Introducción al curso
Análisis Numérico para Ingeniería
Lección 01

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre 2017

Contenido

Descripción

- Métodos numéricos utilizados con frecuencia en ingeniería:
  - Raíces de ecuaciones
  - Optimización
  - Sistemas de ecuaciones lineales
  - Ajuste de curvas (Regresión e Interpolación)
  - Derivación e Integración
  - Ecuaciones diferenciales
  - Eigensistemas
- Aplicaciones en ingeniería
- Aspectos de implementación

Descripción

- Métodos numéricos utilizados con frecuencia en ingeniería:
    - Raíces de ecuaciones
    - Optimización
    - Sistemas de ecuaciones lineales
    - Ajuste de curvas (Regresión e Interpolación)
    - Derivación e Integración
    - Ecuaciones diferenciales
    - Eigensistemas
- Aplicaciones en ingeniería
- Aspectos de implementación

Descripción

- Métodos numéricos utilizados con frecuencia en ingeniería:
  - Raíces de ecuaciones
  - Optimización
  - Sistemas de ecuaciones lineales
  - Ajuste de curvas (Regresión e Interpolación)
  - Derivación e Integración
  - Ecuaciones diferenciales
  - Eigensistemas
- Aplicaciones en ingeniería
- Aspectos de implementación

Objetivos

Objetivo General

Estudiar y resolver, mediante el uso de algoritmos numéricos y la ayuda del computador, problemas de matemática aplicada en ingeniería.

Objetivos

Objetivos Específicos

1. Evaluar la conveniencia en el uso de un cierto método en la solución de un problema numérico específico.
2. Implementar programas de cálculo relacionado con los tópicos estudiados independientemente del lenguaje y de la plataforma computacional disponible.
3. Aplicar conceptos de programación orientada a objetos, programación estructurada y programación genérica en la solución de problemas numéricos.

Plataformas de implementación

- plataforma computacional genérica (PC)
- plataforma genérica pero usando *intrinsics* para operaciones SIMD
- plataforma computacional con múltiples núcleos (OpenMP)
- plataforma embebida (procesador DSP, intrinsics API)
- plataforma GPU (CUDA)

Contenido

1. Conceptos básicos de cálculo numérico. (1,5 Semanas)
2. Raíces de ecuaciones. (1,5 Semanas)
3. Optimización. (1 Semana)
4. Soluciones de ecuaciones lineales simultaneas. (2,5 Semanas)
5. Interpolación numérica. (1,5 Semanas)
6. Integración y diferenciación numérica. (1,5 Semanas)
7. Solución de ecuaciones diferenciales. (2 Semanas)
8. Eigensystemas. (2 Semanas)
9. Aplicaciones en ingeniería. (1 Semana)

Metodología

- Curso de **4 créditos**
- Exposición magistral (2-3 horas semanales)
- Trabajo en clase (1-2 horas semanales)
- **TRABAJO EN CASA** (8-10 horas semanales)
- Tareas, catálogo y proyectos

Metodología

- Curso de **4 créditos**
- Exposición magistral (2-3 horas semanales)
- Trabajo en clase (1-2 horas semanales)
- **TRABAJO EN CASA** (8-10 horas semanales)
- Tareas, catálogo y proyectos

Metodología

- Curso de **4 créditos**
- Exposición magistral (2-3 horas semanales)
- Trabajo en clase (1-2 horas semanales)
- **TRABAJO EN CASA** (8-10 horas semanales)
- Tareas, catálogo y proyectos

Evaluación

Tareas	20 %
Proyectos	40 %
Exposición	10 %
Catálogo	5 %
Examen	25 %

Fechas de exámenes

Examen final	Martes, 21 de noviembre, 2017, 15:00-17:00
Examen de reposición	**No hay**

Literatura (1)

Steven C. Chapra and Razmond P. Canale.
Métodos Numéricos para ingenieros.
McGraw Hill, México, sexta edición edition, 2011.

William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery.
Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing.
Cambridge University Press, tercera edición edition, 2007.

S. Nakamura.
Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab.
Pearson Educación, 2011.

Literatura (2)

R. L. Burden and J. D. Faires.
Análisis Numérico.
Thomson Learning, México, 2002.

Datos generales

Grupo:	01
Horario:	Martes y Jueves 15:00-17:00
Lugar:	Martes C1-07, Jueves G18-04
Web:	`http://www.ie.tec.ac.cr/palvarado/Numerico/`
e-Mail:	palvarado@tec.ac.cr
Consulta:	Lunes y Jueves de 9:30-11:30

Análisis numérico

Modelos matemáticos

- Descripción de comportamiento de un fenómeno físico
- Comportamiento simplificado
- Resume experiencia pasada
- Funciones matemáticas:
  Obtenidas por
  - Análisis teórico
  - Experimentación

Modelo matemático

$$\underline{\mathbf{s}} = f(\underline{\mathbf{e}}; \underline{\mathbf{p}}; \underline{\mathbf{r}})$$

- $\underline{\mathbf{s}}$: Vector de salidas
- $\underline{\mathbf{e}}$: Vector de entradas (tiempo, espacio)
- $\underline{\mathbf{p}}$: Vector de parámetros
- $\underline{\mathbf{r}}$: Factores externos, ruido

Tipos de análisis

Solución de problemas matemáticos por:

- Métodos analíticos
- Métodos numéricos

Métodos numéricos

Reformulan problema matemático para resolverlo mediante operaciones **aritméticas**.

Modelo matemático: segunda ley de Newton

La ley de Newton establece:

$$F = ma$$

Modelo matemático: segunda ley de Newton

La ley de Newton establece:

$$F = ma$$

1. Descripción matemática de proceso
2. Idealización (simplificación de realidad)
3. Resultados reproducibles $\Rightarrow$ predicción

Ejemplo: Segunda Ley de Newton (1)

Ejemplo

Un paracaidista de masa m salta de un globo con posición estática respecto a la superficie.
Calcule la velocidad de caída del paracaidista en función del tiempo, considerando la fricción del aire.

Ejemplo: Segunda Ley de Newton (2)

Solución:
La Segunda Ley de Newton establece:

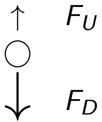
$$F = ma$$

donde

- F: Fuerza
- m: masa
- a: aceleración

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo: Segunda Ley de Newton (3)



La fuerza total sobre el paracaidista tiene dos componentes:

1. $F_D = mg$: debida a la gravitación terrestre ($g \approx 9,8 m/s^2$)
2. $F_U = -cv$: debida a la fricción del aire (c coef. de arrastre)

Signo de F_U indica oposición a F_D.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{mg - cv}{m}$$

Ejemplo: Segunda Ley de Newton (4)

Ecuación diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t)$$

Solución analítica (exacta):

$$v(t) = \frac{mg}{c} \left[1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right] u(t) + v(0^-) e^{-\frac{c}{m}t} u(t)$$

con $v(0^-)$ la velocidad inicial en $t = 0^-$.

Ejemplo: Segunda Ley de Newton (5)

Solución numérica parte de aproximación en *diferencias finitas divididas*:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Sustituyendo en el modelo original

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= g - \frac{c}{m} v(t) \\ \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} &= g - \frac{c}{m} v(t_i) \\ v(t_{i+1}) &= v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Herramientas de Software

Herramientas de software

- Prototipado rápido
  - GNU/Octave
  - MatLab
  - SciCosLab
  - (Maple)
- Lenguajes de mediano y alto nivel
  - C/C++
  - Fortran
  - Python
  - Bibliotecas:
    - Lapack/Blas/Atlas
    - Eigen, Armadillo, SciPy, NumPy
- Hojas de cálculo + lenguajes script
  - Excel + VBA
  - LibreOffice.org/Calc + LibreOffice Basic

Aproximaciones y errores

Aproximación

- Modelo matemático *aproxima* comportamiento real
- Método numérico *aproxima* solución analítica
- Discrepancia entre objeto y su aproximación $\equiv$ **error**
- Si se desconoce objeto $\Rightarrow$ aproximar error

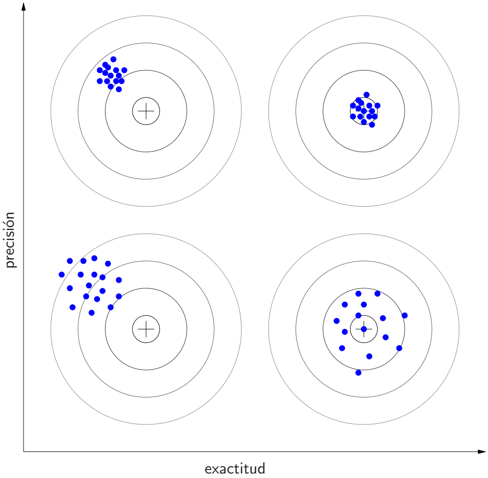
Cifras significativas

- Procesos de medición tienen precisión limitada
- Cifras significativas:
  - Indican confiabilidad de un valor numérico
  - Igual a número de dígitos obtenidos con certeza, más uno estimado
- Los métodos numéricos aproximan resultados
  $\Rightarrow$ debe especificarse cuántas cifras significativas son válidas
- Números irracionales (π, e, $\sqrt{2}$) sin representación exacta
  $\Rightarrow$ *redondeo* a número específico de cifras significativas

Exactitud y precisión

- Exactitud: qué tan cercano está el valor medido o calculado de valor verdadero
  (Sesgo o *bias*)
- Precisión (o incertidumbre): qué tanto se dispersan las mediciones alrededor del valor medido o calculado
  (Varianza)

Exactitud y precisión



Definiciones de error

Dos tipos principales

- **truncamiento**: aproximaciones de un procedimiento matemático exacto
- **redondeo**: representaciones numéricas con cifras significativas limitadas

Error verdadero

- Error verdadero E_t:

$$E_t = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

- calculable solo si se cuenta con el *valor verdadero*
- (De otro modo debe aproximarse y es error *aproximado*)
- Ignora orden de magnitud de valor estimado

Error relativo verdadero

- El error relativo *fraccional* verdadero considera orden de magnitud de valor estimado:

$$E_{\text{rel}} = \frac{E_t}{\text{valor verdadero}} = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}}$$
$$= 1 - \frac{\text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}}$$

- El error relativo *porcentual* verdadero está dado por

$$\epsilon_t = E_{\text{rel}} \times 100\,\%$$

Error porcentual aproximado

- Si **no** se cuenta con el valor verdadero, entonces el error se normaliza con respecto al mismo valor aproximado:

$$\epsilon_a = \frac{\text{error aproximado}}{\text{valor aproximado}} \times 100\,\%$$

Error porcentual aproximado

- Si **no** se cuenta con el valor verdadero, entonces el error se normaliza con respecto al mismo valor aproximado:

$$\epsilon_a = \frac{\text{error aproximado}}{\text{valor aproximado}} \times 100\,\%$$

- Reto real: ¿cómo estimar el error si no se cuenta con el valor verdadero?

Error porcentual aproximado

- Si **no** se cuenta con el valor verdadero, entonces el error se normaliza con respecto al mismo valor aproximado:

$$\epsilon_a = \frac{\text{error aproximado}}{\text{valor aproximado}} \times 100\,\%$$

- Reto real: ¿cómo estimar el error si no se cuenta con el valor verdadero?
- En métodos iterativos se utiliza:

$$\epsilon_a = \frac{\text{aproximación actual} - \text{aproximación anterior}}{\text{aproximación actual}} \times 100\,\%$$

y los métodos se iteran mientras $|\epsilon_a| > \epsilon_s$

Umbral de Scarborough

Si se elige

$$\epsilon_s = (0,5 \times 10^{2-n})\,\%$$

entonces el resultado será correcto en *al menos n* cifras significativas

Ejemplo: Estimación de error en métodos iterativos (1)

Ejemplo

Utilice la representación en serie de e^x para estimar el valor de $e^{0,5}$ y los errores relativos porcentual verdadero y aproximado al agregar términos hasta que se alcancen al menos tres cifras significativas correctas.

Ejemplo: Estimación de error en métodos iterativos (2)

Solución:
La serie de potencias que representa a e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Para alcanzar tres cifras significativas se elige:

$$\epsilon_s = (0,5 \times 10^{2-3})\,\% = 0,05\,\%$$

Ejemplo: Estimación de error en métodos iterativos (3)

Considerando N términos, la aproximación de e^x será:

$$e^x \approx f_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!}$$

Ejemplo: Estimación de error en métodos iterativos (4)

entonces

$$\begin{aligned}
\epsilon_a &= \frac{\text{aproximación actual} - \text{aproximación anterior}}{\text{aproximación actual}} \times 100\,\% \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N-2} \frac{x^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!}} \times 100\,\% \\
&= \frac{x^{N-1}}{(N-1)! \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!}} \times 100\,\%
\end{aligned}$$

Ejemplo: Estimación de error en métodos iterativos (5)

Con $x = 0,5$ y $e^{0,5} \approx 1,64872127070013$ se tiene

N	$f_N(x)$	ϵ_t	ϵ_a
1	1	39,3469340287367 %	
2	1,50000000000	9,0204010431050 %	33,3333333333333 %
3	1,62500000000	1,4387677966971 %	7,6923076923077 %
4	1,64583333333	0,1751622556291 %	1,2658227848101 %
5	1,64843750000	0,0172115629956 %	0,1579778830964 %
6	1,64869791667	0,0014164937322 %	0,0157952930027 %
7	1,64871961806	0,0001002379603 %	0,0013162570913 %
8	1,64872116815	0,0000062196909 %	0,0000940182753 %

Tarea 1

Tarea 1

Programas para estimación de errores en el cálculo de funciones y operaciones simples.

Fecha de entrega: Martes 8 de agosto

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux