

Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий, механики и оптики

На правах рукописи

Капитанюк Юрий Андреевич

**Траекторное управление многоканальными
динамическими объектами**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в технических системах)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук
Чепинский Сергей Алексеевич

Санкт-Петербург – 2014

Содержание

Введение	4
Глава 1. Постановка задачи траекторного управления. Анализ существующих решений	
1. Обзор методов планирования траекторий движения мобильных робототехнических систем	11
2. Обзор методов синтеза алгоритмов управления траекторным движением	16
Глава 2. Планирование траекторий движения мобильных робототехнических систем	
1. Введение	20
2. Постановка задачи	21
3. Планирование траектории на основе базовых элементов	23
4. Заключение	40
Глава 3. Алгоритмы траекторного управления	
1. Введение	42
2. Управление пространственным движением точечной массы	43
3. Стабилизация угловой ориентации	56
4. Управление неполноприводным твердым телом	66
5. Заключение	80
Глава 4. Система траекторного управления роботом с ролико-несущими колёсами	
1. Введение	82
2. Техническое описание	82

3.	Математическое описание	85
4.	Движение вдоль прямой	89
5.	Движение вдоль окружности	90
6.	Движение вдоль криволинейной траектории	91
7.	Движение вдоль составной кривой	92
8.	Заключение	94
Заключение		95
Литература		98

Введение

Современное развитие науки и техники позволили совершить огромный скачок в развитии мобильной робототехники. Прогресс в областях энергоэффективности, вычислительной технике, датчиков и различных измерительных устройств позволил создать действительно автономные системы. Кроме того, в морской и авиационной сфере активно стали внедряться интегрированные системы управления движением, позволяющие автоматизировать некоторые задачи. Одним из основных режимов работы таких систем является движение вдоль заданного маршрута. Прогресс в области техники ведёт за собой повышению требований к таким системам. Одним из самых важных требований является точность движения. С точки зрения повышения точности одним из самых перспективных направлений развития являются методы траекторного управления на основе стабилизации геометрических многообразий в пространстве выходов объекта управления, развитию которых посвящена данная работа.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка новых методов планирования траекторий и управления мобильными робототехническими системами на основе стабилизации целевых многообразий в пространстве выходов объекта управления. А так же проведение экспериментальных исследований полученных алгоритмов применительно к мобильному роботу “Robotino”.

В процессе достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Предложен методы планирования траектории движения на основе базовых элементов, представленных в классе неявных функций, обеспечивающих C^2 -гладкость результирующего пути.

2. Разработаны алгоритмы траекторного управления, относительно стационарно заданных траекторий и траекторий, заданных относительно подвижных внешних объектов, не требующие измерение вектора линейных скоростей.
3. Решена задача разработки алгоритмов траекторного управления мобильной робототехнической системой “Robotino”. Проведены эксперименты на реальном мобильном роботе.

Методы исследования. При получении теоретических результатов использовались метод функций Ляпунова, методы дифференциальной и аналитической геометрии, различные методы классической механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, линейной алгебры, численных методов.

Экспериментальные результаты были получены с использованием современного программного обеспечения – пакетов Matlab и Simulink, библиотеки для численных расчётов Numpu, системы компьютерной алгебры Mathematica; технического оснащения – робототехнической установки “Robotino”, оснащенной системой локальной навигации NorthStar, предоставленной кафедрой Систем Управления и Информатики Университета ИТМО.

Научная новизна.

В рамках данной работы развивались методы планирования траектории и синтеза регуляторов на основе методологий преобразования к задачно-ориентированным координатам, разрабатываемой И.В. Мирошником [1, 11, 12, 37, 56]. На основании проведённых исследований были разработаны методы планирования траектории движения на основе базовых элементов, представленных в классе неявных функций, обеспечивающих C^2 -гладкость результирующего пути, что, насколько известно автору, сделано впервые. Разработаны методы синтеза законов управления пространственным траек-

торным для полноприводных и неполноприводных объектов управления для стационарной и нестационарной постановки траекторной задачи. Разработанные регуляторы в отличии от ранее изученных [1, 12, 56] не требуют измерения вектора линейных скоростей.

Практическая значимость. Практическая значимость полученных методов управления механическими системами обусловлена развитием промышленных робототехнических систем. Полученные методы могут быть полезны при проектировании алгоритмов управления станками с числовым программным управлением, шагающими роботами, летательными аппаратами и другими робототехническими устройствами, решающими в процессе своей работы траекторные задачи.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Метод планирования траекторий на основе базовых элементов, выраженных в виде неявно заданных функций, обеспечивающий C^2 -гладкость
2. Алгоритмы синтеза траекторных регуляторов на основе стабилизации заданных геометрических многообразий в пространстве выходов объекта управления не требующие измерения линейных скоростей
3. Экспериментальные исследования полученных теоретических результатов в задаче управления мобильной робототехнической системой “Robotino”.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- I Конгресс молодых ученых. Всероссийский конгресс, Санкт-Петербург, 2012.

- Конференция "Навигация и управление движением XIV конференция молодых ученых, Санкт-Петербург, 2012.
- Информационные технологии в управлении(ИТУ-2012), Санкт-Петербург, 2012
- II Всероссийский Конгресс молодых ученых, Санкт-Петербург, 2013.
- Конференция "Навигация и управление движением XV конференция молодых ученых, Санкт-Петербург, 2013.
- 19th IFAC World Congress. Cape Town, South Africa. 2014.

Полученные в ходе научно-исследовательской работы алгоритмы управления были апробированы на мобильном роботе “Robotino”, предоставленном кафедрой Систем Управления и Информатики Университета ИТМО.

Публикации. Автор диссертационной работы имеет 10 публикаций.

1. Капитанюк, Ю. А. Алгоритм управления надводными судами с активным демпфированием волновых воздействий [Текст] / Ю. А. Капитанюк // Навигация и управление движением Материалы докладов XII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». Науч. редактор О.А.Степанов, под общей редакцией В. Г. Пешехонова. Санкт-Петербург, 2010. С. 214-221. – 0,5/0,5 п.л.
2. Капитанюк, Ю. А. Подвижная балансирующая научно-исследовательская платформа [Текст] / Ю. А. Капитанюк, С. В. Шаветов // Навигация и управление движением. Материалы XIV конференции молодых ученых. – 2012. – С. 363-369. – 0,4/0,2 п.л.
3. Капитанюк, Ю. А. Траекторное управление мобильным роботом в изменяющейся среде [Текст] / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский //

Навигация и управление движением материалы докладов XIV Конференции молодых ученых. под общей редакцией В.Г. Пешехонова и О.А. Степанова (научный редактор). — 2012. — С. 506–512. – 0,4/0,3 п.л.

4. Капитанюк, Ю. А. Управление мобильным роботом по заданной кусочно-гладкой траектории [Текст] / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Гироскопия и навигация. — 2013. — № 2. — С. 42–52. – 0,7/0,6 п.л.
5. Капитанюк, Ю. А. Задача управления многоканальной динамической системой по кусочно-гладкой траектории [Текст] / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. - 2013. — Т. 56, № 4. — С. 65–70. – 0,4/0,3 п.л.
6. Капитанюк, Ю. А. Разработка системы траекторного управления мобильным роботом с роликонесущими колёсами [Текст] / Ю. А. Капитанюк, А. А. Капитонов, С. А. Чепинский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — № 2(90). — С. 65–71. – 0,4/0,3 п.л.
7. Капитанюк, Ю. А. Траекторное управление твёрдым телом относительно подвижного объекта [Текст] / Ю. А. Капитанюк, Д. А. Хвостов, С. А. Чепинский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — № 2(90). — С. 60–64. – 0,3/0,2 п.л.
8. Технология Lego Mindstorms NXT в обучении студентов основам адаптивного управления [Текст] / Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А. и др. // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – №1 (71). – С. 103-108. – 0,4/0,13 п.л.
9. Kapitanyuk, Y. Geometric path following control of a rigid body based

on the stabilization of sets [Текст] / Y. Kapitanyuk, S. Chepinskiy, A. Kapitonov // 19th IFAC World Congress. — 2014. — P. 7342-7347. — 0,4/0,3 п.л.

10. Using of LEGO Mindstorms NXT Technology for Teaching of Basics of Adaptive Control Theory [Текст] / Alexey Bobtsov, Anton A Pyrkin, Sergey A Kolyubin, etc. // печатная Proceedings of the 18th IFAC World Congress. — 2011. — P. 9818-9823. — 0,4/0,13 п.л.

Личный вклад автора Автором диссертационной работы были проведены теоретические и экспериментальные исследования в задачах планирования траекторий и синтеза законов управления для мобильных робототехнических систем.

Структура и объем диссертации Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы.

Глава 1

Постановка задачи траекторного управления.

Анализ существующих решений

Задачи управления пространственным движением механических систем можно условно разделить на две подгруппы. К первой подгруппе относятся задачи обеспечения заданного положения в пространстве. К таким системам, например, относятся системы динамического позиционирования надводных судов, системы стабилизации положения приемных антенн и тому подобное. Общим условием для них является то, что эти практические задачи формулируются с теоретической точки зрения как задачи стабилизации. В противовес этому подгруппе есть круг задач, в которых необходимо обеспечить заданное движение в пространстве. Эти задача формулируется уже как задача слежения. Это разделение весьма условно, но оно позволяет понять основную суть. Задача слежения подразумевает под собой какой-то эталонный сигнал, который должен быть повторён. Для задач управления пространственным движением таким сигналом является траектория движения - путь следования который должен проделать управляемый объект. Совокупность заданной траектории и закона управления и управляемого объекта, обеспечивающего движение вдоль неё будем называть задачей траекторного управления. Так как в качестве объектов управления выступают механические системы, передвигающиеся в трёхмерном пространстве, то их можно условно назвать многоканальными динамическими системами. Вот так и родилось название данной диссертационной работы. Если быть точнее, то в данной работе в качестве объектов управления рассмотрен один из простейший классов механических систем - мобильные системы. Это могут быть мобильные роботы,

беспилотные летательные аппараты, интегрированные системы управления движением авиационного и морского назначения и т.п. Так как, как говорилось выше, задача траекторного управления представляет тесную связь траектории, закона управления и объекта управления, то далее мы рассмотрим основные результаты, полученные в области планирования траекторий, последние наработки в области синтеза регуляторов и типичные примеры объектов управления.

1. Обзор методов планирования траекторий движения

мобильных робототехнических систем

Для начала рассмотрим задачу планирования траекторий движения мобильных робототехнических систем. Данная область знания развивается уже сравнительно давно и имеет в своем арсенале достаточно богатый инструментарий для решения практических задач [48]. Первоначально, работы в данном направлении были сосредоточены на методах анализа и синтеза траекторий для автоматизированных станков на производстве. Совместно с системами числового программного управления данные разработки позволили поднять эффективность и точность обработки деталей. Следующим значимым этапом стало бурное развитие промышленной робототехники. Ярким представителем данного класса устройств стали роботы-манипуляторы, имеющие сложные кинематические схемы с множеством степеней свободы. Эффективное использование таких систем потребовало новых подходов и дало сильный толчок к дальнейшим исследованиям, которые продолжаются до сих пор. Вообще говоря, сам термин "планирование траекторий" в современном сознании связан в первую очередь с манипуляционными роботами [20, 68, 70].

Отдельным направлением развития стали методы планирования траекторий

для мобильных систем. Одной из самых значимых работ в данном направлении была статья [30], в которой Л.Дубинс поставил задачу синтеза C^1 -гладкой траектории, наложив ограничение на максимальную кривизну. Позже эта задача была сформулирована как задача оптимального управления, решение которой имеет ясный геометрический смысл, что оптимальная по скорости траектория между двумя произвольными положениями на плоскости строится из отрезков прямых и дуг окружностей. Этот результат сильно повлиял на дальнейшее развитие исследований. Несмотря на детальную проработанность данной задачи, современные исследователи по-прежнему в своих работах используют разнообразные вариации данного подхода ввиду его простоты, ясности и содержательности [3, 15, 23, 36, 61, 68, 72].

Если сравнивать представленные выше направления в методологии планирования траекторий, то становится очевидным, что несмотря на общую основу, методы планирования пути движения для мобильных систем имеют свою специфику. Размеры рабочей области роботов-манипуляторов, автоматизированных обрабатывающих станков и прочего технологического оборудования ограничены кинематическими схемами и геометрическими размерами самих устройств, в то время как для мобильных систем такими ограничениями являются энергетические и коммуникационные ресурсы, позволяющие работать на расстояниях в десятки километров. Исходя из этого, за исключением специфических задач, для мобильных систем участки прямолинейного движения преобладают над участками маневрирования, поэтому траектория следования задается с помощью реперных точек (way points в английской терминологии), которые, как правило, привязываются к географическим координатам. Необходимо заметить, что для сухопутных роботов, работающих в ограниченном пространстве, все возможные трассы следования можно задать заранее, с помощью специальной разметки или кабельных линий, что превращает задачу в чисто инженерно-техническую. В данной работе акцент

будет делаться на разработку алгоритмов управления, в которых траектория задается аналитически. Яркими примерами таких систем являются морские подвижные роботы и беспилотные летательные аппараты.

Как было указано выше, основным методом задания пути движения для мобильных систем являются реперные точки. В свою очередь, задача планирования траектории ставиться, как задача синтеза совокупности функций, геометрически связывающих реперные точки в определённом порядке. Естественно, что в для такой постановки, было разработано множество разнообразным методов решения. Чтобы как-то охарактеризовать данные методы можно начать с конечного вида получаемого результата. В зависимости от постановки задачи, можно получить аналитическое представление траектории в виде одной гладкой функции или в виде кусочно-гладкой. Данное разделение является весьма условным, так как для упрощения описания получившегося решения можно декомпозировать большую и сложную исходную задачу на совокупность простых подзадач и получить результирующее описание в виде кусочно-гладкой функции, но в данном контексте имеется ввиду, что кусочно-гладкое представление характеризуется тем, что анализируются именно участки или между заданными реперными точками, которые формируют "куски" результирующей функции. Если класс функций, применяемых для описания пути движения ограничен, то можно назвать данный подход как метод планирования траектории на основе базовых элементов. Забегая вперёд, можно обозначить, что в данной работе исследуется именно задача синтеза кусочно-гладкого описания в классе неявных функций. Метод представления пути движения в форме единой функции, в свою очередь, подразделяется на две подгруппы: подходы основанные на интерполяции [22, 25, 36, 44, 45, 69] и подходы основанные на аппроксимации [2, 16, 35, 57, 66, 77]. Исходя из названий, основное различие в этих подходах заключается в том, что проходит или нет результирующая траектория через реперные точки или нет. Как

правило, в интерполяционном подходе используют разнообразные сплайны не менее третьей степени. В аппроксимационных методиках используются как сплайны, так и кривые Безье. В аппроксимационных можно отдельно выделить работы [10, 18], в которых авторы работают с неявным представлением кривых. Это можно объяснить тем, что в этих работах синтезируются законы управления на основе методологии стабилизации геометрических многообразий в выходном пространстве объектов управления, схожие с тем, которые разрабатываются и в данной работе.

Второй подход, основанный на синтезе гладких участков между заданными реперными точками, или метод планирования траектории на основе базовых элементов в свою очередь делится на подгруппы, исходя из разнообразия типов функций, используемых при синтезе. Наиболее простым случаем является использование для соединения реперных точек отрезков прямых [23, 34, 36, 72]. Данный подход отличается предельной простотой, но формирует лишь C^0 -гладкую кривую. Более совершенным методом планирования траектории является использование отрезков прямых и дуг окружностей (см. рис. 1.1). [7, 8, 23, 36, 42, 43, 47, 61, 72]. Данный подход позволяет синтезировать C^1 -гладкую кривую (см. рис. 1.2), и обеспечивает лучшую точность следования вдоль заданного маршрута, но по-прежнему, остается физически нереализуемой, вследствие скачка кривизны при переходе от прямого участка к круговому, но, несмотря на это, данный подход получил самое широкое распространение на практике вследствие своей простоты. Для того, чтобы синтезировать траекторию движения с гладкостью C^2 и выше отрезки прямых и дуги окружностей дополняют участками перехода, в виде отрезков разнообразных спиралей [24, 28, 38, 51, 52, 67, 69, 74, 75]. Также для этих целей возможно использования сплайнов или кривых Безье [2, 22, 35, 69, 77]. Необходимо обратить внимание на следующий нюанс. Как правило, за исключением редких случаев, траектории синтезируются в виде параметрических

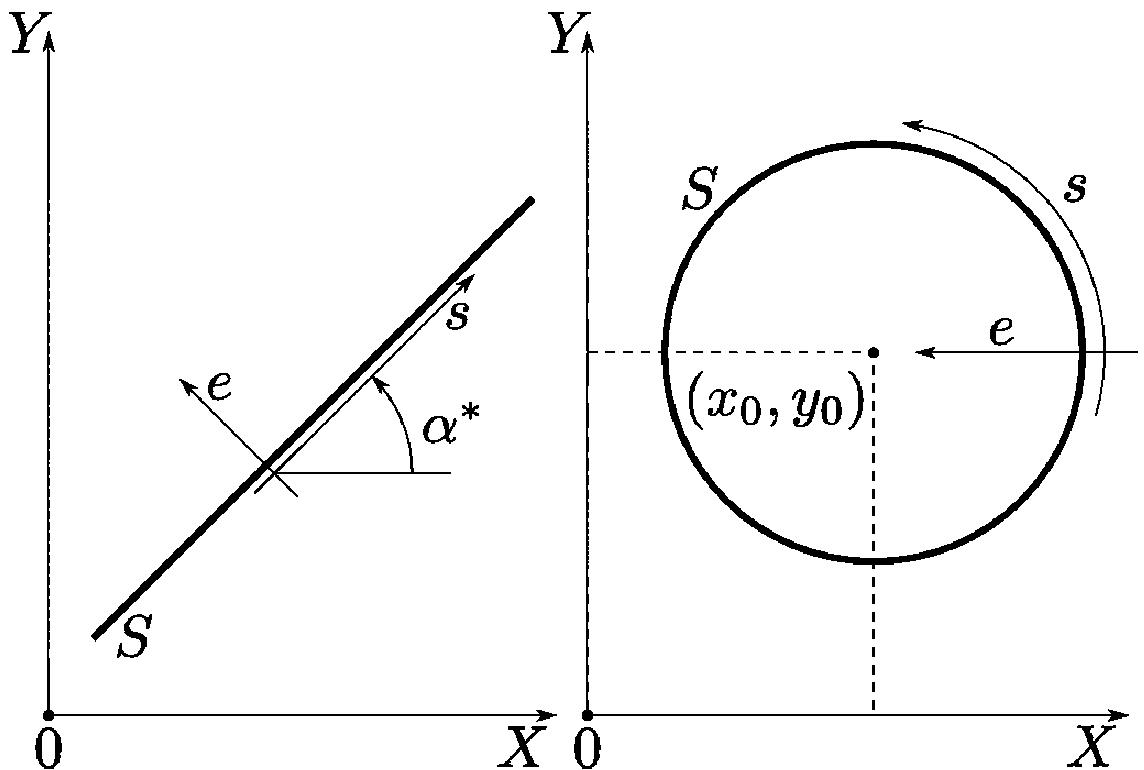


Рис. 1.1. Базовые элементы

функций. Такой подход численно эффективен и обеспечивает компактную форму представления, но появляется серьёзный недостаток с точки зрения синтеза алгоритмов управления а именно сопоставление своей позиции в пространстве с позицией на кривой. На практике это решается тем, что вдоль траектории движения запускается виртуальная цель("virtual target"), к которой притягивается объект управления или же использование разнообразных методов оптимизации для поиска ближайшей точки. С этой позиции намного удобнее использовать для задания траектории неявные функции, которые образуют линии уровня в рабочем пространстве и мы всегда знаем нашу текущую позицию относительно заданной кривой, но, сложность аналитического представления неявных кривых произвольного вида сильно ограничивают использование этого метода на практике. На этом, обозначив основные, направления развития методов планирования траектории перейдём к рассмотрению подходов к построению алгоритмов управления.

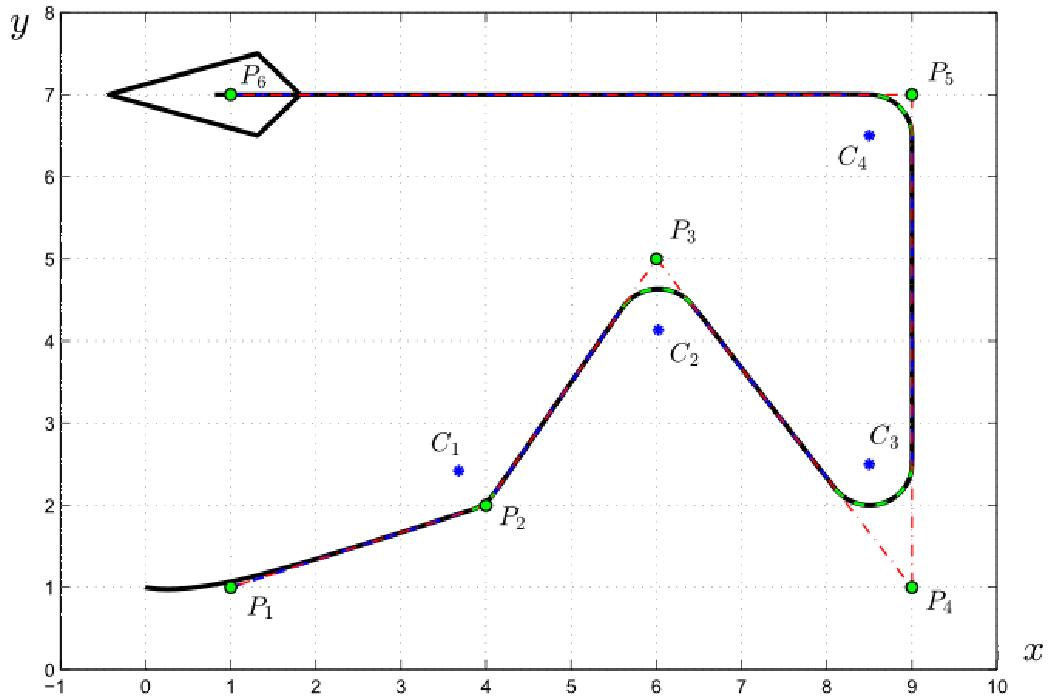


Рис. 1.2. C^1 - гладкая траектория

2. Обзор методов синтеза алгоритмов управления

траекторным движением

Теперь рассмотрим основные методы построения алгоритмов управления траекторным движением. Вообще говоря, исторически сложилось, что первоначально траекторные задачи формулировались как задачи слежения. Точка, которая характеризовала желаемую позицию, двигалась вдоль заданной траектории, а регулятор вырабатывал управляющее воздействие, чтобы свести невязку между текущим положением и заданным к нулю. В зависимости от того, как параметризовалась желаемая траектория движения, выделилось два направления развития. Для первой группы характерно параметризация траектории временем [49, 68, 70], то есть путь движения задавался в виде:

$$S : x(t), y(t), z(t).$$

В работе [17], было показано, что такая формулировка задачи может привести к ухудшению качества регулирования при наличие у объекта управления неустойчивой нуль-динамики. Эти ограничения можно преодолеть, если для параметризовать желаемую траекторию каким-либо параметром, к примеру, ей длиной. Таким образом путь движения задается в виде:

$$S : x(s), y(s), z(s),$$

где s - некоторый параметр. Это определило не только развитие методов управления, но и сильно повлияло на методы планирования траекторий, так как для такого подхода желательно получить траекторию сразу в виде параметризованной параметрической кривой. На текущий момент этот подход остается доминирующим в области управления движением и получил множество различных вариаций. Одним из самых популярных стал подход названный LOS(Line-Of-Sight) [27, 28, 36] основанный на формализации действий рулевого при управлении судном. Подход к построению систем управления в виде следящей системы достаточно хорош, он имеет низкую алгоритмическую сложность, хорошее качество регулирования, но не обеспечивает свойства инвариантности траектории. Чтобы добиться этого свойства появились альтернативные подходы к задаче синтеза законов управления траекторным движением. Этот подход основан на стабилизации геометрических многообразий в пространстве выходов объекта управления. Такой подход формулирует задачу траекторного управления как задачу стабилизации аттрактора в пространстве выходов, описываемого уравнением заданной кривой (см. рис. 1.3). Именно поэтому такие методы работают с представление траектории движения в виде неявных кривых, задающих уравнение связи выходов.

