

Integración numérica

Lección 17

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre 2017

Contenido

1 Fórmulas de integración abierta

2 Integración de ecuaciones

- Extrapolación de Richardson
- Integración de Romberg
- Cuadratura adaptativa

Fórmulas de Newton-Cotes de integración abierta

- Las fórmulas de integración abierta tienen límites que se extienden más allá del intervalo de datos
- Se resumen en la tabla las fórmulas de Newton-Cotes para este caso

Segm.	Pts.	Fórmula	Error
2	1	$(b-a)f(x_1)$ Método del punto medio	$(1/3)h^3 f''(\xi)$
3	2	$(b-a) \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$	$(3/4)h^3 f''(\xi)$
4	3	$(b-a) \frac{2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)}{3}$	$(14/45)h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	4	$(b-a) \frac{11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)}{24}$	$(95/144)h^5 f^{(4)}(\xi)$
6	5	$(b-a) \frac{11f(x_1) - 14f(x_2) + 26f(x_3) - 14f(x_4) + 11f(x_5)}{20}$	$(41/140)h^7 f^{(6)}(\xi)$

Integración de ecuaciones

Integración de ecuaciones

- Hasta ahora los métodos presentados pueden utilizar puntos aislados conocidos a priori (por ejemplo, provenientes de mediciones)
- Si se tiene la función $f(x)$, entonces es posible evaluarla para cuanto valor de x sea necesario
- Los métodos a evaluar a continuación utilizan la función directamente para evaluar los valores que sean necesarios para reducir el error de la integral progresivamente.
- Transformación de algoritmos de Newton-Cotes para evaluar funciones es directa (de argumento se usa puntero a función, o functor en vez de pasar vector de valores f)

Integración de Romberg

- Método eficiente para obtener integrales numéricas de funciones.
- Se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio.
- El principio matemático utilizado se denomina **extrapolación de Richardson**

Extrapolación de Richardson

(1)

- La estimación del valor exacto I de la integral, el valor $I(h)$ aproximado con regla del trapecio de aplicación múltiple y el error $E(h)$ se relacionan con

$$I = I(h) + E(h)$$

- Si n es el número de segmentos, entonces $h = (b - a)/n$
- Dos estimaciones con pasos h_1 y h_2 deben cumplir

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

- El error para la regla del trapecio de aplicación múltiple es

$$E \approx -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''$$

Extrapolación de Richardson

(2)

- Si se asume \bar{f}'' constante para todo h se obtiene:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2} \quad \Rightarrow \quad E(h_1) \approx E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2$$

- Retomando

$$\begin{aligned} I(h_1) + E(h_1) &= I(h_2) + E(h_2) \\ I(h_1) + E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 &= I(h_2) + E(h_2) \end{aligned}$$

de donde se despeja

$$E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

Extrapolación de Richardson

(3)

con $I = I(h_2) + E(h_2)$ se obtiene entonces una mejor estimación de la integral

$$I \approx I(h_2) + [I(h_2) - I(h_1)] \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}$$

- Para el caso particular $h_2 = h_1/2$ la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} I &\approx I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{2^2 - 1} \\ &= \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \end{aligned}$$

Ejemplo: Extrapolación de Richardson

(1)

Ejemplo

Asúmase que conoce las aproximaciones de la integral de $f(x)$ utilizando la regla del trapecio dadas por:

Segm.	h	$I(h)$	$\epsilon_t \%$
1	0,8	0,1728	89,5
2	0,4	1,0688	34,9
4	0,2	1,4848	9,5

Calcule una mejor aproximación de la integral. Se sabe que el valor verdadero de la integral es $I = 1,640533$

Ejemplo: Extrapolación de Richardson

(2)

Solución: Con la ecuación obtenida anteriormente, y los primeros dos resultados se calcula

$$I \approx \frac{4}{3}(1,0688) - \frac{1}{3}(0,1728) = 1,367467$$

El nuevo error es $\epsilon_t = 16,6\%$.

Si se combinan ahora los últimos dos resultados se obtiene:

$$I \approx \frac{4}{3}(1,4848) - \frac{1}{3}(1,0688) = 1,623467$$

para un error $\epsilon_t = 1,0\%$

Error de extrapolación de Richardson

(1)

- La regla del trapecio tiene un error $\mathcal{O}(h^2)$
- Se puede demostrar que con la estimación

$$I \approx I(h_2) + [I(h_2) - I(h_1)] \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}$$

se obtiene un error $\mathcal{O}(h^4)$

- Si se combinan ahora dos estimaciones calculadas con error $\mathcal{O}(h^4)$ se reduce el error con $\mathcal{O}(h^6)$; y si se combinan dos de estos resultados se obtiene un error de $\mathcal{O}(h^8)$.

Error de extrapolación de Richardson

(2)

- Con la división sucesiva a la mitad del tamaño la ecuación para una exactitud $\mathcal{O}(h^6)$ es

$$I \approx \frac{16}{15}I_m - \frac{1}{15}I_l$$

con I_m la estimación más exacta e I_l la estimación menos exacta.

- Para exactitud $\mathcal{O}(h^8)$ la ecuación es

$$I \approx \frac{64}{63}I_m - \frac{1}{63}I_l$$

- Observe que en los tres casos la suma de los coeficientes es 1

Algoritmo de integración de Romberg

- Las fórmulas anteriores se pueden expresar de forma general como

$$I_{j,k} \approx \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

- $I_{j+1,k-1}$ e $I_{j,k-1}$ son las integrales más y menos exactas, respectivamente
- El subíndice k indica el nivel de integración, con $k = 1$ equivalente a la regla del trapecio, $k = 2$ corresponde a $\mathcal{O}(h^4)$, etc.
- El subíndice j distingue de estimación más exacta ($j + 1$) y menos exacta (j)
- La aplicación sistemática de la ecuación anterior se denomina **integración de Romberg**

Ejemplo: Integración de Romberg

(1)

Ejemplo

Encuentre la sucesión de estimaciones de la integral de Romberg

Ejemplo: Integración de Romberg

(2)

Solución:

Con $h_i = h_{i-1}/2$

	$\mathcal{O}(h^2)$		$\mathcal{O}(h^4)$		$\mathcal{O}(h^6)$		$\mathcal{O}(h^8)$
h_1	0,172800	↗	1,367467	↗	1,640533	↗	1,640533
h_2	0,068800	↗	1,623467	↗	1,640533		
h_3	1,484800	↗	1,639467				
h_4	1,600800						

Criterio de terminación

- Como criterio de terminación se utiliza un umbral con el error relativo

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{I_{1,k} - I_{2,k-1}}{I_{1,k}} \right|$$

Número de evaluaciones

- La regla de Simpson $1/3$ de aplicación múltiple requeriría 256 segmentos para alcanzar la precisión dada en el ejemplo.
- Dicha regla está limitada por error de redondeo, por lo que más segmentos no mejoran la estimación
- El algoritmo de Romberg requiere la estimación para 1, 2, 4 y 8 segmentos, esto es: solo 15 evaluaciones, y alcanza mejor precisión.
- Este es el método de preferencia si se tienen funciones suaves (derivables) sin singularidades.

Código de integración de Romberg

```
// F:      tipo de functor
// n:      número de segmentos
// [a,b]: intervalo de integración
template<class F, typename T>
T trapezoid(F f, int n, T a, T b) {
    T h = (b-a)/n;
    T x=a;
    T sum = f(x);
    for (int i=1; i<n; ++i) {
        x += h;
        sum += 2*f(x);
    }
    sum += f(b);
    return (b-a)*sum/(2*n);
}
```

Código de integración de Romberg

```
template<class F, typename T>
T romberg(F f, T a, T b,
          int maxIt = 10, T es=std::limits<T>::epsilon()) {
    matrix<T> l(maxIt, maxIt);
    int n=1;
    l[0][0] = trapezoid(f,n,a,b);
    T ea=std::limits<T>::max();
    int i;
    for (i=1;i<maxIt && ea>es;++i) {
        n *= 2;
        l[i][0] = trapezoid(f,n,a,b);
        T fk=T(1);
        for (int k=1;k<=i;++k) {
            j = i - k;
            fk*=4; // esto es pow(4,k);
            l[j][k] = (fk*l[j+1][k-1] - l[j][k-1])/(fk-T(1));
        }
        ea = abs((l[0][i]-l[1][i-1])/l[0][i]); // Corregir!
    }
    return l[0][i-1];
}
```

Cuadratura adaptativa

- Aunque la integración de Romberg es más eficiente que la aplicación múltiple de la regla de Simpson $1/3$, ambas usan puntos equiespaciados
- Se ignora que las funciones tienen regiones con más variabilidad que otras.
- La **cuadratura adaptativa** ajusta el tamaño de paso tal que se usan pasos pequeños en intervalos de variación rápida, y pasos mayores si la función cambia lentamente.
- Se utiliza como base la regla de Simpson $1/3$ en una estructura similar al algoritmo de Romberg
- Recursivamente se parte el problema en dos subintervalos si el error supera un umbral

Algoritmo de cuadratura adaptativa

(1)

```
template<class F,typename T>
T quadadapt(F f,T a,T b,T tol=std::limits<T>::epsilon()) {
    T c = (a+b)/2;
    T fa = f(a);
    T fc = f(c);
    T fb = f(b);
    return qstep(a,b,tol,fa,fc,fb);
}
```

```
template<class F,typename T>
T qstep(F f,T a, T b, T tol, T fa, T fc, T fb) {
    T h1 = b-a;
    T h2 = h1/2;
    c = (a+b)/2;
    fd = f( (a+c)/2 );
    fe = f( (c+b)/2 );
    T l1 = h1/6 * (fa+4*fc+fb); // Regla de Simpson 1/3
    T l2 = h2/6 * (fa+4*fd+2*fc+4*fe+fb); // 2x Regla 1/3
    T l();
    if (abs(l2-l1)<=tol) {
```

Algoritmo de cuadratura adaptativa

(2)

```
l = l2 + (l2-l1)/15; // Mejoramiento como Richardson
} else {
    la = qstep(a,c,tol,fa,fd,fc);
    lb = qstep(c,b,tol,fc,fe,fb);
    l = la+lb;
}
return l;
}
```

Resumen

1 Fórmulas de integración abierta

2 Integración de ecuaciones

- Extrapolación de Richardson
- Integración de Romberg
- Cuadratura adaptativa

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo \LaTeX , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2017 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica