TEORIE

ANALIZĂ

• CURS 1 •

1) S. n. distanță/metrică pe o mulțime nevidă X o funcție notată cu $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele pp-tăți:

→ $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$

→ $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$.

→ $d(x,y) = 0 \iff x = y$

→ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \ \forall\, x,y,z \in X$

2) S. n. spațiu metric $\forall$ mulțime nevidă X pe care se definește c. p. o distanță $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$.

Not: (X, d)

3) (X,d) - spațiu metric ; $x_0 \in X$ - punct ; $r > 0$ - rază

S. n. bilă
→ deschisă de centru x_0 și rază r mulțimea

$$B(x_0, r) = \{ y \in X \mid d(y, x_0) < r \}$$

→ închisă de centru x_0 și rază r mulțimea

$$B[x_0, r] = \{ y \in X \mid d(y, x_0) \leq r \}$$

ȘIR = $\forall$ funcție $f : \mathbb{N} \to X$

4) Șir
- **CONVERGENT**: dacă $\exists\ l \in X$ cu pp. că $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $d(a_n, l) < \varepsilon\ \forall\ n \geq n_\varepsilon$
- **MĂRGINIT**: dacă $\exists\ x_0 \in X$, $\exists\ r > 0$ a.î. $d(a_n, x_0) \leq r\ \forall\ n \in \mathbb{N}$
- **CAUCHY**: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $d(a_m, a_n) < \varepsilon\ \forall\ m, n \geq n_\varepsilon$

5) Spațiu metric complet: spațiu metric în care $\forall$ șir Cauchy este șir convergent.

•o CURS 2 o•

6) Lema lui Cesaro: $\forall$ șir mărginit de nr. reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are:
- cel puțin un subșir convergent
- cel puțin un punct limită în $\mathbb{R}$

echivalente

7) Criteriul lui Cauchy pentru șiruri de nr. reale: Un șir de nr. reale este convergent $\Leftrightarrow$ este șir Cauchy ($\mathbb{R}$ - sp. metric complet)

COROLAR: Un șir din $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$ este șir convergent $\Leftrightarrow$ este șir Cauchy. ($\mathbb{R}^k$ - sp. metric complet)

8) Criteriul raportului pt. șiruri cu termeni strict pozitivi:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir din $\mathbb{R}_+^*$ pt. care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă:
- $l < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- $l > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

9) Criteriul radicalului pt șiruri cu termeni strict pozitivi:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir din $\mathbb{R}_+^*$ pt. care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. At.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

10) Lema lui Stolz - Cesaro:

1) varianta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Ipoteze:

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s. c.

  SAU

  $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s. d.

- $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

2) varianta $\frac{0}{0}$

Ipoteze:

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ -strict monoton

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

11) Teorema lui Weierstrass pentru șiruri de nr. reale: $\forall$ șir de numere reale monoton și mărginit este șir convergent.

12) Criteriul cleștelui pentru șiruri de numere reale:

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \leq x_n \leq b_n \; \forall\, n \geq n_0$

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = l$

13) Criteriul majorării pentru șiruri de numere reale:

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \leq x_n \; \forall\, n \geq n_0$

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \geq x_n \; \forall\, n \geq n_0$

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Scanned with CamScanner

••CURS 3••

14) S. n. limita superioară a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul

$$u = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$$

15) S. n. limita inferioară a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul

$$v = \sup (\inf_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$$

16) Numărul $l\in\overline{\mathbb{R}}$ s. n. punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists\ (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

17) S. n. serie de numere reale perechea de șiruri $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$, notată $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ (unde $s_n = x_0 + \ldots + x_n\ \forall n\in\mathbb{N}$)

18) SERIE
- CONVERGENTĂ: dacă șirul sumelor parțiale s_n este convergent
- ABSOLUT CONVERGENTĂ: dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ este convergentă.

19) Dacă seria de nr reale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - convg., atunci $\lim x_n = 0$.

• o CURS 4 o •

20) Serie semiconvergentă : - serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă.

21) Criteriul lui Leibniz (serii alternate): Se consideră un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$ descrescător pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Seriile de nr. reale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sunt convergente.

22) Criteriul lui Abel (serii cu termeni oarecare):

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - descrescător
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha \le b_0 + \ldots + b_n \le \beta \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ - convergentă

23) Criteriul lui Dirichlet (serii cu termeni oarecare):

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - monoton şi mărginit
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ - convergentă

$\rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ - convergentă

24) Criteriul raportului pentru serii cu termeni pozitivi:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$ pt. care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

Dacă $\ell < 1$: seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - conv.

$\ell > 1$: seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - div.

25) Criteriul radicalului pentru serii cu termeni pozitivi:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$ pt. care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$

Dacă: $\ell < 1$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - conv.

$\ell > 1$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - div.

26) Criteriul Raabe - Duhamel:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$ pt care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ell$.

Dacă: $\ell < 1$, at. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - div.

$\ell > 1$, at. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ - conv.

27) Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir descrescător din $\mathbb{R}_+$. pt care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

At. seriile de nr. reale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași natură.

28) Criteriul de comparație cu inegalități:

Se consideră seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$

pt. care $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le y_n \ \forall\, n \ge n_0$.

→ Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convg atunci și $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convg.

→ Dacă $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ - divg. atunci și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este divergentă.

29) Criteriul de comparație cu limite:

Se consideră $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ - serii cu termeni pozitivi pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in [0, +\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă
→ $\ell \in (0, +\infty)$ - seriile au aceeași natură
→ $\ell = 0$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ - convg − $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ - convg.
→ $\ell = +\infty$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ - divg. − $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ - divg.

SERII REMARCABILE

- seria armonică: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$
  → convg, dacă $\alpha > 1$
  → divg., dacă $\alpha \le 1$
- seria putere: $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$
  → abs. convg. dacă $|a| < 1$
  → divg. dacă $|a| \ge 1$

• o CURS 5 o •

30) TOPOLOGIE = familie de mulțimi $\tau \subseteq P(X)$ care verifică:

- $\emptyset, X \in \tau$
- $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$
- $G_i \in \tau \ \forall\, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

31) Spațiu topologic = o mulțime nevidă X pe care se definește cel puțin o topologie $\tau \subseteq P(X)$.

32) Fie (X, τ) - spațiu topologic.

MULȚIME

- DESCHISĂ: $G \subseteq X$ cu pp. că $G \in \tau$
- ÎNCHISĂ: $F \subseteq X$ cu pp. că $C_X F = X \setminus F \in \tau$
- VECINĂTATE A ELEMENTULUI $x_0 \in X$: $V \subseteq X$ cu pp. că $\exists\, G \in \tau$ a.î. $x_0 \in G \subseteq V$
- COMPACTĂ: $K \subseteq X$ cu pp. că din $\forall$ acoperire cu mulțimi deschise a mulțimii K se poate extrage o subacoperire finită
- NECONEXĂ: $A \subseteq X$, cu pp. că $\exists$ c.p. 2 mulțimi deschise $G_1, G_2 \in \tau$ a.î. $G_1 \cap A \neq \emptyset$, $G_2 \cap A \neq \emptyset$, $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$ și $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$

32) Fie $(X, \mathcal{T})$-spațiu topologic și $A \subseteq X$.

$x_0 \in X$ se numește

- punct interior al mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

  $\mathring{A}$ - interiorul mulțimii A
- punct de aderență al mulțimii A dacă

  $V \cap A \neq \emptyset \ \forall \ V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$.

  $\bar{A}$ - închiderea/aderența mulțimii A
- punct de acumulare al mulțimii A dacă

  $V \cap (A \setminus x_0) \neq \emptyset \ \forall \ V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

  A' - mulțimea pc. de acumulare
- punct izolat —"— dacă $\exists \ V_0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$ a.î.

  $V_0 \cap A = \{x_0\}$

  Izo A - mulț. pc. izolate

33) Mulțimea $\bar{A} \cap \overline{C_X A}$ s.m. frontiera topologică a mulțimii A.

$\text{Fr } A = \bar{A} \cap \overline{C_X A} = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

• o CURS 6 o •

34) Teorema de caracterizare a mulțimilor conexe din $\mathbb{R}$:

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ este conexă $\Leftrightarrow$ $A = \emptyset$ sau A interval.

35) Teorema de caracterizare a mulțimilor compacte în spații metrice: O mulțime $K \subseteq (X, d)$ este compactă (relativ la $\mathcal{T}_d$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din K are c.p. un pc. limită $l \in K$.

36) Teorema Heine-Borel: O mulțime $K \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$ este compactă d.n.m.d. K este mulțime închisă și mărginită în $\mathbb{R}^n$.

37) O mulțime nevidă $I \subseteq \mathbb{R}$ s.n. $\boxed{\text{interval}}$ în $\mathbb{R}$ dacă $\forall\ x \leq y \in I$ avem că $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subseteq I$.

38) Fie $f: X \to Y$.

- Fie $A \subseteq X$. S.n. imaginea directă a mulțimii A prin fct. f mulțimea $f(A) \overset{def}{=} \{ y \in Y / \exists\ x \in A \}$
- Fie $B \subseteq Y$. S.n. preimaginea (imaginea inversă) a mulțimii B prin funcția f mulțimea $f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{x \in X / f(x) \in B\} \subseteq X$.

39) Fie $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ și $x_0 \in D$. Spunem că f este funcție continuă în $x_0 \in D$ dacă $\forall\ W \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}d_2}(f(x_0))$ $\exists\ V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}d_1}(x_0)$ a.î. $f(D \cap V) \subseteq W$.

•o CURS ~~7~~ o•

40) Proprietățile funcțiilor continue: $f: \overset{D\subseteq}{(X,d_1)} \to (Y,d_2)$

→ $(\forall)\ G \in \mathcal{T}_{d_2}$ avem că $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_{d_1}$

"întoarce" mulțimile deschise din Y în mulțimi deschise din X

→ $(\forall)\ A \subseteq X$ mulțime compactă, avem că $f(A) \subseteq Y$ mulțime compactă

"duce" mulț. închise din X în mulțimi închise din Y

→ $(\forall)\ A \subseteq X$ mulțime conexă din X avem că $f(A) \subset Y$ mulțime compactă

"duce" mulțimile conexe din X în mulțimi conexe din Y.

→

41) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Spunem că $f: I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă $(\forall)\ x_1, x_2 \in I$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$, situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $(\exists)\ c \in I$ situat între x_1 și x_2 a.î. $f(c) = \lambda$.

COROLAR: a) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă f este funcție injectivă, atunci f este funcție strict monotonă.

b) Dacă $(\exists)\ a, b \in I$ a. că $f(a) \cdot f(b) < 0$, $\exists c \in (a,b)$ a.î. $f(c) = 0$ (Cauchy-Bolzano).

42) Spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe mulțimea nevidă $A \subseteq D$, dacă $(\forall)\ x \in A\ (\exists) \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Notație: $f_n \xrightarrow[A]{s} f$

43) Spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcția $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D$ este nevidă, dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon, (\forall)\ x \in A$.