Первоначально, такая постановка задачи была сделана в работе [21], где она использовалась для стабилизации колебаний. В Данный подход нашёл развитие в работах отечественных авторов Колесникова А.А и др. [10], пред-

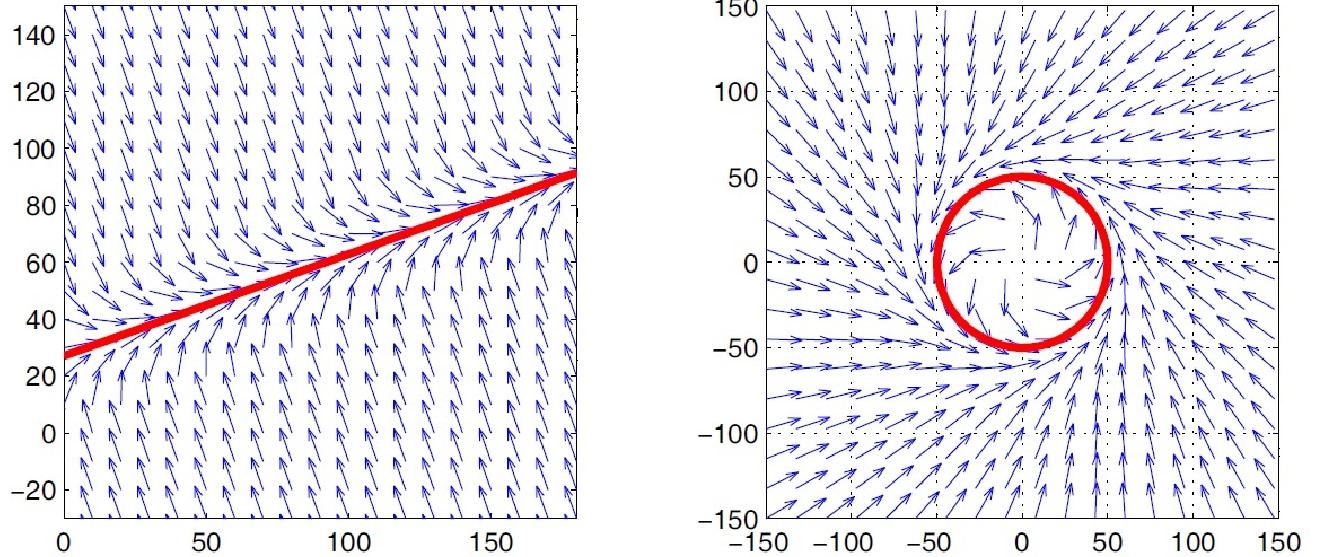


Рис. 1.3. Траектория как аттрактор

ложившего концепцию синергетического анализа и синтеза объектов управления, в работах И.В.Мирошникова [1, 11, 12, 37, 53–56], разработавшего методологию на основе дифференциально-геометрического подхода и метода преобразования моделей к задачно-ориентированным координатам. Именно данный подход был взят за основу тех результатов, которые получены в этой работе [4–8, 46, 47]. Из последних актуальных зарубежных работ можно выделить работы канадских учёных [18, 19, 39, 58] в области построения траекторных регуляторов на основе трансверсально линеаризации. При определённых условиях, данный подход даёт такие же результаты, как и метод задачно-ориентированных координат. Он базируется на преобразовании исходной динамики объекта управления на трансверсальную и тангенциальную компоненты и дальнейшем независимым управлением каждой частью. Ещё одним развивающимся направлением является стабилизация множеств на основе пассивификации [31–33, 64].

Второй задачей, рассматриваемой в данной работе является задача траекторного управления относительно внешних подвижных объектов [13], явля-

ющаяся естественным расширением обыкновенной задачи на случай нестационарной траектории. Данная задача отличается тем, что траектория задается в подвижном базисе связанном с целью, которую нам надо отслеживать. Подобным образом можно формализовать различные актуальные задачи, стоящие перед учёными и инженерами. К примеру, задача объезда нестационарных препятствий, задача сопровождения летательным аппаратом наземного объекта, разнообразные задачи управления многоагентными системами при рассмотрении относительной динамики и т.п. Вообще говоря, задача управление относительно внешних подвижных объектов в последнее время, так как современное развитие мобильной робототехники и разнообразных датчиков позволяют реализовать такие системы в железе и на них появляется спрос в промышленности. Как правило, для решения таких задач также используются, в основном, методы синтеза регуляторов, как следящей системы [41, 59, 60, 63], но также находят свое место методы основанные на стабилизации многообразий [5, 6, 13, 62]

Глава 2

Планирование траекторий движения мобильных робототехнических систем

1. Введение

В главе 1 были рассмотрены широко используемые методы планирования траекторий мобильных робототехнических систем. Проанализированы методологические подходы, их достоинства и недостатки. Данная глава посвящена одному из широко используемых на практике методу планирования траектории на основе базовых элементов. Он позволяет построить траекторию движения мобильных робототехнических систем достаточной гладкости, обеспечивая при этом простоту аналитического представления. Вследствие рассматриваемого в данной диссертации подхода к синтезу траекторных алгоритмов управления на основе стабилизации многообразий в выходном пространстве объекта управления задача планирования траектории формулируется как задача поиска таких многообразий из класса неявных функций. Предложен метод планирования траекторий движения робототехнических систем на основе базовых элементов, обеспечивающих второй порядок гладкости, представленных в виде неявных функций, таких как отрезок прямой, дуга окружности и участки перехода между ними в виде ветвей кубической параболы.

2. Постановка задачи

Для начала рассмотрим случай планирования пути на плоскости. Будем считать, что траектория движения задается с помощью реперных точек $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), \dots, p_n = (x_n, y_n)$ в правосторонней декартовой системе координат X_IY_I (см. рис. 2.1). Обозначим через букву S итоговую траекторию движения, построенную на основе заданных реперных точек. Определим максимальное условие на кривизну траектории $\xi(x, y)$ в виде:

$$\xi(x, y) \leq \xi_{max} = \frac{1}{R_{max}}, \quad (2.1)$$

где ξ_{max} - максимально допустимая кривизна траектории, определяемая физическими особенностями объекта управления и R_{max} - соответствующий максимальный радиус кривизны.

Таким образом можно сформулировать задачу:

Задача 2.1. Необходимо найти C^2 -гладкое аналитическое описание траектории движения мобильной робототехнической системы на плоскости S , описываемое в терминах неявных функций с и ограничением на максимальную кривизну траектории (2.1).

Необходимо отметить, что данная постановка задачи рассмотрена во многих работах и хорошо изучена. Новизна данного исследования заключается в том, что результирующее описание должно быть представлено в виде неявных функций. Вообще говоря, существует несколько подходов для перехода от параметрического вида к неявному изложенные в работах [26, 29, 40, 65, 71, 76]. Одним из таких методов, получивший широкое распространение, является метод с использованием матрицы Сильвестра [76].

Данная задача формулируется следующим образом: Пусть задано парамет-

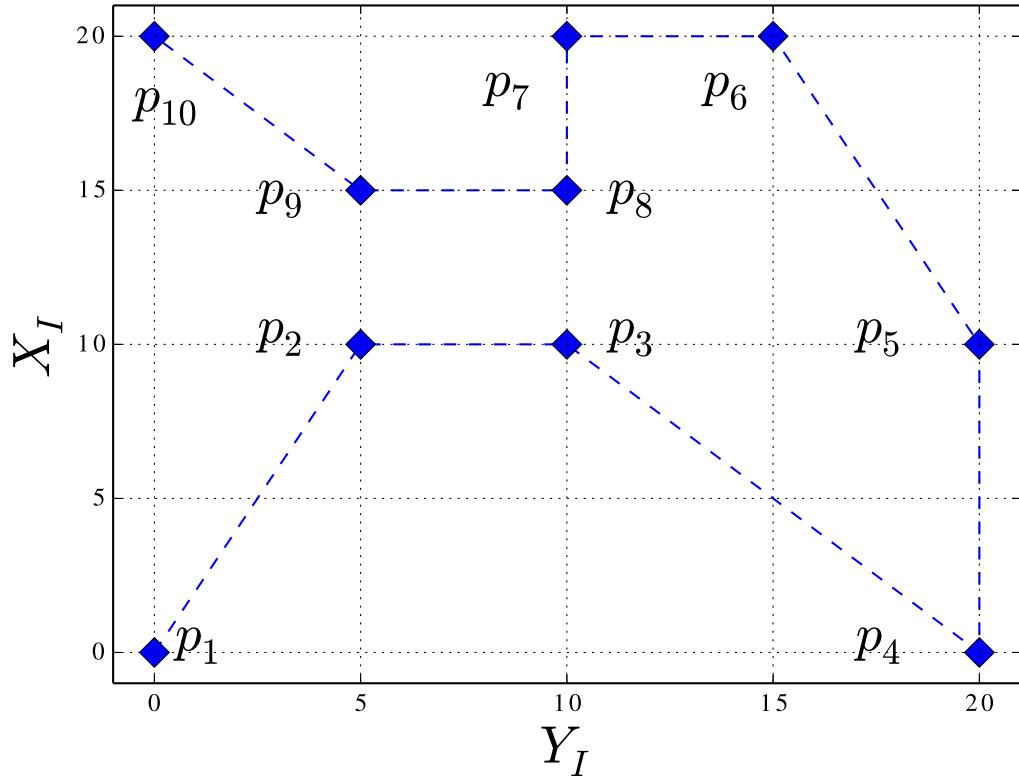


Рис. 2.1. Пример задания траектории с помощью реперных точек p_1, p_2, \dots, p_{10}

рическое представления кривой на плоскости заданное с помощью двух полиномов степени $n \geq 1$ и $m \geq 1$:

$$x(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.2)$$

$$y(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0, \quad (2.3)$$

где s - параметр. Тогда неявное описание может быть найдено из вычисления выражения:

$$\det S = 0, \quad (2.4)$$

где S - матрица Сильвестра вида:

$$S = \begin{bmatrix} a_n & \dots & a_1 & a_0 - x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & a_1 & a_0 - x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & \dots & a_1 & a_0 - x \\ b_m & \dots & b_1 & b_0 - y & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 - y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_m & \dots & b_1 & b_0 - y \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Это достаточно удобный метод получения неявного описания кривых, но для высоких порядков n и m получаются достаточно сложные и громоздкие выражения, которые сильно ограничивают данный метод для практических применений, поэтому наши дальнейшие рассуждения будут посвящены методу планирования траектории на основе базовых элементов, позволяющему получить достаточно компактное представление и при этом обеспечить выполнение поставленной задачи.

3. Планирование траектории на основе базовых

элементов

Мы начнем рассмотрение предлагаемого методики с рассмотрения прошлого случая планирования траектории на основе отрезков прямых и затем будем постепенно вводить новые базовые элементы. Как было сказано выше, исходные реперные точки $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), \dots, p_n = (x_n, y_n)$ заданы в правосторонней декартовой системе координат X_IY_I . Для рассмотрения методики соединения точек нам не нужно использовать для анализа

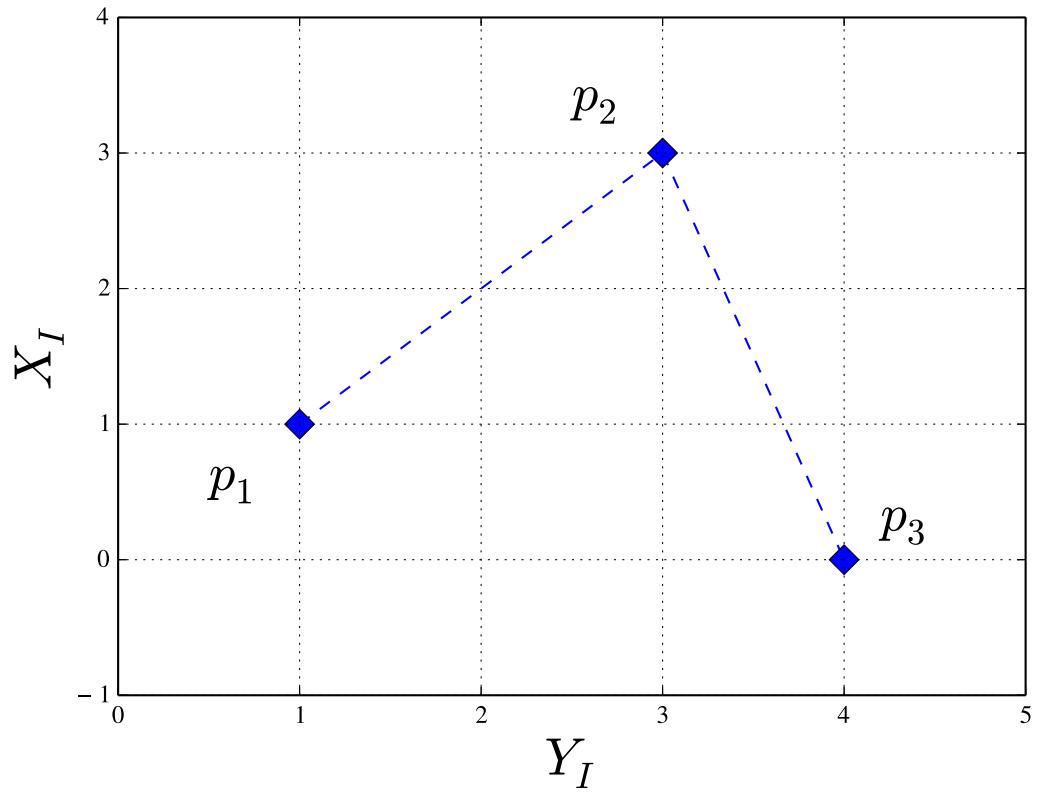


Рис. 2.2. Исходная "задача о трёх точках"

все точки сразу, а достаточно рассмотреть три ближайших. Результирующая задача в свою очередь сводится к итеративному обходу всех точек по тройкам и "склеивание" результатов. Назовём данную подзадачу как "задача о трёх точках" (см. рис. 2.2).

Для упрощения дальнейших рассуждений введём в рассмотрение матрицу поворота $R_I^P \in SO(2)$, описывающую переход из глобальной системы координат X_IY_I в локальную, задачно-ориентированную X_PY_P , связанную с точкой $p1 = (x_1, y_1)$, в виде:

$$R_I^P(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix},$$

где ψ - угловая ориентация первого участка пути $[p_1, p_2]$, которая находится

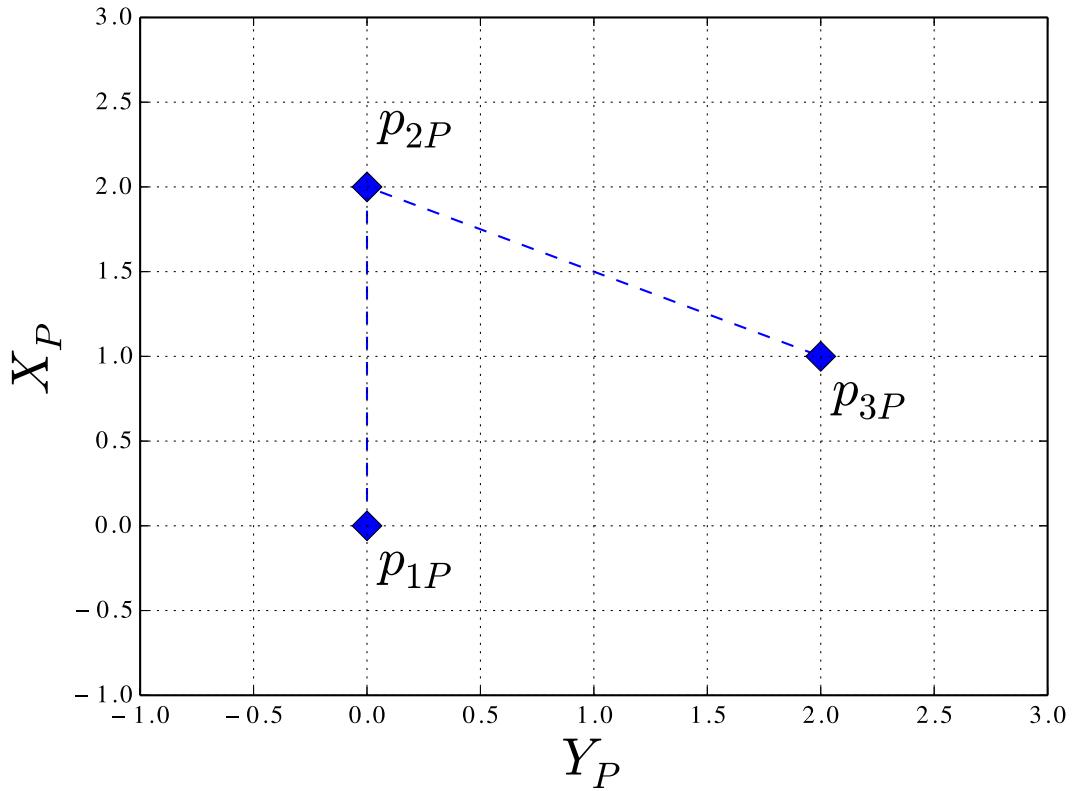


Рис. 2.3. Трансформированная "задача о трёх точках"

из выражения:

$$\psi = \arctan 2 \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right).$$

Матрицу обратного перехода из $X_P Y_P$ в $X_I Y_I$ определим как $R_P^I = (R_I^P)^T$.

Таким образом, переход из глобальной системы координат $X_I Y_I$ в локальную $X_P Y_P$ для точек $p_i, i = \overline{1, 3}$ определяется как:

$$p_{iP} = R_I^P(\psi)(p_i - p_1), i = \overline{1, 3}. \quad (3.1)$$

Трансформированная "задача о трёх точках" представлена на рисунке 2.3. После преобразования нетрудно заметить, что неявное уравнение отрезка прямой, соединяющей точки может быть описано простым выражением в

локальной системе координат

$$Y_P = 0.$$

Это же выражение с учётом преобразования (3.1) для абсолютной системы координат примет вид:

$$\begin{bmatrix} -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом получаем, что результирующая траектория S имеет вид:

$$S : \bigcup_{i=1}^{n-1} \begin{cases} -\sin \psi_i(x - x_i) + \cos \psi_i(y - y_i) = 0, \\ \psi_i = \arctan \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь необходимо остановить, чтобы рассмотреть ещё один вопрос. Таким образом регулятор будет переключаться с одного участка на другой. Для параметризованных траекторий возможно использовать значение параметра. Тогда логика может выглядеть, к примеру, таким образом, что если параметр достиг определённого значения, то перейти к следующему участку. Для неявных кривых эта техника не очень подходит, так как для её использования становится необходимым ввести в рассмотрение функцию, имеющая смысл координаты вдоль пути следования, что не всегда можно легко сделать. Наиболее приемлемыми альтернативами являются методы, предложенные в работе [23]:

1. Метод шаровой окрестности
2. Метод полуплоскости

Метод шаровой плоскости заключается в том, что вокруг реперной точки, следующей по направлению движения строится окрестность заданного радиуса r_{sw} . Переключение на следующий участок происходит при попадании

объекта управления внутрь окрестности, то есть, когда

$$(x - x_{wp})^2 + (y - y_{wp})^2 \leq r_{sw}^2,$$

где x, y - текущее положение робота, x_{wp}, y_{wp} - положение реперной точки, вокруг которой строится окрестность. Данный метод достаточно прост и был реализован в работах [7, 8, 47], но у него есть существенный недостаток. Если объект управления окажется на расстоянии большем, чем заданный радиус r_{sw} , то переключения не произойдёт. Чтобы избежать такой проблемы был разработан второй подход - метод полуплоскости. Он заключается в том, что относительно точки переключения строится неявная прямая $Q(x, y)$, разделяющая всю плоскость на две части. Принадлежность к той или иной части можно определить подставив текущие координаты в неравенство $Q(x, y) \leq 0$. Таким образом в любой точке плоскости известно относительное положение объекта управления и кривой переключения и переключение произойдёт в любом случае.

На основе этого дополним описание кривой (3.2) алгоритмом переключения между отдельными участками. Получаем следующее выражение

$$S : \bigcup_{i=1}^{n-1} \begin{cases} -\sin \psi_i(x - x_i) + \cos \psi_i(y - y_i) = 0, \\ Q_i(x, y) = \cos \psi_i(x - x_i) + \sin \psi_i(y - y_i) - r_i, \\ i = i + 1, \text{ при } Q_i(x, y) > 0, \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \\ r_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Далее дополним описание кривой участками состоящими из дуг окружностей. Неявное уравнение окружности радиуса R с центром в точках x_{c0}, y_{c0} задается уравнением вида:

$$(x - x_{c0})^2 + (y - y_{c0})^2 - R^2 = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом для дополнения описания (3.3) дугами окружностей нам необходимо определить радиус, координаты центра и, в соответствии с выбранной методикой, плоскости переключений. Допустим, что радиус выбирается вручную с учётом ограничения (2.1) то есть $R \leq R_{max}$. Координаты центра в "задаче о трех точках" можно легко определить с помощью простейших геометрических расчетов. Получаются следующие выражения:

$$\begin{bmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1P} \\ y_{1P} \end{bmatrix} + R_I^P(\delta) \begin{bmatrix} d_{cc} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$d_{cc} = \left| \frac{R}{\sin \frac{\sigma}{2}} \right|, \quad (3.6)$$

$$\sigma = \begin{cases} \pi - \arctan 2 \left(\frac{y_{3P} - y_{2P}}{x_{3P} - x_{2P}} \right), & \arctan 2 \left(\frac{y_{3P} - y_{2P}}{x_{3P} - x_{2P}} \right) > 0 \\ -\pi - \arctan 2 \left(\frac{y_{3P} - y_{2P}}{x_{3P} - x_{2P}} \right), & \arctan 2 \left(\frac{y_{3P} - y_{2P}}{x_{3P} - x_{2P}} \right) \leq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\delta = \pi - \frac{\sigma}{2}. \quad (3.8)$$

В результате этих вычислений получаются координаты центра окружности радиусом R , вписанной в угол между соседними участками. Теперь необходимо найти выражения для плоскостей переключения, которые обозначим буквами $Q_1(x, y)$ и $Q_2(x, y)$. В дальнейшем для компактности записи будем опускать аргументы, подразумевая, что они присутствуют. Для этого необходимо найти расстояния от точки p_2 до точек касания окружности, которое вычисляется с помощью выражения:

$$d = \left| \frac{R}{\tan \frac{\sigma}{2}} \right|, \quad (3.9)$$

Пример вышеприведённых расчетов со значением $R = 0.8$ и вычисленной точкой цента окружности $p_{c0} = (x_{c0}, y_{c0})$ для исходной задачи представлен на рисунке 2.4.

Теперь можно расширить исходное функциональное описание (3.3), учитывая (3.4) - (3.9).

$$S : \bigcup_{i=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} -\sin \psi_i(x - x_i) + \cos \psi_i(y - y_i) = 0, \text{ при } Q_{1i} \leq 0 \\ (x - x_{ci})^2 + (y - y_{ci})^2 - R^2 = 0, \text{ при } Q_{2i} \leq 0 \\ \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_P^I(\psi_i)R_I^P(\delta_i) \begin{bmatrix} d_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_{ci} = \left| \frac{R}{\sin \frac{\sigma}{2}} \right|, \\ \delta_i = \pi - \frac{\sigma_i}{2}, \\ \sigma_i = \begin{cases} \pi - (\psi_{i+1} - \psi_i), & \text{при } (\psi_{i+1} - \psi_i) > 0 \\ -\pi - (\psi_{i+1} - \psi_i), & \text{при } (\psi_{i+1} - \psi_i) \leq 0 \end{cases} \\ Q_{1i} = \cos \psi_i(x - x_i) + \sin \psi_i(y - y_i) - r_i + d_i, \\ Q_{2i} = \cos \psi_{i+1}(x - x_i) + \sin \psi_{i+1}(y - y_i) - d_i, \\ i = i + 1, \text{ при } Q_{2i} > 0, \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \\ r_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \\ d_i = \left| \frac{R}{\tan \frac{\sigma}{2}} \right|, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

В результате работы алгоритма (3.10) получается C^1 -гладкая кривая. В принципе, для многих практических применений достаточно и такого описания. Пример синтеза управления для траектории данного класса можно

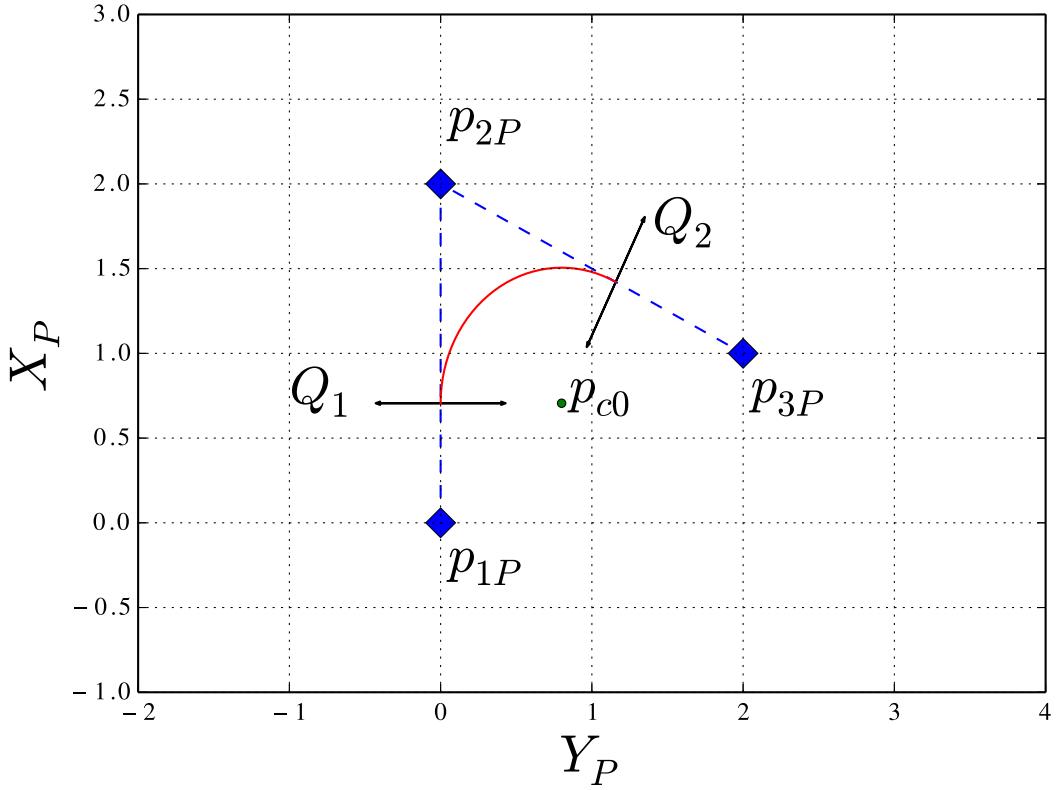


Рис. 2.4. Сглаживание траектории с помощью окружности

найти в работах [7, 8, 47].

