Reducciones de Givens y Householder

Lección 24

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre 2017

Contenido

Introducción

- La estrategia óptima para encontrar los eigenvalores y eigenvectores es:
  1. reducir la matriz a una forma simple
  2. utilizar un proceso iterativo
- Para matrices simétricas, la forma "simple" es tridiagonal

Reducción de Givens

- La reducción de Givens es una modificación del método de Jacobi.
- Reduce la matriz a una forma tridiagonal
- Se puede alcanzar el resultado en un número finito de pasos
- (Recuérdese que el método de Jacobi se itera hasta la convergencia)

Repaso del Método de Jacobi (1)

- Recuérdese que con el método de Jacobi se calcula el término

$$\theta \equiv \cot 2\phi \equiv \frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

a partir del cual se despeja la tangente t de ϕ con

$$t = \frac{\operatorname{signum}\theta}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}}$$

.

Repaso del Método de Jacobi (2)

- El coseno y seno del ángulo ϕ se obtienen con

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$
$$s = tc$$

a partir de los cuales se calcula además

$$\tau = \tan \frac{\phi}{2} \equiv \frac{s}{1 + c}$$

Repaso del Método de Jacobi (3)

- La matriz transformada con una rotación de Jacobi se modifica con

$$
\begin{aligned}
a'_{pq} &= 0 \\
a'_{pp} &= a_{pp} - t a_{pq} \\
a'_{qq} &= a_{qq} + t a_{pq} \\
a'_{rp} &= a_{rp} - s(a_{rq} + \tau a_{rp}) \\
a'_{rq} &= a_{rq} + s(a_{rq} - \tau a_{rp}) \qquad r \neq p, r \neq q
\end{aligned}
$$

Método de Givens (1)

- Con el método de Givens se elige un ángulo de rotación para

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$s = tc$$

 que ponga a cero un elemento que **no** es ninguno de los cuatro elementos a_{pp}, a_{pq}, a_{qp} o a_{qq}.
- Por ejemplo, $\mathbf{P}_{23}$ elimina a_{31} (y por simetría a_{13}).
- Luego se elige $\mathbf{P}_{24}$ para anular a a_{41}
- En general, se elige la secuencia

$$\mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{24}\ldots\mathbf{P}_{2n};\mathbf{P}_{34}\mathbf{P}_{35}\ldots\mathbf{P}_{3n};\ldots;\mathbf{P}_{n-1,n}$$

 en donde $\mathbf{P}_{jk}$ anula a $a_{k,j-1}$

Método de Givens (2)

- El método funciona porque elementos como a'_{rp} y a'_{rq} con $r \neq p$ y $r \neq q$ son combinaciones lineales de los valores anteriores a_{rp} y a_{rq}:

$$\begin{aligned} a'_{rp} &= ca_{rp} - sa_{rq} \qquad r \neq p, r \neq q \\ a'_{rq} &= ca_{rq} + sa_{rp} \end{aligned}$$

- Así, si ambos a_{rp} y a_{rq} ya fueron anulados, permaneceran como cero durante el proceso
- Se requieren $n^2/2$ rotaciones y $4n^3/3$ multiplicaciones (sin contar las requeridas para acumular las transformaciones).
- El (siguiente) método de Householder, es tan estable como el de Givens, pero un factor 2 más eficiente, y por tanto se prefiere dicho método.

Método de Householder (1)

- El algoritmo de Householder reduce una matriz **A** simétrica y cuadrada $n \times n$ a forma tridiagonal por medio de $n-2$ transformaciones **ortogonales**.
- Cada transformación elimina la parte requerida de una columna y fila correspondiente.
- El punto de partida es la matriz de Householder **P**

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}\mathbf{w}}^T$$

donde $\underline{\mathbf{w}}$ es un vector real con $|\underline{\mathbf{w}}|^2 = 1$ y $\underline{\mathbf{w}\mathbf{w}}^T$ es su producto externo.

- La aplicación de esta matríz a un vector $\underline{\mathbf{x}}$ tiene como efecto su reflexión con respecto a un hiperplano que pasa por el origen

Método de Householder (2)

- La matriz $\mathbf{P}$ es ortogonal porque

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^2 &= (\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T)(\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T) \\ &= \mathbf{I} - 4\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T + 4\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{w}}^T\underline{\mathbf{w}})\underline{\mathbf{w}}^T \\ &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

- Por lo tanto $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$; además $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ con lo que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ lo que implica **ortogonalidad**.
- Si un vector $\underline{\mathbf{v}}$ es ortogonal a $\underline{\mathbf{w}}$, entonces

$$\mathbf{P}\underline{\mathbf{v}} = \left(\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T\right)\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{I}\underline{\mathbf{v}} - 2\underline{\mathbf{w}}\underbrace{(\underline{\mathbf{w}}^T\underline{\mathbf{v}})}_{\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\mathbf{v}}$$

por lo que $\underline{\mathbf{v}}$ es un eigenvector de $\mathbf{P}$ con eigenvalor 1

Método de Householder (3)

- Puesto que en un espacio de n dimensiones existen $n-1$ vectores ortogonales a cualquier vector $\underline{\mathbf{w}}$, entonces el eigenvalor 1 tiene multiplicidad $n-1$.
- Puesto que

$$\mathbf{P}\underline{\mathbf{w}} = \left(\mathbf{I} - 2\underline{\mathbf{w}}\underline{\mathbf{w}}^T\right)\underline{\mathbf{w}} = \mathbf{I}\underline{\mathbf{w}} - 2\underline{\mathbf{w}}\underbrace{(\underline{\mathbf{w}}^T\underline{\mathbf{w}})}_{1} = -\underline{\mathbf{w}}$$

entonces -1 también es un eigenvalor

Método de Householder (4)