Notație: $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

44) Criteriu practic de convergență uniformă:

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f \iff \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

45) Teorema lui Weierstrass pentru șiruri de funcții:

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $f: A \subseteq D \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Dacă $(\exists)$ $x_0 \in A$ cu pp. că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, f_n continuă în x_0, at. f continuă în x_0.

COROLAR: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $f: A \subseteq D \to \mathbb{R}$ astfel că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Dacă $(\exists)\ x_0 \in A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, f_n este continuă în x_0 și f NU este continuă în x_0: $f_n \not\xrightarrow[A]{u} f$

• CURS 8 •

46) Serie de funcții: o pereche $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$, cu

$s_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x)$, $\forall x \in D$.

Notație: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

47) Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este simplu convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe mulțimea A.

48) Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este absolut convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ este simplu conv. pe mulțimea A ~~(dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe mulțimea A)~~

49) Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe A.

50) Criteriul lui Cauchy pentru serii de funcții:

Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ - uniform conv. pe mulțimea $A \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in A$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

2142

51) Teorema lui Weierstrass pentru serii de funcții:

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții cu $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir din $\mathbb{R}_+$ astfel ca $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x\in D$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dacă seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ este convg. at. seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut convg. pe mulțimea D.

52) Criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcții:

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - 2 șiruri de funcții cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ care vf. următoarele condiții:

a) $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$

b) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ $\forall x\in D$, $\forall n\in\mathbb{N}$

c) $\exists M > 0$ a.î. $|g_0(x) + \dots + g_n(x)| \leq M$ $\forall x\in D$

$\Rightarrow$ seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot g_n$ este uniform convg pe D.

53) Criteriul lui Abel pentru serii de funcții:

Fie $(f_n), (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - 2 șiruri de funcții cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

a) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall x \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}$ SAU $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ $\forall x \in D$ $\forall n$

b) $\exists$ $M > 0$ a.î. $|f_n(x)| \leq M$ $\forall$ $x \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c) seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ - uniform conv pe D.

=> seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \cdot g_n$ este uniform conv pe mulț. D.

~~54) Se numește spațiu liniar normat X o funcție~~

54) S.n. norma pe spațiul liniar real X o funcție

$p : X \to \mathbb{R}_+$ care are urm. pp:

a) $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$ $\forall$ $u, v \in X$

b) $p(\alpha \cdot u) \leq |\alpha| \cdot p(u)$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u \in X$

c) $p(u) = 0 \iff u = 0_X$

Notație:

$p(u) \overset{not}{=} \|u\|$

$p \overset{not}{=} \| \quad \|$

55) S.n. spațiu liniar normat $\forall$ spațiu liniar real pe care se definește cel puțin o normă $\| \quad \| : X \to \mathbb{R}_+$.

Notație: $(X, \| \quad \|)$ - spațiu liniar normat.

•O CURS 9 O•

56) Spunem că fct. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|)$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$.

Not: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0) \in X$ - derivata fct. f în pc. x_0.

57) Teorema de caracterizare a derivabilității unei funcții vectoriale: Funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ este derivabilă în pc. $x_0 \in D \cap D' \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în x_0.

58) Teorema de caracterizare a derivatei funcției inverse:

Fie I, J două intervale și $f : I \to J$ o funcție bijectivă cu urm. proprietăți:

a) f- fct. strict monotonă pe I

b) f este derivabilă în $x_0 \in I$

c) $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1} : J \to I$ este derivabilă și $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

59) Teorema lui ROLLE:

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) cu $f(a) = f(b)$. $\Rightarrow \exists\ c \in (a, b)$ a.î. $f'(c) = 0$

60) Teorema lui Lagrange: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$, deriv. pe (a,b). $\exists\ c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

COROLARE:

1) Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o fct. deriv pe I.

$\Rightarrow f'(x)=0\ \forall x\in I \Rightarrow f$ continuă pe I

$\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x\in I \Rightarrow f$ s.c. pe I

$\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in I \Rightarrow f$ s.d. pe I

2) Fie $I\subseteq\mathbb{R}$-interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o fct. continuă pe I pt. care $\exists\ x_0\in I$ a.î. f deriv. pe $I\setminus\{x_0\}$. Dacă $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\in$ at. f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

61) Teorema lui Darboux: Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o fct. derivabilă pe I. Atunci funcția $f':I\to\mathbb{R}$ are pp. lui Darboux.

CorOLAR: Pp. că $f'(x_0)\neq 0\ \forall x\in I$. Atunci $f'(x)>0\ \forall x\in I$. sau $f'(x)<0\ \forall x\in I$.

62) Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in D$.

Elementul $x_0 \in D$ s.n. → punct de minim local (global) al funcției dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in V \cap D$ $(f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in D)$

→ punct de maxim local (global) al funcției dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in D \cap V$

63) Teorema lui Fermat: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție și $x_0 \in \mathring{D}$ un punct de extrem local al funcției. Dacă f este derivabilă în x_0, at. $f'(x_0) = 0$.

• o CURS 10 o •

64) Teorema lui l'Hospital: Se consideră $I \subseteq \mathbb{R}$ - interval, $x_0 \in I' \setminus I$ și $f, g: I \to \mathbb{R}$ 2 funcții derivabile pe I.

Se presupune că:

→ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ SAU $\pm\infty$

→ $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in I$

→ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

65) Spunem că f este derivabilă de n ori în $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq$
dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. f este deriv de $n-1$ ori pe mulțimea $V \cap D$ și $f^{(n-1)} : V \cap D \to \mathbb{R}$ este deriv. în x_0.