Теперь, чтобы выполнить условия поставленной задачи и обеспечить C^2 -гладкость, необходимо ввести в рассмотрение ещё один базовый элемент, соединяющий отрезки прямых и дуги окружностей. Как правило, для этого используют разнообразные спирали. Наиболее распространённым подходом является использование клотоиды или спирали Корню [24, 38, 51, 52, 67, 69, 74, 75]. Данная кривая примечательно тем, что её кривизна возрастает линейно, относительно её длины. Недостатком же является то, что использовать её на практике возможно только в параметрическом виде, так как она может быть записана через координаты базиса только в виде интегралов Френеля, которые в общем виде не выражаются в виде элементарных функций. Альтернативным путем решения является использование кривой Ферма [28], но

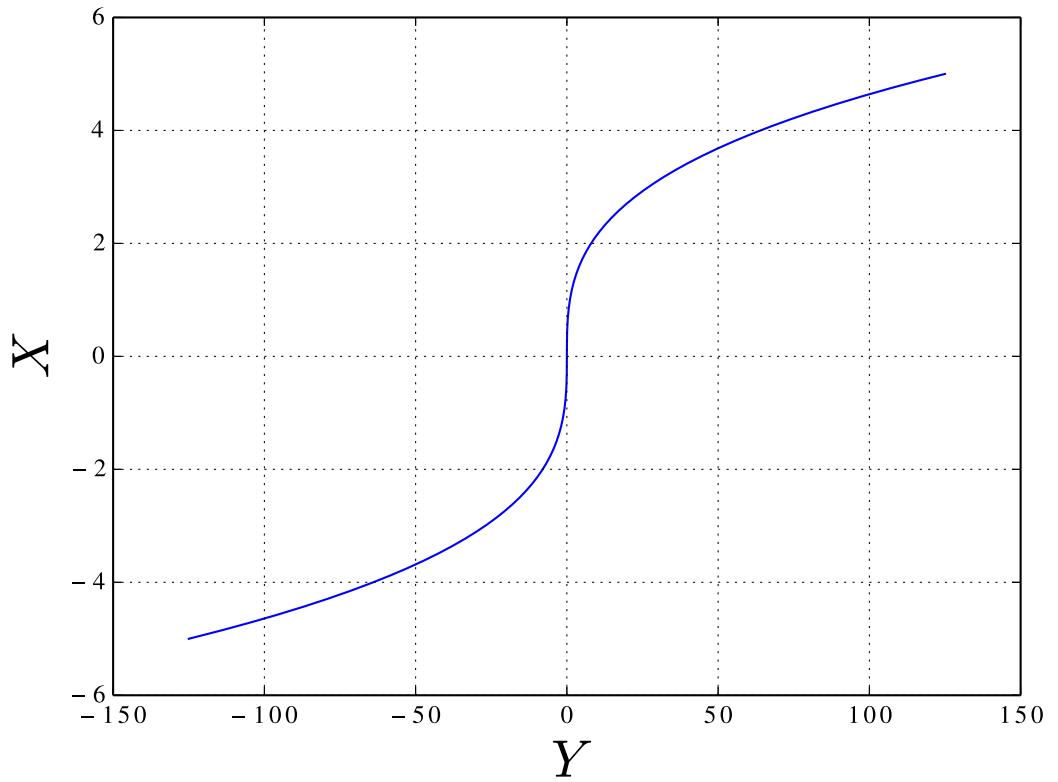


Рис. 2.5. График кубической параболы, задаваемой уравнение (3.11) при $k = 1$

в данном подходе для использования её при планировании траектории нет возможности аналитически найти точки касания спирали с окружностью. Также для этих целей возможно использования сплайнов или кривых Безье [2, 16, 22, 35, 44, 45, 57, 66, 69, 77], но результаты обладают большой размерностью и сложностью. В нашем подходе предлагается использовать в качестве сегмента, соединяющего прямые с окружностью кубическую параболу.

Выберем уравнение кубической параболы (см. рис. 2.5). в виде:

$$kx^3 - y = 0, \quad (3.11)$$

где k - настраиваемый параметр.

Как уже упоминалось выше, для участков перехода выбирают кривую, обладающую рабочим участком с линейно возрастающей кривизной. Для ана-

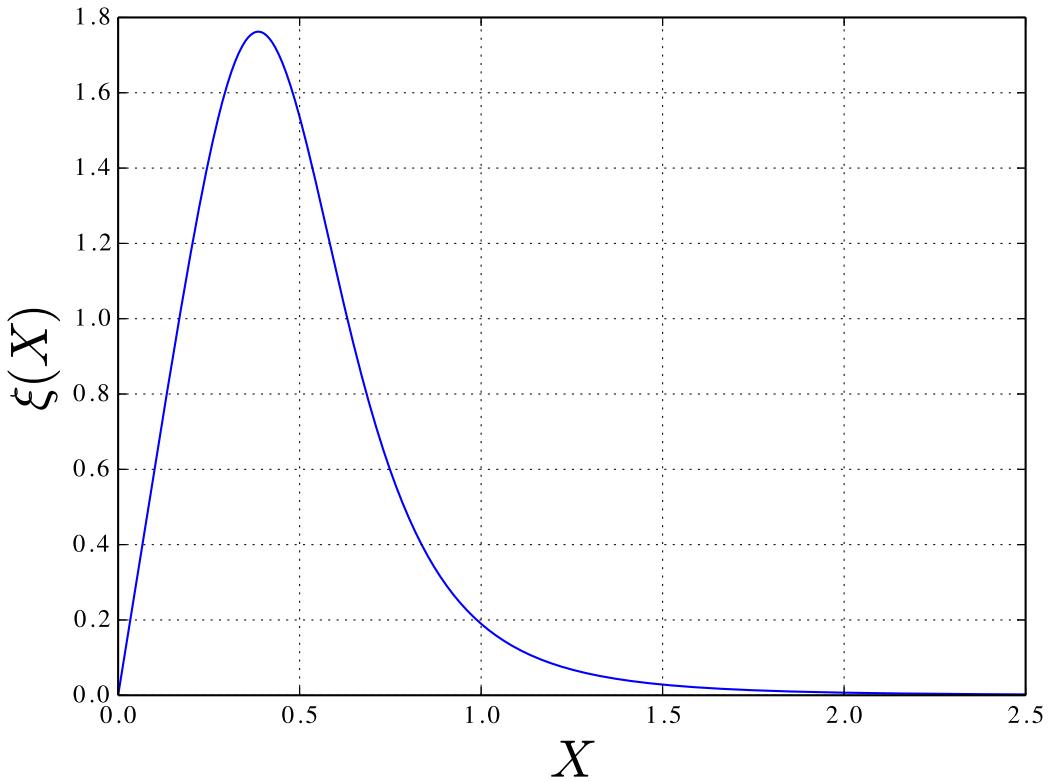


Рис. 2.6. Зависимость кривизны от координаты (3.13) при $k = 1$

лиза данного свойства у предложенной кривой (3.11) найдём функцию, характеризующую кривизну. Для этого воспользуемся формулой кривизны для неявной кривой в виде:

$$\xi(x, y) = \left| \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left(\sqrt{\frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y}} \right)^3} \right|, \quad (3.12)$$

где $\xi(x, y)$ - кривизна неявной кривой в точке (x, y) . В результате получаем уравнение (см. рис. 2.6):

$$\xi(x, y) = \left| \frac{6kx}{(1 + 9k^2x^4)^{\frac{3}{2}}} \right|. \quad (3.13)$$

Как видно из рисунка 2.6, участок от нуля до максимума практически

линейный. Линеаризуем функцию (3.13), разложив её в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки. Получаем выражение:

$$\hat{\xi}(x) = 6kx - 81k^3x^5 + \frac{3645k^5x^9}{4} + O(x^{13}), \quad (3.14)$$

где $\hat{\xi}(x)$ - функция кривизны, разложенная в ряд Тейлора. Точка максимум функции (3.13) находится в виде:

$$x_{max} = \frac{1}{\sqrt{3k}\sqrt[4]{5}}, \quad \xi_{max}(x_{max}) = \frac{5\sqrt{k}\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{2}}, \quad (3.15)$$

Как можно заметить, исходя из выражений (3.14) и (3.15), мы можем варьируя параметр k , задавать максимум, тем самым обеспечивая выполнения ограничения (2.1), а также, чтобы добиться приемлемой точности линеаризации функции $\hat{\xi}(x)$. К примеру, для параметра $k = 1$ линейная функция $\hat{\xi}(x) = 6kx$ обеспечивает приемлемую точность где-то на половине диапазона $[0, \xi_{max}]$ (см. рис. 2.7).

Теперь, разобравшись с применимостью предложенной функции дополним наше описание S (3.10), криволинейным участком, образуемым кубической параболой (3.11). Для начала, определим крайние точки параболы исходя из заданного радиуса окружности R . Начальные точки расположены на плоскостях переключения Q_1 и Q_2 . Для конечных точек получаем

$$\hat{\xi}(x) = 6kx = \frac{1}{R} \Rightarrow x = \frac{1}{6kR}, \quad y = k \left(\frac{1}{6kR} \right)^3,$$

Тут еще необходимо заметить, что в выражение для y необходимо ввести функцию знака, в зависимости от того в какую сторону происходит разворот. Кроме того Вторую параболу соединяющую окружность со следующим участком пути необходимо зеркально отразить относительно оси Y . Получается

$$y_1 = sign(\sigma)k \left(\frac{1}{6kR} \right)^3,$$

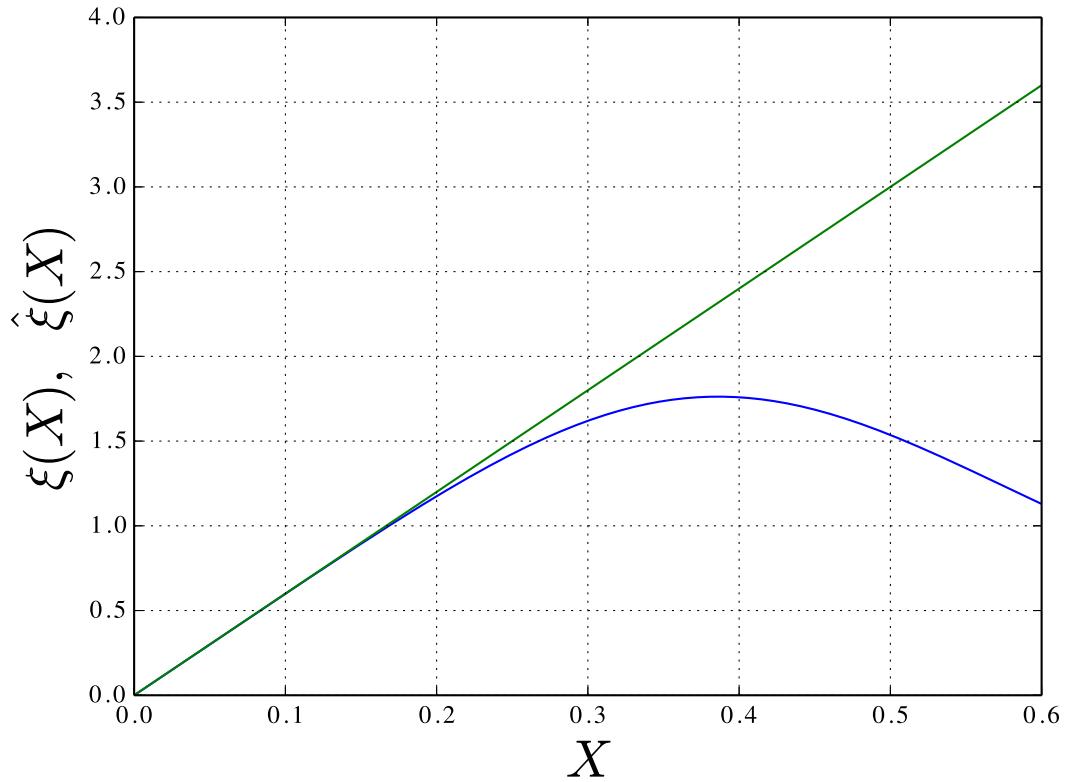


Рис. 2.7. Линеаризация функцией $\hat{\xi}(x) = 6kx$ при $k = 1$

$$y_2 = -\text{sign}(\sigma)k \left(\frac{1}{6kR} \right)^3,$$

где y_1 - конечная точка первой параболы, y_2 - конечная точка второй параболы. Далее делаем параллельные переносы и повороты, чтобы совместить параболы и плоскости Q_1 и Q_2 . После этого необходимо рассчитать новые положения окружностей с помощью элементарных геометрических преобразований. И найти плоскости переключения Q_3 и Q_4 , для перехода от криволинейного участка к круговому и обратно. Пример работы алгоритма представлен на рисунке 2.8. Результирующее описание имеет вид:

$$S1 : \begin{cases} -\sin \psi_i(x - x_i) + \cos \psi_i(y - y_i) = 0, \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \end{cases}$$

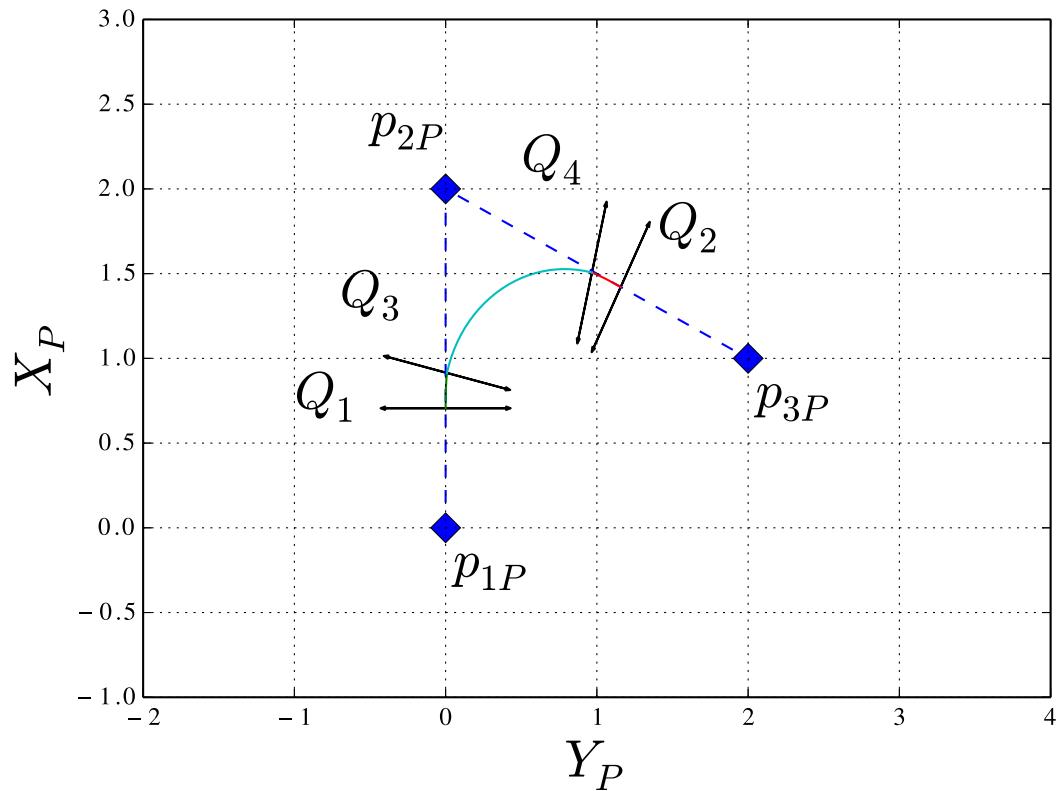


Рис. 2.8. Пример работы алгоритма с использованием криволинейных участков

$$S2 : \begin{cases} k(x_L)^3 - y_L = 0, \\ \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} - d_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_I^P(\psi_i) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ d_i = \left| \frac{R}{\tan \frac{\sigma}{2}} \right|, \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \end{cases}$$

$$S3 : \begin{cases} (x - x_{ci})^2 + (y - y_{ci})^2 - R^2 = 0, \\ \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_P^I(\psi_i)R_I^P(\delta_i) \begin{bmatrix} d_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_{ci} = d_{1i} + d_{2i}, \\ d_{1i} = \sqrt{R^2 - (h_i/2)^2}, \\ d_{2i} = \sqrt{h_{i2}^2 - (h_i/2)^2}, \\ h_i = \sqrt{(x_{S2e} - x_{S1e})^2 + (y_{S2e} - y_{S1e})^2}, \\ h_{i2} = \sqrt{(x_{S2e} - x_{i+1})^2 + (y_{S2e} - y_{i+1})^2}, \\ \delta_i = \pi - \frac{\sigma_i}{2}, \\ \sigma_i = \begin{cases} \pi - (\psi_{i+1} - \psi_i), \text{ при } (\psi_{i+1} - \psi_i) > 0 \\ -\pi - (\psi_{i+1} - \psi_i), \text{ при } (\psi_{i+1} - \psi_i) \leq 0 \end{cases} \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \end{cases}$$

$$S2 : \begin{cases} -k(x_L)^3 - y_L = 0, \\ \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} + R_I^P(\psi_{i+1}) \begin{bmatrix} x + d_i \\ y \end{bmatrix}, \\ d_i = \left| \frac{R}{\tan \frac{\sigma}{2}} \right|, \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S : \bigcup_{i=1}^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} S1, \text{ при } Q_{1i} \leq 0 \\ S2, \text{ при } Q_{3i} \leq 0 \\ S3, \text{ при } Q_{4i} \leq 0 \\ S4, \text{ при } Q_{2i} \leq 0 \\ i = i + 1, \text{ при } Q_{2i} > 0, \\ Q_{1i} = \cos \psi_i(x - x_i) + \sin \psi_i(y - y_i) - r_i + d_i, \\ Q_{2i} = \cos \psi_{i+1}(x - x_i) + \sin \psi_{i+1}(y - y_i) - d_i, \\ Q_{3i} = \cos \alpha_1(x - x_i) + \sin \alpha_1(y - y_i) + t_1, \\ Q_{4i} = \cos \alpha_2(x - x_i) + \sin \alpha_2(y - y_i) - t_2, \\ t_1 = \begin{bmatrix} x_{S1e} & y_{S1e} \end{bmatrix}^T, \\ t_2 = \begin{bmatrix} x_{S2e} & y_{S2e} \end{bmatrix}^T, \\ \alpha_1 = \frac{\psi_{i+1} - \beta}{2}, \\ \alpha_2 = \psi_{i+1} - \frac{\psi_{i+1} - \beta}{2}, \\ \beta = \arccos \left(1 - \frac{h_i^2}{2R^2} \right), \\ h_i = \sqrt{(x_{S2e} - x_{S1e})^2 + (y_{S2e} - y_{S1e})^2}, \\ \psi_i = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \\ r_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \\ d_i = \left| \frac{R}{\tan \frac{\sigma}{2}} \right|, \end{array} \right. \end{aligned} \tag{3.16}$$

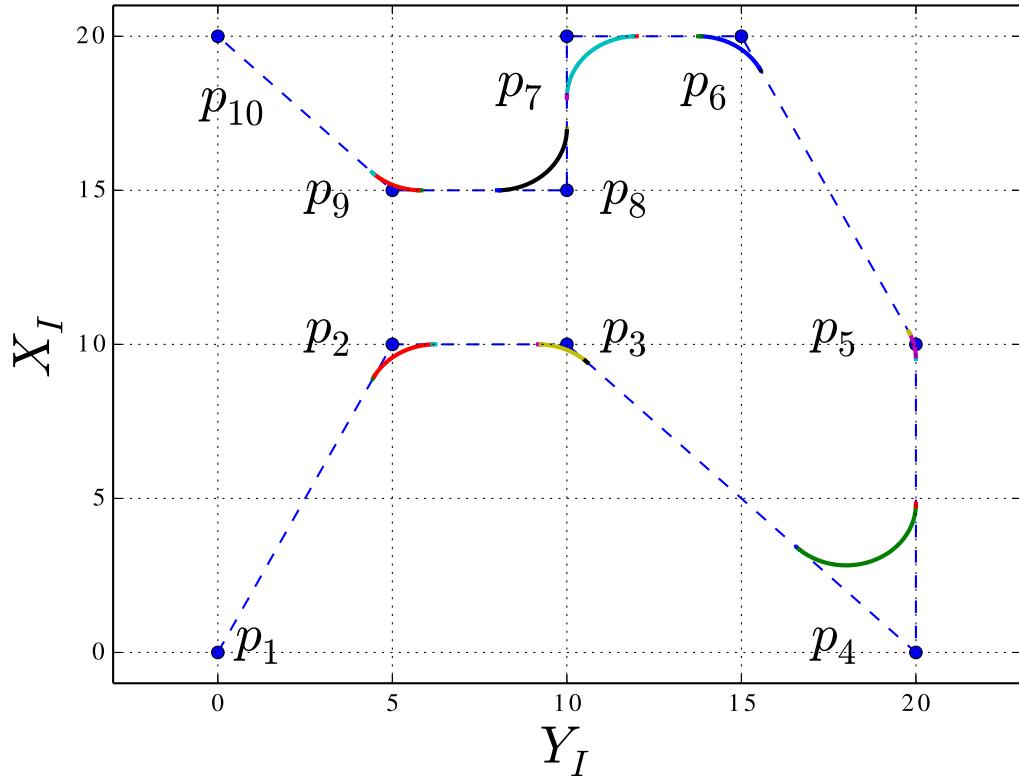


Рис. 2.9. Результирующая траектория

где $x_{S2e}, x_{S1e}, y_{S2e}, y_{S1e}$ - конечные точки парабол $S2$ и $S4$. Результат работы окончательного алгоритма представлен на рисунке 2.9

Теперь сделаем небольшое дополнение, чтобы решить задачу планирования траектории для пространственного случая. Неявная траектория в пространстве задается с помощью пересечения двух поверхностей, выраженных в неявном виде. Естественно, в зависимости от выбора типов этих поверхностей можно строить траектории разной сложности. В нашем случае, мы можем ограничить выбор одной из них в виде плоскости. Это решение отлично согласуется с представленным выше подходом к решению "задачи о трёх точках" так как на этих трёх точках можно построить одну поверхность в виде плоскости и редуцировать исходную подзадачу к рассмотренному выше случаю планирования траектории на плоскости. Для реализации данного

подхода необходимо найти матрицу преобразования $R_I^P(\alpha, \beta, \gamma)$, где α, β, γ углы поворотов относительно осей $X_I Y_I Z_I$, соответственно. Выбрав выражения для углов поворота в виде:

$$\beta = \arctan 2 \left(\frac{-z_{i+1} + z_i}{\sqrt{(x_{i+1} - xi)^2 + (y_{i+1} - yi)^2}} \right),$$

$$\gamma = \arctan 2 \left(\frac{y_{i+1} - yi}{x_{i+1} - xi} \right).$$

Соответствующие матрицы поворота записываются как:

$$R_1(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Теперь, если мы используем их для перехода в локальную систему координат, то получим систему координат с осью X_P , проходящую через две точки и ориентированную вдоль соединяющих их прямой. В математической записи это будет выглядеть так:

$$p_{Ri} = R_2(\beta)R_1(\gamma)p_i$$

Теперь надо найти угол α , соответствующий вращению плоскости вокруг оси X_P , который совместит плоскость и третью точку. Его можно найти с помощью выражения

$$\alpha = \arctan 2 \left(\frac{z_{R3} - z_{R2}}{y_{R3} - y_{R2}} \right),$$

где y_{Ri}, z_{Ri} - координаты i -й точки p_{Ri} . Соответствующая матрица поворота

выглядит так:

$$R_3(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Таким образом, используя матрицу поворота $R_I^P(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_1(\gamma)$ можно перейти из абсолютной системы координат X_IYIZ_I в локальную X_PYZ_P , для которой выполняется соотношение $Z_P \neq 0$, задающее нам уравнение плоскости, тем самым, позволяя использовать полученные выше результаты, чтобы найти вторую поверхность. Соответственно обратный переход задается как

$$p_i = R_P^I(\alpha, \beta, \gamma)p_{Ri} = (R_I^P(\alpha, \beta, \gamma))^T p_{Ri}.$$

Пример работы алгоритма представлен на рисунке 2.10

4. Заключение

В данной главе был представлен метод решения задачи планирования C^2 -гладкой траектории, описываемой неявными функциями, для последующего использования в систем траекторного управления мобильными робототехническими системами синтезированными на основе методов стабилизации многообразий в пространстве выходов. Была предложена процедура для синтеза траектории, задаваемых с помощью реперных точек, на плоскости и в пространстве. Представленный подход позволяет и далее улучшать характеристики получаемых результатов, путём добавления новых базовых элементов, что, возможно, станет направлением для дальнейших исследований.

