CHNIFAKH Ali 2024/2023	Serie1 : la logique Mathématiques	1 Bac SM BIOF Lycée IBNO ZOHR

Exercice1 :

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) P: " $\forall x \in R / x^2 > 0$ "
2) P: " $\exists x \in R / x^2 - 2 = 0$"
3) P : "$x \in [1;2[$ "
4) P:" $\forall n \in N / \frac{n}{2} \in N$"
5) P: $(\forall x \in R)$; $-1 \leq \cos x \leq 1$";
6) P: $(\forall n \in N)(\exists m \in N)$ $n < m$);
7) P: $(\exists n \in N)$ 2n+ 1 est pair
8) P: $(\forall n \in N)$;$\sqrt{n} \in N$;
9) P: $(\forall x \in R)(\exists y \in R)$ y-x>0.
10) P: $(\exists! x \in R)$;2x+ 4= 0
11) P: $(\exists! x \in R)$; $x^2 = 2$
12) P: $(\forall x \in R)$; $(\exists y \in R)$ $y^2 = x$.

Exercice 2

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3

Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(2x^2 + x + 3 > 0)$
2. $(\forall (a, b) \in Z^2)(a\sqrt{2} + b \neq 0)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $(n+1/n) \notin \mathbb{N}$

Exercice 4

1- $x \in R$; $y \in R$ Montrer que

- $1<x<2 \Rightarrow 2/5<\frac{2}{x^2+1}<1$
- $\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$
- $X^2+y^2=0 \Rightarrow x=0$ et $y=0$

2- $x \in R+$; $y \in R+$ Montrer que

$x+y+2=2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x=y=1$

Exercice 5

- Montrer que pour tout $\forall x \in R$ $|x-1| <= x^2-x+1$.
- Résoudre dans R l'inéquation : $|x-1|+2x-3 \geq 0$
- $x \in R$ et $y \in R$ Montrer que:

$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x=y=0$

Exercice 6 (par absurde)

Montrer que : $\sqrt{2} \notin Q$

Exercice 7 (Contraposée)

1- $x \in R$ et $y \in R$ Montrer que

$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

2- Soient a ; b $\in$ Q

- Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$
- en déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Exercice 8 (par récurrence)

$n \in N$ montrer que :

1. $1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2. $1+2^2+3^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $n>5$: $2^n >= 6n$
4. 25 divise $2^{n+2}.3^n + 5n - 4$
5. 17 divise $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$

Exercice 9

1. (Raisonnement direct)

Soient $a \in \mathbb{R}+$; $b \in \mathbb{R}+$;

Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq 2$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas)

   Montrer que pour tout $\forall$ $n \in N$ $n(n+1)$ est divisible par 2

3. (Absurde)

   Soit $n \in \mathbb{N}^* \in$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

4. (Contre-exemple)

   Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $x<2 < \Rightarrow x^2 < 4$?

5. (Récurrence)

   Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^*+$

   Montrer que : $\forall n \in N$ $(1+a)^n \geq 1+na$

Exercice 10

1) a- Montrer que pour tout $x \in R^*$

$0<\sqrt{1+x^2} - |x| < \frac{1}{2|x|}$

b- en déduire que pour tout $x \in R^*+$:

$x+1<\sqrt{x^2+2x+2}<x+1+\frac{1}{2x}$

2) Montrer que

   $(\forall x \in \mathbb{R})$ $x^2+2|x|-3>=0 \Leftrightarrow |x|>=1$