Notație: $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$

66) $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2 funcții deriv. de n ori în $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 2$.

$$f \cdot g^{(n)}(x_0) = C_n^0 f^{(n)}(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0) \cdot g'(x_0) + \ldots + C_n^{n-1} f'(x_0) g^{(n-1)}(x_0) + C_n^n g^{(n)}(x_0).$$

67) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o fct. deriv. de n ori în pc. $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 1$. Funcția $T_{f, n, x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{f, n, x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește polinomul TAYLOR de rang n atașat funcției f și punctului x_0.

68) Funcția $R_{f,n,x_0} = f - T_{f,n,x_0} : D \to \mathbb{R}$ s.n. restul lui Taylor de rang n al funcției f și pc. x_0.

69) Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $(n+1)$ ori pe I și $x_0 \in I$ $\forall x \in I$, $x \neq x_0$ $\exists$ un element $c \in I$ situat între x_0 și x a.î. $f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$

70) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție:

- f - de clasă C^n pe mulțimea I, $n \in \mathbb{N}^*$ dacă f este derivabilă de n ori pe I și $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ este continuă
- f - de clasă C^∞ pe mulț. I dacă f este deriv. de n ori pe mulț. I $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$.

71)
- f - ~~...~~ CONVEXĂ dacă $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t \cdot f(y)$ $\forall x,y \in I$ $\forall t \in [0,1]$
- f - CONCAVĂ : $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$ $\forall x,y \in I$

72) Inegalitatea lui Jensen: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ - interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă (concavă) pe I $\forall x_1, \dots x_n \in I$ și $\alpha_1, \dots \alpha_n \in [0, \infty)$ cu $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ are loc inegalitatea:

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

$$\left(f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \ge \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \right)$$

•o CURS 11 o•

73) O funcție $T: (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ se num. aplicație liniară de la X la Y dacă:

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta T(y) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in X$$

74) O funcție $f: D \subseteq (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ este diferențiabilă în pc. $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists!)\ T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a.î.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} = 0$$

Notație: $T \overset{\text{not.}}{=} df(x_0)$ - diferențiala fct. f în pc. x_0

75) Spunem că fct. f admite derivata parțială în raport cu variabila x_i, $i \in \overline{1,n}$ în pc. $x_0 \in D \cap D'$ dacă

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}^m$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0) \right)$$

76) Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în x_0 atunci f admite toate derivatele parțiale în x_0. În plus, $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este dată de formula:

$$df(x_0)(x_1 \dots x_m) = x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \ \forall (x_1 \dots x_m) \in \mathbb{R}$$

77) Criteriu de diferențiabilitate:

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o fct. și $A = \overset{\circ}{A} \subseteq D$, $A \neq \emptyset$ a.î. f admite toate derivatele parțiale în $\forall$ pc. al mulțimii A și acestea sunt fct. cont. pe A. $\Rightarrow f$ este diferențiabilă pe mulț. A.

•o CURS 12 o•

75) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n,m \in \mathbb{N}^*$ și $x_0 \in D \cap D'$ a.î. f este diferențiabilă în x_0. Matricea $J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ s.n. matricea Jacobi a funcției f în punctul x_0.

76) Dacă $m=n$, $J f(x_0) \overset{not}{=} \frac{D(f_1, \dots f_n)}{D(x_1, \dots x_n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ s.n. Jacobianul funcției f în pc. x_0.

~~77)~~ $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $df(x_0)(x_1 \dots x_n) = \left[Jf(x_0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]$ $\forall$ $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^n$

77) Elementul $x_0 \in D \cap D'$ s.n. punct critic al funcției dacă f este diferențiabilă în x_0 și $df(x_0) = 0$.

78) f = funcție de clasă C^1 $\Rightarrow$ f admite toate derivatele parțiale pe mulțimea D și acestea sunt funcții continue.

~~79)~~ •o CURS 11 o•

79) Teorema lui Schwartz: Dacă f: ~~$\mathbb{R}$~~ $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o funcție dif. de 2 ori în $x_0 \in D \cap D'$ atunci f admite toate derivatele parțiale ~~în $x_0 \in D \cap D'$~~ de ordin 2 în x_0 și

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall\, i \neq j \in \{1, \dots n\}$$

80) Teorema lui Young:

a) Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție, $x_0 \in D$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ astfel ca $V \subseteq D$ și $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ a. î. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe V. Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt continue în pc. x_0, at.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

b) Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție, $x_0 \in D$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ a. î. $V \subseteq D$. Dacă f adm. toate deriv. parțiale de ord. 2 pe mulț. V și acestea sunt continue în x_0, at. f este dif. de 2 ori în pc. x_0.

81) Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o fct. de 2 ori deriv. în pc. $x_0 \in D \cap D'$. Matricea $Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ s. n. Hessiana funcției f în punctul x_0.

~~82) Criteriul de~~ determinare ...

81) Spunem că $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de 2 ori în pc $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ a. î. f este diferențiabilă pe $V \cap D$ și $d^2 f : V \cap D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este diferențiabilă în x_0.

Notație: $d^2 f(x_0) = d(df(x_0)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \cancel{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

82) Funcția f este diferențiabilă de 2 ori în $x_0 \in D \cap D'$ dacă și numai dacă f este derivabilă de 2 ori în x_0. Înplus,

$d^2 f(x_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este def. prin:

$$d^2 f(x_0)(x, y) = x \cdot y \cdot f''(x_0) \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

$$d^2 f(x_0) = dx\, dx\, f''(x_0)$$

83) Spunem că f admite derivată parțială de ord 2 în rap. cu var. x_i, x_j $(1 \le i, j \le m)$ în pc. $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}}(x_0)$ a.î. f adm deriv. parțială în rap cu var. x_j pe $V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \cap D \to \mathbb{R}$ adm. deriv. parțială în rap cu var. x_i în pc x_0

Notație: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$

84) Teorema lui Schwartz: Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de 2 ori într-un pc. $x_0 \in D \cap D'$, at f admite derivatele parțiale de ord. 2 în x_0 și:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial 2f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \ \forall\, i,j \in \overline{1,n}$$

În plus, $d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ este def. prin formula

$$d^2 f(x_0)\left((a_1 \dots a_n)(b_1 \dots b_n)\right) = a_1 b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial 2x_1}(x_0) + a_1 b_1 \frac{\partial f}{\partial 2x_2}(x_0) + \dots +$$

$$+ a_n b_n \frac{\partial 2}{\partial 2x_n}(x_0) \quad \forall\ )\ (a_1 \dots a_n), (b_1 \dots b_n) \in \mathbb{R}^n$$

85) Criteriul de determinare al punctelor de extrem local al funcției $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ n \geq 2$

- $d^2 f(x_0)(v,v) > 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow x_0$ pc de min local
- $d^2 f(x_0)(v,v) < 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow x_0$ pc de max local
- $\exists\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a.î. $d^2 f(x_0)(v_1, v_1) < 0$ și $d^2 f(x_0)(v_2, v_2)$

$> 0 \Rightarrow x_0$ nu e pc. de extrem local

Obs: $d^2 f(x_0) \Rightarrow Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cazuri:

a) $\Delta_1 \dots \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ pc de max local

b) $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ pc de max local

c) $\Delta_1 \dots \Delta_n \geq 0$ și c.p. un minor e nul

SAU

$\Delta_1 \leq 0,\ \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ și cp 1 e nul

$\Rightarrow$ nu se pronunță

d) În toate celelalte cazuri x_0 nu e pc. de extrem local

86) Teorema funcțiilor implicite: Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ o fct. de clasă C_1 pe mulț. D și $(x_0, y_0) \in D$ cu următoarele proprietăți:

a) $f(x_0, y_0) = 0$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0$.

Există $r_1, r_2 > 0$ a. că $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D$,

$(\exists!)$ $\varphi : B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ fct. de cls. C^1 care vf. următoarele relații:

1) $\varphi(x_0) = y_0$

2) $f(x, \varphi(x_0)) = 0$ $\forall$ $x \in B(x_0, r_1)$

În plus, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0)}$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$

•OCURS 14O•

87) Se numește **diviziune** a intervalului $[a,b]$ o mulțime finită $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Notație: $\mathcal{D}([a,b]) = \{\Delta\}$

88) Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta: a = x_1 < \ldots < x_n = b$.

Nr. real $\max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}$ s.n. norma diviziunii Δ.

89) Mulțimea finită $t_\delta = \{t_1, \ldots t_n\}$ cu $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall\ 1 \le i < n$ s.n. sistem de puncte intermediare asociat div. Δ.

90) Nr. real $f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$ $= \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ s.n. suma Riemann asociată fct. f, div Δ și sist. de pc. intermediare.

Not.: $\sigma_\Delta(t, t_\Delta) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$

91) O funcție $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă $(\exists)\ I$ cu pp. că $\forall\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta > 0$ a.î.

$|\sigma_\Delta(f : t_\delta) - I| < \varepsilon$ $\forall\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$

și $\forall\ t_\Delta$ un sist de pc. intermed asociate f diviziunii Δ.

$\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n}(f : t_{\Delta_n}) = \int_a^b f(x)\,dx$

92) O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ ((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de ~~intervale~~ intervale deschise a.î. $A \subseteq \bigcup\limits_{n \in A} (a_n, b_n)$ și $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

- $\emptyset$, mulț. finite și mulț. numărabile $\Rightarrow$ neglijabile Lebesgue
- $A \subseteq B$, B - negl. L. $\rightarrow$ A - negl. L.
- A_n - mulț. negl. L. $\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in A} (A_n)$ - negl. L.

93) Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue: O funcție $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f este fct. mărginită și $D_f = \{x \in [a,b] \mid f$ nu este cont în $x\}$ este mulțime neglijabilă Lebesgue.

Corolar: $\forall$ fct. continuă pe $[a,b]$ este integr. Riemann pe $[a,b]$.

94) Fie $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ o fct. mg, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ și

$M_i = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t)$, $m_i = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t)$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$

Suma Darboux:
- superioară: $S_\Delta(f)$ $= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$
- inferioară: $s_\Delta(f)$ $= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

95) Criteriul de integrabilitate al lui Darboux: UASE:
- $f \in \mathcal{R}([a,b])$
- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ $\forall\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$
- $\forall\ (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{D}([a,b])$ cu $\lim_{n \to \infty} \|\Delta_n\| = 0$ avem că $\lim_{n \to \infty} (S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) = 0$

2302

Corolar: $\forall$ fct. monotonă pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

96) Leibniz-Newton: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

97) Integrare prin părți: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

98) Teorema de medie pt funcții integrabile Riemann: Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$

care vf. urm. condiții:
- $\to$ f are pp. lui Darboux
- $\to$ $g(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a,b]$

$\exists \ c \in (a,b)$ a.î. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$

Corolar: Dacă f cont, at. $\exists$ $c \in (a,b)$ a.î. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

99) Teorema convergenței uniforme

Se consideră $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{R}([a,b])$ și $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ astfel ca $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$. At. $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

100) Teorema convergenței mărginite

Se consideră $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{R}([a,b])$ și $f \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel ca:
- $\to$ $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$
- $\to$ $\exists$ $M > 0$ a.î. $|f_n(x)| \leq M \ \ \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$

At. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

101) Teorema convergenței monotone

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}([a,b])$ și $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a. ca:

$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f \\ \triangleright\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} - \text{monoton} \end{array}\right\rangle \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

• o CURS 15 o •

102) Spunem că f este {local integrabilă} dacă $\forall\ \alpha < \beta \in I$ avem $f\big|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$

Notație: $\mathcal{R}_{loc}(I) \stackrel{def}{=} \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f$ local integr. pe $I \}$

103) Clase de funcții local integrabile:

- ▷ fct. cont
- ▷ monotone
- ▷ mărginite, cu D_f mulțime neglijabilă Lebesgue

104) Spunem că integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este

▷ convergentă: dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

$\Uparrow$

▷ absolut convergentă: $\int_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ - conv.

