111111 | 11111 | 11111111110 |
| 64 | 1000000 | 000000 | 1010101010100 |
| 127 | 1111111 | 111111 | 1111111111110 |
| 128 | 10000000 | 0000000 | 101010101010100 |
| 255 | 11111111 | 1111111 | 111111111111110 |

# $C_2$ kodu nasıl elde edilir ?

- $C_1$ kodunu yeniden düzenlenmesi ile oluşur
- $C_1$'in birinci bölümündeki her bit teker teker alınırken, her bitin arkasına ikinci bölümden bir bit yazılır.

n= 16
$(10000)_2$
B(n) = 10000
$\bar{B}$(n) = 0000
|B(n)| = 5

$C_1$→11110 | 0000

$C_2$→101010100

**$C_2$(n) kod uzunluğu** **2 $\lfloor log_2 n \rfloor$ + 1 bits**

| $n$ | $B(n)$ | $\overline{B}(n)$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 0\| |
| 2 | 10 | 0 | 100\|0 |
| 3 | 11 | 1 | 100\|1 |
| 4 | 100 | 00 | 110\|00 |
| 5 | 101 | 01 | 110\|01 |
| 6 | 110 | 10 | 110\|10 |
| 7 | 111 | 11 | 110\|11 |
| 8 | 1000 | 000 | 10100\|000 |
| 9 | 1001 | 001 | 10100\|001 |
| 10 | 1010 | 010 | 10100\|010 |
| 11 | 1011 | 011 | 10100\|011 |
| 12 | 1100 | 100 | 10100\|100 |
| 13 | 1101 | 101 | 10100\|101 |
| 14 | 1110 | 110 | 10100\|110 |
| 15 | 1111 | 111 | 10100\|111 |
| 16 | 10000 | 0000 | 10110\|0000 |
| 31 | 11111 | 1111 | 10110\|1111 |
| 32 | 100000 | 00000 | 11100\|00000 |
| 63 | 111111 | 11111 | 11100\|11111 |
| 64 | 1000000 | 000000 | 11110\|000000 |
| 127 | 1111111 | 111111 | 11110\|111111 |
| 128 | 10000000 | 0000000 | 1010100\|0000000 |
| 255 | 11111111 | 1111111 | 1010100\|1111111 |

## $C_3$ kodu nasıl elde edilir ?

- n'nin binary gösteriliminin dijit sayısı alınır
- |B(n)| nin değeri, $C_2$ kodu içerisinde bulunur ve daha sonra arkasına $\bar{B}$(n) eklenir.

**$C_3$(15)**

↓

**1111 → |B(15)| = 4**

↓

**$C_2$(4) = 10100 | $\bar{B}$(15) = 10100 | 111**

**$C_3$(n) kod uzunluğu** $1 + \lfloor log_2 n \rfloor + 2 \lfloor log_2 (1 + \lfloor log_2 n \rfloor) \rfloor$ **bits**

| $n$ | $B(n)$ | $\overline{B}(n)$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 0 |
| 2 | 10 | 0 | 10\|0 |
| 3 | 11 | 1 | 11\|0 |
| 4 | 100 | 00 | 10\|100\|0 |
| 5 | 101 | 01 | 10\|101\|0 |
| 6 | 110 | 10 | 10\|110\|0 |
| 7 | 111 | 11 | 10\|111\|0 |
| 8 | 1000 | 000 | 11\|1000\|0 |
| 9 | 1001 | 001 | 11\|1001\|0 |
| 10 | 1010 | 010 | 11\|1010\|0 |
| 11 | 1011 | 011 | 11\|1011\|0 |
| 12 | 1100 | 100 | 11\|1100\|0 |
| 13 | 1101 | 101 | 11\|1101\|0 |
| 14 | 1110 | 110 | 11\|1110\|0 |
| 15 | 1111 | 111 | 11\|1111\|0 |
| 16 | 10000 | 0000 | 10\|100\|10000\|0 |
| 31 | 11111 | 1111 | 10\|100\|11111\|0 |
| 32 | 100000 | 00000 | 10\|101\|100000\|0 |
| 63 | 111111 | 11111 | 10\|101\|111111\|0 |
| 64 | 1000000 | 000000 | 10\|110\|1000000\|0 |
| 127 | 1111111 | 111111 | 10\|110\|1111111\|0 |
| 128 | 10000000 | 0000000 | 10\|111\|10000000\|0 |
| 255 | 11111111 | 1111111 | 10\|111\|11111111\|0 |

# $C_4$ kodu nasıl elde edilir ?

- $C_4$ birden fazla bölümden oluşur
- İlk olarak hesaplanacak olan n kodunun binary gösterilimi yazılır
- Sol tarafına |B(n)|-1 değerinin binary gösterilimi yazılır
- İşleme |B(n)|-1 değeri iki dijit kalıncaya kadar devam ettirilir
- En son adımda da sağ tarafa 0 yazılır

**$C_4$(16)** → **|10000**

**|B(16)| -1 → 5 – 1= 4**

**|100|10000**

**|B(4)| -1 → 3 – 1= 2**

**10|100|10000**

**10|100|10000|0**

# GOLOMB CODE

Unary kodlama yönteminin özellikleri de kullanılarak oluşturulan basit bir prefix koddur.

- Kodları oluşturulacak alfabe içerisinde yer alan karakterler, kullanım frekansları/olasılıkları büyükten küçüğe doğru sıralanır.
- **x** olarak adlandırılan karakterlere 0 dan başlamak üzere, ardışık değerler atanır.
- İdeali 2'nin kuvveti olacak bir **M** değeri seçilir.
- Her x değeri için **xM** ve **xL** değerleri hesaplanır.
- Golomb kodlar, xM sayısının unary kod değeri ile xL sayısının binary değeri birleştirilerek elde edilir.

**M=4**

$$xM = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$$

**xL = x mod M**

**x = ( xM * M) + xL**

| x | xM | xL | Unary xM | Binary xL | Golomb Code |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 00 | 000 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 01 | 001 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 10 | 010 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 11 | 011 |
| 4 | 1 | 0 | 10 | 00 | 1000 |
| 5 | 1 | 1 | 10 | 01 | 1001 |
| 6 | 1 | 2 | 10 | 10 | 1010 |
| 7 | 1 | 3 | 10 | 11 | 1011 |
| 8 | 2 | 0 | 110 | 00 | 11000 |

# Shannon Fano Coding

- Değişken uzunluklu bir kodlama yöntemidir
- Olasılık veya kullanım sıklıkları bilinen n elemanlı bir küme ile başlanır
- Semboller azalan sırada olasılıklarına/kullanım sıklıklarına göre sıralanır
- Semboller kümesi aynı veya yakın olasılık değerlerine göre iki kümeye ayrılır
- Bir küme içerisindeki sembollerin hepsi **1** değerini alırken,
  diğer kümedeki semboller **0** değerini alır
- Her alt küme kendi içerisinde iki eleman kalıncaya kadar bölünmeye devam edilir
- Semboller aşağıdan yukarı doğru okunur
- Sembollerin olasılık değerleri 2'nin negatif kuvvetleri cinsinden olduğu zaman en iyi sonucu verir

| sembol olasılıkları | | | | | kodlar |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 11 |
| 0,20 | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| 0,15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 011 |
| 0,15 | 0 | 1 | 1 | 0 | 010 |
| 0,10 | 0 | 0 | 1 | 1 | 001 |
| 0,10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0001 |
| 0,05 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0000 |

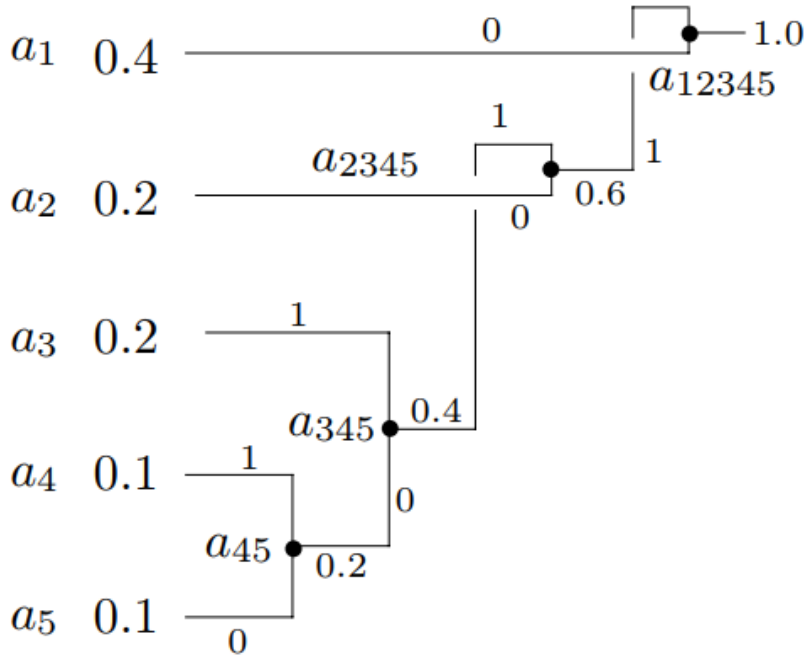
**H** = - ( 0,25 $\log_2$ 0,25 + 0,20 $\log_2$ 0,20 + 2*(0,15 $\log_2$ 0,15) + 2*(0,10 $\log_2$ 0,10) + (0,05 $\log_2$ 0,05) = **2,67 bits**

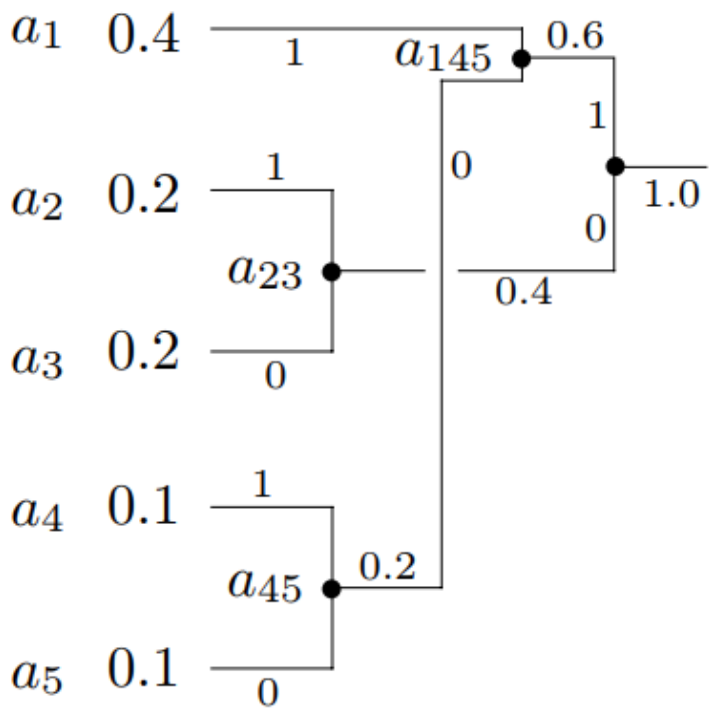
**S** = 0,25 *2 + 0,20 *2 + 3* 0,15 * 2 + 3* 0,10 + 4* 0,10 + 4* 0,05 = **2,7 bits**

**R** = |2,70 - 2,67 | = **0,03 bits**

# HUFFMAN KODLAMA YÖNTEMİ

- Veri sıkıştırmada tek başına veya bir başka yöntemin içerisinde yer alarak kullanılan bir algoritmadır
- Shannon Fano'ya benzer, ancak kodları ters olarak aşağıdan yukarıya doğru oluşturur
- Huffman algoritmasında kodlama ağacı oluşturulurken iki farlı yol izlenir. Sembollerin dod değerleri farklı olsa da entropy aynı çıkar.




S=$0.4 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.2 \times 3 + 0.1 \times 4 + 0.1 \times 4 = 2.2$ bits/symbol

0, 10, 111, 1101, and 1100

S= $0.4 \times 2 + 0.2 \times 2 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.1 \times 3 = 2.2$ bits/symbol

11, 01, 00, 101, and 100

**Hangi kod daha iyidir ?**

Birinci ağaç için varyans

$$0.4(1-2.2)^2+0.2(2-2.2)^2+0.2(3-2.2)^2+0.1(4-2.2)^2+0.1(4-2.2)^2=1.36$$

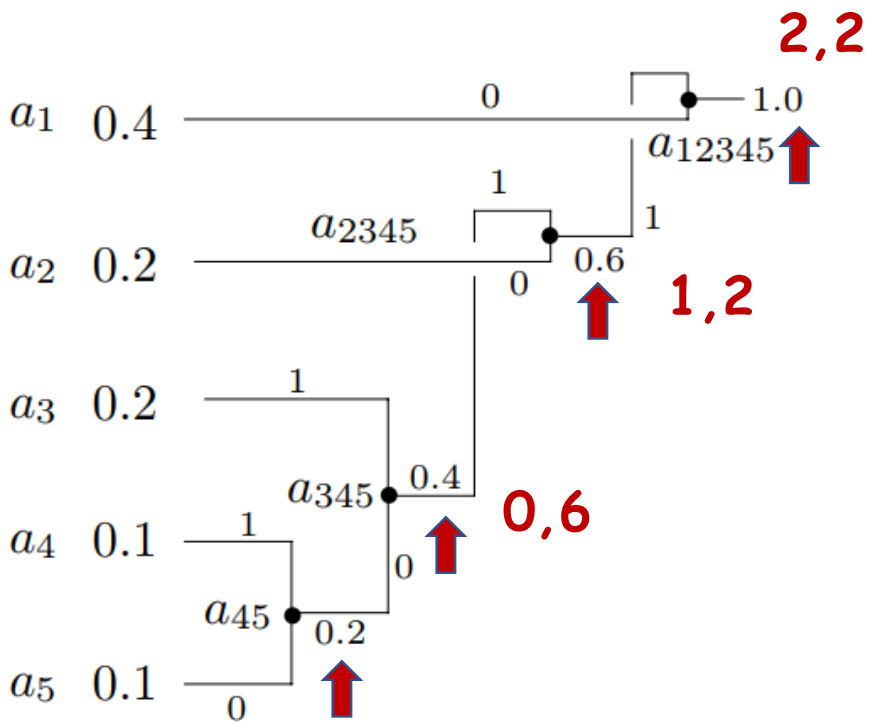
İkinci ağaç için varyans

$$0.4(2-2.2)^2+0.2(2-2.2)^2+0.2(2-2.2)^2+0.1(3-2.2)^2+0.1(3-2.2)^2=0.16$$

- Kodlayıcı, sıkıştırılmış veriyi bir dosyaya yazacak ise, kodun varyansının küçük veya büyük olmasının bir önemi yoktur
- Kodlayıcı, sıkıştırılmış veriyi iletişim hatlarından gönderecek ise, küçük varyanslı kod seçilmelidir
- İletişim hattı üzerinden bilginin gönderilme hızı ile, kodlayıcının kodu üretme hızı aynı değilse beklemeyi önlemek için buffer alanı kullanılır.
- Kodun varyansı büyük ise buffer alanı büyük seçilmelidir. Varyansın sıfıra yakın olduğu durumlarda buffer alanı küçük seçilebilir

$a_i$ sembolünün kod uzunluğu $[-log_2 Pi]$ eşit veya daha küçüktür

$a_i$ → 0,4 $[-log_2 0{,}4]$ = 2 bits (2 veya 1 bit ile kodlanır)




Ortalama kod uzunluğunu hesaplarken,
her bir sembolün olasılık değeri ile o sembolün kod bit uzunluklarının çarpımlarının toplamı olarak hesaplanırdı

Ortalama kod uzunluğunu, Huffman kodlama ağacının ara düğüm olasılık değerlerini toplayarak da hesaplayabiliriz

## ÖRNEK

Elimizde a, e, k, l, m ve z sembollerinden sırası ile 25, 14, 8, 7, 4 ve 2 adet olsun.
Her bir sembol için Huffman kod değerini bulalım.

**Adım 1:** Sembollerin kullanım sıklıkları küçükten büyüğe doğru sıralanır.

**2 4 7 8 14 25**

**Adım 2:** Sıklık değerleri, soldan başlayarak sıradaki iki sıklık değerinin toplamlarının sıralamayı bozmayacak şekilde diziye yerleştirilmesi ile devam edilir.

**2 4 -6 7 8 -13 14 -21 25 -35 -60**

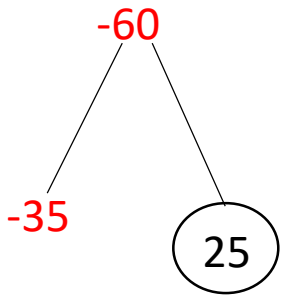
Toplam değerleri kırmızı ile gösterilmiştir. Eksi değer de bir ara toplam olduğunu söyler.

**n** tane sembolümüz varsa, genişletilmiş dizimiz **2n-1** adet olacaktır.

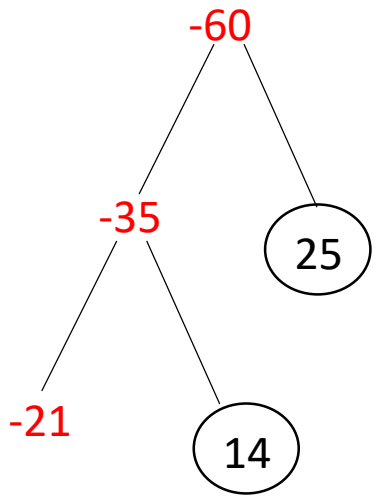
2 4 -6 7 8 -13 14 -21 25 -35 -60

**Adım 3:** En sondaki eleman Huffman kodlama ağıcının kök değeri olacak şekilde ikili ağaç şeklinde diğer elemanlarda ağaca belli bir kural ile yerleştirilir.

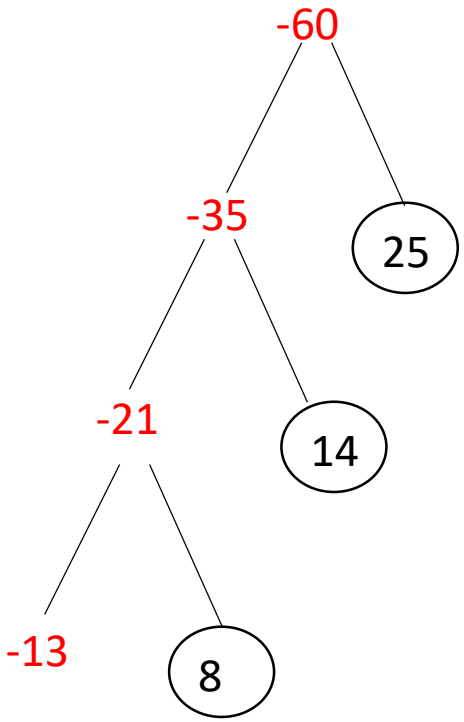
Bir sonraki (2n-2) değeri ağacın sol dalına, (2n-3) değeri de sağ dalına yerleşir.

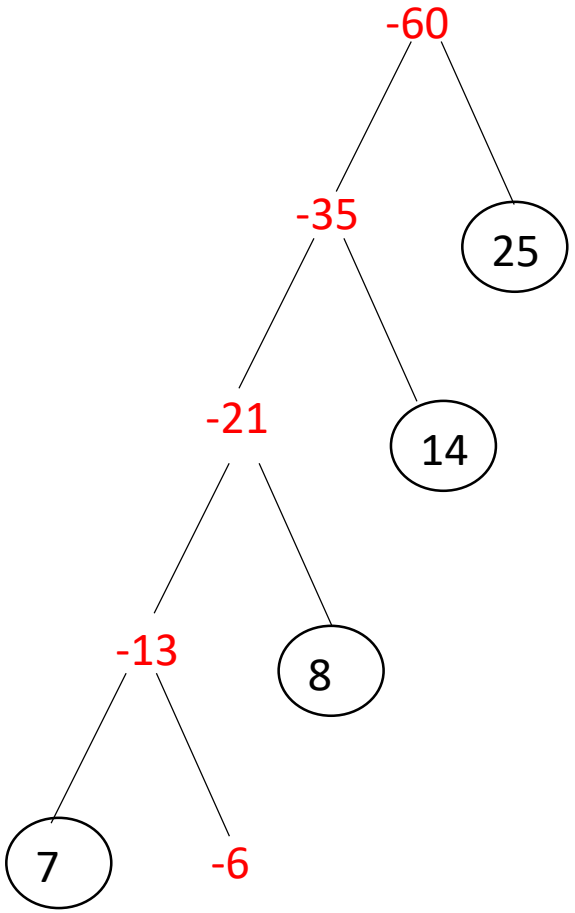



25 değeri "**a**" sembolün sıklık değeri olup, bir yapraktır.
-35 ise bir ara düğümdür. Ağaç bu düğüm üzerinden oluşturulmaya devam edilir.



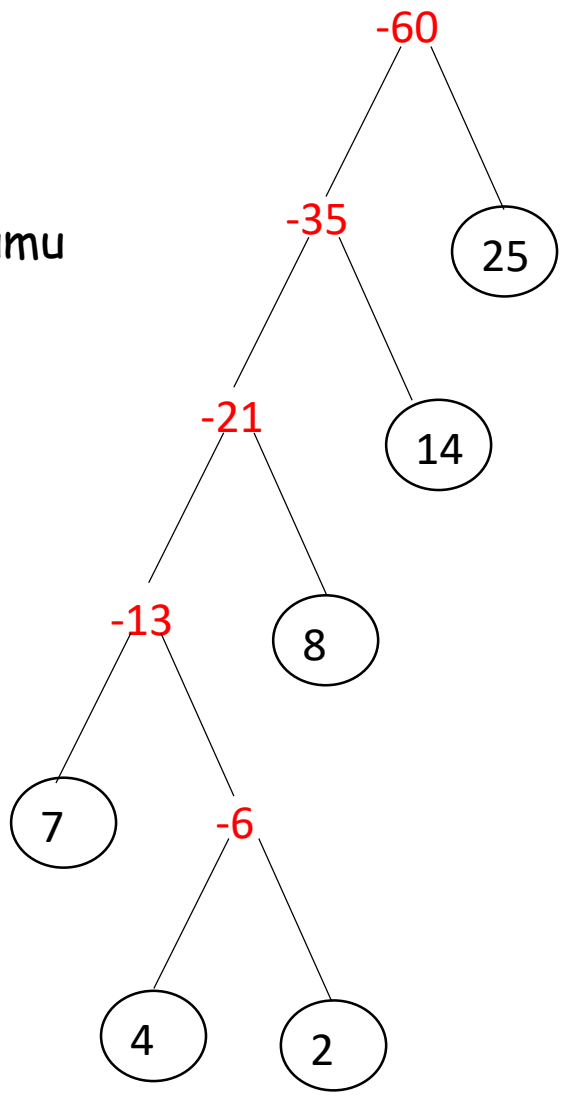
2 4 -6 7 8 -13 14 -21 25 -35 -60



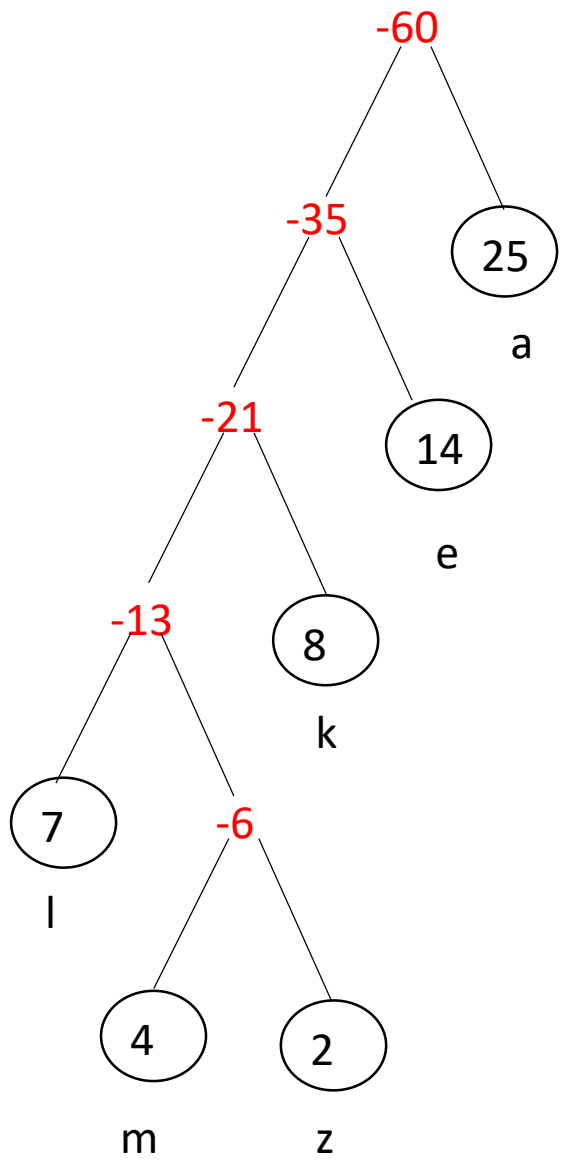



2 4 -6 7 8 -13 14 -21 25 -35 -60

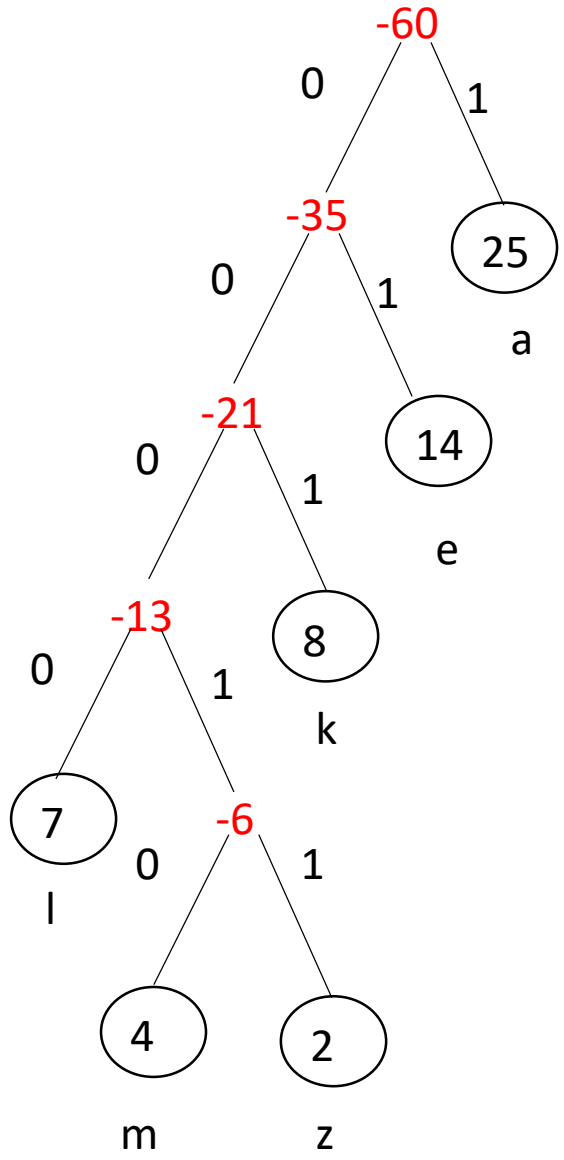
Huffman Kodlama Ağacının son durumu



Huffman Kodlama Ağacının yapraklarına sembolleri yerleştirelim.



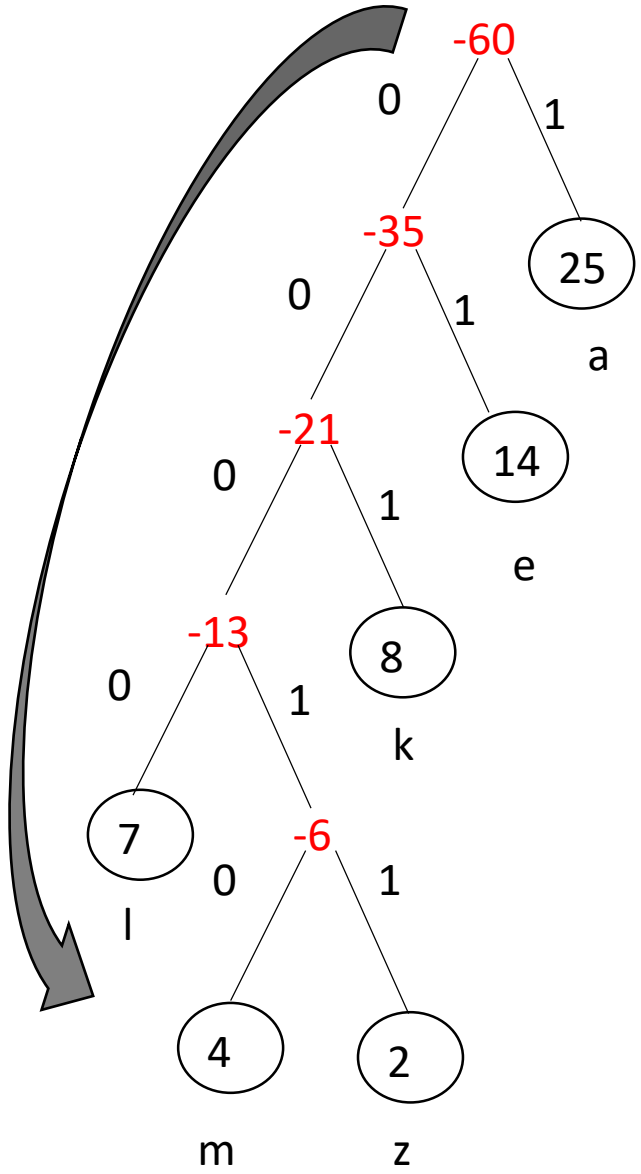
**Adım 4:** Ağacın dallarına Huffman kodlarını oluşturacak olan 1 ve 0 değerlerini yerleştirelim. Sol dal için **0**, sağ dal için **1** değerini yazalım.



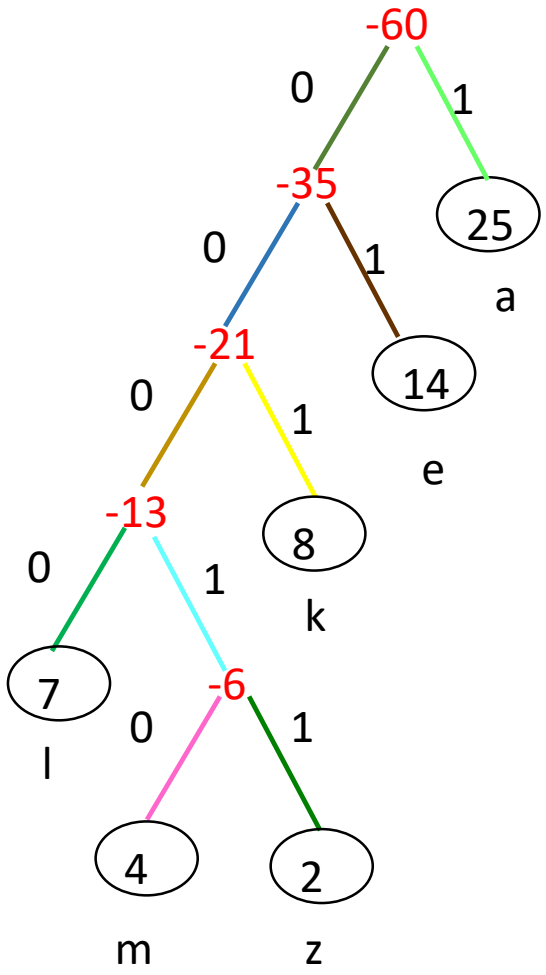
**Adım 5:** Huffman kodlama ağacında kodlar aşağıdan yukarı doğru oluşturulur, yukarıdan aşağı doğruda okunur.

Ağaç üzerinden kodlarımızı okursak

| | |
|---|---|
| a | 1 |
| e | 01 |
| k | 001 |
| l | 0000 |
| m | 00010 |
| z | 00011 |



**Header (Başlık Bilgisi):** Başlık içerisinde ağaç bilgisini gönderebilir miyiz?




# Nasıl?

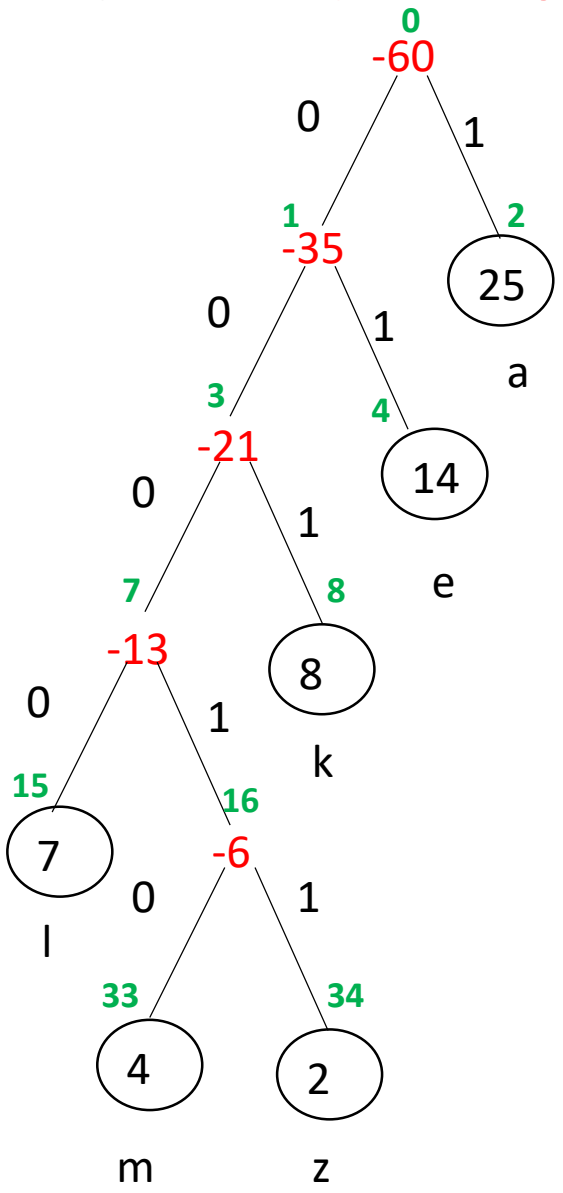
**Ağacımızı Left Node Right notasyonuna göre okuyalım**

00001011111

lmzkea

Genişletilmiş diziyi kullanarak kodları nasıl oluşturabiliriz ?

**2 4 -6 7 8 -13 14 -21 25 -35 -60**




Ağaç üzerindeki her düğüm noktasının adreslerini yazalım

Kök düğümün adresi 0 ile başlasın (yeşil ile yazılmış sayılar)

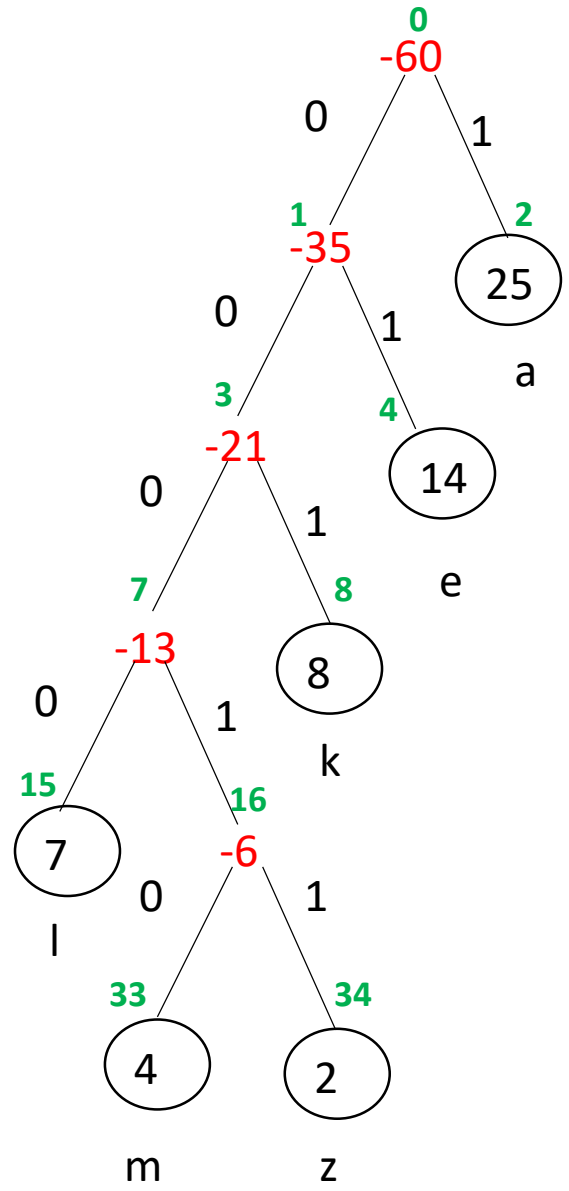
- sol tarafındaki düğüm kendisinin *2 + 1 olsun
- sağ taraftaki düğüm de *2 + 2 olsun

2 4 -6 7 8 -13 14 -21 25 -35 -60

Satır sayısı 2n-1, sütun sayısı 3 olan bir matris hazırlayalım

- İlk sütun genişletilmiş dizi elemanları (tersten)
- İkinci sütun indislerden
- Üçüncü sütun da kodlardan oluşsun

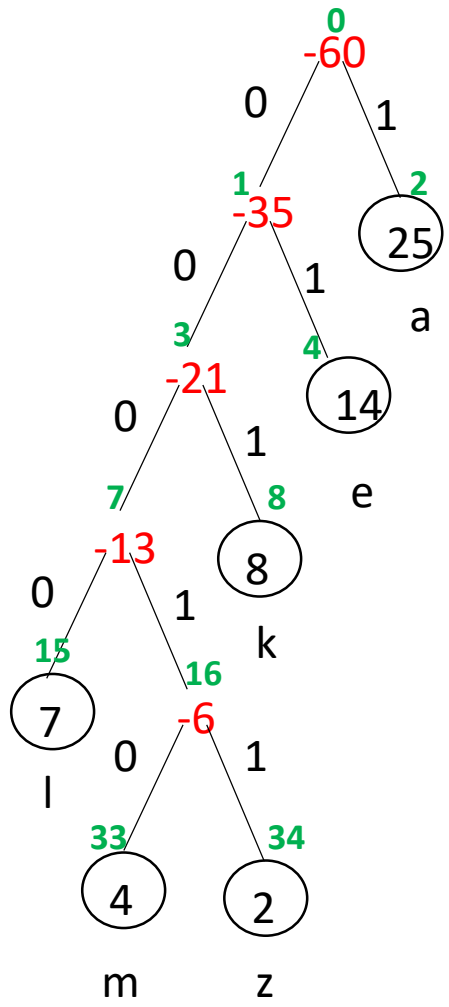
| dizi | indis | kod |
|---|---|---|
| -60 | 0 | |
| -35 | | |
| 25 | | |
| -21 | | |
| 14 | | |
| -13 | | |
| 8 | | |
| 7 | | |
| -6 | | |
| 4 | | |
| 2 | | |



Her negatif sayı bir ara düğüm olduğu için bu düğümden çıkan dallar var demektir.
Bu sebeble her negatif sayının sahip olduğu indis değerinin *2+1 ile *2+2 değeri peş peşe indis sütununa yazılır.

**Örneğin:** -60 bir ara düğümdür. İndis değeri 0 dır. *2+1 ve *2+2 değerleri sırası ile 1 ve 2 olup, Arka arkaya yazılır.

| dizi | indis | kod |
|---|---|---|
| -60 | 0 | |
| -35 | 1 | |
| 25 | 2 | |
| -21 | 3 | |
| 14 | 4 | |
| -13 | 7 | |
| 8 | 8 | |
| 7 | 15 | |
| -6 | 16 | |
| 4 | 33 | |
| 2 | 34 | |



- Huffman Ağacı kodları aşağıdan yukarı doğru oluşturduğundan kodların prefix özelliğini sağlaması içinde yukarıdan aşağıya doğru okunması gerekir.

- Matriste kod sütunun oluşturulması sırasında da ağaca indisleri yerleştirirken yaptığımız işlemin tersini yapmamız gerekir.

**Dizinin pozitif elemanları ağacın yapraklarına karşılık gelip, sembolü temsil ettiğinden sahip olduğu indis değeri ile işlem yapılır, elde edilen kod değerleri de sağdan sola doğru yazılır:**

```
While indis ≠ 0 do
{
    if indis çift then
                {
                print "1"
                indis = (indis-2)/2 }
                else
                {
                print "0"
                indis = (indis-1)/2 }
}
```

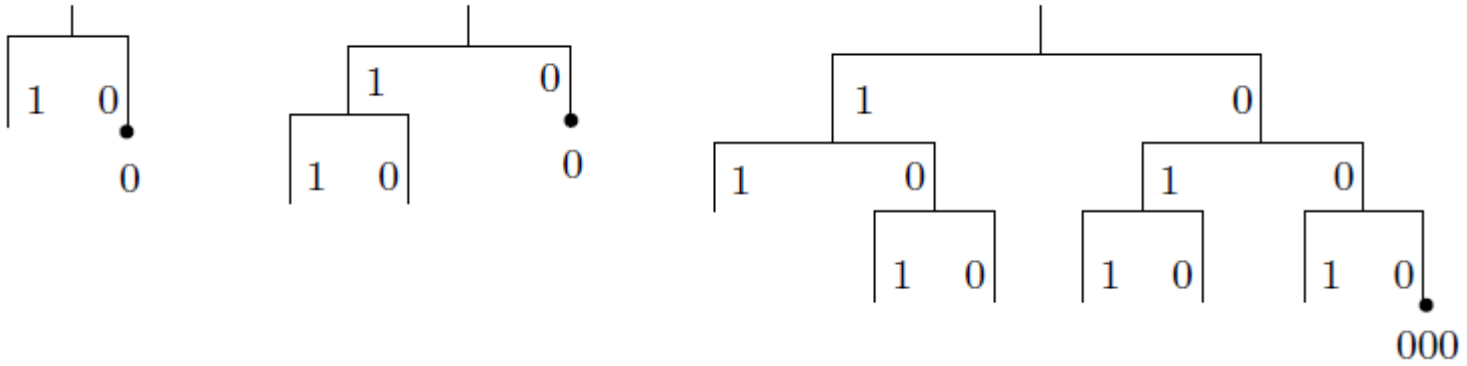
| dizi | indis | kod |
|---|---|---|
| -60 | 0 | |
| -35 | 1 | |
| 25 | 2 | 1 |
| -21 | 3 | |
| 14 | 4 | 01 |
| -13 | 7 | |
| 8 | 8 | 001 |
| 7 | 15 | 0000 |
| -6 | 16 | |
| 4 | 33 | 00010 |
| 2 | 34 | 00011 |

**Statik Huffman Kod** : Bir derlem içerisinde yer alan tüm sembollerin kullanım sıkları çıkarıldıktan sonra, her sembol için Huffman kod değerleri oluşturulur. Gelen her doküman için aynı kod değerleri kullanılır. Doküman içerisindeki sembollerin kullanım sıkları dikkate alınmaz.

**Yarı Dinamik Huffman Kod** : Kodlanacak her doküman üzerinde iki aşamadan oluşan bir işlem yapılır. İlk olarak doküman baştan sona taranarak sembollerin kullanım sıklıkları çıkarılır. İkinci adımda da Huffman kod değerleri elde edilir.

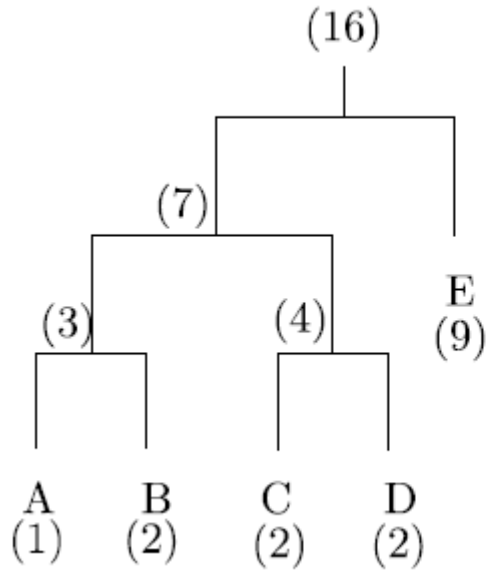
**Dinamik Huffman Kod** : Hızın önemli olduğu uygulamalarda kullanılır.
✓Encoder ve Decoder senkronize çalışarak aynı anda kodlama ağacını oluşturur.
✓Başlangıçta ağaç boştur. Okunan her yeni sembol ile ağaç yeniden oluşturulur.
✓Input stream den ilk sembol okunur ve kodlanmadan output stream yazılır.
✓Sembol ağaca eklenir ve kendisine bir kod atanır.
✓Daha sonraki adımlarda bu sembol ile karşılaşılırsa, önce sembolün kodu gönderilir, sonra da frekans değeri bir artırılır.
✓Decoder'ın bilmesi gereken, gönderilen sembolün kodlanarak mı yoksa kodlanmadan mı gönderildiğidir. Kodlanmamış sembolden önce *escape* kodu gönderilir.
✓Decoder, escape kodundan sonra gelen kodun ASCII koda sahip bir sembol olduğunu anlar.
✓Escape kodun frekans değeri her zaman 1 dir ve değişmez. Ancak, her yeni sembol ağaca eklendikçe kodu değişir.

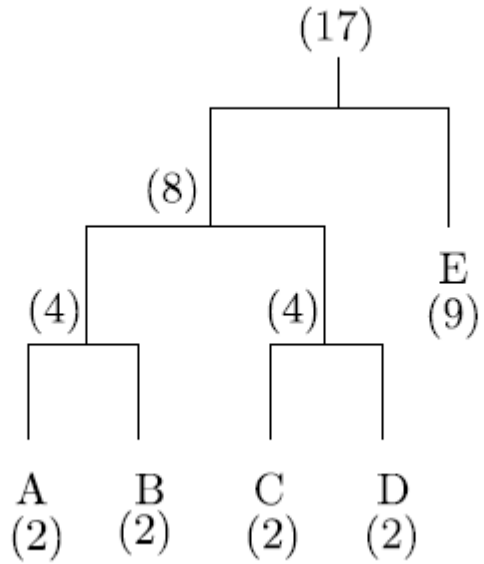
Escape kodu ve ağaç üzerindeki değişimi

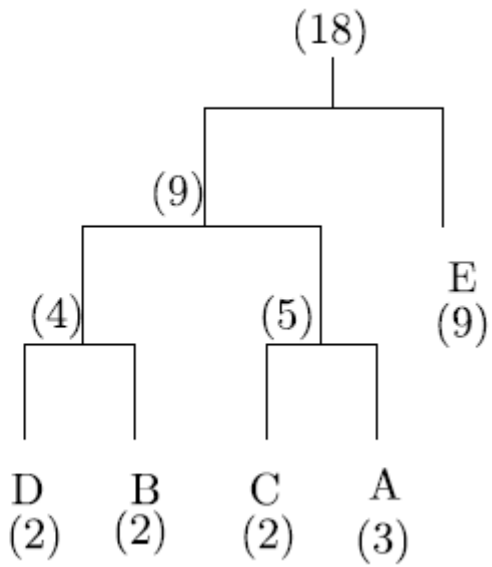



**Dinamik olarak Huffman ağacı nasıl oluşturuluyor ?**

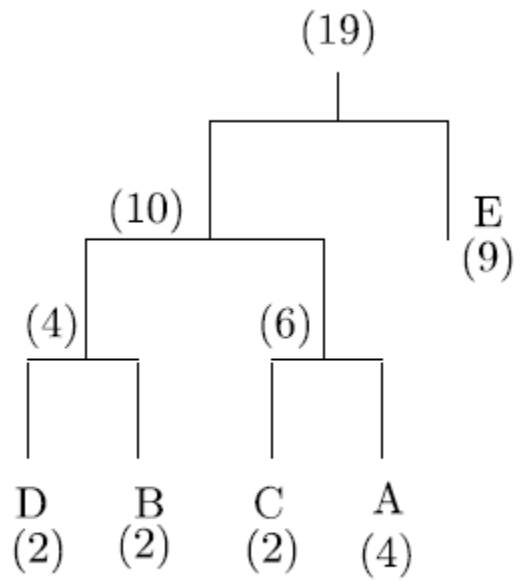
I

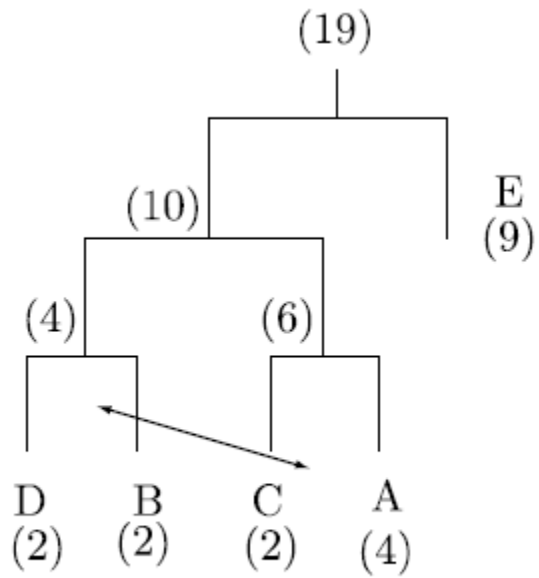

(16)
(7)
(3)
(4)
E
(9)
A
(1)
B
(2)
C
(2)
D
(2)

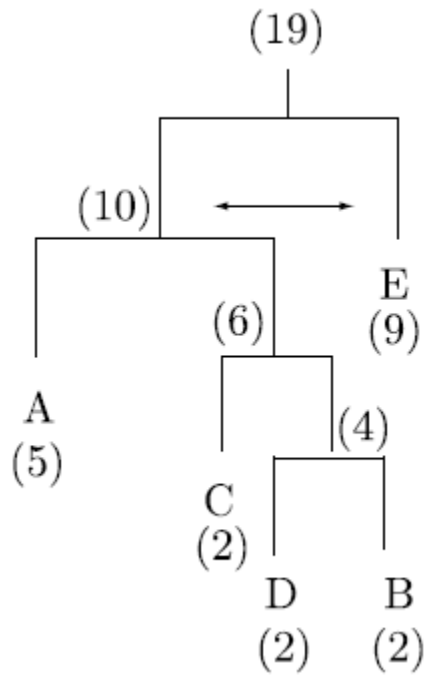

(17)
(8)
(4)
(4)
E
(9)
A
(2)
B
(2)
C
(2)
D
(2)


(18)
(9)
(4)
(5)
E
(9)
D
(2)
B
(2)
C
(2)
A
(3)