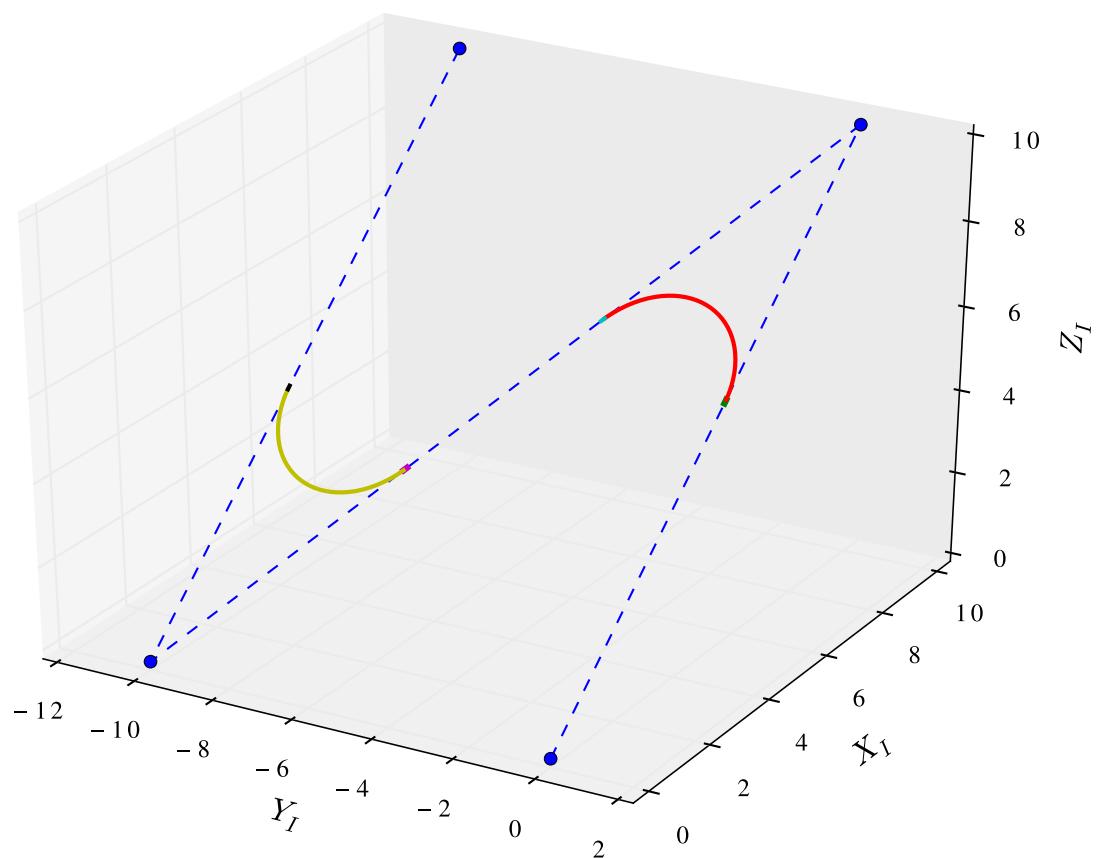


Рис. 2.10. Результатирующая траектория в пространстве

Глава 3

Алгоритмы траекторного управления

1. Введение

В предыдущей главе были изучены методы синтеза траекторий движения мобильных робототехнических систем. Для осуществления движения вдоль спланированного пути необходима разработка регулятора, стабилизирующего желаемую траекторию в пространстве выходов. Данная глава посвящена синтезу законов траекторного управления для мобильных робототехнических систем. К настоящему времени хорошо изучены методы траекторного управления, сформулированные как задачи слежения за эталонной моделью [41, 59, 60, 63], в отличие от методов синтеза траекторных регуляторов на основе стабилизации геометрических многообразий в пространстве выходов [5, 6, 13, 62]. Подход на основе стабилизации многообразий обладает неоспоримым преимуществом, благодаря тому, что обеспечивает инвариантность траектории движения, но при этом не гарантирует того, что весь путь движения будет пройден. В настоящей главе, для объектов управления, допускающих представление в виде модели твёрдого тела в пространстве решены задачи управления линейным положением без измерения линейных скоростей, а также угловой ориентацией. Предложен вариант синтеза управления для объектов управления, описываемых моделью неполноприводного твердого тела в пространстве. Во второй части представлено расширение методики на случай динамического слежения за внешним объектом.

2. Управление пространственным движением точечной массы

Рассмотрим задачу управления точечной массы вдоль заданной траектории без измерения вектора линейных скоростей. Для начала введем подвижную (связанную с центром масс управляемого тела O) правостороннюю декартову систему координат $X_OY_OZ_O$, где X_O - продольная ось, направленная вперед, Y_O - поперечная ось, направленная слева направо, и Z_O - вертикальная ось, направленная сверху вниз. Движение управляемого объекта будем описывать относительно неподвижной (инерциальной) правосторонней декартовой системы координат $X_IY_IZ_I$, где X_I - ось координат, направленная с юга на север, Y_I - ось координат, направленная с запада на восток, и Z_I - вертикальная ось, направленная вниз, к центру Земли. Данная система координат широко используется при решении задач навигации. Положение центра масс O связанной с телом системы координат $X_OY_OZ_O$ относительно неподвижной системы координат $X_IY_IZ_I$ будем описывать с помощью вектора координат $p = [x, y, z] \in R^3$, характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_I^O(\alpha) \in SO(3)$, где $\alpha = [\phi, \theta, \psi] \in R^3$ - вектор углов Эйлера, характеризующий вращение объекта управления относительно соответствующих направляющих осей базиса $X_IY_IZ_I$.

Выберем модель объекта управления в виде:

$$m\ddot{p} = F,$$

где $p = [x, y, z]^T \in R^3$ - вектор-столбец текущих координат, m - масса тела, $F = [F_x, F_y, F_z]^T \in R^3$ - вектор-столбец управляемых сил.

Траектория задается с помощью пересечения двух уравнений поверхно-

стей в форме неявно заданных функций.

$$\varphi_1(p) = 0 \cup \varphi_2(p) = 0 \quad (2.1)$$

Исходя из обобщённой постановки задачи траекторного управления представленной в первой главе, выберем для задачи управления точечной массы две подзадачи:

1. Геометрическая подзадача, выражаемая в виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p - \varphi_1(p) \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p - \varphi_2(p) \rightarrow 0.$$

2. Кинематическая подзадача, заключающаяся в поддержании заданной скорости движения вдоль траектории, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V = \lim_{t \rightarrow \infty} (V - V^*) \rightarrow 0,$$

где V - текущая скорость движения вдоль траектории, V^* - заданная скорость движения вдоль траектории

Для реализации схемы управления без измерения вектора линейных скоростей введём в рассмотрение вспомогательную переменную $\xi = p - q$, где q некоторая переменная, которую определим позже. Систему управления будем строить на основе каскадной методологии, постепенно стабилизируя каждую подсистему. Для синтеза закона управления, стабилизирующего скоростную подсистему рассмотрим функцию Ляпунова в виде:

$$V_T = \frac{1}{2}(\dot{p} - \bar{u})^T(\dot{q} - \bar{u}) + \frac{1}{2}\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{k_1}{2}\xi^T\xi + \frac{k_2}{2}(\xi - \gamma)^T(\xi - \gamma), \quad (2.2)$$

где \bar{u} - вектор задающих скоростей и γ - вспомогательная переменная, которую определим позже, k_1, k_2 - положительные параметры. Найдём производ-

ную функции Ляпунова (2.2).

$$\begin{aligned}
\dot{V}_T &= (\dot{p} - \bar{u})^T (\ddot{p} - \dot{\bar{u}}) + \dot{\xi}^T (\ddot{p} - \ddot{q}) + k_1 \xi^T \dot{\xi} + \\
&\quad + k_2 (\xi - \gamma)^T (\dot{\xi} - \dot{\gamma}) = \\
&= (\dot{q} - \bar{u})^T \left(\frac{1}{m} F - \dot{\bar{u}} \right) + \dot{\xi}^T \left(\frac{1}{m} F - \dot{\bar{u}} \right) + \\
&\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{1}{m} F - \ddot{q} + k_1 \xi + k_2 (\xi - \gamma) \right) - \\
&\quad - k_2 \dot{\gamma}^T (\xi - \gamma) = \\
&= (\dot{q} - \bar{u})^T \left(\frac{1}{m} F - \dot{\bar{u}} \right) - k_2 \dot{\gamma}^T (\xi - \gamma) + \\
&\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{2}{m} F - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1 \xi + k_2 (\xi - \gamma) \right) -
\end{aligned}$$

Выберем управления и вспомогательные переменные в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} F &= \dot{\bar{u}} - k_{\dot{q}} (\dot{q} - \bar{u}), \\
\ddot{q} &= \dot{\bar{u}} - 2k_{\dot{q}} (\dot{q} - \bar{u}) + k_1 \xi + k_2 (\xi - \gamma), \\
\dot{\gamma} &= k_{\xi} (\xi - \gamma),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $k_{\dot{q}}$ и k_{ξ} - положительные константы. Тогда получаем

$$\dot{V}_T = -k_{\dot{q}} (\dot{q} - \bar{u})^T (\dot{q} - \bar{u}) - k_{\xi} k_2 (\xi - \gamma)^T (\xi - \gamma) \leq 0.$$

Найдем вторую производную функции Ляпунова (2.2).

$$\begin{aligned}
\ddot{V}_T &= -k_{\dot{q}} (\dot{q} - \bar{u})^T (\ddot{q} - \dot{\bar{u}}) - k_{\xi} k_2 (\xi - \gamma)^T (\dot{\xi} - \dot{\gamma}) = \\
&= -k_{\dot{q}} (\dot{q} - \bar{u})^T (-2k_{\dot{q}} (\dot{q} - \bar{u}) - k_1 \xi - k_2 (\xi - \gamma)) - \\
&= k_{\xi} k_2 (\xi - \gamma)^T (\dot{\xi} - \dot{\gamma}).
\end{aligned}$$

Теперь давайте проанализируем получившиеся выражения. Для этого воспользуемся следствием из леммы Барбалата, приведённым в книге [9].

Следствие 3.1. Если дважды дифференцируемая на интервале $[t_0, \infty)$ функция $f(t)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$ и вторая производная на этом интервале ограничена, то производная $\dot{f}(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$

Так как функция V_T (2.2) ограничена снизу нулем и ее производная отрицательна или равна нулю, то функция V_T сходится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$. Из ограниченности функции V_T следует, что функции : $(\dot{p} - \bar{u}), \dot{\xi} = \dot{p} - \dot{q}, \xi = p - q$ и $(\xi - \gamma)$ также ограничены. Отсюда вытекает то, что и функции $(\dot{q} - \bar{u})$ и $\dot{\gamma} = k_\xi(\xi - \gamma)$ ограничены. Следовательно, вторая производная \ddot{V}_T является ограниченной функцией. Поэтому \dot{V}_T асимптотически стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Это значит, что выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q} - \dot{\bar{u}} \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi - \gamma \rightarrow 0.$$

Покажем, что выполнение этих условий влечёт за собой выполнение соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma \rightarrow 0.$$

Для этого продифференцируем выражение $\dot{q} - \bar{u} = 0$ с использованием соотношения (2.5) и полученных выше результатов:

$$\ddot{q} - \dot{\bar{u}} = -k_1 \xi = 0.$$

Следовательно при $\xi \rightarrow 0$ справедливо, что $\gamma \rightarrow 0$. В результате получается, что контур по скорости глобально асимптотически устойчив и выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p - q \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{p} - \dot{q} \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{p} - \dot{\bar{u}} \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q} - \dot{\bar{u}} \rightarrow 0.$$

Теперь синтезируем внешний контур по положению, вырабатывающий сигнал задания, позволяющий решить представленные выше траекторные задачи. После замыкания системы синтезированным выше контуром с учётом асимптотической сходимости скоростной подсистемы можно представить исходную модель системы в виде:

$$\dot{q} = \bar{u} \quad (2.4)$$

Выберем задающее воздействие \bar{u} в виде:

$$\bar{u} = u_g + u_k,$$

где u_g - управление, решающее геометрическую задачу, то есть стабилизирующий регулятор, и u_k - управление, решающее кинематическую задачу или, по сути, прямая связь по заданной скорости V^* . В отличие от классических методов траекторного управления, формулирующихся как задача слежения за каким-то эталонным объектом, представленный подход формулируется в виде задаче о устойчивости по части переменных.

Для начала синтезируем составляющую u_k , являющуюся прямой связью по заданной скорости траекторного движения. Чтобы найти выражение для этой выполним некоторые дополнительные преобразования.

Выберем меру отклонения от заданных многообразий (2.1) в виде:

$$e_1 = \varphi_1(q),$$

$$e_2 = \varphi_2(q).$$

Суть данного действия заключается в том, что неявные представления поверхностей в пространстве задает линии уровня, таким образом, ассоциируя себя с той или иной линией уровня мы знаем текущее положение объекта управления относительно целевой поверхности. Обозначим с помощью переменной s - траекторную координату, каким-либо образом заданную вдоль желаемого пути следования. Вообще говоря, при натуральной параметризации кривой данная переменная соответствует пройденной длине вдоль траектории. В нашей постановке задачи нас, в принципе, не интересует конкретно переменная s , но интересует её производная \dot{s} , характеризующая тангенциальную (направленную вдоль касательной) скорость. Таким образом мы можем найти преобразование текущего состояния объекта к задачно-ориентированным координатам [4–8, 37, 47, 53, 54, 54–56] через якобиан, имеющий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q}\varphi_1 \times \frac{\partial}{\partial q}\varphi_2 \\ \frac{\partial}{\partial q}\varphi_1 \\ \frac{\partial}{\partial q}\varphi_2 \end{bmatrix} \dot{q}.$$

Условием регулярности(невырожденности) выбранного преобразования координат является условие $\det\Upsilon(q) \neq 0$, которое выполняется для гладких кривых. Соответственно обратное преобразование(от задачно-ориентированных координат к координатам объекта управления) задается в виде:

$$\dot{q} = \Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}$$

Таким образом мы можем реализовать закон управления u_k для заданной траекторной скорости V_s^* в виде:

$$u_k = \Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} V_s^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, система (2.4) принимает вид:

$$\dot{q} = \Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} V_s^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_g.$$

Следующим шагом является определение закона управления u_g . Для синтеза управления рассмотрим функцию Ляпунова в форме:

$$V_g = \frac{k_{\varphi_1}}{2} \varphi_1^2(q) + \frac{k_{\varphi_2}}{2} \varphi_2^2(q).$$

Найдём производную функции Ляпунова по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_g &= k_{\varphi_1} \varphi_1(q) \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi_1(q) \right)^T \dot{q} + k_{\varphi_2} \varphi_2(q) \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi_2(q) \right)^T \dot{q} = \\ &= \left(k_{\varphi_1} \varphi_1(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_1(q) + k_{\varphi_2} \varphi_2(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_2(q) \right)^T \dot{q} = \\ &= \left(k_{\varphi_1} \varphi_1(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_1(q) + k_{\varphi_2} \varphi_2(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_2(q) \right)^T u_g + \\ &\quad + \left(k_{\varphi_1} \varphi_1(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_1(q) + k_{\varphi_2} \varphi_2(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_2(q) \right)^T \Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} V_s^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \left(k_{\varphi_1} \varphi_1(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_1(q) + k_{\varphi_2} \varphi_2(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_2(q) \right)^T u_g. \end{aligned}$$

Проанализируем, что получилось на текущий момент. В силу ортогональности задания u_k вторая половина представленного выражения тождественно равна нулю. Следовательно остается только первая часть выражения. Таким образом, если выбрать u_g в виде:

$$u_g = - \left(k_{\varphi_1} \varphi_1(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_1(q) + k_{\varphi_2} \varphi_2(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi_2(q) \right),$$

то полученное выражение для производной примет вид

$$\dot{V}_g = -u_g^2 < 0$$

тогда производная функции Ляпунова \dot{V}_g становится отрицательно определённой, и соответственно исходная система является глобально асимптотически устойчивой относительно переменных $e_1 = \varphi_1(q)$ и $e_2 = \varphi_2(q)$, и, с учётом полученного ранее выражения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p - q \rightarrow 0$$

, можно резюмировать, что таким образом решена геометрическая подзадача в частности и, как следствие, совместно с представленным выше решением кинематической подзадачи, исходная траекторная задача.

Ниже, на рисунках 3.1 - 3.6 представлены результаты численного эксперимента. В данном эксперименте желаемая траектория задана в виде пересечения двух неявно заданных поверхностей:

$$\frac{1}{5}x^2 + y^2 - 100 = 0 \cup z + \frac{1}{20}y^2 - 5 = 0.$$

Заданная скорость траекторного движения $Vs^* = 10$. Параметры объекта управления и регулятора выбраны в виде: $m = 1$, $J = I \in R^3$ - единичная матрица, $k_{\varphi_1} = 1$, $k_{\varphi_2} = 1$, $k_{\dot{q}} = 2$, $k_\xi = 10$, $k_1 = 10$, $k_2 = 42$.

Далее расширим предложенную методику синтеза на случай управления движением относительно внешнего подвижного объекта [5, 6, 14, 73]. Для начала рассмотрим модель внешнего подвижного объекта. Положение центра масс T связанной с экзогенным объектом системы координат $X_T Y_T Z_T$ относительно неподвижной системы координат $X_I Y_I Z_I$ будем описывать с помощью вектора координат $p_T = [x_T, y_T, z_T] \in R^3$, характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_I^T(\alpha_T) \in SO(3)$, где $\alpha_T = [\phi_T, \theta_T, \psi_T] \in R^3$ - вектор углов Эйлера, характеризующий вращение объекта управления относительно соответствующих

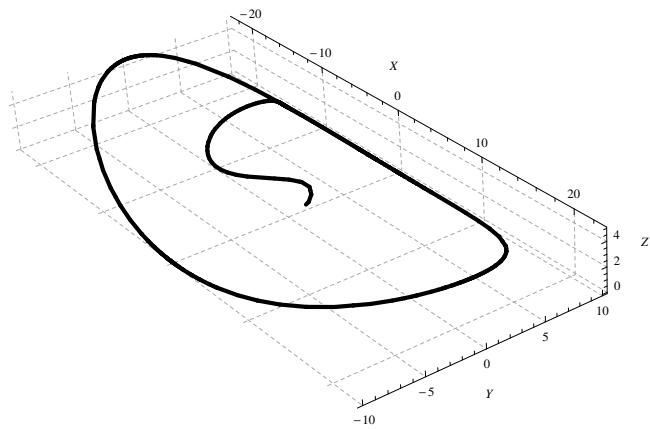


Рис. 3.1. Результирующая траектория в пространстве

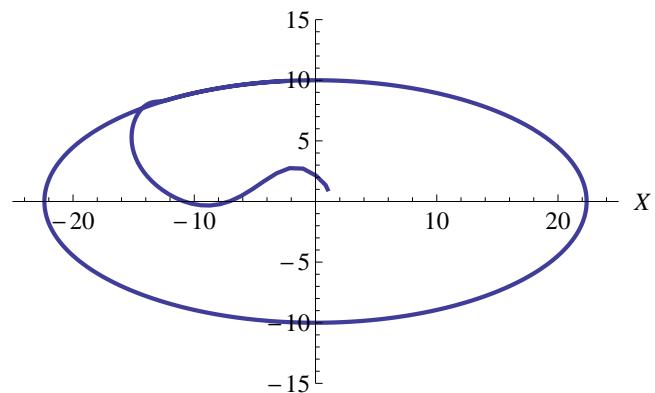


Рис. 3.2. Проекция результирующей траектории на плоскость XY

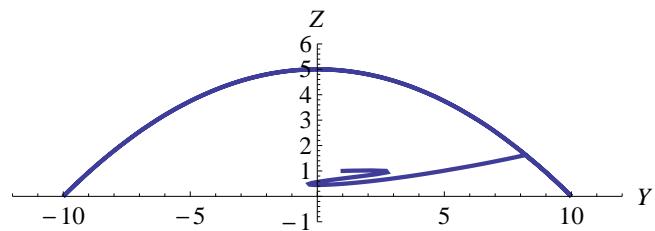


Рис. 3.3. Проекция результирующей траектории на плоскость YZ

направляющий осей базиса $X_IY_IZ_I$. Выберем модель в виде:

$$m_T \ddot{p}_T = 0,$$

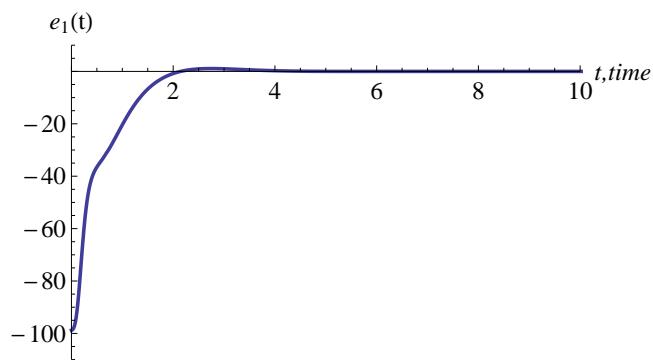


Рис. 3.4. Отклонение от заданной траектории $e_1(t)$

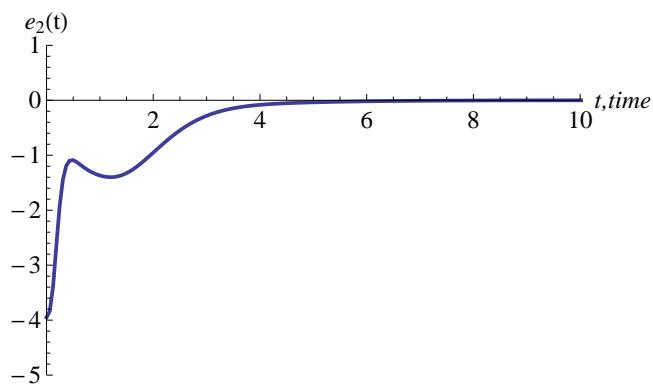


Рис. 3.5. Отклонение от заданной траектории $e_2(t)$

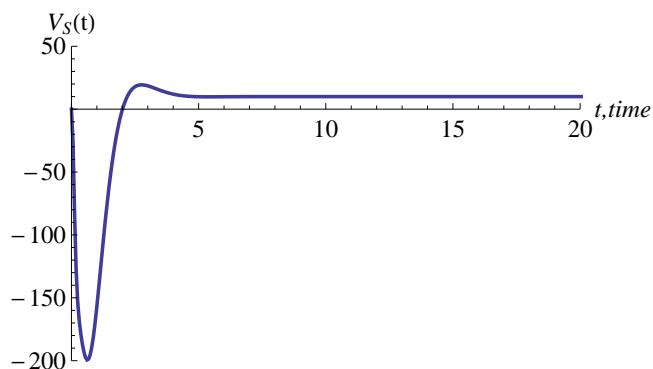


Рис. 3.6. Траекторная скорость $V_s(t)$

где m_T - масса внешнего подвижного объекта.

Положение объекта управления в базисе внешнего подвижного объекта определяется с помощью выражения

$$r = R_I^T (p - p_T).$$

Траектория движения в базисе подвижного внешнего объекта $X_T Y_T Z_T$ с помощью пересечения двух уравнений поверхностей, определённых в координатах r в неявной форме.

$$\varphi(r)_1 = 0 \cup \varphi(r)_2 = 0$$

Также трансформируем исходную модель в терминах координат подвижного базиса, связанного с внешним подвижным объектом

$$\dot{r} = -S(\omega_{TT})R_I^T(p - p_T) + R_I^T(\dot{p} - \dot{p}_T) = -S(\omega_{TT})r + R_I^T(\dot{p} - \dot{p}_T),$$

где $-\omega_{TT}$ - угловая скорость внешнего объекта в связанном базисе $X_T Y_T Z_T$.

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\dot{S}(\omega_{TT})r - S(\omega_{TT})(-S(\omega_{TT})r + R_I^T(\dot{p} - \dot{p}_T)) - \\ &\quad - S(\omega_{TT})R_I^T(\dot{p} - \dot{p}_T) + R_I^T\ddot{p} = \\ &= -\dot{S}(\omega_{TT})r + S^2(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})R_I^T(\dot{p} - \dot{p}_T) + R_I^T\ddot{p} = \\ &= \frac{1}{m}R_I^T F + S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})R_I^T(\dot{p} - \dot{p}_T) = \\ &= \frac{1}{m}R_I^T F - S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})\dot{r}.\end{aligned}$$

1. Геометрическая подзадача, выражаемая в виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r - \varphi_1(r) \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r - \varphi_2(r) \rightarrow 0.$$

2. Кинематическая подзадача, заключающаяся в поддержании заданной скорости движения вдоль траектории, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V = \lim_{t \rightarrow \infty} (V - V^*) \rightarrow 0,$$

где V - текущая скорость движения вдоль траектории, V^* - заданная скорость движения вдоль траектории

Для реализации схемы управления без измерения вектора линейных скоростей введём в рассмотрение вспомогательную переменную $\xi = r - q$, где q некоторая переменная, которую определим позже.

Для синтеза управления рассмотрим функцию Ляпунова в виде

$$V_T = \frac{1}{2}(\dot{r} - \bar{u})^T(\dot{r} - \bar{u}) + \frac{1}{2}\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{k_1}{2}\xi^T\xi + \frac{k_2}{2}(\xi - \gamma)^T(\xi - \gamma)$$

Найдём производную функции Ляпунова

$$\begin{aligned} \dot{V}_T &= (\dot{r} - \bar{u})^T(\ddot{r} - \dot{\bar{u}}) + \dot{\xi}^T(\ddot{r} - \ddot{q}) + k_1\xi^T\dot{\xi} + \\ &\quad + k_2(\xi - \gamma)^T(\dot{\xi} - \dot{\gamma}) = \\ &= (\dot{q} - \bar{u})^T \left(\frac{1}{m}R_I^T F - S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})\dot{r} - \dot{\bar{u}} \right) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{1}{m}R_I^T F - S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})\dot{r} - \dot{\bar{u}} \right) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{1}{m}R_I^T F - S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})\dot{r} - \ddot{q} \right) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T(k_1\xi + k_2(\xi - \gamma)) - k_2\dot{\gamma}^T(\xi - \gamma) = \\ &= (\dot{q} - \bar{u})^T \left(\frac{1}{m}R_I^T F - S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})\dot{r} - \dot{\bar{u}} \right) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{2}{m}R_I^T F - 2S^2(\omega_{TT})r - 2\dot{S}(\omega_{TT})r - 4S(\omega_{TT})\dot{r} - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} \right) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T(k_1\xi + k_2(\xi - \gamma)) - k_2\dot{\gamma}^T(\xi - \gamma). \end{aligned}$$

Выберем управления и вспомогательные переменные в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}R_I^T F &= S^2(\omega_{TT})r + \dot{S}(\omega_{TT})r + 2S(\omega_{TT})\dot{r} + \dot{\bar{u}} - k_{\dot{q}}(\dot{q} - \bar{u}), \\ \ddot{q} &= \dot{\bar{u}} - 2k_{\dot{q}}(\dot{q} - \bar{u}) + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma), \\ \dot{\gamma} &= k_\xi(\xi - \gamma), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $k_{\dot{q}}$ и k_ξ - положительные константы. Тогда получаем

$$\dot{V}_T = -k_{\dot{q}}(\dot{q} - \bar{u})^T(\dot{q} - \bar{u}) - k_\xi k_2(\xi - \gamma)^T(\xi - \gamma) \leq 0.$$

Таким образом, задача траекторного управления относительно внешнего поглощаемого объекта была сведена к задаче. Дальше идут рассуждения, аналогичные представленным выше, которые мы опустим.

Ниже, на рисунках 3.7 - 3.12 представлены результаты численного эксперимента. В данном эксперименте желаемая траектория задана в виде пересечения двух неявнозаданных поверхностей:

$$r_x^2 + r_y^2 - 100 = 0 \cup r_z = 0.$$

Заданная скорость траекторного движения $Vs^* = 20$. Параметры объекта управления и регулятора выбраны в виде: $m = 1$, $J = I \in R^3$ - единичная матрица, $k_{\varphi_1} = 1$, $k_{\dot{\varphi}_1} = 1$, $k_{\dot{q}} = 2$, $k_\xi = 10$, $k_1 = 10$, $k_2 = 42$. Внешний объект движется в пространстве с постоянным вектором скорости $[0, 1|0, 1|0, 2]^T$.

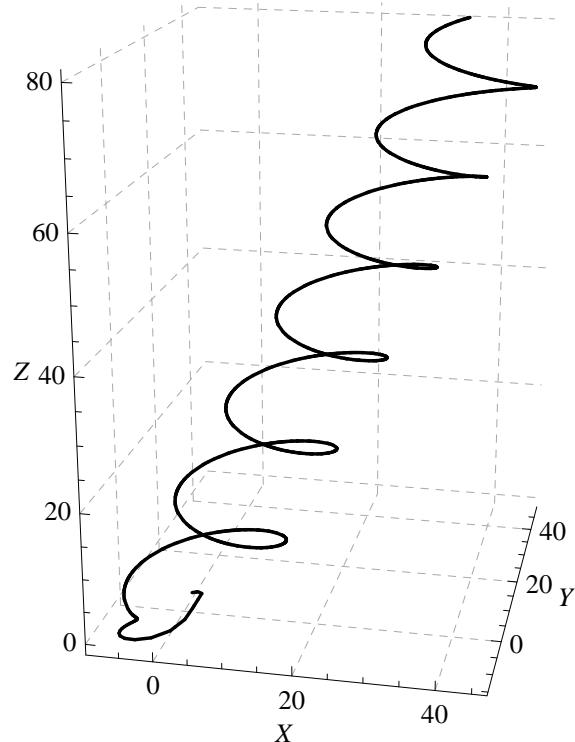


Рис. 3.7. Результирующая траектория в пространстве

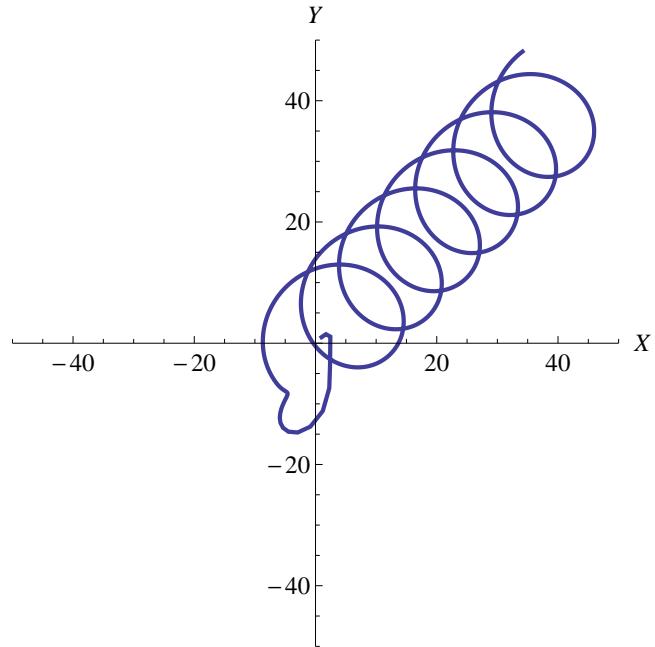


Рис. 3.8. Проекция результирующей траектории на плоскость XY

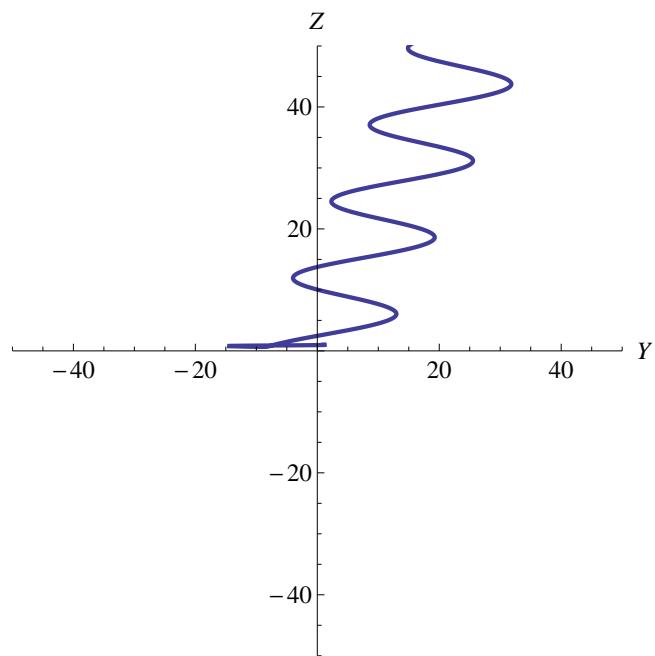


Рис. 3.9. Проекция результирующей траектории на плоскость YZ

3. Стабилизация угловой ориентации

Теперь рассмотрим задачу стабилизацию угловой ориентации объекта управления. Вообще говоря для модели полноприводного твердого тела, то есть твердого тела в котором число управляемых входов равно числу степе-

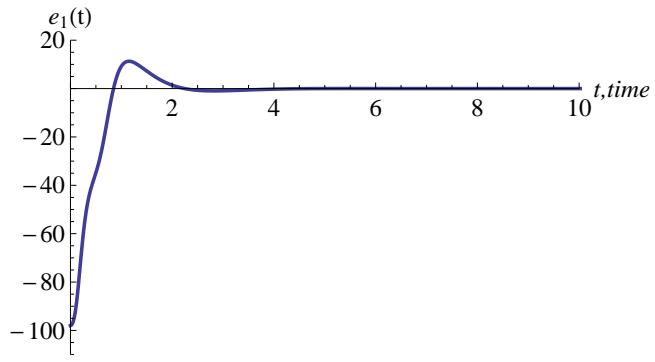


Рис. 3.10. Отклонение от заданной траектории $e_1(t)$

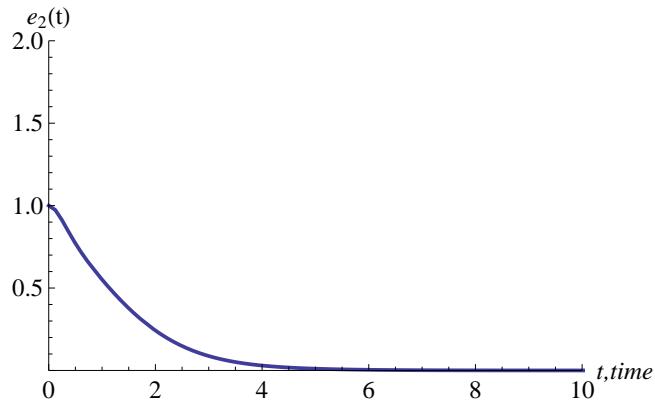


Рис. 3.11. Отклонение от заданной траектории $e_2(t)$

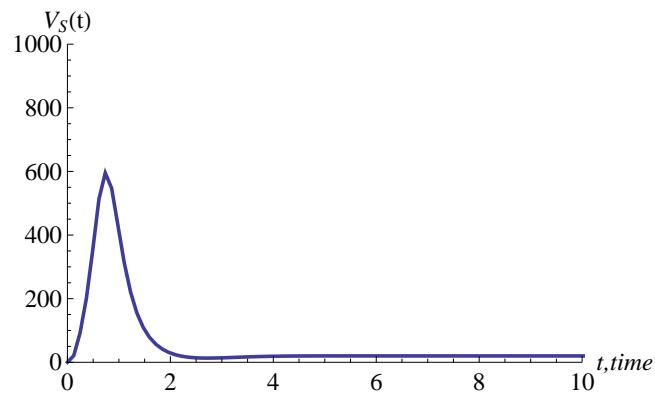


Рис. 3.12. Траекторная скорость $V_s(t)$

ней свободы, вращательное движение может быть изъято из рассмотрения ввиду отсутствия перекрёстных связей с элементами поступательного движения. Для модели неполноприводного твёрдого тела данное условие не выполняется, поэтому следует изучать общее поведение. В данном разделе мы

рассмотрим алгоритм стабилизации желаемой угловой ориентации.

Для начала ввёдем подвижную (связанную с центром масс управляемого тела O) правостороннюю декартову систему координат $X_OY_OZ_O$, где X_O - продольная ось, направленная вперёд, Y_O - поперечная ось, направленная слева направо, и Z_O - вертикальная ось, направленная сверху вниз. Движение управляемого объекта будем описывать относительно неподвижной (инерциальной) правосторонней декартовой системы координат $X_IY_IZ_I$, где X_I - ось координат, направленная с юга на север, Y_I - ось координат, направленная с запада на восток, и Z_I - вертикальная ось, направленная вниз, к центру Земли. Данная система координат широко используется при решении задач навигации.

Положение центра масс O связанной с телом системы координат $X_OY_OZ_O$ относительно неподвижной системы координат $X_IY_IZ_I$ будем описывать с помощью вектора координат $p = [x, y, z] \in R^3$, характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_I^O(\alpha) \in SO(3)$, где $\alpha = [\phi, \theta, \psi] \in R^3$ - вектор углов Эйлера, характеризующий вращение объекта управления относительно соответствующих направляющих осей базиса $X_IY_IZ_I$. Итоговая матрица угловой ориентации $R_I^O(\alpha)$ получается путем последовательного перемножения матриц вращения относительно каждой оси.

$$R_I^O(\alpha) = R_3(\phi)R_2(\theta)R_1(\psi),$$

где

$$R_1(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

В результате получаем итоговый вид матрицы поворота $R_I^O(\alpha)$ в виде:

$$R_I^O(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Так как матрица $R_I^O(\alpha)$ принадлежит специальной ортогональной группе $SO(3)$, то для нее выполняются следующие свойства:

$$R \in R^{3 \times 3}, R^T R = I = R R^T, \det(R) = 1.$$

Из этого следует, что для перехода от неподвижного базису к подвижного используется матрица $R_I^O(\alpha)$, а для обратного перехода матрица $R_O^I(\alpha) = (R_I^O(\alpha))^T$. Теперь рассмотрим задачу дифференцирование матрицы поворота. Из [49, 68, 70] известно, что

$$\dot{R}_O^I(\alpha) = R_O^I(\alpha) S(\omega),$$

где $\omega = [\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi]^T = R_I^O(\alpha) [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \in R^3$ - вектор угловых скоростей в связанной системе координат $X_OY_OZ_O$, $S(\omega) \in SO(3)$ - кососимметрическая матрица со структурой

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где $a = [a_1, a_2, a_3]^T \in R^3$ - вектор-столбец.

Для кососимметрической матрица справедливы следующие свойства:

- 1) $S + S^T = 0$;
- 2) $S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b)$;
- 3) $S(a)b = a \times b$;
- 4) $R(a \times b) = Ra \times Rb$;
- 5) $RS(a)R^T = S(Ra)$.

Соответственно из вышесказанного следует подобное выражение для матрицы $R_I^O(\alpha)$ в виде:

$$\dot{R}_I^O(\alpha) = -S(\omega) R_I^O(\alpha).$$

Текущую ориентацию объекта управления будем определять через единичный вектор n , фиксированный в связанном базисе $X_OY_OZ_O$. Желаемая ориентация задается в виде единичного вектора $n_{Od} = R_I^O n_{Id}$, заданный в неподвижном базисе X_IYIZ_I . Рассогласование между текущей ориентацией и желаемой вычисляется как скалярное произведение векторов $n^T n_{Od}$.

Теперь рассмотрим выражения дифференцирования векторов в связанном и неподвижном базисах. Пусть единичный вектор v задан в связанном базисе $X_OY_OZ_O$, тогда выражение для производной по времени принимает вид:

$$\frac{d}{dt}v = \omega \times v = S(\omega)v.$$

Для нормированного вектора $\frac{u}{|u|}$, данное выражение примет несколько иной вид [50]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \left(\frac{I_{3 \times 3}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{|\bar{u}|^3} \right) \dot{\bar{u}} = -\frac{S(\bar{u})^2}{|\bar{u}|^3} \dot{\bar{u}}$$

Для нормированного вектора $\bar{u}_O = R_I^O \frac{\bar{u}_I}{|\bar{u}_I|}$, заданного в неподвижном базисе X_IYIZ_I выражение для производной по времени в связанном базисе

$X_OY_OZ_O$ примет вид:

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_O = \frac{d}{dt}R_I^O \frac{\bar{u}_I}{|\bar{u}_I|} + R_I^O \frac{d}{dt} \frac{\bar{u}_I}{|\bar{u}_I|},$$

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_O = -S(\omega)\bar{u}_O - R_I^O \frac{S(\bar{u}_I)^2}{|\bar{u}_I|^3} \dot{\bar{u}}_I = S(\bar{u}_O)\omega - \frac{S(\bar{u}_O)^2}{|\bar{u}_I|} R_I^O \dot{\bar{u}}_I,$$

где \bar{u}_O - вектор \bar{u} в базисе $X_OY_OZ_O$, \bar{u}_I - вектор \bar{u} в базисе X_IYIZ_I

В качестве модели объекта управления рассмотрим уравнение вращательного движения, выраженное через угловые скорости ω в связанной системе координат $X_OY_OZ_O$.

$$J\dot{\omega} = M_c - S(\omega)J\omega,$$

где $\omega = [\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi]^T = R_I^O(\alpha) [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \in R^3$ - вектор угловых скоростей в связанной системе координат, J - тензор инерции твердого тела, $M_c = [\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi]^T \in R^3$ - вектор управляющих моментов, $S(\omega) \in SO(3)$ - кососимметрическая матрица построенная на основе вектора ω . Для синтеза управления также применим каскадный подход и начнём с подсистемы стабилизации заданных угловых скоростей. Рассмотрим функцию Ляпунова в виде:

$$V_\omega = \frac{1}{2}(\omega - \omega_d)^T J(\omega - \omega_d),$$

где $\omega_d \in R^3$ - вектор заданных угловых скоростей. Производная функции Ляпунова по времени равна

$$\frac{d}{dt}V_\omega = (\omega - \omega_d)^T (J\dot{\omega} - J\dot{\omega}_d) = (\omega - \omega_d)^T (M_c - S(\omega)J\omega - J\dot{\omega}_d).$$

Теперь, если выберем управляющее воздействие M_c в виде:

$$M_c = S(\omega)J\omega + J\dot{\omega}_d - k_1 J(\omega - \omega_d),$$

где k_1 - положительная константа. Тогда получаем

$$\dot{V}_\omega = -k_1(\omega - \omega_d)^T J(\omega - \omega_d) = -2k_1 V_R$$

Следовательно синтезированная подсистема управления угловой скорость обладает экспоненциальной сходимостью. Теперь, после замыкания обратной связи по скорости, можно упростить модель до вида: $\omega = \omega_d$. Теперь рассмотрим алгоритм стабилизации угловой ориентации. Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V_n = k_2 \ln(2 - n^T n_d),$$

где k_2 - положительная константа, $n \in R^3$ - вектор текущей ориентации твёрдого тела, $n_d \in R^3$ - вектор желаемой ориентации твёрдого тела. Теперь продифференцируем функцию Ляпунова, пользуясь приведённым выше выражением для дифференцирования векторов, и получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \frac{k_2}{2 - n^T n_d} \left(\frac{d}{dt} n^T n_{Od} - n^T \frac{d}{dt} n_{Od} \right) = \\ &= \frac{k_2}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_{Od}) \left(\omega_d - \frac{S(n_{Od})}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} \right), \end{aligned}$$

где n_{Od} - вектор n_d в базисе $X_OY_OZ_O$, n_{Id} - вектор n_d в базисе $X_IY_IZ_I$. Теперь выберем управляющее воздействие ω_d так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия $n^T n_d = 1$.

$$\omega_d = \frac{S(n_{Od})}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} - \frac{k_2 S(n_{Od}) n}{2 - n^T n_d}$$

Тогда производная по времени функции Ляпунова принимает вид:

$$\dot{V}_n = -\frac{k_2^2 (S(n_{Od}) n)^T (S(n_{Od}) n)}{(2 - n^T n_d)^2} < 0$$

Таким образом положения равновесия $n^T n_d = 1$ является асимптотически устойчивым с областью притяжения $(-\pi, \pi)$.

Далее расширим предложенную методику синтеза на случай управления движением относительно внешнего подвижного объекта. Для начала рассмотрим модель внешнего подвижного объекта. Положение центра масс T связанной с экзогенным объектом системы координат $X_TY_TZ_T$ относительно неподвижной системы координат $X_IY_IZ_I$ будем описывать с помощью

вектора координат $p_T = [x_T, y_T, z_T] \in R^3$, характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_I^T(\alpha_T) \in SO(3)$, где $\alpha_T = [\phi_T, \theta_T, \psi_T] \in R^3$ - вектор углов Эйлера, характеризующий вращение объекта управления относительно соответствующих направляющий осей базиса X_IYIZ_I . Выберем модель в виде:

$$m_T \ddot{p}_T = 0,$$

$$J_T \omega_T = -S(\omega_T) J_T \omega_T,$$

$$\dot{R}_I^T = -S(\omega_T) R_I^T,$$

где m_T - масса внешнего подвижного объекта, где $\omega_T \in R^3$ - вектор угловых скоростей в связанной с внешним объектом системе координат, J_T - тензор инерции внешнего твердого тела,

Положение объекта управления в базисе внешнего подвижного объекта определяется с помощью выражения

$$r = R_I^T(p - p_t)$$

Взаимная ориентация задается с помощью соотношения

$$R_T^O = R_I^O R_T^I$$

Текущая ориентация объекта управления определяется через единичный вектор \bar{n} , фиксированный в базисе подвижного объекта $X_OY_OZ_O$. Желаемая ориентация задается в виде единичного вектора $\bar{n}_{Od} = R_I^O R_T^I \bar{n}_{Td}$, заданный в базисе подвижного внешнего объекта X_IYIZ_I . Рассогласование между текущей ориентацией и желаемой вычисляется как скалярное произведение векторов $\bar{n}^T \bar{n}_{Od}$.

Для нормированного вектора $\bar{u}_O = R_I^O R_T^I \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|}$, заданного в подвижном базисе внешнего подвижного объекта $X_T Y_T Z_T$ выражение для производной по времени в связанным базисе $X_O Y_O Z_O$ примет вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_O = \frac{d}{dt} R_I^O R_T^I \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|} + R_I^O \frac{d}{dt} R_T^I \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|} + R_I^O R_T^I \frac{d}{dt} \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{u}_O &= -S(\omega) \bar{u}_O + R_I^O R_T^I S(\omega_{TT}) \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|} - R_I^O R_T^I \frac{S(\bar{u}_T)^2}{|\bar{u}_T|^3} \dot{\bar{u}}_T = \\ &= S(\bar{u}_O) \omega + S(\omega_{OT}) \bar{u}_O - \frac{S(\bar{u}_O)^2}{|\bar{u}_I|} R_I^O R_T^I \dot{\bar{u}}_T = \\ &= S(\bar{u}_O) (\omega - \omega_{OT}) - \frac{S(\bar{u}_O)^2}{|\bar{u}_T|} R_I^O R_T^I \dot{\bar{u}}_T, \end{aligned}$$

где \bar{u}_O - вектор \bar{u} в базисе $X_O Y_O Z_O$, \bar{u}_T - вектор \bar{u} в базисе $X_T Y_T Z_T$

По аналогии с представленным выше методом стабилизации желаемой ориентации для начала синтезируем контур управления по угловой скорости и получаем редуцированную модель

$$\omega = \omega_d$$

Теперь рассмотрим алгоритм стабилизации угловой ориентации. Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V_n = k_2 \ln(2 - n^T n_d),$$

где k_2 - положительная константа, $n \in R^3$ - вектор текущей ориентации твёрдого тела, $n_d \in R^3$ - вектор желаемой ориентации твёрдого тела. Теперь продифференцируем функцию Ляпунова, пользуясь приведённым выше выражением для дифференцирования векторов, и получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \frac{k}{2 - n^T n_d} \left(\frac{d}{dt} \bar{n}^T \bar{n}_{Od} - \bar{n}^T \frac{d}{dt} \bar{n}_{Od} \right) = \\ &= \frac{k}{2 - n^T n_d} \bar{n}^T S^T(\bar{n}_{Od}) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(\bar{n}_{Od})}{|\bar{n}^T|} R_I^O R_T^I \dot{\bar{u}}_{Td} \right), \end{aligned}$$

где n_{Od} - вектор n_d в базисе $X_OY_OZ_O$, n_{Td} - вектор n_d в базисе $X_TY_TZ_T$, ω_{OT} - вектор угловой скорости внешнего объекта в базисе $X_OY_OZ_O$. Теперь выберем управляющее воздействие ω_d так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия $n^T n_d = 1$.

$$\omega_d = \omega_{OT} + \frac{S(n_{Od})}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} - \frac{k_2 S(n_{Od}) n}{2 - n^T n_d}$$

Тогда производная по времени функции Ляпунова принимает вид:

$$\dot{V}_n = -\frac{k_2^2 (S(n_{Od}) n)^T (S(n_{Od}) n)}{(2 - n^T n_d)^2} < 0$$

Таким образом положения равновесия $n^T n_d = 1$ является асимптотически устойчивым с областью притяжения $(-\pi, \pi)$.

Ниже на рисунках 3.13 и 3.14 представлен результат численного эксперимента. В данном эксперименте смоделирована ситуация слежения объектом

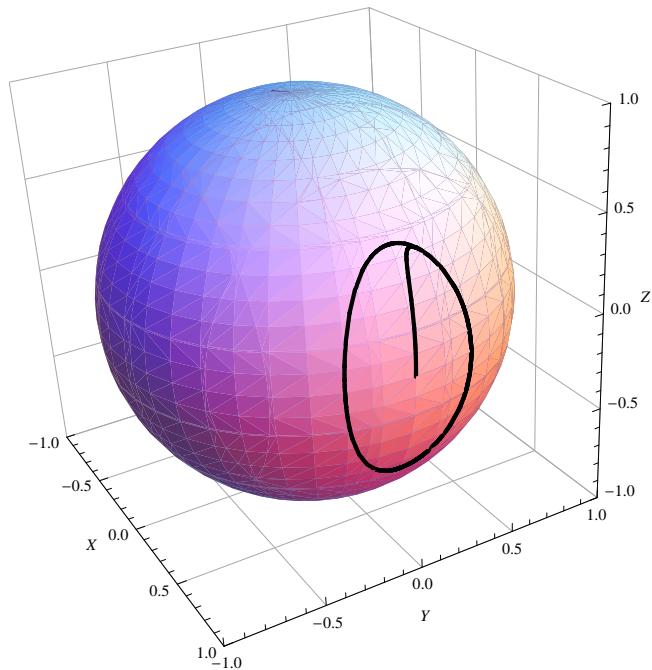


Рис. 3.13. Годограф вектора текущей ориентации на поверхности сферы

управления с вектором текущей ориентации $n = [1, 0, 0]^T$, заданном в связном базисе $X_OY_OZ_O$ за вектором желаемой ориентации, заданным в виде $n_d = [3, \sin \frac{t}{2}, 2 \cos \frac{t}{2}]^T$.

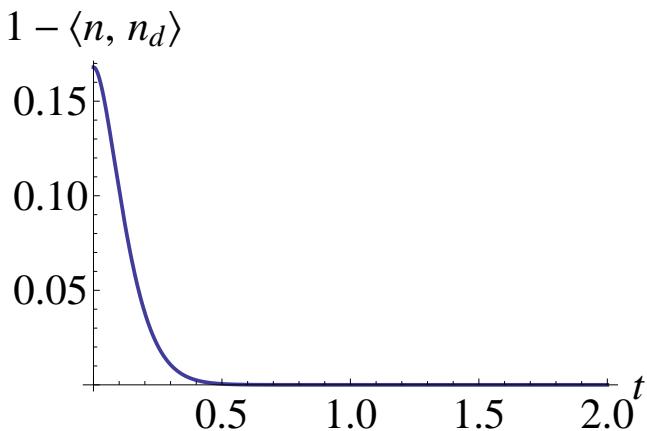


Рис. 3.14. Угловая ошибка, выраженная через скалярное произведение

4. Управление неполноприводным твердым телом

В предыдущих разделах были рассмотрены отдельно задачи траекторного управления и стабилизации угловой ориентации. Как уже было сказано выше, для объекта управления, описываемого моделью полноприводным твёрдым телом, такое разделение справедливо, но есть класс объектов, для которых такой подход не работает. Для них необходимо совместное рассмотрение поступательного и вращательного движения. В этой части мы рассмотрим задачу управление неполноприводным твердым телом тремя управляющими входами во вращательной динамике и одним входом для управления поступательным движением.

Движение управляемого объекта будем описывать относительно неподвижной (инерциальной) правосторонней декартовой системы координат $X_IY_IZ_I$, где X_I - ось координат, направленная с юга на север, Y_I - ось координат, направленная с запада на восток, и Z_I - вертикальная ось, направленная вниз, к центру Земли. Данная система координат широко используется при решении задач навигации. Положение центра масс O связанной с телом системы координат $X_OY_OZ_O$ относительно неподвижной системы координат $X_IY_IZ_I$ будем описывать с помощью вектора координат $p = [x, y, z] \in R^3$, ха-

рактеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_I^O(\alpha) \in SO(3)$, где $\alpha = [\phi, \theta, \psi] \in R^3$ - вектор углов Эйлера, характеризующий вращение. Текущую ориентацию объекта управления будем определять через единичный вектор n , фиксированный в связанном базисе $X_OY_OZ_O$. Желаемая ориентация задается в виде единичного вектора $n_{Od} = R_I^O n_{Id}$, заданный в неподвижном базисе X_IYIZ_I . Рассогласование между текущей ориентацией и желаемой вычисляется как скалярное произведение векторов $n^T n_{Od}$.

Для реализации схемы управления без измерения вектора линейных скоростей введём в рассмотрение вспомогательную переменную $\xi = p - q$, где q некоторая переменная, которую определим позже.

Исходная модель объекта управления неполноприводного твёрдого тела имеет вид:

$$\ddot{p} = g - \frac{f}{m}n,$$

$$J\dot{\omega} = M_c - S(\omega)J\omega,$$

где $p = [x, y, z] \in R^3$ - вектор текущих координат твёрдого тела, $g = [0, 0, g] \in R^3$ - вектор силы тяжести в системе координат X_IYIZ_I , m - масса объекта управления, $n \in R^3$ - вектор текущей ориентации, выбранный вдоль направления действия силы, f - скалярный управляющий вход, управляющий силой, приложенной вдоль оси n , $\omega = [\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi]^T = R_I^O(\alpha) [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \in R^3$ - вектор угловых скоростей в связанной системе координат, J - тензор инерции твердого тела, $M_c = [\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi]^T \in R^3$ - вектор управляющих моментов, $S(\omega) \in SO(3)$ - кососимметрическая матрица построенная на основе вектора ω .

Как можно заметить, динамика вращательного движения повторяет рассмотренную в предыдущей части, поэтому мы воспользуемся наработками,

представленными выше. Для начала мы считаем, что контур по угловой скорости уже синтезирован и в качестве входа используется вектор угловых скоростей. Преобразованная модель примет вид:

$$\ddot{p} = g - \frac{f}{m}n,$$

$$\omega = \omega_d.$$

Итак, начнём дальнейший анализ. Рассмотрим функцию Ляпунова:

$$V_u = \frac{1}{2}(\dot{p} - \bar{u})^T(\dot{p} - \bar{u}) + \frac{1}{2}\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{k_1}{2}\xi^T\xi + \frac{k_2}{2}(\xi - \gamma)^T(\xi - \gamma) + k_3 \ln(2 - n^T n_d),$$

где k_1, k_2, k_3 - положительные константы.

Найдём производную функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= (\dot{p} - \bar{u})^T(\ddot{p} - \dot{\bar{u}}) + \dot{\xi}^T(\ddot{p} - \ddot{\bar{u}}) + k_1\xi^T\dot{\xi} + \\ &\quad + k_2(\xi - \gamma)^T(\dot{\xi} - \dot{\gamma}) + \\ &\quad + \frac{k_2}{2 - n^T n_d}n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \frac{S(n_d)}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} \right) = \\ &= (\dot{q} - \bar{u})^T(\ddot{p} - \dot{\bar{u}}) + \dot{\xi}^T(2\ddot{p} - \dot{\bar{u}} - \ddot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma)) - \\ &\quad - k_2(\xi - \gamma)^T\dot{\gamma} + \frac{k_3}{2 - n^T n_d}n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \frac{S(n_d)}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} \right) = \\ &= (\dot{q} - \bar{u})^T(g - \frac{f}{m}n - \dot{\bar{u}}) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left(2g - \frac{2f}{m}n - \dot{\bar{u}} - \ddot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma) \right) - \\ &\quad - k_2(\xi - \gamma)^T\dot{\gamma} + \frac{k_3}{2 - n^T n_d}n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \frac{S(n_d)}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} \right), \end{aligned}$$

где $n_{Id} \in R^3$ - вектор желаемой ориентации, выраженный в неподвижном базисе.

Теперь введем замену переменных:

$$g - \dot{\bar{u}} = \frac{F}{m} = \frac{f_d}{m}n_d,$$

где $f_d = |F| \in R$ - длина вектора управляющей силы, $\hat{f}_d = \frac{F}{|F|} \in R^3$ - единичный вектор управляющей силы. Кроме того используем векторное тождество:

$$n_d = S(n)S(n_d)n + (n^T n_d)n.$$

Подставим в исходное выражение

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= \frac{1}{m}(\dot{q} - \bar{u})^T(f_d S(n)S(n_d)n + f_d(n^T n_d)n - fn) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{2f_d}{m}n_d - \frac{2f}{m}n + \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma) \right) - \\ &\quad - k_2(\xi - \gamma)^T \dot{\gamma} + \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \frac{S(n_d)}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} \right) = \\ &= \frac{1}{m}(\dot{q} - \bar{u})^T n (f_d(n^T n_d) - f) + \frac{f_d}{m}(\dot{q} - \bar{u})^T S(n)S(n_d)n + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left(\frac{2f_d}{m}n_d - \frac{2f}{m}n + \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma) \right) - \\ &\quad - k_2(\xi - \gamma)^T \dot{\gamma} + \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \frac{S(n_d)}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} \right). \end{aligned}$$

Теперь, если выбрать управление в виде:

$$\begin{aligned} f &= f_d(n^T n_d) - m k_q (\dot{q} - \bar{u})^T n, \\ \ddot{q} &= k_1\xi + k_2(\xi - \gamma) + \dot{\bar{u}} - \frac{2f_d}{m} S(n)S(n_d)n - 2k_q(\dot{q} - \bar{u})^T n, \\ \dot{\gamma} &= k_\gamma(\xi - \gamma), \\ \omega_d &= \frac{S(n_d)}{|n_d|} R_I^O \dot{n}_{Id} - \frac{k_3 S(n_{Od})n}{2 - n^T n_d} + \frac{f_d(2 - n^T n_d)}{k_3 m} S(n)(\dot{q} - \bar{u}) \end{aligned}$$

где k_q - положительная константа. После подстановки выражение для производной функции Ляпунова примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= -k_q ((\dot{q} - \bar{u})^T n)^2 - k_2 k_\gamma (\xi - \gamma)^T (\xi - \gamma) - \\ &\quad - \frac{k_3^2 (S(n_{Od})n)^T (S(n_{Od})n)}{(2 - n^T n_d)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Далее, аналогично рассуждениям представленных в разделе посвящённом управлению точечной массой, можно показать, что алгоритм управления

обеспечивает асимптотической сходимость контура по линейным скоростям. Дальнейшие действия эквивалентны случаю управления точечной массой, поэтому не будем их здесь приводить.

Ниже, на рисунках 3.15 - 3.21 представлены результаты численного эксперимента. В данном эксперименте желаемая траектория задана в виде пересечения двух неявно заданных поверхностей:

$$x^2 + y^2 - 400 = 0 \cup z + y - 10 = 0.$$

Заданная скорость траекторного движения $Vs^* = 30$. Параметры объекта управления и регулятора выбраны в виде: $m = 1$, $J = I \in R^3$ - единичная матрица, $k_{\varphi_1} = 0, 1$, $k_{\varphi_2} = 1$, $k_{\dot{q}} = 2$, $k_\xi = 10$, $k_1 = 10$, $k_2 = 42$.

Теперь расширим предложенную методику синтеза на случай управления движением относительно внешнего подвижного объекта. Для начала рассмотрим модель внешнего подвижного объекта. Положение центра масс T связанной с экзогенным объектом системы координат $X_T Y_T Z_T$ относительно неподвижной системы координат $X_I Y_I Z_I$ будем описывать с помощью вектора координат $p_T = [x_T, y_T, z_T] \in R^3$, характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_I^T(\alpha_T) \in SO(3)$, где $\alpha_T = [\phi_T, \theta_T, \psi_T] \in R^3$ - вектор углов Эйлера, характеризующий вращение объекта управления относительно соответствующих направляющий осей базиса $X_I Y_I Z_I$. Выберем модель в виде:

$$m_T \ddot{p}_T = 0,$$

$$J_T \omega_T = -S(\omega_T) J_T \omega_T,$$

$$\dot{R}_I^T = -S(\omega_T) R_I^T,$$

где m_T - масса внешнего подвижного объекта, $\omega_T \in R^3$ - вектор угловых

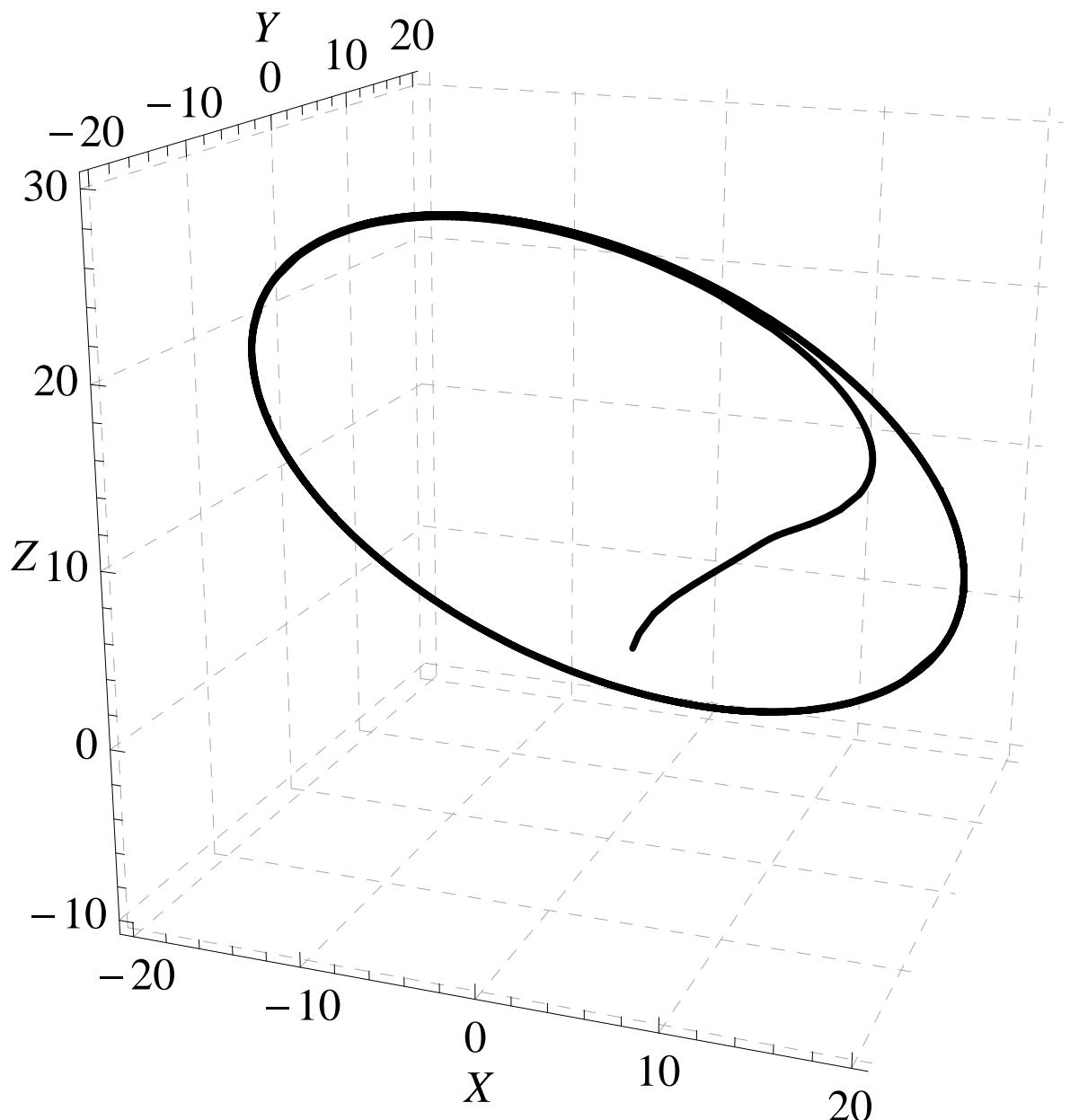


Рис. 3.15. Результирующая траектория в пространстве

скоростей в связанной с внешним объектом системе координат, J_T - тензор инерции внешнего твердого тела,

Так как положение объекта управления в базисе внешнего подвижного объекта определяется с помощью выражения

$$r = R_I^T (p - p_T),$$

то будем задавать траекторию с помощью пересечения двух уравнений по-

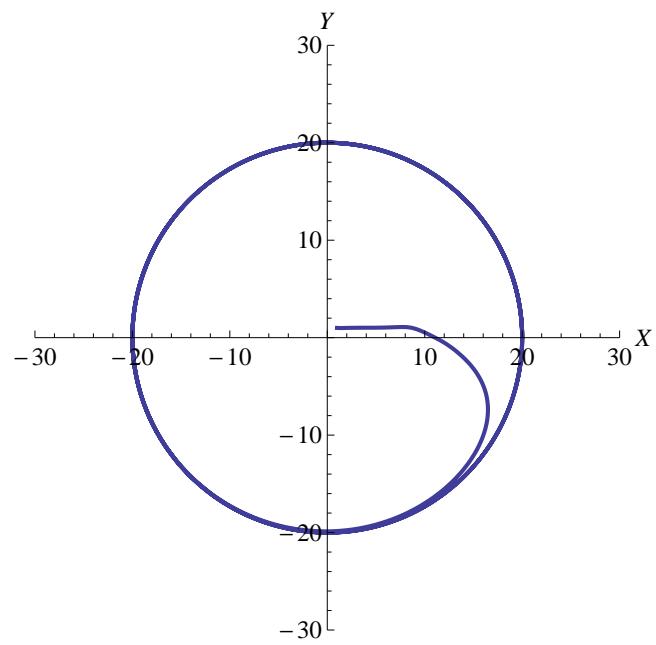


Рис. 3.16. Проекция результирующей траектории на плоскость XY

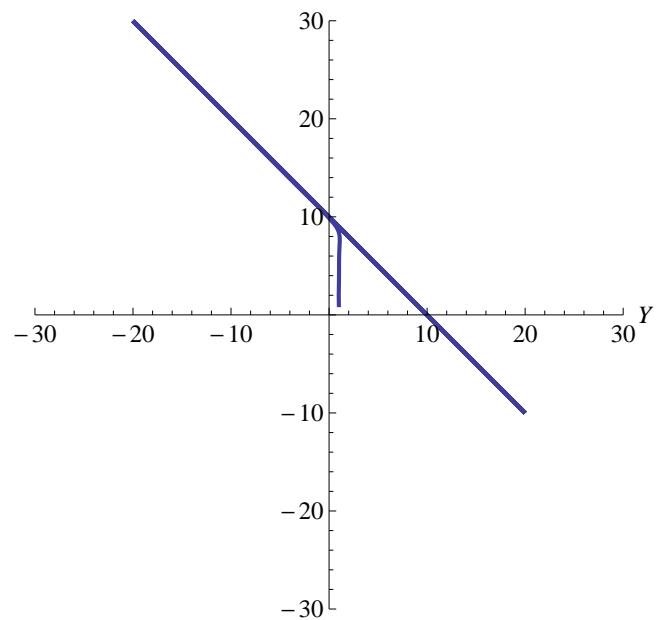


Рис. 3.17. Проекция результирующей траектории на плоскость YZ

верхностей, определённых в координатах r в неявной форме.

$$\varphi(r)_1 = 0 \cup \varphi(r)_2 = 0$$

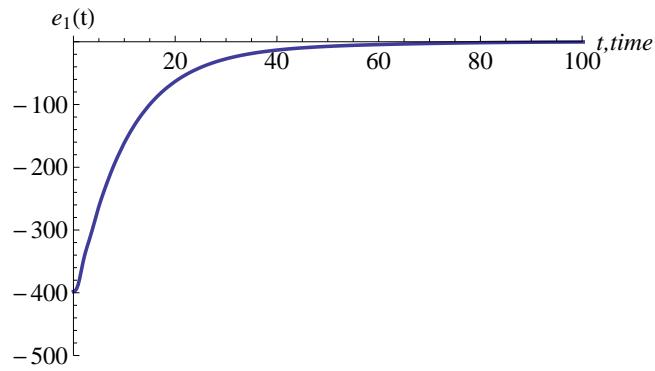


Рис. 3.18. Отклонение от заданной траектории $e_1(t)$

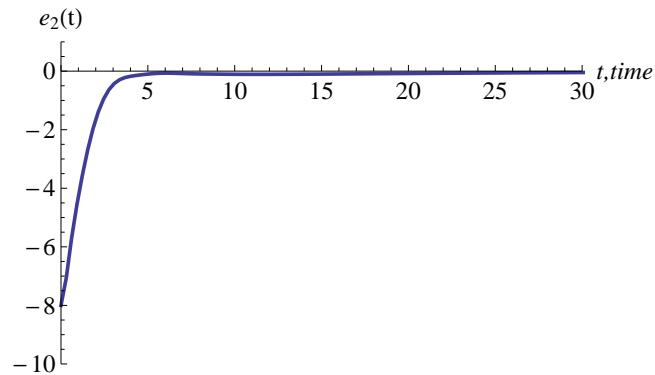


Рис. 3.19. Отклонение от заданной траектории $e_2(t)$

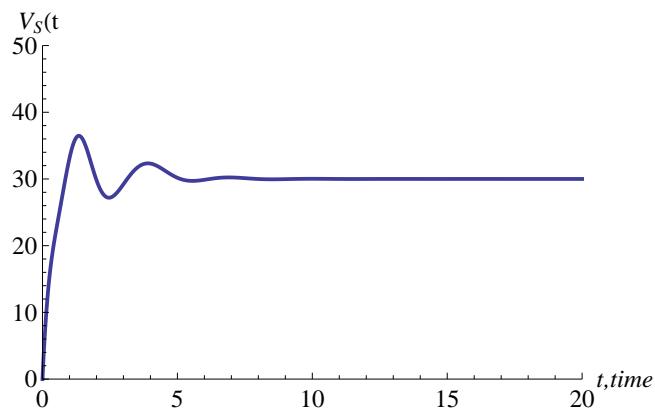


Рис. 3.20. Траекторная скорость $V_s(t)$

Взаимная ориентация задается с помощью соотношения

$$R_T^O = R_I^O R_T^I$$

Текущая ориентация объекта управления определяется через единичный вектор n , фиксированный в базисе подвижного объекта $X_OY_OZ_O$. Желаемая

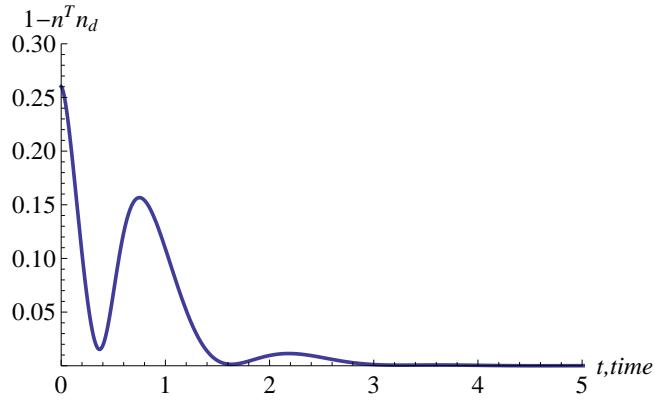


Рис. 3.21. Угловая ошибка, выраженная через скалярное произведение

ориентация задается в виде единичного вектора $n_{Od} = R_I^O R_T^I n_{Td}$, заданный в базисе подвижного внешнего объекта $X_I Y_I Z_I$. Рассогласование между текущей ориентацией и желаемой вычисляется как скалярное произведение векторов $n^T n_{Od}$.

Для нормированного вектора $\bar{u}_O = R_I^O R_T^I \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|}$, заданного в подвижном базисе внешнего подвижного объекта $X_T Y_T Z_T$ выражение для производной по времени в связанном базисе $X_O Y_O Z_O$ примет вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_O = \frac{d}{dt} R_I^O R_T^I \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|} + R_I^O \frac{d}{dt} R_T^I \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|} + R_I^O R_T^I \frac{d}{dt} \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{u}_O &= -S(\omega) \bar{u}_O + R_I^O R_T^I S(\omega_{TT}) \frac{\bar{u}_T}{|\bar{u}_T|} - R_I^O R_T^I \frac{S(\bar{u}_T)^2}{|\bar{u}_T|^3} \dot{\bar{u}}_T = \\ &= S(\bar{u}_O) \omega + S(\omega_{OT}) \bar{u}_O - \frac{S(\bar{u}_O)^2}{|\bar{u}_I|} R_I^O R_T^I \dot{\bar{u}}_T = \\ &= S(\bar{u}_O) (\omega - \omega_{OT}) - \frac{S(\bar{u}_O)^2}{|\bar{u}_T|} R_I^O R_T^I \dot{\bar{u}}_T, \end{aligned}$$

где \bar{u}_O - вектор \bar{u} в базисе $X_O Y_O Z_O$, \bar{u}_T - вектор \bar{u} в базисе $X_T Y_T Z_T$

Трансформируем исходную модель в терминах координат подвижного базиса, связанного с внешним подвижным объектом

$$\dot{r} = -S(\omega_{TT}) R_I^T (p - p_T) + R_I^T (\dot{p} - \dot{p}_T) = -S(\omega_{TT}) r + R_I^T (\dot{p} - \dot{p}_T),$$

где ω_{TT} - угловая скорость внешнего объекта в связаном базисе $X_T Y_T Z_T$.

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= -\dot{S}(\omega_{TT})r - S(\omega_{TT}) \left(-S(\omega_{TT})r + R_I^T (\dot{p} - \dot{p}_T) \right) - \\
&\quad - S(\omega_{TT})R_I^T (\dot{p} - \dot{p}_T) + R_I^T \ddot{p} = \\
&= -\dot{S}(\omega_{TT})r + S^2(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})R_I^T (\dot{p} - \dot{p}_T) + R_I^T \ddot{p} = \\
&= R_I^T g - \frac{f}{m} R_I^T n + S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - \\
&\quad - 2S(\omega_{TT})R_I^T (\dot{p} - \dot{p}_T) = \\
&= R_I^T g - \frac{f}{m} R_I^T n - S^2(\omega_{TT})r - \dot{S}(\omega_{TT})r - 2S(\omega_{TT})\dot{r}.
\end{aligned}$$

Для реализации схемы управления без измерения вектора линейных скоростей введём в рассмотрение вспомогательную переменную $\xi = r - q$, где q некоторая переменная, которую определим позже. Как можно заметить, динамика вращательного движения повторяет рассмотренную в предыдущей части, поэтому мы воспользуемся наработками, представленными выше. Для начала мы считаем, что контур по угловой скорости уже синтезирован и в качестве входа используется вектор угловых скоростей. Преобразованная модель примет вид:

$$\omega = \omega_d.$$

Итак, начнём дальнейший анализ. Рассмотрим функцию Ляпунова:

$$\begin{aligned}
V_u &= \frac{1}{2}(\dot{r} - \bar{u})^T (\dot{r} - \bar{u}) + \frac{1}{2}\dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{k_1}{2}\xi^T \xi + \frac{k_2}{2}(\xi - \gamma)^T (\xi - \gamma) + \\
&\quad + k_3 \ln(2 - n^T n_d),
\end{aligned}$$

где k_1, k_2, k_3 - положительные константы.

Найдём производную функции Ляпунова:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u &= (\dot{r} - \bar{u})^T (\ddot{r} - \dot{\bar{u}}) + \dot{\xi}^T (\ddot{r} - \ddot{q}) + k_1 \xi^T \dot{\xi} + \\
&+ k_2 (\xi - \gamma)^T (\dot{\xi} - \dot{\gamma}) + \\
&+ \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} \right) = \\
&= (\dot{q} - \bar{u})^T (\ddot{r} - \dot{\bar{u}}) + \dot{\xi}^T (2\ddot{r} - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1 \xi + k_2 (\xi - \gamma)) - \\
&- k_2 (\xi - \gamma)^T \dot{\gamma} + \\
&+ \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} \right) = \\
&= (\dot{q} - \bar{u})^T (R_I^T g - \frac{f}{m} R_I^T n - S^2(\omega_{TT}) r - \dot{S}(\omega_{TT}) r - 2S(\omega_{TT}) \dot{r} - \dot{\bar{u}}) + \\
&+ \dot{\xi}^T (2\ddot{r} - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1 \xi + k_2 (\xi - \gamma)) - \\
&- k_2 (\xi - \gamma)^T \dot{\gamma} + \\
&+ \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} \right) = \\
&= (\dot{q} - \bar{u})^T (R_I^T g - \frac{f}{m} R_I^T n - S^2(\omega_{TT}) r - \dot{S}(\omega_{TT}) r - 2S(\omega_{TT}) \dot{q} - \dot{\bar{u}}) + \\
&+ \dot{\xi}^T (2\ddot{r} + 2S(\omega_{TT})(\dot{q} - \bar{u}) - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1 \xi + k_2 (\xi - \gamma)) - \\
&- k_2 (\xi - \gamma)^T \dot{\gamma} + \\
&+ \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} \right) = ,
\end{aligned}$$

где n_{Td} - вектор n_d в базисе $X_T Y_T Z_T$, ω_{OT} - вектор угловой скорости внешнего объекта в базисе $X_O Y_O Z_O$.