105) Criteriul de comparație cu inegalități pt integrala improprie:

Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a. î. $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b)$.

Dc. $\int_a^{b-0} g(x)$ - conv. $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - conv.

$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - div $\rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - div.

106) Criteriul de comparație cu limite pt integrale improprii:

f, g - 2 fcții pozitive pt care $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}_+$.

$\ell \in (0, \infty)$: $\left.\begin{array}{l}\int_a^{b-0} f(x)\,dx \\ \int_a^{b-0} g(x)\,dx\end{array}\right\}$ aceeași natură

$\ell = 0$: $\int_a^{b-0} g(x)$ - conv. $\rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ - conv.

$\ell = \infty$: $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ - div $\rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - div.

107) Leibniz - Newton pt integrale improprii:

F - primitivă adm. de f

Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) \in \mathbb{R} \rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - conv și

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) - F(a)$$

• CURS 16 •

105) Funcția BETA: $B : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R},\ B(p,q) = \underbrace{\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx}_{\text{conv.}}$

106) Funcția GAMMA: $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \Gamma(p) = \underbrace{\int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{\text{conv.}}$

107) Proprietățile fct. GAMMA:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(p+1) = p\cdot\Gamma(p)\quad \forall p>0$
- $\Gamma(n+1) = n!\quad \forall n\in\mathbb{N}$
- $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}\quad \forall p\in(0,1)$
- $\Gamma(p)>0\quad \forall p\in(0,\infty)$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

108) Proprietățile funcției BETA:

- $B(p,q)>0\quad \forall\ p,q\in(0,\infty)$
- $B(p,q) = B(q,p)$
- $B(p,q) = 2\cdot\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0}(\sin x)^{2p-1}\cdot(\cos x)^{2q-1}dx$
- $B(p,q) = \int_0^{+\infty}\dfrac{x^{p-q}}{(1+x)^{p+q}}dx\quad \forall p,q\in(0,\infty)$

108) Formula de legătură între GAMMA și BETA:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad \forall\ p,q\in(0,\infty)$$

109) O mulțime $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ s.m. interval închis n-dimensional.

$v(I) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ volumul intervalului I

110) Partiția intervalului I:

$$G = \{ [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times [x_{j_2}^2, x_{j_2+1}^2] \times \dots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n] \}$$

$$0 \le j_1 \le m_1 - 1, \dots, 0 \le j_n \le m_n - 1$$

111) Inel de mulțimi = o familie de mulțimi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $X \neq \emptyset$ cu pptățile:

- $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Obs:
- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \cap B \in \mathcal{A}$

112) Măsură pozitivă: o funcție $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ care are urm. pp:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$ cu $A \cap B = \emptyset$

Obs:
- $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$
- $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$

• CURS 17 •

113) Fie $I \subseteq \mathbb{R}^n$; $G = \{I_1 \dots I_p\}$ - o partiție a lui I; $E \subseteq I$ o mulțime nevidă.

- Suma ext. a mulț. E relativ la partiția G: $V(E, G) = \sum_{I_j \cap E \neq \emptyset} v(I_j) \in \mathbb{R}$

suma interioară a mulț. E relativ la partiția G:

$$V(E,G) = \sum_{I_j \subseteq \overset{\circ}{E}} v(I_j) \in \mathbb{R}$$

114) Nr. real $\mu_*(E) = \sup V(E,G) \in \mathbb{R}$ s.n. măsura interioară Jordan

Nr. real $\mu^*(E) = \inf V(\dot{E},G) \in \mathbb{R}$ s.n. măsura exterioară Jordan

115) Mulțime măsurabilă Jordan: o mulțime mărginită $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pt care $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

116) Mulțime convexă: $\forall\, u, v \in E \quad \forall\, t \in [0,1]$ avem $(1-t) \cdot u + t \cdot u \in E$

117) Mulțime simplă în raport cu axa Ox_j: dacă $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mulț. compactă, măs. Jordan, $\exists\, f_1, f_2 : K \to \mathbb{R}$ 2 fcții continue a.î.

$$E = \{ (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) \leq x_j \leq f_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n)$$
$$\forall\, (x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) \in K \}$$

118) Descompunere Jordan: O fam. finită de mulțimi nevide măs. Jordan $\mathcal{L} = \{E_1 \dots E_p\}$ cu urm. pp:

- $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p$
- $\mu(E_i \cap E_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j \in \{1, \dots, p\}$

119) $\operatorname{diam} E = \sup_{u,v \in E} d(u,v) = \sup_{u,v \in E} \|u-v\| \in \mathbb{R}$ = diametrul mulțimii E

120) Norma descompunerii Δ: $\max\{\operatorname{diam} E_1, \operatorname{diam} E_2, \dots, \operatorname{diam} E_p\}$
$\llcorner \|\Delta\|$

121) $t_\Delta = \{t_1 \dots t_p\}$ - sistem de pc. intermed. asociat desc.

122) Suma Riemann asociată fct. f: $\sigma_\Delta(f, t_\Delta) = f(t_1) \cdot \mu(E_1) + \dots$
$\dots \cdot f(t_p) \cdot \mu(E_p)$

123) Fct. f este integrabilă Riemann pe E dacă $\exists\, I \in \mathbb{R}$
a.î. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ d_\varepsilon > 0$ pt. care:

$$|\sigma_\Delta(f, t_\Delta) - I| < \varepsilon \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{D}(E) \text{ cu } \|\Delta\| < d_\varepsilon$$

$$I \overset{not}{=} \int_E f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$\mu(E) = \int_E 1\, dx_1 \dots dx_n$$

124) Clase de fcții integrabile Riemann:

- $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ cu $\mu(E) = 0 \Rightarrow \forall f: E \to \mathbb{R}$ este integr. Riemann
- $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ - mulț. închisă $\Rightarrow \forall$ fct. cont pe E — " —

•CURS 18•

125) Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue

Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: E \to \mathbb{R}$ o fct. mărginită. Funcția f este integrabilă Riemann pe E d.d.n.d. $D_f = \{x \in E \mid f$ nu este continuă în $x\}$ este mulțime neglijabilă Jordan.

126) Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: E \to \mathbb{R}$ o fct. mg. pe E, $\Delta = \{E_1 \dots E_K\}$ o descomp. Jordan a mulțimii E, $m_i = \inf\limits_{x \in E_i} f(x)$

$M_i = \sup\limits_{x \in E_i} f(x)$.

Suma Darboux inferioară: $s_\Delta(f) = m_1 \cdot \mu(E_1) + \dots + m_K \mu(E_K)$

Suma Darboux superioară: $S_\Delta(f) = M_1 \cdot \mu(E_1) + \dots + M_K \mu(E_K)$

127) UASE:
- f integr. Riemann pe E
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}(E)$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f) - s_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \ \forall \Delta \in \mathcal{D}(E)$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$

128) Teorema lui FUBINI pe intervale închise n-dimensionale

Fie $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un interval închis n-dimensional, $f : I \to \mathbb{R}$ o fct. integrabilă Riemann pe I a. î. fct. $x_K \to f(x_1 \dots x_K \dots x_n)$ să fie integr. Riemann pe $[a_K, b_K]$

At. fct. $(x_1 \dots \hat{x}_K \dots x_n) \to f(x_1 \dots x_K \dots x_n)$ este ~~integr. Riema~~ integrabilă Riemann pe $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{K-1}, b_{K-1}] \times [a_{K+1}, b_{K+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$ și $\int_I f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int \left(\int_{a_K}^{b_K} (x_1 \dots x_n) \right) dx_K \, dx_1 \dots dx_{K-1}\, dx_{K+1} \dots dx_n$

Corolar: $\forall$ fct. cont. $f : I \to \mathbb{R}$ este integr. Riemann pe I și $\int_I f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n$

129) Teorema lui Fubini pe mulțimi simple în raport cu axa Ox_j: Fie $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$ o mulț. compactă, $f_1, f_2 : K \to \mathbb{R}$ două fcții continue și mulț. $E = \{ (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) \le x_j \le f_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n)$ cu $(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) \in K \}$ o mulț. simplă în rap. cu axa Ox_j. $\forall$ fct. continuă $f : E \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E și

$$\int_E f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_K \left(\int_{f_1(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_K)}^{f_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n)} f(x_1 \dots x_n)\, dx_j \right) dx_1 \dots d\hat{x}_j \dots dx_n$$

130) Fie $f = (f_1 \dots f_m) : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o fct. de clasă C^1 pe mulț. D.

Matricea $J_f(x_1 \dots x_m) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1 \dots x_m) \right)_{i,j \in \overline{1,m}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ se numește matricea Jacobi a funcției f în pc. $(x_1 \dots x_m) \in D$.

Nr. real $J_f(x_1 \dots x_m)$ s.n. Jacobianul fct. f în pc. $(x_1 \dots x_m) \in D$.

Not: $\dfrac{\partial(f_1 \dots f_m)}{\partial(x_1 \dots x_m)} = \det J_f(x_1 \dots x_m)$

131) Teorema de schimbare de variabilă pt integrala multiplă

Fie $f : D = \mathring{D} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o fct. de clasă C^1, $E \in J(\mathbb{R}^n)$ astfel ca $\overline{E} \subseteq D$, $f(E) \in J(\mathbb{R}^n)$ și $\det J_f(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathring{E}$.
Pt. $\forall$ fct. $f : f(E) \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe $f(E)$ fct. $f \circ f \cdot |\det J_f| : E \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E și

$$\int_{f(E)} f = \int_E f \circ f \cdot |\det J_f|$$

•o CURS 19 o•

132) Trecerea la coordonate polare

→ în $\mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(R, \alpha) = (\overbrace{R\cos\alpha}^{x}, \overbrace{R\sin\alpha}^{y})$$

$$\det J_f(R, \alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -R\sin\alpha \\ \sin\alpha & R\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= R\cos^2\alpha + R\sin^2\alpha = R$$

Condiții: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ sau $\alpha \in [-\pi, \pi]$

→ generalizate în $\mathbb{R}^2$

$$f(R, \alpha) = (\overbrace{aR\cos\alpha}^{x}, \overbrace{bR\sin\alpha}^{y}), \quad a, b \in \mathbb{R}^*$$

$$\det J_f(R, \alpha) = \begin{vmatrix} a\cos\alpha & -aR\sin\alpha \\ b\sin\alpha & bR\cos\alpha \end{vmatrix} = abR\cos^2\alpha + abR\sin^2\alpha$$

$$= abR$$

Condiții: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ sau $\alpha \in [-\pi, \pi]$

→ sferice în $\mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(R, \alpha, \beta) = (\overset{x}{R\sin\alpha\cos\beta}, \overset{y}{R\sin\alpha\sin\beta}, \overset{z}{R\cos\alpha})$$

Condiții: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, 2\pi]$ sau $\beta \in [-\pi, \pi]$

133) S.n. drum în $\mathbb{R}^n$ $\forall$ fct. continuă $d: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

- închis: $d(a) = d(b)$ $\left(d: [a,b] \to \mathbb{R}^n \right)$
- simplu: $d\big|_{(a,b)}$ este fct. injectivă
  - ↳ restricția funcției la (a,b)
- de clasă C_1: $d_1, \dots d_n$ - deriv. și derivatele lor sunt continue pe $[a,b]$.

134) Curbă de clasă C_1: O mulțime $C \subseteq \mathbb{R}^n$ pt. care $\exists$ un drum de clasă C_1 $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a.î. $C = \operatorname{Im} d$

135) Fie $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum de clasă C_1. At. fct. lungime $l: [a,b] \to \mathbb{R}$ asociată drumului d este de cls. C_1 pe $[a,b]$ și $l'(t) = \| d'(t) \| = \| d_1'(t), d_2'(t), \dots, d_n'(t) \|$

$$l'(t) = \sqrt{(d_1'(t))^2 + \dots + d_n'(t)^2} \quad \forall\, t \in [a,b]$$

135) Se consideră:

1) $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ - drum de clasă C^1;

2) $F: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - fct. cont

3) $C = \operatorname{Im} d \subseteq D$

Integrala Riemann $\int_a^b F \circ d(t) \cdot \underbrace{l'(t)\,dt}_{dl} = \int_d F\,dl \Rightarrow$

integrala curbilinie de primul tip a funcției F pe drumul d (pe curba C)

136) S.m. formă diferențiabilă de gradul I pe $\mathbb{R}^n$ ∀ fct. continuă $w : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Not: $w(x_1 \dots x_n) = P_1(x_1 \dots x_n)\,dx_1 + P_2(x_1 \dots x_n)\,dx_2 + \dots + P_n(x_1 \dots x_n)\,dx_n$

$P_1 \dots P_n : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - fct. cont.

$w \overset{not}{=} P_1\,dx_1 + \dots + P_n\,dx_n$

137) Se consideră:

1) $d : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ drum de clasă C^1.

w - formă dif. de gr. I

$C = \operatorname{Im} d \subseteq D$

Integrala curbilinie de al doilea tip a formei dif. w pe drumul d (curba C):

$$\int_d w = \int_C w = \int_a^b \left[P_1 \circ d(t) \cdot d_1'(t) + P_2 \circ d(t) \cdot d_2'(t) + \dots + P_n \circ d(t) \cdot d_n'(t) \right] dt$$

137) Formula lui Green:

Fie $\omega = P\,dx + Q\,dy : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o formă dif. de gr. I. pt care $\exists \ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$ fcț. cont, $K \subseteq D$ mulț. compactă, măs. Jordan cu $\operatorname{Fr} K = \operatorname{Im} d$, unde $d : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ drum simplu, închis, de clasă C^1. Atunci:

$$\int_{d} P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

(C)

138) Parametrizări ale unor curbe remarcabile în plan:

1) $C = [A,B]$ $\quad d : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ d(t) = (1-t)(x_A, y_A) + t(x_B, y_B)$

2) $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$C = (\underset{\text{centru}}{(a,b)}, \overset{\text{raza}}{R})$

$d : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sau

$d : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (R\cos t + a,\ R\sin t + b)$

3) $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a, b > 0, \quad a \neq b$

Sp. $a > b$.

$(0,b), (0,-b), (a,0), (-a,0)$

$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$

182. Derivatele funcţiilor elementare (definite pe domeniul maxim de derivabilitate):

$c' = 0$, c - constant

$x' = 1$

183. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R^{*}$

184. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

185. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$, $a > 0, a \neq 1$, caz particular $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

186. $(\log_{a} x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$, caz particular $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

187. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

188. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$

$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$

189 . $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

190 $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

139. Criteriul cleştelui:

Fie $(a_n)_n, (b_n)_n, (x_n)_n$ şiruri de numere reale. Dacă $a_n \le x_n \le b_n, (\forall) n \ge n_0$ şi dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \in R$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

140. Criteriul raportului:

Fie $(a_n)_n$ cu $a_n > 0, (\forall) n$. Presupunând că există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci:

i) dacă $l < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

ii) dacă $l > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,

iii) dacă $l = 1 \Rightarrow$ nu ne putem pronunţa asupra limitei şirului $(a_n)_n$.

141. Criteriul Cesaro – Stolz:

Fie şirul $(a_n)_n$ şi şirul $(b_n)_n$ strict crescător şi nemărginit cu $b_n > 0, (\forall) n$. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finită sau infinită), atunci, există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ şi în plus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

142. Criteriul radicalului:

Fie $(a_n)_n$ cu $a_n > 0, (\forall) n$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finită sau infinită. Atunci şirul $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ are limită şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

143. Limite remarcabile: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $x_n \ne 0, (\forall) n \in N$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{tg\, x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{arctg\, x_n}{x_n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \quad a > 0, a \ne 1.$$

Limite de funcţii:

144. Teoremă (Heine): Fie $f : D \to R$, $a \in D'$ şi $l \in \overline{R}$, atunci:

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $(\forall)(x_n)_n \subset D \setminus \{a\}$, cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ există $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ şi este egală cu l.

145. Limite remarcabile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, a \ne 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^r - 1}{x} = r.$$

200. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

201. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

202. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

203. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

204. $\int \cos x dx = \sin x + C$

205. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

206. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

207. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

208. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

209. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

210. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$

211. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$