Descomposición en Valores Singulares

Lección 12

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre 2017

Contenido

Justificación

Descomposición en Valores Singulares

- **DVS**: Descomposición en Valores Singulares
- **SVD**: *Singular Value Decomposition*
- Conjunto de técnicas para tratar con sistemas de ecuaciones singulares o cercanos a singulares.
- DVS funciona donde la descomposición **LU** o la eliminación Gaussiana fallan
- DVS permite además diagnosticar cuál es el problema
- Aun con singularidades, DVS provee *una* solución
- AQUÍ: cómo usar DVS (en vez de cómo hacer DVS)

Principio matemático

Descomposición en Valores Singulares

DVS parte de

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

con

- **A**: matriz $m \times n$
- **U**: matriz $m \times n$ de **columnas** ortogonales

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$$

- **W**: matriz diagonal con n **valores singulares** no negativos
- **V**: matriz cuadrada $n \times n$ de **columnas** y **filas** ortogonales

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$

Situaciones sobredeterminadas

Sistemas **sobredeterminados** tienen matrices $m \times n$ con $m > n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T}$$

En este caso **U** tiene **todas** sus columnas ortogonales

Situaciones subdeterminadas

Sistemas **subdeterminados** tienen matrices $m \times n$ con $m < n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T}$$

En este caso

- $w_j = 0$ para $j = m+1, \ldots n$, y sus correspondientes columnas $\underline{\mathbf{u}}_{\cdot j} = \underline{\mathbf{0}}$.
- Únicamente las primeras m columnas de $\mathbf{U}$ son ortogonales.

Unicidad de DVS

- DVS es una descomposición única excepto por
  - permutaciones de las columnas correspondientes de $\mathbf{U}$, elementos de $\mathbf{W}$ y columnas de $\mathbf{V}$ (o filas de $\mathbf{V}^T$)
  - rotaciones ortogonales entre columnas de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ cuyos elementos correspondientes en $\mathbf{W}$ son idénticos (por ejemplo, multiplicando dichas columnas por -1)
- Resultados de DVS no necesariamente aparecen en orden *canónico*, así que se deben permutar las columnas de las matrices para que la diagonal de $\mathbf{W}$ tenga valores singulares en orden decreciente.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.
- Formalmente, un **vector** es un elemento de un **espacio lineal** o **espacio vectorial**.

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\underline{\mathbf{x}}$, con $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\underline{\mathbf{x}}$, con $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:
  - $a\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$. ($\mathbb{V}$ es cerrado con respecto a la multiplicación escalar).
  - $a(b\underline{\mathbf{x}}) = (ab)\underline{\mathbf{x}}$. (Asociatividad de la multiplicación escalar en $\mathbb{V}$).
  - Si 1 representa el elemento neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{F}$ entonces $1\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}$. (Neutralidad de uno).
  - $a(\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}) = a\underline{\mathbf{x}} + a\underline{\mathbf{y}}$. (Distributividad con respecto a la adición vectorial).
  - $(a + b)\underline{\mathbf{x}} = a\underline{\mathbf{x}} + b\underline{\mathbf{x}}$. (Distributividad con respecto a la adición del cuerpo $\mathbb{F}$).

Combinación lineal

El vector $\underline{\mathbf{x}}$ es una **combinación lineal** de los vectores $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ si

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

con $c_i \in \mathbb{F}$.

Independencia lineal

El conjunto $\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$ es:

- **linealmente dependiente** si algún $\underline{\mathbf{u}}_i$ es una combinación lineal de otros elementos de $\mathcal{U}$.
- **linealmente independiente** si $c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\mathbf{0}}$ solo con $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Independencia lineal
Consecuencias

- un conjunto que contiene un solo vector, es libre si el vector es no nulo,
- el vector nulo $\underline{\mathbf{0}}$ no forma parte de ningún sistema libre,
- todo subconjunto de un sistema libre es también libre,
- el número máximo de vectores de un sistema libre es igual a la **dimensión** de dichos vectores.

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
  - se suma un generador con otro,

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
  - se suma un generador con otro,
  - si se suprimen los generadores que son una combinación lineal de los demás.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ es a su vez un subespacio lineal.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ es a su vez un subespacio lineal.
- La unión $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ **no** necesariamente es un subespacio lineal.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.
- Este número de vectores de la base es la **dimensión** del espacio lineal.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,
3. cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actúa como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,
3. cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actúa como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,
4. si los elementos de una determinada base en $\mathbb{V}$ se toman en un **orden determinado**, cualquier elemento de $\mathbb{V}$ puede entonces ser representado por una secuencia única de **coordenadas**.

Unicidad de coeficientes

El último punto indica que si $\mathbb{V}$ tiene como base a

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\}$$

entonces un vector

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

puede representarse utilizando tan solo los coeficientes c_i y manteniendo fija la base: $\underline{\mathbf{x}} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$.