Теперь введем замену переменных:

$$R_I^T g - S^2(\omega_{TT}) r - \dot{S}(\omega_{TT}) r - 2S(\omega_{TT}) \dot{q} - \dot{\bar{u}} = R_I^T \frac{F}{m} = \frac{f_d}{m} R_I^T n_d,$$

где $f_d = |F| \in R$ - длина вектора управляющей силы, $f_d = \frac{F}{|F|} \in R^3$ - единич-

ный вектор управляющей силы. Кроме того используем векторное тождество:

$$n_d = S(n)S(n_d)n + (n^T n_d)n.$$

Подставим в исходное выражение

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= \frac{1}{m}(\dot{q} - \bar{u})^T R_I^T (f_d S(n)S(n_d)n + f_d(n^T n_d)n - fn) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T (2\ddot{r} + 2S(\omega_{TT})(\dot{q} - \bar{u}) - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma)) - \\ &\quad - k_2(\xi - \gamma)^T \dot{\gamma} + \\ &\quad + \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} \right) = \\ &= \frac{1}{m}(\dot{q} - \bar{u})^T n (f_d(n^T n_d) - f) + \frac{f_d}{m}(\dot{q} - \bar{u})^T S(n)S(n_d)n + \\ &\quad + \dot{\xi}^T (2\ddot{r} + 2S(\omega_{TT})(\dot{q} - \bar{u}) - \dot{\bar{u}} - \ddot{q} + k_1\xi + k_2(\xi - \gamma)) - \\ &\quad + \frac{k_3}{2 - n^T n_d} n^T S^T(n_d) \left(\omega_d - \omega_{OT} - \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} \right). \end{aligned}$$

Теперь, если выбрать управление в виде:

$$\begin{aligned} f &= f_d(n^T n_d) - m k_q (\dot{q} - \bar{u})^T n, \\ \ddot{q} &= k_1\xi + k_2(\xi - \gamma) - 2\ddot{r} - 2S(\omega_{TT})(\dot{q} - \bar{u}) + \dot{\bar{u}}, \\ \dot{\gamma} &= k_\gamma(\xi - \gamma), \\ \omega_d &= \omega_{OT} + \frac{S(n_d)}{|n^T|} R_I^O R_T^I \dot{n}_{Td} - \frac{k_3 S(n_{Od})n}{2 - n^T n_d} + \frac{f_d(2 - n^T n_d)}{k_3 m} S(n)(\dot{q} - \bar{u}) \end{aligned}$$

где k_q - положительная константа. После подстановки выражение для производной функции Ляпунова примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u &= -k_q ((\dot{q} - \bar{u})^T n)^2 - k_2 k_\gamma (\xi - \gamma)^T (\xi - \gamma) - \\ &\quad - \frac{k_3^2 (S(n_{Od})n)^T (S(n_{Od})n)}{(2 - n^T n_d)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Далее, аналогично рассуждениям представленных в разделе посвящённом управлению точечной массой, можно показать, что алгоритм управления

обеспечивает асимптотической сходимость контура по линейным скоростям. Дальнейшие действия эквивалентны случаю управления точечной массой, поэтому не будем их здесь приводить.

Ниже, на рисунках 3.22 - 3.28 представлены результаты численного эксперимента. В данном эксперименте желаемая траектория задана в виде пересечения двух неявно заданных поверхностей:

$$r_x^2 + r_y^2 - 400 = 0 \cup r_z + r_y - 10 = 0.$$

Заданная скорость траекторного движения $Vs^* = 30$. Параметры объекта управления и регулятора выбраны в виде: $m = 1$, $J = I \in R^3$ - единичная матрица, $k_{\varphi_1} = 0, 1$, $k_{\varphi_2} = 1$, $k_{\dot{q}} = 2$, $k_\xi = 10$, $k_1 = 10$, $k_2 = 42$. Внешний объект движется в пространстве с постоянным вектором скорости $[0, 1|0|0, 1]^T$.

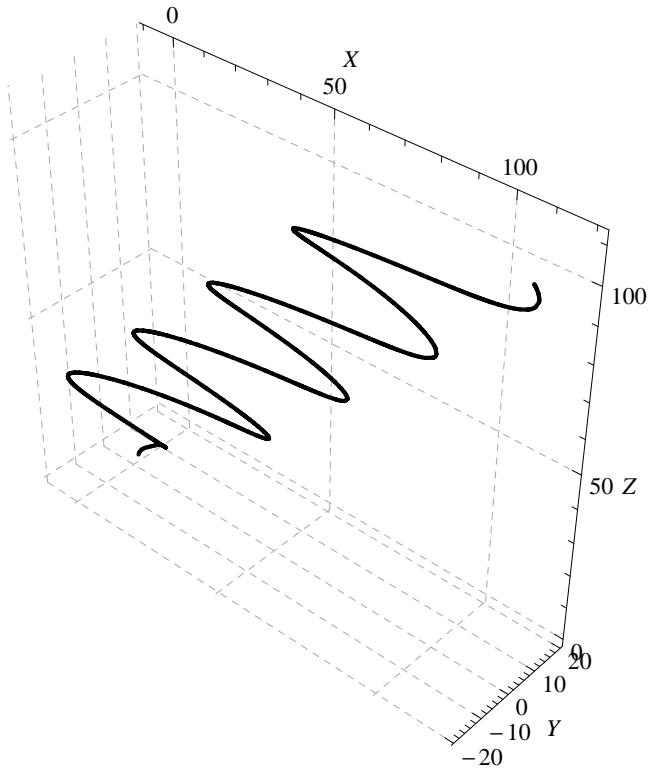


Рис. 3.22. Результирующая траектория в пространстве

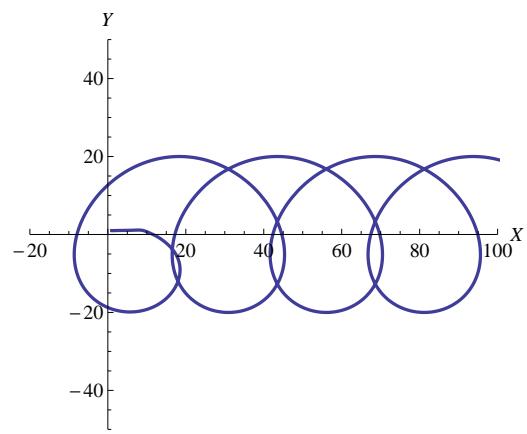


Рис. 3.23. Проекция результирующей траектории на плоскость XY

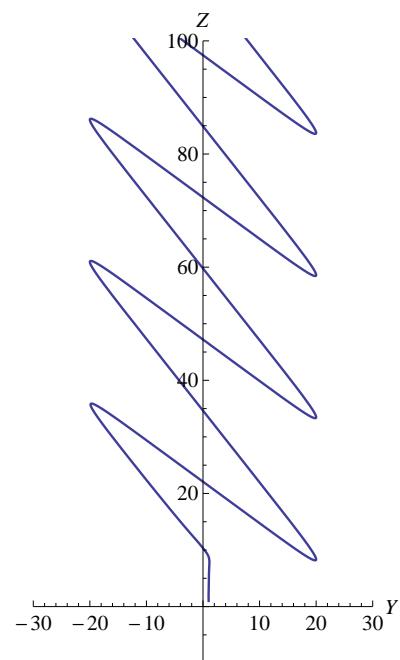


Рис. 3.24. Проекция результирующей траектории на плоскость YZ

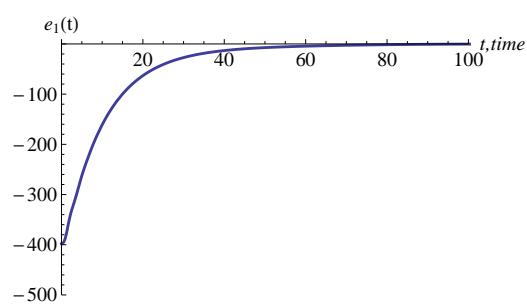


Рис. 3.25. Отклонение от заданной траектории $e_1(t)$

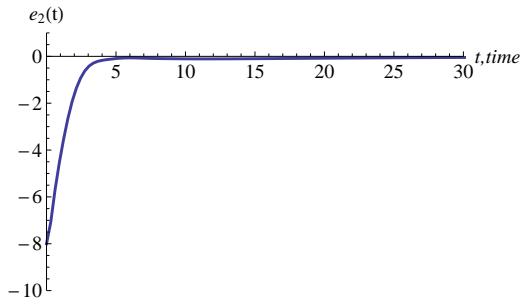


Рис. 3.26. Отклонение от заданной траектории $e_2(t)$

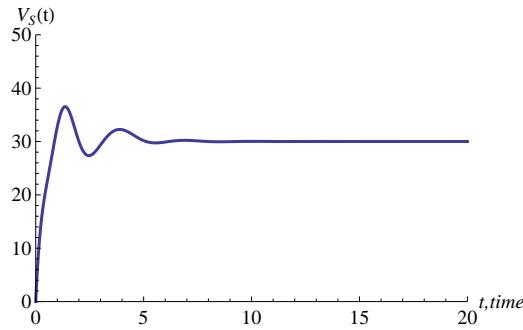


Рис. 3.27. Траекторная скорость $V_s(t)$

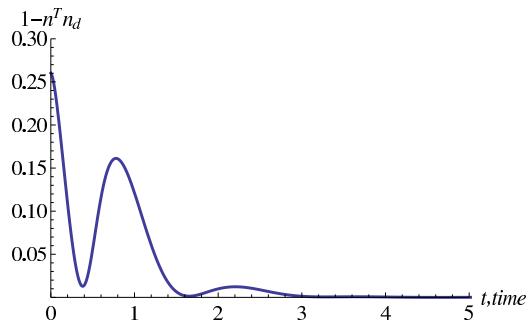


Рис. 3.28. Угловая ошибка, выраженная через скалярное произведение

5. Заключение

В данной главе были представлен метод синтеза траекторных регуляторов для мобильных робототехнических систем, допускающих описание в виде полноприводного или неполноприводного твёрдого тела в пространстве. Синтезированные законы управления построены на основе принципа стабилизации целевых множеств в пространстве выходов объекта управления, позволяющих обеспечить инвариантность траектории, что позволяет добиться

большой точности движения. Представленный подход не требует измерения вектора линейных скоростей.

Глава 4

Система траекторного управления роботом с роликонесущими колёсами

1. Введение

В предыдущей главе были рассмотрены методы синтеза законов траекторного управления для мобильных робототехнических систем. В настоящей главе, будет представлены результаты экспериментальной апробации предложенных ранее алгоритмов. В результате работы над данной задачей была реализована система траекторного управления мобильного робота с роликонесущими колёсами "Robotino" , разработанного немецкой фирмой "Festo Didactics" . Данный тип роботов с точки зрения механики является голономной системой и позволяет разделить управление каждой степенью свободы. Помимо прочего, имеющийся в распоряжении экземпляр оснащён системой локальной навигации "North Star" что делает данную тестовую платформу идеальной для проверки разрабатываемых алгоритмов траекторного управления в действии. Для начала детальнее рассмотрим конструкцию робота.

2. Техническое описание

Аппаратное обеспечение робота Robotino состоит из следующих элементов:

1. Система питания — два свинцовых аккумулятора, обеспечивающих автономное питание



Рис. 4.1. Робот “Robotino” фирмы “Festo Didactics”

2. Платформа с тремя двигателями постоянного тока с встроенным редуктором и ременной передачей на роликонесущие колёса. 3. Датчики углов поворота, измеряющие угол поворота осей двигателя.
4. Беспроводная точка доступа для связи робота с компьютером и другими роботами.
5. Управляющий компьютер на базе процессора с AMD Geode.

Геометрические характеристики:

- Диаметр: 370 мм
- Высота: 210 мм
- Вес: 11 кг



Рис. 4.2. Омнидирекционная платформа. Вид сверху.

Характеристики электроприводов колёс:

- Номинальная скорость 3600 об.мин
- Крутящий момент 3.8 Нсм
- Диаметр колеса 80 мм
- Передаточное отношение 16:1
- Разрешение энкодера 2048 дел/об

Программное обеспечение робота состоит из двух частей. К первой части относится внутреннее программное обеспечение на базе операционной системы Linux Ubuntu с расширением для работы в реальном времени RTAI. Ко второй части относится клиентское программное обеспечение, которое может быть



Рис. 4.3. Омнидирекционная платформа. Вид снизу.

запущено локально на роботе или удалённо, посредством беспроводной сети Wi-Fi, с компьютера разработчика. В представленной далее реализации, для связи с роботом, был использован пакет OpenRobotino API. Далее рассмотрим математическое описание робота.

3. Математическое описание

При решении задач управления движение мобильным роботом в качестве описания системы используется модель движения твердого тела на поверхности. В нашей реализации мы также будем использовать данный подход. Для начала ввёдем подвижную (связанную с центром масс управляемого тела G) правостороннюю декартову систему координат X_OY_O , где X_O - продольная ось, направленная вперёд и Y_O - поперечная ось, направленная слева



Рис. 4.4. Роликонесущее колесо

направо. Движение управляемого объекта будем описывать относительно неподвижной (инерциальной) правосторонней декартовой системы координат X_IY_I . Положение центра масс G связанной с телом системы координат X_OY_O относительно неподвижной системы координат X_IY_I будем описывать с помощью вектора координат $p = [x, y] \in R^2$, характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентацию связанного базиса относительно неподвижного задается с помощью матрицы направляющих косинусов $R_O^I(\alpha) \in SO(2)$, где $\alpha \in R$ - угол поворота базиса X_OY_O относительно X_IY_I .

Выберем модель объекта управления в виде:

$$m\ddot{p} = F,$$

$$\dot{p} = R_O^I(\alpha)v,$$

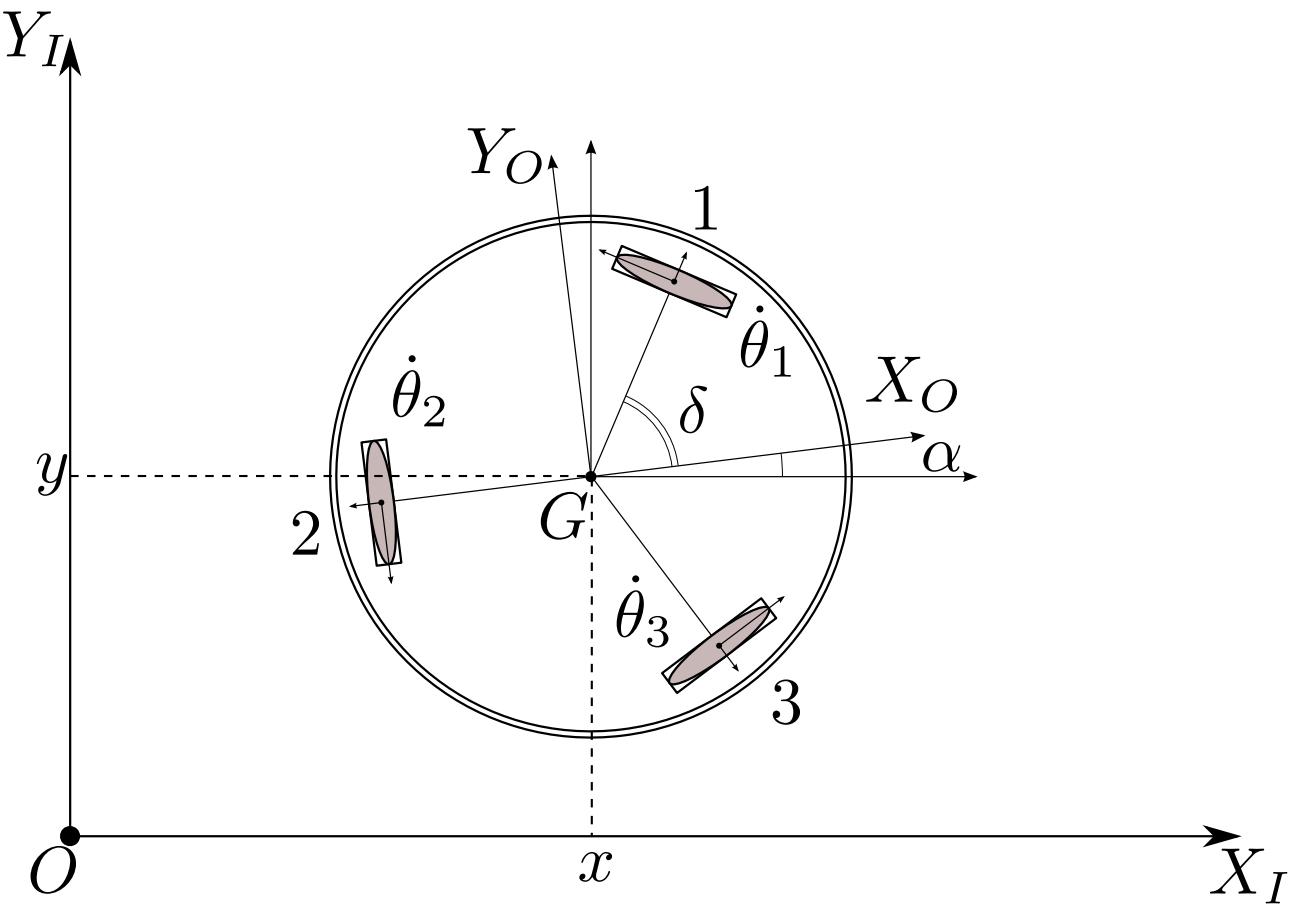


Рис. 4.5. Математическое описание задачи

$$R_O^I(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\dot{\alpha} = \omega.$$

где $p = [x, y]^T \in R^2$ - вектор-столбец текущих координат, m - масса тела, $F = [F_x, F_y]^T \in R^2$ - вектор-столбец управляющих сил, $v \in R^2$ - вектор-столбец скоростей в базисе X_OY_O .

Связь между скоростями колёс

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & L \\ 0 & -1 & L \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix},$$

где L - расстояние от центра масс G до колеса.

Желаемую траекторию движения будем задавать в виде неявного уравнения.

$$\varphi(p) = 0 \quad (3.1)$$

Ортогональное отклонение от заданной траектории в точке p будем вычислять как:

$$e(p) = \varphi(p),$$

Кроме того сразу определим матрицу преобразования к задачно-ориентированному базису:

$$\Upsilon(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(p)}{\partial y} & -\frac{\partial \varphi(p)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(p)}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \Upsilon(p)\dot{p} = \Upsilon(p)R_I^O(\alpha)v,$$

Как было рассмотрено в предыдущей главе управляющее воздействие будем формировать в виде двух компонент, каждый из которых решает раздельно геометрическую и кинематическую подзадачи.

$$u = u_k + u_s, \quad (3.2)$$

$$u_k = R_O^I(\alpha)\Upsilon^{-1}(p) \begin{bmatrix} V^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$u_k = \frac{V^*}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi(p)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(p)}{\partial y}\right)^2}} \begin{bmatrix} \cos \alpha \frac{\partial \varphi(p)}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x} \\ -\sin \alpha \frac{\partial \varphi(p)}{\partial y} - \cos \alpha \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$u_s = k_e \varphi(p) \frac{\nabla \varphi(p)}{\|\nabla \varphi(p)\|^2}, \quad (3.5)$$

где $\nabla \varphi(p)$ - вектор частных производных, k_e - положительная константа.

Управление ориентацией реализовано в виде

$$u_R = \omega + S(n_d)R_O^I(\alpha) \frac{d}{dt} (R_I^O(\alpha)n_d) - \frac{k_R}{2 - n^T n_d} S(n_d)n,$$

где n_d - вектор желаемой ориентации, n - вектор текущей ориентации, k_R - положительная константа, $S(n_d)$ - кососимметрическая матрица, составленная из элементов вектора n_d .

Вообще говоря, предложенная ранее процедура синтеза основана на последовательном синтезе контуров, но в данном случае, локальная система управления робота организует внутренний контур по скорости, на вход которого поступают управляющие воздействия выработанные регуляторами 3.2-3.5. Далее будут детально рассмотрены частные реализации.

4. Движение вдоль прямой

Для реализации движения вдоль прямой линии выбрано геометрическое описание в виде нормальной формы:

$$-\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi^* = 0,$$

где α^* - заданный угол наклона прямой, φ^* - заданное ортогональное смещение. В данном эксперименте были выбраны следующие параметры: $k_e = 3$, $k_R = 100$, $\alpha^* = 0$, $\varphi^* = 0$, $V_s = 300$ (мм/с).

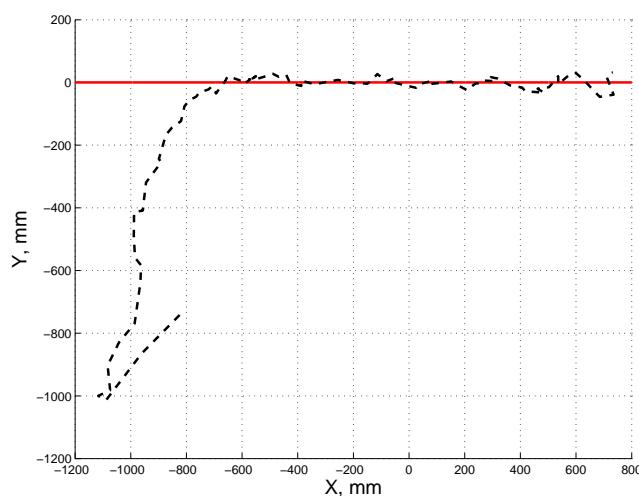


Рис. 4.6. Траектория движения

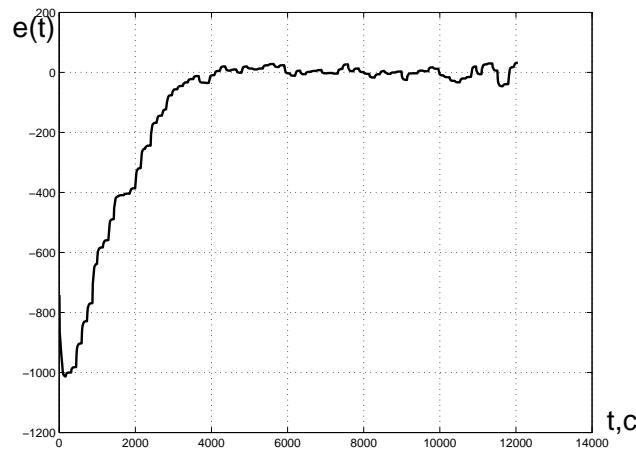


Рис. 4.7. Отклонение от траектории $\varphi(x(t), y(t))$

5. Движение вдоль окружности

Для реализации движения вдоль окружности выбрано геометрическое описание в виде неявного уравнения окружности:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

где α^* - заданный угол наклона прямой, φ^* - заданное ортогональное смещение. В данном эксперименте были выбраны следующие параметры: $k_e = 3$, $k_R = 100$, $R = 500$ (мм), $V_s = 300$ (мм/с).

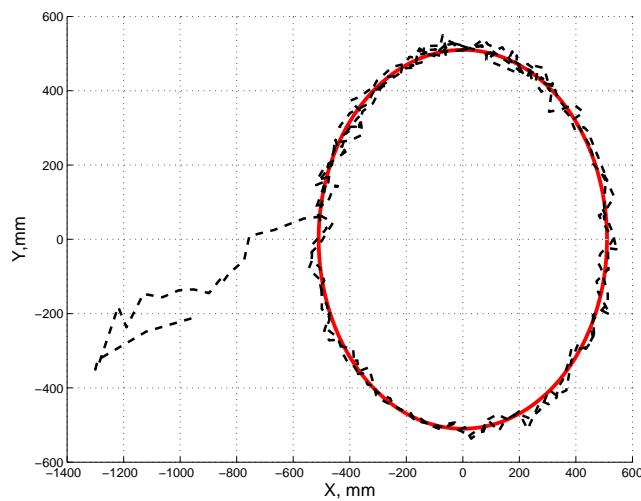


Рис. 4.8. Траектория движения

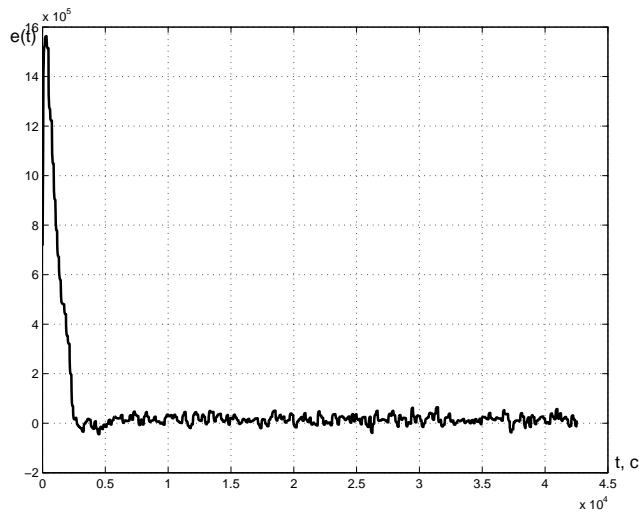


Рис. 4.9. Отклонение от траектории $\varphi(x(t), y(t))$

6. Движение вдоль криволинейной траектории

Для реализации движения вдоль криволинейной траектории выбрано геометрическое описание синусоидальной прямой:

$$y - A \sin(kx) = 0,$$

где - заданная амплитуда, k - коэффициент имеющий математический смысл заданной частоты. В данном эксперименте были выбраны следующие параметры: $k_e = 3$, $k_R = 100$, $A = 300(\text{мм})$, $k = 0,005$, $V_s = 300(\text{мм}/\text{с})$.

