Solución de EDO

Lección 20

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

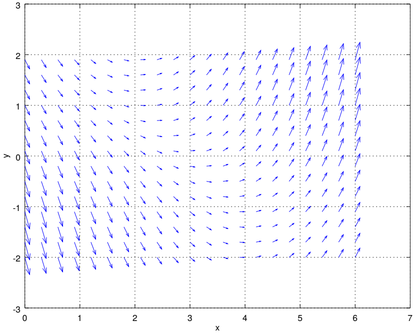
II Semestre 2017

Contenido

Métodos de Runge-Kutta (1)

- Los métodos de Runge-Kutta (RK) resuelven:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$



Métodos de Runge-Kutta (2)

- Métodos RK logran exactitud de procedimientos con serie de Taylor de orden superior, sin requerir el cálculo de derivadas
- Todas las variantes siguen la forma generalizada

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

con $\phi(x_i, y_i, h)$ la función de incremento que representa la pendiente en el intervalo.

Métodos de Runge-Kutta (3)

- La función de incremento tiene la forma

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

donde a_j son constantes y las k_j son

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, \\
&\qquad y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_n h)
\end{aligned}$$

con p_j y q_{jl} constantes.

Métodos de Runge-Kutta de tercer orden (1)

- Con $n = 3$ se hace un desarrollo similar al método de segundo orden:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3)h$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \end{aligned}$$

- El desarrollo produce seis ecuaciones con ocho incógnitas $\Rightarrow$ deben elegirse *a priori* valores para dos de las incógnitas

Métodos de Runge-Kutta de tercer orden (2)

- Una versión común que se obtiene es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h) \end{aligned}$$

- Si la función $f(x, y)$ solo depende de x, entonces este método se reduce a la regla de Simpson $1/3$.

Métodos de Runge-Kutta de tercer orden (3)

- Los métodos de RK de tercer orden tienen errores local y global de $\mathcal{O}\left(h^4\right)$ y $\mathcal{O}\left(h^3\right)$, y dan resultados exactos cuando la solución es cúbica.

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden (1)

- El método más popular de RK es el de cuarto orden (RK4).
- Al igual que con el caso de segundo orden, hay un infinito número de versiones.
- El método *clásico* RK de cuarto orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden (2)

donde

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)
\end{aligned}
$$

- Si la función solo depende de x, entonces este método se reduce a la regla de Simpson $3/8$.

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden (3)

- El método se asemeja al procedimiento de Heun en cuanto a que se usan múltiples pendientes para estimar una mejor pendiente promedio en el intervalo

Método de Butcher (1)

- Si alta exactitud se requiere, se usan mayor orden
- Costo computacional (número de llamadas a la función) sube sobre el orden del método
- El método de RK de quinto orden (de Butcher) extiende los anteriores

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

Método de Butcher (2)

con

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)
\end{aligned}
$$

Método de Butcher (3)

- Métodos RK de mayor orden no se utilizan pues la ganancia en exactitud no compensa incremento en complejidad computacional.

Métodos adaptativos de Runge-Kutta

Métodos adaptativos de Runge-Kutta (1)

- Métodos presentados hasta ahora para resolver EDO han utilizado un tamaño de paso constante.
- En algunos casos esto es una fuerte limitante, especialmente cuando la solución es en general suave, pero tiene cambios abruptos, que requieren un tamaño de paso pequeño para ser representados con exactitud, a pesar de que en el resto de la función un paso mayor sea suficiente.
- Algoritmos que adaptan el paso automáticamente a las tasas de cambio alcanzan mayor exactitud
- Estos métodos con *control adaptativo del tamaño de paso* requieren estimar el error de truncamiento local en cada paso, a partir del cual se decide si aumentar o reducir el tamaño de paso.

Métodos adaptativos de Runge-Kutta (2)

- Puesto que

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

es equivalente a resolver la ecuación inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

con condición inicial $y(a) = 0$ para $y(b)$, entonces los métodos aquí presentados se usan también para resolver eficientemente integrales de funciones con cambios abruptos.

Métodos adaptativos de Runge-Kutta (3)

- Dos métodos se utilizan para la estimación del error:
  1. Usar diferencia entre dos predicciones usando el método de RK del mismo orden pero con diferentes tamaños de paso.
  2. Usar diferencia entre dos predicciones usando métodos RK de diferente orden.

Método adaptativo de RK o de mitad de paso

- El método de mitad de paso (o adaptativo de RK) realiza dos veces cada paso: uno con un solo paso (y_1), más otro con dos medios pasos (y_2).
- La diferencia entre los dos estimados representa un estimado del error de truncamiento local

$$\Delta = y_2 - y_1$$

- El error Δ se utiliza además para corregir la estimación.
- Para RK4 el corrector es:

$$y_2 \leftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

- Dicha estimación tiene exactitud de quinto orden.

Método de Runge-Kutta Fehlberg (1)

RK encapsulado

- Otro camino para la estimación del error es calcular dos estimados con dos predicciones RK de diferente orden.
- Problema general: cantidad de evaluaciones de la función y de cálculos en general.
- Por ejemplo, una predicción de cuarto y quinto orden requiere 10 evaluaciones de la función.

Método de Runge-Kutta Fehlberg (2)

RK encapsulado

- El método RK Fehlberg (o RK encapsulado) reutiliza evaluaciones de RK de cuarto orden en RK de quinto orden.
- Solo requiere 6 evaluaciones.
- La estimación de cuarto orden es

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378} k_1 + \frac{250}{621} k_3 + \frac{125}{594} k_4 + \frac{512}{1771} k_6 \right) h$$

Método de Runge-Kutta Fehlberg (3)

RK encapsulado

- La estimación de quinto orden es

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648} k_1 + \frac{18575}{43384} k_3 + \frac{13525}{55296} k_4 + \frac{277}{14336} k_5 + \frac{1}{4} k_6 \right) h$$

Método de Runge-Kutta Fehlberg (4)

RK encapsulado

con

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{5}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{3}{10}h, y_i + \frac{3}{40}k_1 h + \frac{9}{40}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \frac{3}{5}h, y_i + \frac{3}{10}k_1 h - \frac{9}{10}k_2 h + \frac{6}{5}k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{11}{54}k_1 h + \frac{5}{2}k_2 h - \frac{70}{27}k_3 h + \frac{35}{27}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + \frac{7}{8}h, y_i + \frac{1631}{55296}k_1 h + \frac{175}{512}k_2 h + \frac{575}{13824}k_3 h + \right. \\
&\qquad \left. \frac{44275}{110592}k_4 h + \frac{253}{4096}k_5 h\right)
\end{aligned}
$$

Control del tamaño de paso (1)

- Las dos técnicas anteriores permiten estimar el error de truncamietno local.
- La estrategia es incrementar el paso si el error es muy pequeño y decrementarlo si es muy grande.
- Se sugiere

$$h_{\text{nuevo}} = h_{\text{actual}} \left| \frac{\Delta_{\text{nuevo}}}{\Delta_{\text{actual}}} \right|^{\alpha}$$

- h_{nuevo} y h_{actual} son la nueva propuesta de paso y el paso actual, respectivamente.
- Δ_{actual} es la exactitud estimada actual y Δ_{nuevo} es la exactitud deseada.

Control del tamaño de paso (2)

- Si el paso debe incrementarse (cuando $\Delta_{\text{actual}} \leq \Delta_{\text{nuevo}}$) entonces $\alpha = 0,2$.
- Si el paso debe decrementarse (cuando $\Delta_{\text{actual}} > \Delta_{\text{nuevo}}$) entonces $\alpha = 0,25$.
- La clave del algoritmo es la elección de Δ_{nuevo}
- En general, se elige

$$\Delta_{\text{nuevo}} = \mathcal{E} y_{\text{escala}}$$

  con $\mathcal{E}$ la precisión de la representación numérica.
- El factor y_{escala} puede ser un término constante establecido por la aplicación.

Control del tamaño de paso (3)

- Para obtener errores relativos constantes (excepto cerca de cero) Press et at. sugieren

$$y_{\text{escala}} = |y| + \left| h \frac{dy}{dx} \right|$$

Resumen

1. Métodos de Runge-Kutta
   - Repaso
   - Métodos de Runge-Kutta de tercer orden
   - Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden
   - Métodos de Runge-Kutta de quinto orden
2. Métodos adaptativos de Runge-Kutta
   - Método adaptativo de RK
   - Método de Runge-Kutta Fehlberg

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux

BY NC SA

Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/` o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2017 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica