一阶微分算子

均值产生钝化的效果，微分产生锐化的效果。

在图像处理中应用微分最常用的方法是计算梯度。

（1）梯度法

1）原理与公式

对于图像函数f(x, y)，它在(x, y)处的梯度为$G[f(x,y)]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$

用矢量的幅度代替它：$G[f(x,y)]=\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 或 $G[f(x,y)]=\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$

$\partial f \quad \Delta f \quad f(x+1,y)-f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+1,y)-f(x,y)}{x+1-x} = f(x+1,y)-f(x,y)$$

离散的数字矩阵，用差分来代替微分：
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{f(x,y+1)-f(x,y)}{y+1-y} = f(x,y+1)-f(x,y)$$

$$G[f(x,y)] = |f(x+1,y)-f(x,y)| + |f(x,y+1)-f(x,y)|$$
$$= \left\{[f(x+1,y)-f(x,y)]^2 + [f(x,y+1)-f(x,y)]^2\right\}^{1/2}$$

生成梯度图像：

各点的灰度值等于该点的梯度幅度
$$g(x,y) = G[f(x,y)]$$

突出边界
$$g(x,y) = \begin{cases} L_G & G[f(x,y)] \geq T \\ f(x,y) & 其他 \end{cases}$$

固定边界灰度
$$g(x,y) = \begin{cases} G[f(x,y)] & G[f(x,y)] \geq T \\ f(x,y) & 其他 \end{cases}$$

二值化边界与背景
$$g(x,y) = \begin{cases} L_G & G[f(x,y)] \geq T \\ L_B & 其他 \end{cases}$$

2）示例

3	3	3	3	3	3
3	5	5	5	5	3

0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	4	0

运算：

3	5	9	9	5	3
3	5	9	9	5	3
3	5	5	5	5	3
3	3	3	3	3	3

2	4	4	4	2	0
2	4	0	4	2	0
2	0	4	4	2	0
0	2	2	2	2	0

示例：

$$g(x,y)=G[f(x,y)]$$

（2）单方向的一阶锐化算法

1）原理与模板

单方向的一阶梯度算法是指给出某个特定方向上的边缘信息。

因为图像为水平、垂直两个方向组成，所以，所谓的单方向梯度算法实际上是包括水平方向与垂直方向上的锐化。

水平方向的微分算子: $H=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$, 垂直方向的微分算子 $H=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2）示例

0	0	0	0	0	0

运算：

3	3	3	3	3	3
3	5	5	5	5	3
3	5	9	9	5	3
3	5	9	9	5	3
3	5	5	5	5	3
3	3	3	3	3	3

水平方向

0	-10	-20	-20	-10	0
0	-4	-12	-12	-4	0
0	4	12	12	4	0
0	10	20	20	10	0
0	0	0	0	0	0

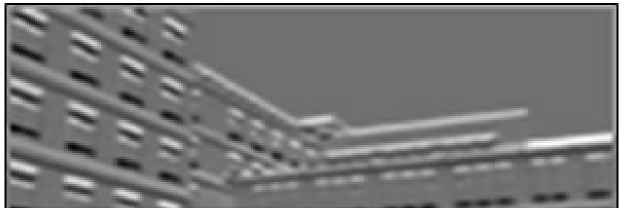
垂直方向

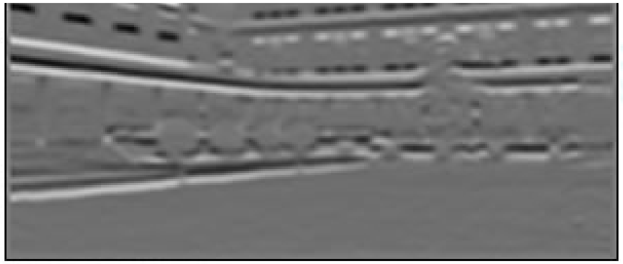
0	0	0	0	0	0
0	10	4	-4	-10	0
0	20	12	-12	-20	0
0	20	12	-12	-20	0
0	10	4	-4	-10	0
0	0	0	0	0	0

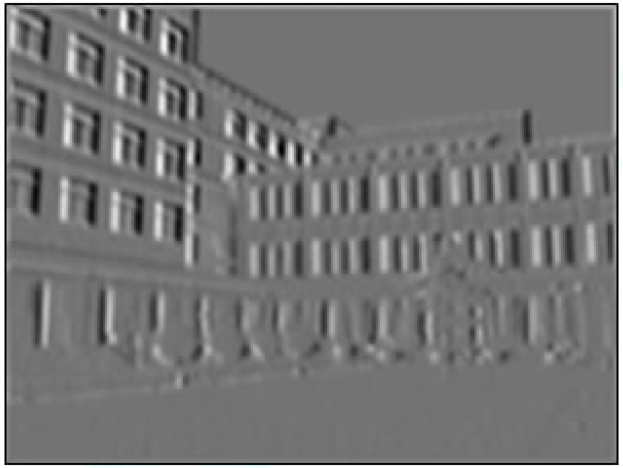
上述运算结果中存在负值，把负值变到有效范围，方法不同，效果不同：

- 整体加一个正整数，以保证所有的像素值均大于零。可以获得类似浮雕的效果。
- 将所有的像素值取绝对值。可以获得对边缘的有方向提取。

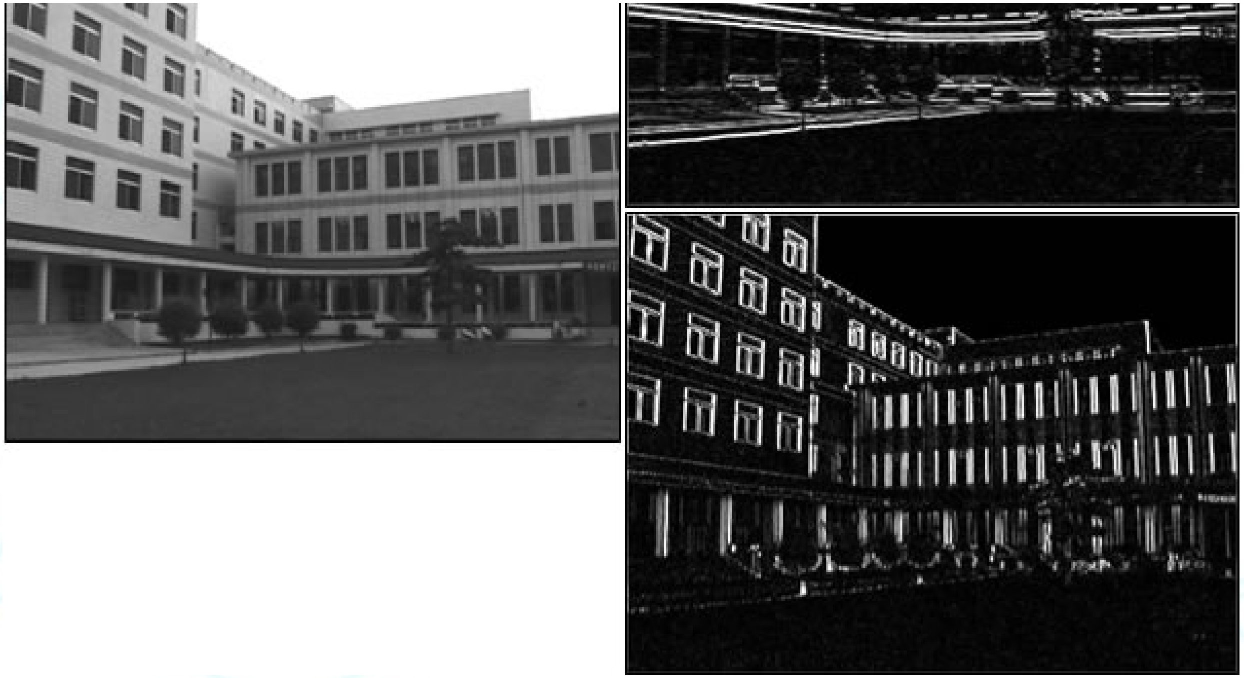
浮雕效果示例：





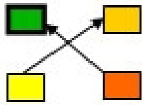


边缘提取效果示例：



（3）Robert算子

$$G[f(x,y)] = |f(x,y) - f(x+1,y+1)| + |f(x+1,y) - f(x,y+1)|$$




（4）Sobel算子

1）公式

$$S_y = \left|f(x-1,y+1)+2f(x,y+1)+f(x+1,y+1)\right| - \left|f(x-1,y-1)+2f(x,y-1)+f(x+1,y-1)\right|$$

$$S_x = \left|f(x+1,y-1)+2f(x+1,y)+f(x+1,y+1)\right| - \left|f(x-1,y-1)+2f(x-1,y)+f(x-1,y+1)\right|$$

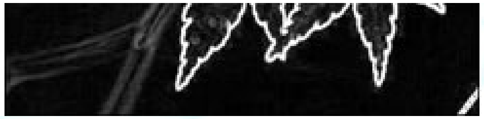
$$g = \left|S_x\right| + \left|S_y\right|$$

2）两个优点

引入平均因素，对图像中随机噪声有一定的平滑作用。
相隔两行或两列求差分，故边缘两侧的元素得到了增强，边缘显得粗而亮。

3）Sobel算子示例





4）Sobel算子扩展

$$H_1=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\0&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\quad H_2=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}\quad H_3=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$H_4=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}\quad H_5=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}\quad H_6=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$$

$$H_7=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-2&0&2\\-1&0&1\end{bmatrix}\quad H_8=\begin{bmatrix}-2&-1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\quad g=\max_i H_i f$$


两种算子检测边缘视觉效果区别不大，但扩展算子检测的边缘具有更精确的方向性，在需要边缘方向信息的情况下，扩展算子应用更广。

（5）Prewitt算子

Prewitt算子与Sobel算子的区别在于模板系数的不同，把模板中间的2变成1，同样具有扩展算子。

$$S_y=\left|f(x-1,y+1)+f(x,y+1)+f(x+1,y+1)\right|$$

$$-\left|f(x-1,y-1)+f(x,y-1)+f(x+1,y-1)\right|$$

$$S_x=\left|f(x+1,y-1)+f(x+1,y)+f(x+1,y+1)\right|$$

$$-\left|f(x-1,y-1)+f(x-1,y)+f(x-1,y+1)\right|$$

$$g=\left|S_x\right|+\left|S_y\right|$$

Priwitt算子扩展

$$H_1=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad H_2=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad H_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$H_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\quad H_5=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\quad H_6=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$H_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_8 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad g = \max_i H_i f$$