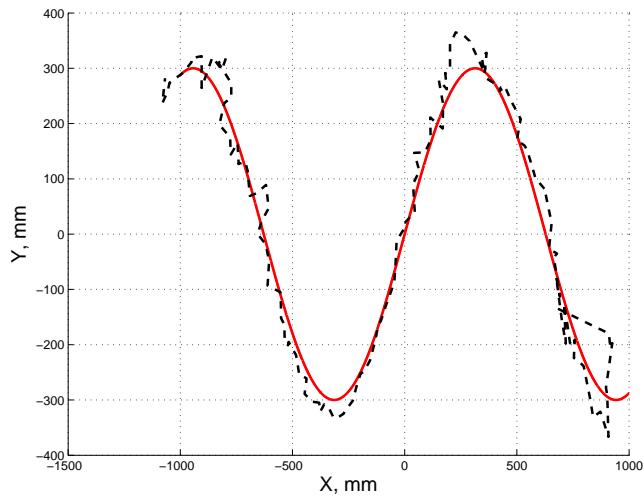


Рис. 4.10. Траектория движения

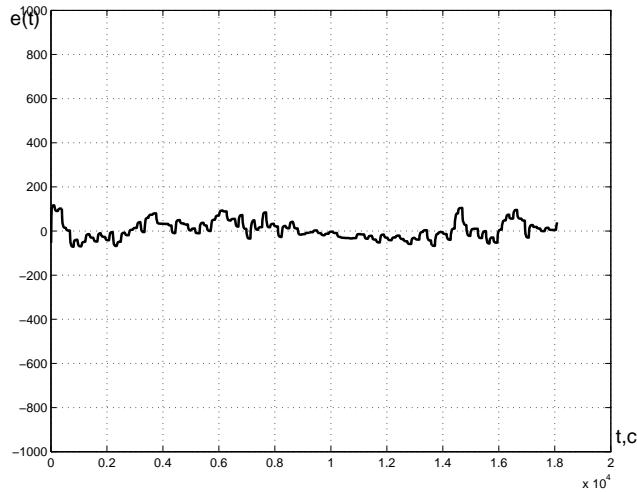


Рис. 4.11. Отклонение от траектории $\varphi(x(t), y(t))$

7. Движение вдоль составной кривой

В данном эксперименте ставилась цель показать, как ведёт себя замкнутая система при переключении траекторий. Заданная траектория составлена из двух прямолинейных участков и двух окружностей:

1. Прямолинейный участок от точки $[-400, 400]$ до точки $[400, 400]$ и углом наклона $\alpha^* = 0$;
2. Участок окружности с центром в точке $[400, 0]$ и радиусом $R = 400$;

3. Прямолинейный участок от точки $[400, -400]$ до точки $[-400, -400]$ и углом наклона $\alpha^* = 0$;

4. Участок окружности с центром в точке $[-400, 0]$ и радиусом $R = 400$.

Заданная скорость движения вдоль траектории $V_s = 300$ (мм/с).

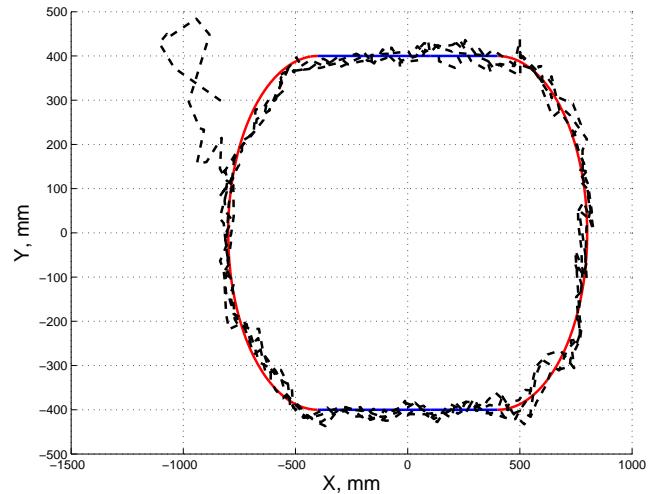


Рис. 4.12. Траектория движения

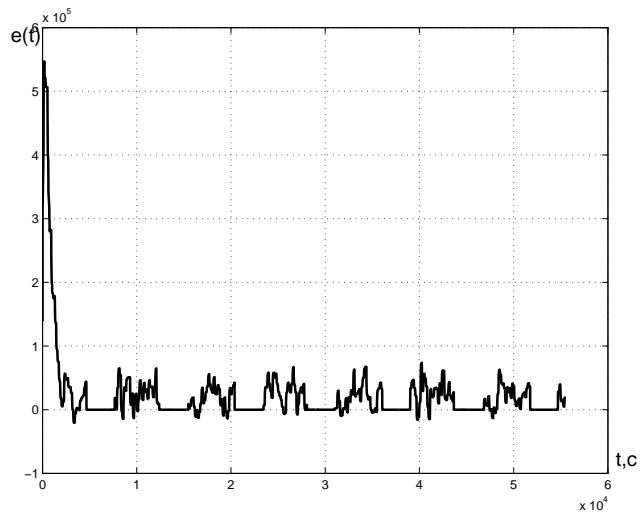


Рис. 4.13. Отклонение от траектории $\varphi(x(t), y(t))$

8. Заключение

В данной главе были представлены результаты экспериментальной апробации предложенных в третьей главе алгоритмов траекторного управления. В качестве объекта управления выбран мобильный робот с роликонесущими колёсами “Robotino” разработанный фирмой “Festo Didactics”. Рассмотрены несколько типов траекторий, широко используемых на практике, такие как прямая, окружность, синусоидальная линия, составная кривая составленная из прямолинейных отрезков и дуг окружности. Результаты экспериментов, представленные в виде графиков, показывают общую работоспособность предложенных теоретических выкладок и хорошее качество переходных процессов.

Заключение

В диссертационной работе была решена задача управления движением многоканальными динамическими объектами, а именно задача следования контролируемым объектом вдоль аналитически заданной в пространстве траектории. Была предложена упрощённая методика планирования пути следования на основе базовых элементов, а также представлена процедура конструирования регуляторов, стабилизирующих движение вдоль неявно заданных кривых, описывающих желаемую траекторию.

В первой главе представлен обзор существующих методов решения задач планирования траекторий и конструирования алгоритмов управления, обеспечивающих заданные характеристики движения вдоль предварительно заданного пути следования. Проведено сравнение наиболее популярных подходов. Проанализированы их достоинства и недостатки. Основным преимуществом подхода, разработанного в данной работе является обеспечение инвариантности траектории движения, что позволяет обеспечить большую точность следования по сравнению с решениями основанными на методе синтезе регуляторов как следящих систем.

Во второй главе предложена упрощённая процедура планирования траектории движения. Предлагаемый в диссертационной работе подход к конструированию регуляторов базируется на методологии стабилизации целевых множеств в выходном пространстве объекта управления. Для задачи управления объектом в пространстве целевыми множествами являются неявно заданные уравнения кривых. Так как процедура получения неявной уравнения кривой является нетривиальной задачей, то появляется необходимость

в упрощённых методах задания траектория. В диссертационной работе предложен метод планирования траектории на основе базовых элементов, таких как прямая, окружность и кубическая парабола. Представленная методика отличается от существующих тем, что все элементы описываются неявными уравнениями, в отличие от классических подходов, основанных на параметрическом описании участков. Это решение позволяет получить реализуемую траекторию и сохранить вычислительную простоту, что важно для реализации предложенной методики в бортовых вычислителях мобильных роботов.

В третьей главе представлена аналитическая процедура конструирования стабилизирующих регуляторов, решающая поставленную траекторную задачу. Исходная задача движения вдоль заданного пути следования декомпозирована на две независимые составляющие. Первая подзадача заключается в обеспечение заданной траекторной скорости. Она решается путем добавления прямой связи, задающей желаемый скоростной режим. Вторая подзадача заключается в устраниении отклонений от заданной траектории. Для решения этой задачи была выбрана соответствующая функция Ляпунова и выбран соответствующий закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость.

В четвёртой главе представлены результаты апробации предложенных алгоритмов управления. В качестве тестового объекта управления был выбран мобильный робот с роликонесущими колёсами “Robotino”, выпускаемый фирмой Festo Didactics. Для реализации было выбрано несколько типов траекторий, таких как прямая, окружность, синусоидальная кривая, составная кривая, построенная из прямолинейных участков и окружностей. Результаты экспериментов представлены в виде графиков, показывающих общую работоспособность предложенных теоретических выкладок и достаточно хорошее качество переходных процессов.

Таким образом, в диссертационной работе была рассмотрена и решена за-

дача управления многоканальными динамическими объектами применительно к пространственному движению мобильных роботов. Предложены методы планирования траектории и разработки регуляторов, решающих поставленную задачу. Теоретические результаты подкреплены практическими экспериментами с мобильным роботом.

Литература

1. Бурдаков, С. Ф. Системы управления движением колесных роботов / С. Ф. Бурдаков, И. В. Мирошник, Стельмаков Р. Э. — СПб.: Наука, 2001. — 236 с.
2. Довгоброд, Г. М. Использование параметрической аппроксимации при планировании траектории движения аппаратов / Г. М. Довгоброд, Л. М. Клячко, А. В. Рогожников // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2009. — Т. 52, № 9. — С. 11–17.
3. Капитанюк, Ю. А. Алгоритм управления надводными судами с активным демпфированием волновых воздействий / Ю. А. Капитанюк // Навигация и управление движением Материалы докладов XII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». Науч. редактор О.А.Степанов, под общей редакцией В. Г. Пешехонова. — 2010. — С. 214–221.
4. Капитанюк, Ю. А. Разработка системы траекторного управления мобильным роботом с роликонесущими колёсами / Ю. А. Капитанюк, А. А. Капитонов, С. А. Чепинский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — № 2(90). — С. 65–71.
5. Капитанюк, Ю. А. Траекторное управление твёрдым телом относитель-

- но подвижного объекта / Ю. А. Капитанюк, Д. А. Хвостов, С. А. Чепинский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — № 2(90). — С. 60–64.
6. Капитанюк, Ю. А. Траекторное управление мобильным роботом в изменяющейся среде / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Навигация и управление движением материалы докладов XIV Конференции молодых ученых. под общей редакцией В.Г. Пешехонова и О.А. Степанова (научный редактор). — 2012. — С. 506–512.
7. Капитанюк, Ю. А. Задача управления многоканальной динамической системой по кусочно-гладкой траектории / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 65–70.
8. Капитанюк, Ю. А. Управление мобильным роботом по заданной кусочно-гладкой траектории / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Гирроскопия и навигация. — 2013. — № 2. — С. 42–52.
9. Ким, Д. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д.П. Ким. — М.: Физматлит, 2004. — Т. 2. — 464 с.
10. Колесников, А. А. Синергетические методы управления сложными системами: механические и электромеханические системы / А. А. Колесников,

Г. Е. Веселов и др. — М.: Едиториал УРСС/КомКнига, 2006. — 304 с.

11. Мирошник, И. В. Согласованное управление многоканальными системами / И. В. Мирошник. — Л.: Энергоатомиздат, 1990.
12. Мирошник, И. В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И. В. Мирошник, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков. — СПб.: Наука, 2000. — 562 с.
13. Мирошник, И. В. Управление пространственным движением относительно подвижных внешних объектов / И. В. Мирошник, К. А. Сергеев // Автомат. и телемех. — 2005. — № 4. — С. 70–83.
14. Технология lego mindstorms nxt в обучении студентов основам адаптивного управления / А. А. Бобцов, Ю. А. Капитанюк, А. А. Капитонов и др. // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2011. — № 71. — С. 103–108.
15. Шаветов, С. В. Подвижная балансирующая научно-исследовательская платформа / С. В. Шаветов, Ю.А. Капитанюк // Навигация и управление движением материалы докладов XIV Конференции молодых ученых. под общей редакцией В.Г. Пешехонова и О.А. Степанова (научный редактор). — 2012. — С. 363–369.
16. Agarwal, P. K. Approximation algorithms for curvature-constrained shortest

- paths / Pankaj K. Agarwal, Hongyan Wang // SIAM J. Comput. — 2001. — Vol. 30, no. 6. — P. 1739–1772. — <http://dx.doi.org/10.1137/S0097539796307790>.
17. Aguiar, A. Path-following for nonminimum phase systems removes performance limitations / A.P. Aguiar, J.P. Hespanha, P.V. Kokotovic // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2005. — Vol. 50, no. 2. — P. 234–239.
18. Akhtar, A. Path following for a car-like robot using transverse feedback linearization and tangential dynamic extension / Adeel Akhtar, Christopher Nielsen // CDC-ECE. — 2011. — P. 7974–7979.
19. Akhtar, A. Path following for a quadrotor using dynamic extension and transverse feedback linearization / Adeel Akhtar, Steven L Waslander, Christopher Nielsen // Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on / IEEE. — 2012. — P. 3551–3556.
20. Angeles, J. Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms / J. Angeles. Mechanical engineering series. — Springer, 1997. — <http://books.google.ru/books?id=2zxSAAAAMAAJ>.
21. Banaszuk, A. Feedback linearization of transverse dynamics for periodic orbits / Andrzej Banaszuk, John Hauser // Systems & control letters. —

1995. — Vol. 26, no. 2. — P. 95–105.

22. Barrientos, A. Advanced uav trajectory generation: Planning and guidance / Antonio Barrientos, Pedro Gutierrez, Julian Colorado // Aerial Vehicles, Thanh Mung Lam (Ed.). — 2009. — P. 55–82.
23. Beard, R. Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice / R.W. Beard, T.W. McLain. — Princeton University Press, 2012.
24. Bertolazzi, E. Fast and accurate clothoid fitting / E. Bertolazzi, M. Frego // Math. Meth. Appl. Sci. — 2014.
25. Bestaoui, Y. Some insights in path planning of small autonomous blimps / Y. Bestaoui, S. Hima // Archives of Control Sciences. — 2001. — Vol. Vol. 11, no. 3/4. — P. 139–166.
26. Blaga, P. Lectures on classical differential geometry / P.A. Blaga. — Editura Risoprint, 2005.
27. Breivik, M. Principles of guidance-based path following in 2d and 3d / M. Breivik, T.I. Fossen // Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on. — 2005. — P. 627–634.
28. Continuous-curvature path generation using fermat's spiral / Anastasios M. Lekkas, Andreas Reason Dahl, Morten Breivik,

Thor I. Fossen // Modeling, Identification and Control. — 2013. — Vol. 34, no. 4. — P. 183–198.

29. Dongming, W. A simple method for implicitizing rational curves and surfaces / Wang Dongming // Journal of Symbolic Computation. — 2004. — Vol. 38, no. 1. — P. 899 – 914. — <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717104000306>.
30. Dubins, L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents / L. E. Dubins // American Journal of Mathematics. — 1957. — Vol. 79. — P. 497–516.
31. El-Hawwary, M. I. Reduction principles and the stabilization of closed sets for passive systems / Mohamed I El-Hawwary, Manfredi Maggiore // arXiv preprint arXiv:0907.0686. — 2009.
32. El-Hawwary, M. I. Case studies on passivity-based stabilisation of closed sets / Mohamed I El-Hawwary, Manfredi Maggiore // International Journal of Control. — 2011. — Vol. 84, no. 2. — P. 336–350.
33. El-Hawwary, M. I. Reduction theorems for stability of closed sets with application to backstepping control design / Mohamed I El-Hawwary, Manfredi Maggiore // Automatica. — 2013. — Vol. 49, no. 1. — P. 214–222.

34. Eriksson-Bique, S. D. Discrete dubins paths / Sylvester David Eriksson-Bique, David G. Kirkpatrick, Valentin Polishchuk // CoRR. — 2012. — Vol. abs/1211.2365.
35. Ernesto, C. High-speed cornering by cnc machines under prescribed bounds on axis accelerations and toolpath contour error / CharlieA. Ernesto, RidaT. Farouki // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2012. — Vol. 58, no. 1-4. — P. 327–338. — <http://dx.doi.org/10.1007/s00170-011-3394-3>.
36. Fossen, T. Guidance and control of ocean vehicles / T.I. Fossen. — Wiley, 1994. — <http://books.google.ru/books?id=cwJUAAAAMAAJ>.
37. Fradkov, A. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems / A.L. Fradkov, I.V. Miroshnik, V.O. Nikiforov. Mathematics and Its Applications. — Springer, 1999.
38. Fraichard, T. From reeds and shepp's to continuous-curvature paths / T. Fraichard, Alexis Scheuer // Robotics, IEEE Transactions on. — 2004. — Dec. — Vol. 20, no. 6. — P. 1025–1035.
39. Hladio, A. Path following for a class of mechanical systems / Andre Hladio, Christopher Nielsen, David Wang // Control Systems Technology, IEEE Transactions on. — 2013. — Vol. 21, no. 6. — P. 2380–2390.

40. Hobby, J. D. Numerically stable implicitization of cubic curves / John D. Hobby // ACM Trans. Graph. — 1991. — jul. — Vol. 10, no. 3. — P. 255–296. — <http://doi.acm.org/10.1145/108541.108546>.
41. Homography-based visual servoing for autonomous underwater vehicles / Minh-Duc Hua, Guillaume Allibert, Szymon Krupinski, Tarek Hamel // 19th IFAC World Congress. — 2014.
42. Hota, S. A modified dubins method for optimal path planning of a miniature air vehicle converging to a straight line path / S. Hota, D. Ghose // American Control Conference, 2009. ACC '09. — 2009. — June. — P. 2397–2402.
43. Hota, S. Optimal transition trajectory for waypoint following / S. Hota, D. Ghose // Control Applications (CCA), 2013 IEEE International Conference on. — 2013. — Aug. — P. 1030–1035.
44. Jahanpour, J. The improved nurbs-based c² ph spline curve contour following task with pdff controller / Javad Jahanpour, Amir Ghadirifar // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2014. — Vol. 70, no. 5-8. — P. 995–1007. — <http://dx.doi.org/10.1007/s00170-013-5332-z>.
45. Jensen, T. M. Waypoint-following guidance based on feasibility algorithms. — 2011.

46. Kapitanyuk, Y. Geometric path following control of a rigid body based on the stabilization of sets / Y. Kapitanyuk, S. Chepinskiy, A. Kapitonov // 19th IFAC World Congress. — 2014.
47. Kapitanyuk, Y. A. Control of mobile robot following a piecewise-smooth path / Yu. A. Kapitanyuk, S. A. Chepinsky // Gyroscopy and Navigation. — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 198–203. — <http://dx.doi.org/10.1134/S207510871304007X>.
48. LaValle, S. Planning Algorithms / S.M. LaValle. — Cambridge University Press, 2006.
49. Lee, T. Geometric tracking control of a quadrotor uav on $\text{se}(3)$ / Taeyoung Lee, M. Leoky, N.H. McClamroch // Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on. — 2010. — P. 5420–5425.
50. The matrix cookbook: Rep.; Executor: Kaare Brandt Petersen, Michael Syskind Pedersen, Jan Larsen et al.: 2006.
51. McCrae, J. Sketching piecewise clothoid curves / J. McCrae, K. Singh // Proceedings of the Fifth Eurographics Conference on Sketch-Based Interfaces and Modeling. — SBM'08. — Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2008. — P. 1–8. — <http://dx.doi.org/10.2312/SBM/SBM08/001-008>.

52. Meek, D. S. A note on finding clothoids / D. S. Meek, D. J. Walton // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 170, no. 2. — P. 433–453. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.047>.
53. Miroshnik, I. Stabilization of motions of multi-pendulum systems / I. Miroshnik, A. Bobtsov // Control of Oscillations and Chaos, 2000. Proceedings. 2000 2nd International Conference. — Vol. 1. — 2000. — P. 22–25 vol.1.
54. Miroshnik, I. Nonlinear control of multidrive vehicular robots / I.V. Miroshnik, A.V. Lyamin // Control Applications, 1994., Proceedings of the Third IEEE Conference on. — 1994. — P. 79–80 vol.1.
55. Miroshnik, I. Trajectory motion control and coordination of multilink robots / I.V. Miroshnik, V.O. Nikiforov // Prepr. 13th IFAC World Congress. — 1996. — Vol. A. — P. 361–366.
56. Miroshnik, I. Nonlinear control of robot spatial motion in the dynamic environments / I.V. Miroshnik, K.A. Sergeev // Proc. Int. IEEE Conf. On Advanced Intel. Mechatronics. — 2001. — Vol. 2. — P. 1303–1306.
57. Moreton, H. P. Minimum curvature variation curves, networks, and surfaces for fair free-form shape design. — 1992. — UMI Order No. GAX93-30652.
58. Nielsen, C. Path following using transverse feedback linearization: Application

- to a maglev positioning system / C. Nielsen, C. Fulford, M. Maggiore // American Control Conference, 2009. ACC '09. — 2009. — P. 3045–3050.
59. Oliveira, T. Ground target tracking control system for unmanned aerial vehicles / Tiago Oliveira, Pedro Encarnacao // Journal of Intelligent & Robotic Systems. — 2013. — Vol. 69, no. 1-4. — P. 373–387. — <http://dx.doi.org/10.1007/s10846-012-9719-0>.
60. Oliveira, T. Moving path following for autonomous robotic vehicles / T. Oliveira, P. Encarnacao, A.P. Aguiar // Control Conference (ECC), 2013 European. — 2013. — July. — P. 3320–3325.
61. Real time dynamic trajectory smoothing for uninhabited aerial vehicles / Erik P. Anderson, Randal W. Beard, Al W. Beard, Timothy W. McLain // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2003. — Vol. 13, no. 13.
62. Regina, N. Uav guidance law for ground-based target trajectory tracking and loitering / Niki Regina, Matteo Zanzi // Proceedings of the 2011 IEEE Aerospace Conference. — AERO '11. — Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2011. — P. 1–9. — <http://dx.doi.org/10.1109/AERO.2011.5747522>.
63. Rizwan, Y. Nonlinear aircraft modeling and controller design for target tracking / Yassir Rizwan, Steven L Waslander, Christopher Nielsen //

American Control Conference (ACC), 2011 / IEEE. — 2011. — P. 3191–3196.

64. Roza, A. Position control for a class of vehicles in $\mathbb{se}(3)$ / Ashton Roza, Manfredi Maggiore // Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on / IEEE. — 2012. — P. 5631–5636.
65. Shalaby, M. Approximate implicitization of space curves and of surfaces of revolution / Mohamed Shalaby, Bert Juttler // Geometric Modeling and Algebraic Geometry / Ed. by Bert Juttler, Ragni Piene. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — P. 215–227. — http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-72185-7_12.
66. Shen, L. Certified approximation of parametric space curves with cubic b-spline curves / Liyong Shen, Chun-Ming Yuan, Xiao-Shan Gao // CoRR. — 2012. — Vol. abs/1203.0478.
67. Path generation for robot vehicles using composite clothoid segments: Rep.: CMU-RI-TR-90-31 / Robotics Institute; Executor: Dong Hun Shin, Sanjiv Singh. — Pittsburgh, PA: 1990. — December.
68. Siciliano, B. Robotics: Modelling, Planning and Control / B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. — Springer, 2009. — <http://books.google.ru/books?id=jPCAFmE-logC>.

69. Smooth trajectory planning for fully automated passengers vehicles: Spline and clothoid based methods and its simulation / Larissa Labakhua, Urbano Nunes, Rui Rodrigues, FatimaS. Leite // Informatics in Control Automation and Robotics / Ed. by JuanAndrade Cetto, Jean-Louis Ferrier, Jose Miguel Costa dias Pereira, Joaquim Filipe. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — Vol. 15 of Lecture Notes Electrical Engineering. — P. 169–182. — http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-79142-3_14.
70. Spong, M. Robot Modeling and Control / M.W. Spong, S. Hutchinson. — Wiley, 2005. — <http://books.google.de/books?id=wGapQAAACAAJ>.
71. Thomassen, J. Self-intersection problems and approximate implicitization / JanB. Thomassen // Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces. — Springer Berlin Heidelberg, 2005. — P. 155–170. — http://dx.doi.org/10.1007/3-540-27157-0_11.
72. Tsourdos, A. Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles / A. Tsourdos, B. White, M. Shanmugavel. Aerospace Series. — Wiley, 2010. — http://books.google.ru/books?id=goE5zLD_5kcC.
73. Using of lego mindstorms nxt technology for teaching of basics of adaptive control theory / Alexey Bobtsov, Anton A Pyrkin, Sergey A Kolyubin et al. // Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano (Italy) August. — 2011. — P. 9818–9823.

74. Walton, D. J. Technical section: A controlled clothoid spline / D. J. Walton, D. S. Meek // Comput. Graph. — 2005. — Vol. 29, no. 3. — P. 353–363. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.cag.2005.03.008>.
75. Wan, T. R. A real-time 3d motion planning and simulation scheme for nonholonomic systems / Tao Ruan Wan, Wen Tang, Heng Chen // Simulation Modelling Practice and Theory. — 2011. — Vol. 19, no. 1. — P. 423–439.
76. Yalcin, H. Implicitization of parametric curves by matrix annihilation / Hulya Yalcin, Mustafa Unel, William Wolovich // International Journal of Computer Vision. — 2003. — Vol. 54, no. 1-3. — P. 105–115.
77. Yang, K. 3d smooth path planning for a uav in cluttered natural environments / Kwangjin Yang, S. Sukkarieh // Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on. — 2008. — Sept. — P. 794–800.