Unicidad de coeficientes

Ninguna otra secuencia puede representar con la misma base al vector $\underline{\mathbf{x}}$, puesto que si existiese alguna otra representación equivalente

$$\underline{\mathbf{x}} = d_1\underline{\mathbf{u}}_1 + d_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + d_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

entonces la diferencia de ambas representaciones debería ser cero y

$$(d_1 - c_1)\underline{\mathbf{u}}_1 + (d_2 - c_2)\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + (d_n - c_n)\underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\mathbf{0}}$$

se cumple solo si $d_i = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ por el requisito de que la base $\mathcal{U}$ debe ser linealmente independiente.

Mapeo lineal

- Sea el sistema

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

con una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $m \times n$, un vector $\underline{\mathbf{x}}$ de n dimensiones, y un vector $\underline{\mathbf{b}}$ de m dimensiones.

- La matriz $\mathbf{A}$ **mapea** o **transforma** linealmente el vector n-dimensional $\underline{\mathbf{x}}$ a otro vector m-dimensional $\underline{\mathbf{b}}$, pues se realiza con $\underline{\mathbf{x}}$ una combinación lineal de sus vectores columna
- La dimensión del espacio vectorial de las *imágenes* $\underline{\mathbf{b}}$ puede ser menor, igual o mayor que la dimensión del espacio vectorial original que contiene a $\underline{\mathbf{x}}$, pero es igual a la dimensión del espacio que contiene a las columnas de $\mathbf{A}$.

Espacio columna y rango

- Sistema $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ tiene solución siempre que $\underline{\mathbf{b}}$ se encuentre en el **espacio columna** o **alcance** de la matriz **A** (ingl. *range*).
- El espacio columna o alcance es el espacio **engendrado** por las n columnas de **A**:

$$c_1\underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} + c_2\underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} + \cdots + c_n\underline{\mathbf{a}}_{\cdot n} \in C(\mathbf{A}) \qquad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

- El espacio columna $C(\mathbf{A})$ es un **subespacio** de $\mathbb{R}^m$, que corresponde al espacio de donde se toma cada columna de **A**
- El número de columnas linealmente independientes, es decir, la dimensión del espacio columna $C(\mathbf{A})$ se denomina **rango** de la matriz **A** (ingl. *rank*).
- Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ entonces el rango estará entre 1 y $\text{mín}(n, m)$

Espacio nulo (1)

- El sistema
$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$
tiene la solución trivial $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.
- Si $\underline{\mathbf{x}}_1 \neq \underline{\mathbf{0}}$ soluciona el sistema anterior, entonces $c\underline{\mathbf{x}}_1$ también lo hace, pues
$$\begin{aligned}\mathbf{A}(c\underline{\mathbf{x}}_1) &= \\ c(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1) &= \\ c\underline{\mathbf{0}} &= \underline{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

Espacio nulo (2)

- Si también $\underline{\mathbf{x}}_2$ soluciona el sistema anterior entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(c_1\underline{\mathbf{x}}_1 + c_2\underline{\mathbf{x}}_2) &= \\
c_1(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1) + c_2(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_2) &= \\
c_1\underline{\mathbf{0}} + c_2\underline{\mathbf{0}} &= \underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}}
\end{aligned}
$$

- Por las dos propiedades anteriores el conjunto de todos los vectores $\underline{\mathbf{x}}$ que satisfacen

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

constituyen un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{R}^n$ (que contiene a todos los $\underline{\mathbf{x}}$), y se denomina **espacio nulo** de $\mathbf{A}$.

Espacio nulo (3)

- La dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$ se denomina **nulidad** de $\mathbf{A}$
- La nulidad puede tomar un valor desde cero hasta n.
- La suma del rango de $\mathbf{A}$ más su nulidad es igual a n (número de columnas de $\mathbf{A}$)

Solución única

- Si $\mathbf{A}$ es cuadrada $n \times n$ y con rango n entonces $\mathbf{A}$ es no-singular e invertible; $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ tiene una única solución para cada $\underline{\mathbf{b}}$ y solo el $\underline{\mathbf{0}}$ se mapea a $\underline{\mathbf{0}}$ (dimensión del espacio nulo es cero).
- En este caso **LU** es el método de preferencia

Multiples o no soluciones

Si $\mathbf{A}$ tiene nulidad mayor que cero (rango menor que n) pueden pasar dos cosas:

- la mayoría de vectores $\underline{\mathbf{b}}$ no producen solución
- algunos vectores $\underline{\mathbf{b}}$ tienen como solución un subespacio completo

Relación entre DVS con los espacios de una matriz

La descomposición en valores singulares construye explícitamente

- base vectorial del espacio columna (columnas de $\mathbf{U}$ con valores singulares no nulos)
- base vectorial del espacio nulo (columnas de $\mathbf{V}$ con valores singulares correspondientes nulos)

DVS de matrices cuadradas

- Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, entonces $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ y $\mathbf{V}$ también lo son.
- Puesto que las matrices son ortogonales o diagonales, el cálculo de la matriz inversa es directa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\left[\operatorname{diag}(1/w_j)\right]\mathbf{U}^T$$

- Único problema posible $w_j = 0$ o ≈ 0
- Número de condición de la matriz $\mathbf{A}$ se define ahora como $\nu = \max_j(w_j)/\min_i(w_i)$
- Si $\nu \to \infty$ entonces $\mathbf{A}$ es singular
- Si $\nu \gg 0$ y $1/\nu \approx \mathscr{E}$ entonces $\mathbf{A}$ es mal condicionada

Solución de sistema homogéneo

- El sistema homogéneo es planteado como $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$
- Cualquier combinación lineal de las columnas de $\underline{\mathbf{V}}$ con correspondiente valor singular $w_j = 0$ es solución a este sistema.

Solución de sistema con nulidad mayor que cero (1)

Para

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

- Si $\underline{\mathbf{b}}$ está en el alcance de $\mathbf{A}$ (en su espacio columna) y la nulidad de $\mathbf{A}$ no es cero, entonces sistema tiene infinitas soluciones, pues si $\underline{\mathbf{x}}_1$ es una solución, entonces si se suma con cualquier vector $\underline{\mathbf{n}}$ del espacio nulo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{n}}) &= \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}\underline{\mathbf{n}} \\ &= \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{0}} \\ &= \underline{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

Solución de sistema con nulidad mayor que cero (2)

- Usualmente se busca la solución de menor norma $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2$, que se obtiene fácilmente de

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}\left[\operatorname{diag}(1/w_j)\right]\left(\mathbf{U}^T\underline{\mathbf{b}}\right)\end{aligned}$$

donde para $w_j = 0$ se sustituye en la matriz diagonal inversa $1/w_j \to 0$, anulando así todo aporte del espacio nulo.

Solución fuera del alcance de **A**

Para

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

Si $\underline{\mathbf{b}}$ está fuera del alcance de **A**, entonces

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}\left[\mathrm{diag}(1/w_j)\right]\left(\mathbf{U}^T\underline{\mathbf{b}}\right)\end{aligned}$$

con $1/w_j \to 0$ si $w_j = 0$ encuentra “una” solución que minimiza

$$r \equiv \left|\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}\right|$$

con r el resíduo de la solución.

Seudoinversa de **A**

El cálculo de la matriz inversa utilizando DVS:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\,[\mathrm{diag}(1/w_j)]\,\mathbf{U}^T$$

forzando $1/w_j \to 0$ si $w_j = 0$ se denomina la inversa de Moore-Penrose o la seudoinversa de **A**, y se denota con $\mathbf{A}^+$.

En conclusión:

- Si todo $w_j \neq 0$, la solución $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\underline{\mathbf{b}}$ resuelve el sistema no singular.
- Si algunos $w_j = 0$, la solución $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\underline{\mathbf{b}}$ devuelve la "mejor" solución en el sentido de que retorna el vector $\underline{\mathbf{x}}$ más pequeño que resuelve el sistema, o aquel que produce el menor residuo si no existe solución.

Ejemplo: Matriz con nulidad (1)

Utilizando en octave `[U,W,V]=svd(A)` se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{UWV}^T$$

Ejemplo: Matriz con nulidad (2)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0,59684 & -0,06151 & -0,80000 \\ -0,10252 & 0,99473 & 0,00000 \\ -0,79578 & -0,08201 & 0,60000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 7,10741 & 0 & 0 \\ 0 & 1,21848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0,699784 & -0,420676 & -0,577350 \\ -0,014424 & 0,816369 & -0,577350 \\ -0,714208 & 0,395693 & 0,577350 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matriz con nulidad (3)

- Con $\underline{\mathbf{b}} = [9; 0; 12]^T$ la solución a $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ es $\underline{\mathbf{x}} = [1; -2; 2]^T$
- La nulidad de $\mathbf{A}$ es 1 y el espacio nulo lo engendra $\underline{\mathbf{n}} = [-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$
- Si se hace $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{x}} + c\underline{\mathbf{n}}$ para cualquier c real se obtiene el mismo $\underline{\mathbf{b}}$ con $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}'$

Ejemplo: Compresión de matrices (1)

- Con $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$ puede aproximarse $\mathbf{A}$ descartando vectores asociados a valores singulares más pequeños:

$$\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{V}^T$$

con $\tilde{\mathbf{W}} = \operatorname{diag}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_n)$ donde

$$\tilde{w}_i = \begin{cases} w_i & \text{si } w_i > \tau \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Se descartan entonces últimas columnas de $\mathbf{V}$ y de $\mathbf{U}$

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LATEX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux