Instituto Tecnológico de Costa Rica
Área de Ingeniería en Computadores
CE-3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Profesor: Dr. Pablo Alvarado Moya
II Semestre, 2017
Examen Final

Total de Puntos:	48
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________________ Carné: ________________

Instrucciones:

- Resuelva el examen en forma ordenada y clara.
- No olvide indicar su nombre y carné en todos los archivos entregados.
- En todas las preguntas y problemas debe indicarse algún procedimiento o justificación clara para llegar a la solución.
- Se recomienda el uso de su procesador o levantador de textos preferido (OpenOffice, LibreOffice, LaTeX, etc.), pero debe entregar sus respuestas en formato PDF. Si lo desea, puede escribir sus soluciones a mano y entregarlas escaneadas en el archivo PDF.
- ¡Documente y estructure bien su código!
- Debe subir su código de solución en el tecDigital. Utilice archivos comprimidos (.zip, .rar, o .tar.gz) nombrados con *examen_nombre_apellido* (ej. *examen_juan_perez.tar.gz*).
- Todo archivo que sea parte de su solución debe incluir un encabezado con su nombre y número de carné.
- Es permitido discutir el examen y posibles caminos de solución con otros estudiantes, sin embargo, la solución debe ser realizada y presentada individualmente. Soluciones muy similares o idénticas serán calificadas con cero.
- El no cumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Problema 1	de 20
Problema 2	de 12
Problema 3	de 16

Problemas

<u>Problema 1</u> Ecuaciones diferenciales parciales **20 Pts**

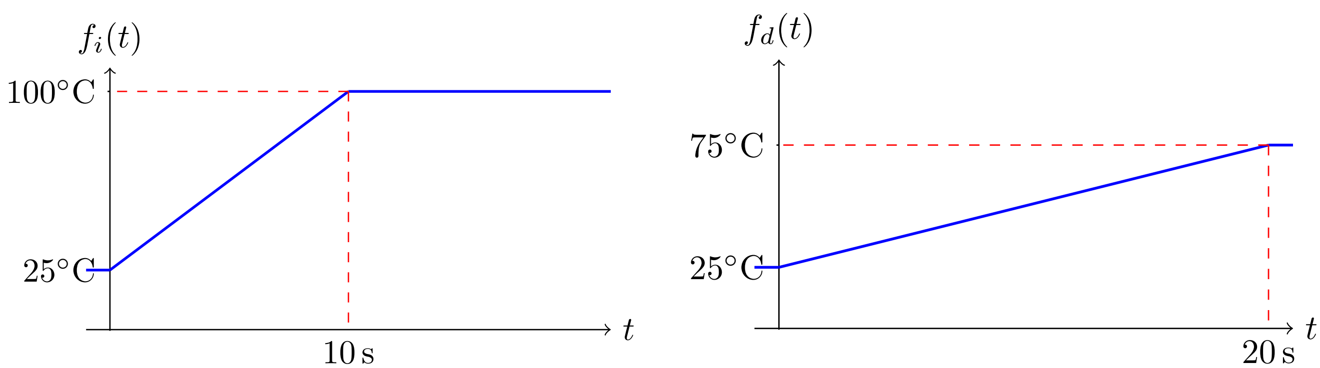
En este problema usted utilizará las técnicas revisadas en el curso para resolver una ecuación diferencial parcial parabólica de la forma:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.1}$$

El problema a resolver es el de describir el comportamiento térmico de una barra metálica en tiempo y espacio.

La barra a utilizar mide 100 mm, es de cobre, cuyo coeficiente de difusión térmica es $k = 111\text{mm}^2/s$.

Los extremos de la barra en el instante $t = 0$ siguen un perfil térmico predefinido. La temperatura al lado izquierdo sigue el perfil en la figura 1.1a y la temperatura al lado derecho sigue el perfil en la figura 1.1b. Puede asumir que la barra metálica está inicialmente equilibrada térmicamente con



(a) (b)

Figura 1.1: Perfiles térmicos al lado (a) izquierdo y (b) derecho de la barra.

una temperatura igual al promedio de los dos extremos.

Debe seleccionar uno de los métodos vistos en clase, que sea implícito y que tenga precisión de segundo orden en tiempo y espacio.

La solución debe programarse en GNU/Octave. Utilice para ello la plantilla `pde.m` entregada con el enunciado. No olvide poner su nombre y carné allí.

1.1. Indique qué método va a utilizar para resolver la ecuación diferencial y por qué. 1 Pt

1.2. Programe dos funciones en GNU/Octave $f_i(t)$ y $f_d(t)$ que implementen los perfiles térmicos en la figura 1.1. 2 Pts

El lado izquierdo de la barra se encuentra en la posición $x = 0\,\text{mm}$ y el lado derecho en la posición $x = 100\,\text{mm}$.

El resultado debe quedar plasmado en una matriz `T`, de tal modo que cada fila corresponde a un mismo instante de tiempo. La función de solución se debe llamar con

`[T,x,t]=solve_pde(longitud,dx,total_t,dt,f_i,f_d)`, donde `T` es la matriz resultante, `x` es un vector **fila** que contiene en cada componente la posición en milímetros de cada elemento de la barra y tiene una dimensión exactamente igual al número de columnas de `T`. El vector **columna** `t` debe contener el mismo número de filas de `T` y contiene el valor en segundos de cada instante de tiempo solucionado.

El argumento `longitud` indica la longitud de la barra en milímetros (por lo que se usará con 100 en este problema). El valor `dx` indica el ancho espacial de cada elemento discreto usado en la solución, en milímetros. Por tanto, el número de columnas de `T` debe ser igual a `longitud/dx`.

El valor `dt` es el paso temporal utilizado mientras que `total_t` es el intervalo de tiempo a observar; ambos en segundos. Es decir, el total de columnas de `T` deberá ser `total_t/dt`.

La función `f_i` es el perfil térmico del lado izquierdo y `f_d` es el perfil térmico del lado derecho, y son *handlers* a las funciones.

1.3. Antes de programar, plantee el sistema de ecuaciones completo en la forma $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$, que se necesita para encontrar los valores de temperatura en la barra en cada instante particular de tiempo $l+1$, en términos de las temperaturas de la barra en el instante de tiempo anterior l, y de los perfiles térmicos en los extremos de la barra. [3 Pts]

1.4. Indique qué método de solución de ecuaciones, de los vistos en clase, es eficiente y apropiado para resolver el sistema de ecuaciones del punto anterior. Justifique. [1 Pt]

1.5. Implemente el método de solución de sistemas de ecuaciones lineales especificado en la pregunta anterior para resolver el sistema de ecuaciones. [2 Pts]

1.6. Con las respuestas anteriores, implemente el solucionador con la interfaz arriba mencionada que encuentra la solución a la ecuación diferencial (1.1), utilizando el método numérico seleccionado por usted en el primer punto, y el solucionador de sistemas de ecuaciones lineales del punto anterior. [5 Pts]

1.7. Use su método para encontrar la solución bajo las condiciones arriba indicadas, utilizando dos elementos por milímetro y un paso temporal de 100 ms, para observar el comportamiento térmico de la barra durante 25 s. Grafique su solución utilizando `surf`. No olvide etiquetar los ejes utilizando `xlabel`, `ylabel` y `zlabel`. [1 Pt]

1.8. Estime el error aproximado de la solución anterior. Justifique su estrategia de estimación del error y grafique la estimación del error. [5 Pts]

Sugerencia: Revise los conceptos utilizados en la extrapolación de Richardson y asuma una forma adecuada para el error, considerado las condiciones que lo llevaron a la selección del método de solución de la ecuación diferencial. Las funciones `interp2` o `imresize` pueden serle de utilidad.

Nota: No hay una solución única. Por ser una *estimación*, todo depende de las suposiciones que usted tome como punto de partida para su solución. Sin embargo, esas suposiciones deben ser consistentes con el resto de su solución.

Problema 2 Regresión y optimización $\boxed{\textbf{12 Pts}}$

En este problema, usted utilizará una técnica de optimización, para encontrar la curva de mejor ajuste a una serie de datos bidimensionales.

Tenemos una matriz de datos `X`, que tiene en cada una de sus columnas un vector bidimensional, es decir, la matrix `X` es de tamaño $2 \times m$, con m el número de datos disponibles. La primer componente de cada vector corresponde a la coordenada x y la segunda componente a la coordenada y.

Queremos encontrar la curva de mejor ajuste dada por

$$y = ax^2 + bx + c \tag{2.1}$$

Para ello, vamos a definir como función de error a minimizar como

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2 \tag{2.2}$$

Esta función de error mide para todos los datos disponibles $[x_i, y_i]^T$ la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor conocido y_i y el valor predicho por (2.1), en términos de los parámetros a, b, c.

El objetivo de este problema es, utilizando la regla Δ vista en clase, encontrar los parámetros a, b y c que minimizan (2.2), y así encontrar la curva de mejor ajuste.

Utilice para su solucion el archivo `regopt.m` entregado con el enunciado. No olvide completar allí su nombre y carné. Ese archivo ya carga los datos en la matriz $\underline{\mathbf{X}}$ que usted necesita.

2.1. Grafique los puntos bidimensionales utilizando GNU/Octave. $\boxed{\text{1 Pt}}$

2.2. Implemente la función de error. Debe seguir la interfaz especificada en el archivo brindado. $\boxed{\text{2 Pts}}$

2.3. Utilizando las técnicas de diferenciación numérica vistas en clase, calcule el gradiente $\boxed{\text{2 Pts}}$

$$\nabla f(a, b, c) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} \end{bmatrix}$$

Note que el gradiente debe ser un vector columna.

Justifique su elección de técnica de diferenciación numérica. Debe seguir la interfaz especificada en el archivo brindado.

2.4. Implemente un ciclo para encontrar, utilizando la regla Δ (también conocida como descenso de gradiente) los valores de a, b y c que minimizan $f(a, b, c)$. $\boxed{\text{3 Pts}}$

Para esto, usted debe elegir un criterio de convergencia adecuado, que use el parámetro de tolerancia brindado como argumento en la interfaz dada en `regopt.m`.

Observe que la convergencia depende fuertemente del tamaño de paso λ que usted elija. Encuentre un valor que no tome muchas iteraciones en llegar al mínimo y que no conduzca a divergencia u oscilaciones.

Este es el principio de optimización utilizado en algoritmos de redes neuronales, y se considera una forma de hacer regresión por medio de *aprendizaje automático*.

La función de optimización no solo debe devolver el valor de parámetros óptimo (que minimiza la función de error), sino todos los pasos intermedios, así como los errores estimados en cada paso.

Nota: Usted debe observar el valor de los gradientes para poder elegir un valor con sentido.

2.5. Encuentre cuál es el conjunto de parámetros a, b y c óptimo. 1 Pt

2.6. Grafique el error en función del número de iteración en su proceso de optimización. Etiquete los ejes. 1 Pt

2.7. Grafique en el invervalo de $x \in [-2, 2]$ sobre la figura del punto 2.1 lo siguiente: 3 Pts

1. la curva asociada al punto de partida en color negro
2. las curvas asociadas a cada paso intermedio del proceso de optimización en color cian
3. la curva asociada al conjunto óptimo de parámetros en color rojo.

La figura 2.1 ilustra un ejemplo del resultado esperado en este punto.

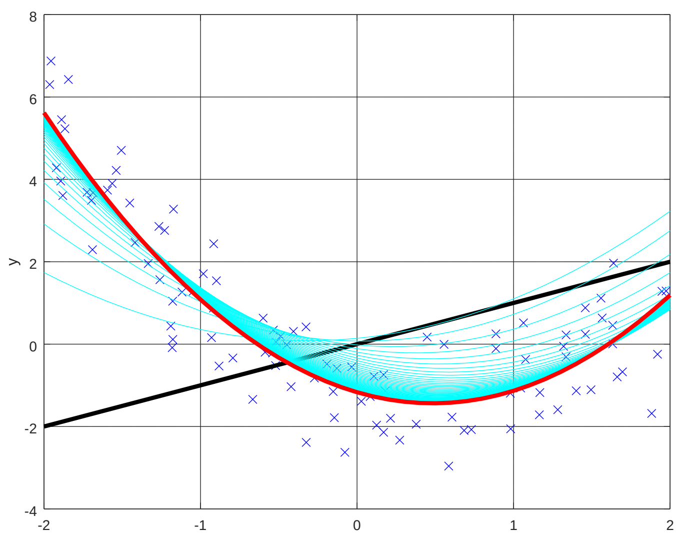


Figura 2.1: Ejemplo de resultado de curva de mejor ajuste y pasos intermedios.

Problema 3 Análisis de Componentes Principales **16 Pts**

En este problema usted deberá calcular los componentes principales de un conjunto de datos, utilizando GNU/Octave.

Debe completar el archivo de GNU/Octave `pca.m` con su solución, incluyendo las explicaciones necesarias en comentarios. Respete allí los comentarios que identifican cada punto de este problema, y no olvide completar su nombre y carné allí.

El archivo `pcadata.dat` contiene la matriz `X`, que a su vez contiene los datos tridimensionales en cada columna. En el archivo `pca.m` ya está listo el código que se encarga de leer dicha matriz.

3.1. Grafique los puntos tridimensionales almacenados en `X` con "×" azules. 1 Pt

3.2. Indique cómo se calcula matemáticamente el punto medio de los datos, y utilice GNU/Octave para determinarlo. Recuerde que los datos son tridimensionales y se encuentran en las columnas de `X`. 1 Pt

3.3. Muestre en la misma gráfica de 3.1 el punto medio con un círculo rojo. 1 Pt

3.4. Determine una nueva matriz $\bar{\mathbf{X}}$ con datos de media cero. Grafique en otra figura dichos datos con "×" azules. 1 Pt

3.5. Indique cómo se calcula matemáticamente la matriz de covarianza $\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}}$ de los datos $\bar{\mathbf{X}}$, y determine dicha matriz utilizando GNU/Octave. 2 Pts

3.6. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza utilizando GNU/Octave 1 Pt

3.7. Reordene la matriz de eigenvalores y eigenvectores, de manera que sea conveniente para realizar el análisis de componentes principales. 1 Pt

3.8. Indique explícitamente cuáles son los ejes principales y qué varianza tienen los datos en esos ejes. 2 Pts

3.9. Calcule la proyección de los datos en un plano engendrado por los dos primeros ejes principales. Grafique los puntos proyectados sobre el plano en una figura aparte. 2 Pts

3.10. Reconstruya a partir de los puntos bidimensionales obtenidos con la proyección anterior, los puntos tridimensionales correspondientes en el espacio original, donde están los datos de entrada originales cargados del archivo. Grafique las reconstrucciones en una nueva figura, junto a los datos originales de entrada. Use "×" azules para los datos originales y cuadrados magenta para los datos reconstruidos. 4 Pts