

# Trazadores

## Lección 14

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería  
Área de Ingeniería en Computadores  
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre 2017

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Trazadores básicos
  - Trazadores lineales
  - Trazadores cuadráticos
- 3 Trazadores cúbicos
  - Derivación directa
  - Derivación optimizada
- 4 Interpolación multidimensional

# Trazadores

## Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de  $n$ -ésimo orden que pasa por **todos**  $n + 1$  puntos.

# Trazadores

## Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de  $n$ -ésimo orden que pasa por **todos**  $n + 1$  puntos.
- **Splines** o **Trazadores** usa polinomios de grado inferior en subconjuntos de puntos.

# Trazadores

## Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de  $n$ -ésimo orden que pasa por **todos**  $n + 1$  puntos.
- **Splines** o **Trazadores** usa polinomios de grado inferior en subconjuntos de puntos.
- Ventaja: eliminan oscilaciones entre puntos muestreados.

# Trazadores

## Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de  $n$ -ésimo orden que pasa por **todos**  $n + 1$  puntos.
- **Splines** o **Trazadores** usa polinomios de grado inferior en subconjuntos de puntos.
- Ventaja: eliminan oscilaciones entre puntos muestreados.
- Objetivo es lograr que subconjuntos adyacentes usen polinomios que además se conectan “suavemente”, esto es, que tienen igual(es) derivada(s) en los puntos de conexión.

# Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \quad x_1 \rightarrow f(x_1) \quad x_2 \rightarrow f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \rightarrow f(x_n)$$

# Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \quad x_1 \rightarrow f(x_1) \quad x_2 \rightarrow f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \rightarrow f(x_n)$$

- El segmento entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  sigue el patrón de la interpolación lineal:

$$f(x) = f(x_i) + \underbrace{\left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)}_{m_i} (x - x_i)$$



# Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \quad x_1 \rightarrow f(x_1) \quad x_2 \rightarrow f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \rightarrow f(x_n)$$

- El segmento entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  sigue el patrón de la interpolación lineal:

$$f(x) = f(x_i) + \underbrace{\left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)}_{m_i} (x - x_i)$$

- Todos los segmentos en conjunto aproximan a  $f(x)$

# Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \quad x_1 \rightarrow f(x_1) \quad x_2 \rightarrow f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \rightarrow f(x_n)$$

- El segmento entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  sigue el patrón de la interpolación lineal:

$$f(x) = f(x_i) + \underbrace{\left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)}_{m_i} (x - x_i)$$

- Todos los segmentos en conjunto aproximan a  $f(x)$
- Desventaja: Solo la función es continua; la primera derivada es discontinua en los nodos.

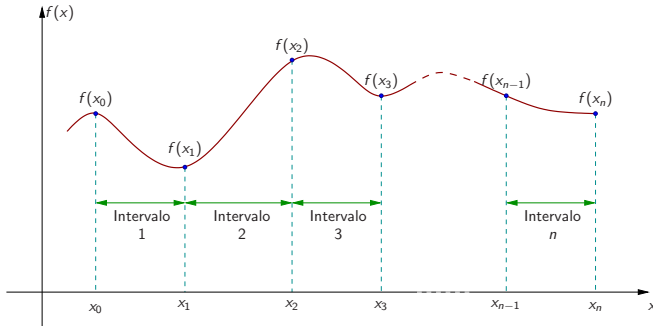
# Trazadores cuadráticos

- En general, para que  $m$ -ésima derivada sea continua, se requieren polinomios de  $(m + 1)$ -ésimo orden.
- Trazadores cuadráticos: Permiten que tanto la función como la primera derivada sean continuas.
- Desventaja: discontinuidad de la segunda derivada es perceptible.
- Ventaja: permiten comprender el principio de operación de los trazadores.
- En cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  la función se interpola con

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

# Trazadores cuadráticos

(1)



Hay  $n+1$  datos,  $n$  intervalos c/u con tres incógnitas ( $a_i, b_i, c_i$ )  
 $\Rightarrow$  hay  $3n$  incógnitas.



## Trazadores cuadráticos

(3)

- Las primeras derivadas en los nodos deben ser iguales, y como la derivada en el  $i$ -ésimo intervalo es

$$f'(x) = 2a_i x + b_i$$

entonces

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i+1} x_i + b_{i+1}$$

con  $i = 1 \dots n-1$  que provee otras  $n-1$  condiciones.

- (Total hasta ahora:  $3n - 1$  ecuaciones)
- Falta una condición más. Arbitrariamente se elige  $f''(x_0) = 0$  que produce:

$$2a_1 = 0$$

y por tanto  $a_1 = 0$

¿Cómo se puede plasmar lo anterior en un sistema de ecuaciones lineal?

# Sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 & & & \dots \\ x_1^2 & x_1 & 1 & & & \dots \\ & & & x_1^2 & x_1 & 1 & \dots \\ 2x_1 & 1 & & -2x_1 & -1 & & \dots \\ & & & x_2^2 & x_2 & 1 & \dots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_1) \\ 0 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$



# Trazadores cúbicos

- Cada intervalo entre dos nodos se interpola con un polinomio

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Para  $n + 1$  datos hay  $n$  intervalos y por tanto en total hay  $4n$  incógnitas.
- Se necesitan plantear  $4n$  ecuaciones

# $4n$ ecuaciones

(1)

- 1 Función en límite común a dos polinomios debe ser igual ( $2n - 2$  ec.)

$$f_i(x_i) = f(x_i) \quad f_{i+1}(x_i) = f(x_i)$$

- 2 Función pasa por puntos extremos (2 ec.)

$$f_1(x_0) = f(x_0) \quad f_n(x_n) = f(x_n)$$

- 3 Primeras derivadas en nodos interiores son iguales ( $n - 1$  ec.)

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i)$$

- 4 Segundas derivadas en nodos interiores son iguales ( $n - 1$  ec.)

$$f''_i(x_i) = f''_{i+1}(x_i)$$

- 5 Arbitraria: segunda derivada en extremos es cero (2 ec.)

## Solución directa

Con lo anterior se plantea sistema de ecuaciones utilizando  $n + 1$  puntos con  $4n$  ecuaciones.

### Ejercicio

Plantee el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

El sistema se resuelve empleando cualquiera de los métodos analizados.

# Optimizando los trazadores cúbicos

- Sistema anterior usa matrices de  $4n \times 4n$
- Algoritmos de solución de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  son  $\mathcal{O}(n^3)$
- Se replanteará otro algoritmo  $\mathcal{O}(n^2)$ , que produce además una matriz tridiagonal
- Factor de aceleración será  $64n$

# Replanteamiento

## Trazadores cúbicos

(1)

- El polinomio cúbico es

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Tiene como primera derivada

$$f'_i(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$

- y segunda derivada

$$f''_i(x) = 6a_i x + 2b_i$$

que tiene forma de ecuación lineal

- Se desea que la segunda derivada sea continua en los nodos

# Replanteamiento

## Trazadores cúbicos

(2)

- La segunda derivada está dada por segmentos de recta, que se interpolan con polinomios de Lagrange:

$$f_i''(x) = f_i''(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

- Integrando lo anterior se obtiene:

$$f_i'(x) = \left[ f_i''(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)^2}{2(x_{i-1} - x_i)} + C \right] + \left[ f_i''(x_i) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})} + D \right]$$

# Replanteamiento

## Trazadores cúbicos

(3)

- Integrando de nuevo se obtiene:

$$f_i(x) = \left[ f_i''(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)^3}{6(x_{i-1} - x_i)} + C(x - x_i) \right] + \left[ f_i''(x_i) \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + D(x - x_{i-1}) \right]$$

- Considerando que  $f(x) = f(x_{i-1})$  en  $x_{i-1}$  y  $f(x) = f(x_i)$  en  $x_i$  se obtiene:

$$C = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_i} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_{i-1} - x_i)}{6}$$

$$D = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}$$

# Replanteamiento

## Trazadores cúbicos

(4)

- Finalmente se tiene el siguiente polinomio cúbico:

$$f_i(x) = f_i''(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)^3}{6(x_{i-1} - x_i)} + f_i''(x_i) \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} +$$

$$\left[ \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_i} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_{i-1} - x_i)}{6} \right] (x - x_i) +$$

$$\left[ \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1})$$

que tiene solo dos términos desconocidos:  $f_i''(x_{i-1})$  y  $f_i''(x_i)$



## Trazadores cúbicos

(5)

- $$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i)$$

- $$f'_i(x) = f''_i(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)^2}{2(x_{i-1} - x_i)} + \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_i} - \frac{f''_i(x_{i-1})(x_{i-1} - x_i)}{6} +$$
- $$f''_i(x_i) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})} + \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''_i(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}$$

# Replanteamiento

## Trazadores cúbicos

(6)

- Con lo anterior se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ &= 6 \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 6 \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned}$$

Plantee el sistema de ecuaciones lineales considerando que en ambos extremos la segunda derivada se hace (arbitrariamente) cero

# Sistema de ecuaciones para trazadores bicubicos

## Planteamiento general

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_0 & 2(x_2 - x_0) & x_2 - x_1 & & & \\ & x_2 - x_1 & 2(x_3 - x_1) & x_3 - x_2 & & \\ & & x_3 - x_2 & 2(x_4 - x_2) & x_4 - x_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & x_{n-1} - x_{n-2} & 2(x_n - x_{n-2}) & x_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''(x_0) \\ f''(x_1) \\ f''(x_2) \\ \vdots \\ f''(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - 6 \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ 6 \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - 6 \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ 6 \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} - 6 \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \\ \vdots \\ 6 \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - 6 \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} \end{bmatrix}$$

El sistema así planteado tiene  $n - 1$  ecuaciones pero  $n + 1$  incógnitas.



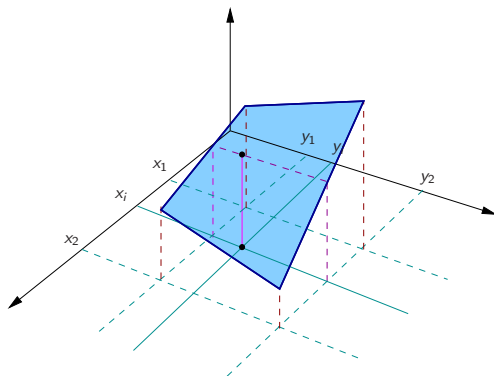


# Interpolación multidimensional

- Extensiones de los métodos unidimensionales a mayor número de dimensiones.
- Extensiones **separables** bidimensionales: se aplica interpolación primero a lo largo de una dimension, y luego en la otra
- Casos usuales en dos dimensiones:
  - Interpolación bilineal
  - Interpolación bicúbica

# Interpolación bilineal

Se determina valor de función  $f(x_i, y_i)$  a partir de cuatro puntos  $f(x_1, y_1)$ ,  $f(x_1, y_2)$ ,  $f(x_2, y_1)$ ,  $f(x_2, y_2)$





# Concepto de interpolación bilineal

- 1 Se estima interpolación lineal en  $x$  con  $y = y_1$  fijo

$$f(x_i, y_1) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_1)$$

- 2 Se estima interpolación lineal en  $x$  con  $y = y_2$  fijo

$$f(x_i, y_2) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_2)$$

- 3 Entre ambos puntos interpolados, se aplica interpolación lineal en  $y$ :

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_i, y_1) + \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_i, y_2)$$

# Interpolación bilineal en una ecuación

Las tres ecuaciones anteriores se sintetizan en una sola con:

$$f(x_i, y_i) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_2, y_1) \\ + \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_2, y_2)$$

# Resumen

- 1 Introducción
- 2 Trazadores básicos
  - Trazadores lineales
  - Trazadores cuadráticos
- 3 Trazadores cúbicos
  - Derivación directa
  - Derivación optimizada
- 4 Interpolación multidimensional

*Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo  $\text{\LaTeX}$ , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux*



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2017 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica