# LRC - Annexe n°1



# Deux systèmes de preuve en logique des propositions

## 1 Système de Hilbert

### 1.1 Composantes

Le système de Hilbert est caractérisé par trois schémas d'axiome et une règle d'inférence :

- Schémas d'axiome :
  - **SA1 :** $A \to (B \to A)$
  - **SA2 :** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  - **SA3 :** $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
- Règle d'inférence
  - **Modus Ponens (MP) :** $A, A \to B \vdash B$

### 1.2 Déduction

La déduction d'une formule $A$ dans une théorie $\Delta$ est une suite finie $A_0, \ldots, A_n$ telle que $A_n = A$ et pour tout $i$,

- $A_i$ est l'instanciation de l'un des axiomes,
- $A_i$ est l'une des hypothèses, c'est-à-dire $A_i \in \Delta$
- $A_i$ est obtenue par modus ponens appliqué à $A_j$ et $A_k$ avec $j < i$ et $k < i$

On peut aussi appliquer toutes les substitutions nécessaires, à condition de les effectuer dans l'ensemble de la formule.

Si on trouve une telle suite, on peut noter $\Delta \vdash A$.

## 2 Méthode des tableaux sémantiques

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

### 2.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés $\alpha$ et $\beta$.

| Formule $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $\neg\neg\varphi$ | $\varphi$ | $\varphi$ |
| $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | $\neg\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ | $\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ | $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ | $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ |

| Formule $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_1 \vee \varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ | $\neg\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ | $\neg\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ | $\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ | $\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$ |

### 2.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  - — si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  - — sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  - — sinon, choisir une formule $F$ de l'étiquette du nœud
    - — si elle est de type $\alpha$
      - — créer un sous-nœud marqué comme non traité
      - — lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les formules obtenues par réécriture de $F$
    - — sinon (si elle est de type $\beta$)
      - — créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
      - — leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où $\beta_1$ et $\beta_2$ sont les formules obtenues par réécriture de $F$

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.