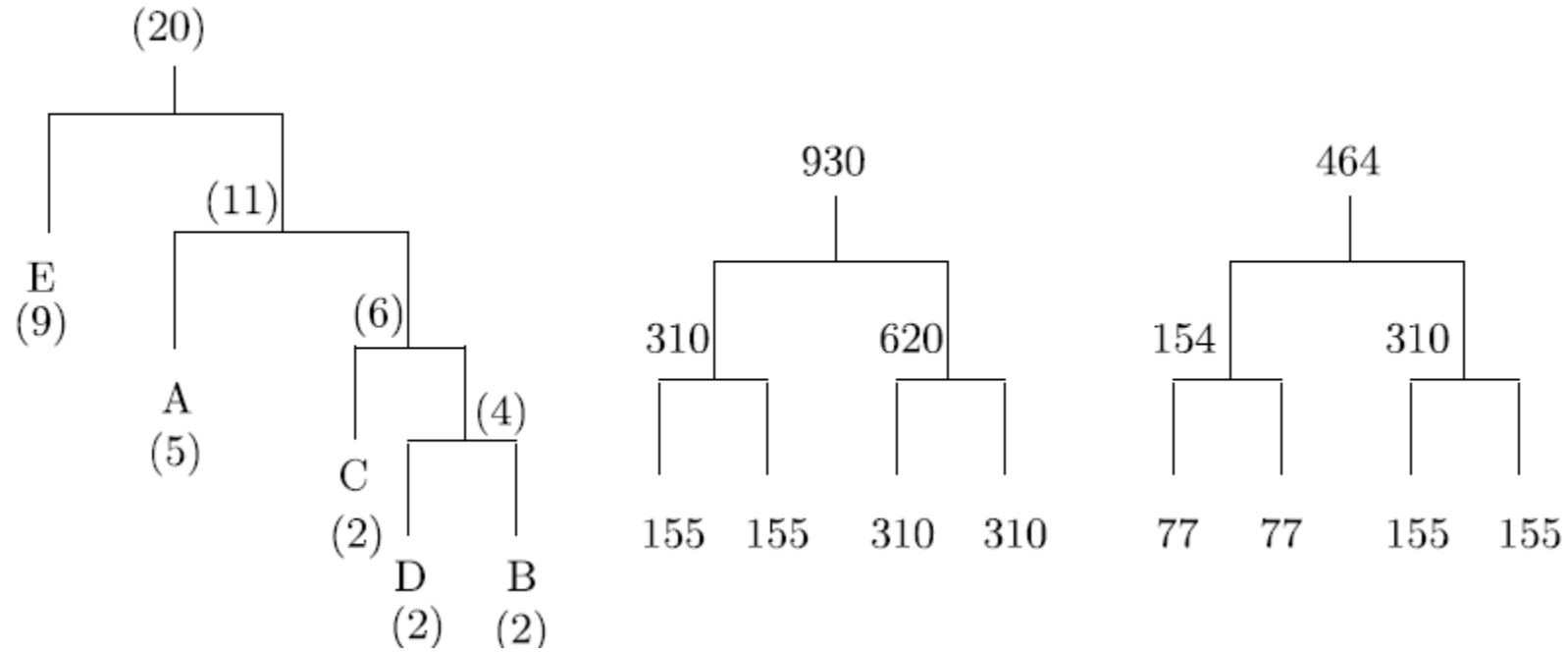
II


(19)
(10)
(4)
(6)
E
(9)
D
(2)
B
(2)
C
(2)
A
(4)


(19)
(10)
(4)
(6)
E
(9)
D
(2)
B
(2)
C
(2)
A
(4)


(19)
(10)
(6)
E
(9)
A
(5)
(4)
C
(2)
D
(2)
B
(2)

III




**Bu algoritmada aksayan taraflar nelerdir ?**

## Sayıcının taşması

Frekans değerinin tutulduğu olan işaretsiz 16 bit olsun. Bu değişkende ($2^{16}$-1=65535) değer tutabiliriz. Taşmanın oluşmaması için kökteki frekans değeri kontrol edilir. Maksimum sayı değerine ulaşıldığında yeniden ölçeklendirme yapılır. Yaprakların değerlerinin yarısı alınır (integer bölme). Ara düğümler ve kök tekrardan hesaplanır.

## Kod taşması

Kodların tutulduğu alan 16 bit ve ağacın seviyesi de 16'dan fazla ise ya bu alan genişletilir ya da linkli liste kullanılır.

## Huffman Algoritmasının Farklı Bir Versiyonu

- Basit, ancak daha az etkili bir yöntemdir
- Eşit olasılıklı, n elemanlı değişken uzunluktaki kodlar için uygundur
- Sembollerin olasılıkları eşit değilse etkili değildir
- nx3 boyutunda bir tablodan oluşup, kolon değerleri sembolün kendisi, sıklığı ve kodudur
- İkinci kolonun değeri değiştikçe satırlar yer değiştirir ancak üçüncü kolon sabit kalır

| Name | Count | Code |
|---|---|---|
| $a_1$ | 0 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 10 |
| $a_3$ | 0 | 110 |
| $a_4$ | 0 | 111 |

| Name | Count | Code |
|---|---|---|
| $a_2$ | 1 | 0 |
| $a_1$ | 0 | 10 |
| $a_3$ | 0 | 110 |
| $a_4$ | 0 | 111 |

| Name | Count | Code |
|---|---|---|
| $a_2$ | 1 | 0 |
| $a_4$ | 1 | 10 |
| $a_3$ | 0 | 110 |
| $a_1$ | 0 | 111 |

| Name | Count | Code |
|---|---|---|
| $a_4$ | 2 | 0 |
| $a_2$ | 1 | 10 |
| $a_3$ | 0 | 110 |
| $a_1$ | 0 | 111 |

Bu yöntemde count değerinde taşma oluşur, bunu çözmek için count değeri yarıya bölünür

# Canonical Huffman Kodlama

- Huffman prefix kodları ile sıkıştırılmış dosyaların başlıklarına kıyasla, geniş alfabeli dosyalarda daha küçük dosya başlıkları oluşturmaya olanak sağlar
- Hızlı kod dönüşüme sahiptir
- Huffman algoritması ile oluşturulamayıp atlanan prefix kodların oluşturulmasına izin verir

## Nasıl Oluşturulur ?

Canonical Huffman kod oluşturma işleminin ilk aşaması Huffman kodlarının oluşturulmasıdır. Alfabedeki her bir karakterin sahip olduğu Huffman kod uzunlukları kullanılarak Canonical Huffman kod oluşturulur.

## Ne işe yarıyor ?

Canonical Huffman kod yöntemiyle kodlanmış veriler için küçük bir başlık alanına ihtiyaç duyulması ve kodların hızlı geri dönüşüm özelliklerinden dolayı, hızlı kod çözme gerektiren uygulama alanlarında kullanılmasına olanak sağlar (sıkıştırılmış ses, görüntü ve arşiv uygulamaları)

## Canonical Huffman kod nasıl oluşturulur ?

- Kodlanacak alfabede yer alan her bir karakter için Huffman prefix kod değeri geleneksel Huffman yöntemi ile oluşturulur
- Prefix kod uzunlukları büyükten küçüğe doğru sıralanır
- En uzun prefix kodun değeri $L_{max}$ ve bu uzunlukla k1 tane prefix kod varsa, $L_{max}$ uzunluğunda 0'dan başlamak üzere k1 tane ardışık binary sayı ile yeni Canonical Huffman prefix kodu üretilir
- $L_{max}$'dan küçük olan bir sonraki uzunluk değeri $L_{max-1}$ ve bu uzunlukta k2 tane prefix kod var ise, bir önceki prefix kod değerinin ilk $L_{max-1}$ biti alınır ve k2 tane yeni Canonical Huffman prefix kodunun herbiri için 1 eklenir
- Bir önceki adımda yapılan işlemler, büyükten küçüğe doğru tüm uzunluk değerleri için tamamlanır

## Örnek

Huffman algoritması kullanılarak {a, b, c, d, e, f, g ve h} alfabesi için elde edilen Huffman kodlarının uzunluk değerleri sırası ile (5, 5, 5, 5, 3, 2, 2, 2) verilmiş olsun. Bu alfabe için hesaplanacak olan Canonical Huffman kodları ne olur ?

$L_{max}$ = 5 k1=4

00000
00001
00010
00011

$L_{max-1}$ = 3 k2=1

00011

```
 000
 +  1
------
 001
```

$L_{max-2}$ = 2 k3=3

001

```
  00        01        10
 +  1      +  1      +  1
------    ------    ------
  01        10        11
```