- La matriz $\mathbf{P}$ se puede reescribir para cualquier vector $\underline{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T}{H}$$

con el escalar H

$$H = \frac{1}{2}|\underline{\mathbf{u}}|^2$$

- Supóngase que $\underline{\mathbf{x}}$ es la primera columna de $\mathbf{A}$. Se elige entonces

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} \mp |\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{e}}_1$$

con el vector unitario

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T$$

(el signo se elegirá posteriormente)

Método de Householder (5)

- Se cumple entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\underline{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T}{H}\right)\underline{\mathbf{x}} \\
&= \underline{\mathbf{x}} - \frac{\underline{\mathbf{u}}}{H}\left(\underline{\mathbf{x}} \mp |\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{e}}_1\right)^T \underline{\mathbf{x}} \\
&= \underline{\mathbf{x}} - \frac{2\underline{\mathbf{u}}(|\underline{\mathbf{x}}|^2 \mp |\underline{\mathbf{x}}|x_1)}{2|\underline{\mathbf{x}}|^2 \mp 2|\underline{\mathbf{x}}|x_1} \\
&= \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{u}} \\
&= \pm|\underline{\mathbf{x}}|\underline{\mathbf{e}_1}
\end{aligned}
$$

- La matriz **P** pone en cero todos los elementos de $\underline{\mathbf{x}}$ excepto el primero.

Método de Householder (6)

- Para reducir la matriz simétrica $\mathbf{A}$ a forma tridiagonal se elige el vector $\underline{\mathbf{x}}$ de la matriz de Householder ${}^{(n-1)}\mathbf{P}_1$ como los $n-1$ elementos inferiores de la primera columna:

$$
\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & {}^{(n-1)}\mathbf{P}_1 & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & & & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & \text{irrelevante} & \\ a_{n1} & & & & \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \hline k & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \text{irrelevante} & \\ 0 & & & & \end{array}\right]
$$

- De este modo, los $n-2$ elementos inferiores son anulados.

Método de Householder (7)

- Aquí se han partido las matrices, con ${}^{(n-1)}\mathbf{P}_1$ denotando una matriz de Householder de dimensiones $(n-1) \times (n-1)$, generada solo con los últimos $n-1$ elementos de la primera columna.
- El valor k es $\pm$ la magnitud del vector $\underline{\mathbf{x}} = [a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}]^T$.
- La transformación ortogonal completa es

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PAP} = \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & k & 0 & \cdots & 0 \\ \hline k & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \text{irrelevante} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

Se ha usado el hecho de que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$

Método de Householder (8)

- Para la segunda matriz de Householder se elige el vector $\underline{\mathbf{x}}$ como los $n-2$ elementos inferiores de la segunda columna:

$$\mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & {}^{(n-2)}\mathbf{P}_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right]$$

- El bloque identidad en la esquina superior izquierda asegura que la tridiagonalización alcanzada en el primer paso no se destruya en este paso.
- La matriz de Householder ${}^{(n-2)}\mathbf{P}_2$ de $(n-2)$-dimensiones crea una fila y columna adicional de la salida tridiagonal.

Método de Householder (9)

- En vez de realizar explícitamente las multiplicaciones en **PAP**, se calcula el vector

$$\underline{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{A}\underline{\mathbf{u}}}{H}$$

- Así:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} - \frac{\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T}{H}\right) = \mathbf{A} - \underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{u}}^T$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PAP} = \mathbf{A} - \underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{u}}^T - \underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{p}}^T + 2K\underline{\mathbf{u}}\underline{\mathbf{u}}^T$$

con el escalar K definido como

$$K = \frac{\underline{\mathbf{u}}^T\underline{\mathbf{p}}}{2H}$$

Método de Householder (10)

- Si se define

$$\underline{\mathbf{q}} \equiv \underline{\mathbf{p}} - K\underline{\mathbf{u}}$$

entonces se tiene

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \underline{\mathbf{q}}\,\underline{\mathbf{u}}^T - \underline{\mathbf{u}}\,\underline{\mathbf{q}}^T$$

que es la formula fácilmente implementable.

Método de Householder (11)

- Siguiendo Smith et al. (Biblioteca EISPACK), el algoritmo anterior se implementa pero iniciando con la n-ésima columna, en vez de la primera como se explicó anteriormente.
- En el m-ésimo paso $(m = 1, 2, \ldots, n-2)$ el vector $\underline{\mathbf{u}}$ tiene la forma

$$\underline{\mathbf{u}}^T = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,i-2}, a_{i,i-1} \pm \sqrt{\sigma}, 0, \ldots, 0]$$

donde

$$i \equiv n - m + 1 = n, n-1, \ldots, 3$$

y el valor σ (o $|\underline{\mathbf{x}}|^2$ en la notación anterior) es

$$\sigma = a_{i1}^2 + \cdots + a_{i,i-1}^2$$

Método de Householder (12)

- El signo de $\sqrt{\sigma}$ en la definición de $\underline{\mathbf{u}}$ se elige igual al signo de $a_{i,i-1}$ para reducir el error de redondeo.
- Así, las variables por calcular se determinan en el siguiente orden: σ, $\underline{\mathbf{u}}$, H, $\underline{\mathbf{p}}$, K, $\underline{\mathbf{q}}$, $\underline{\mathbf{A}}'$
- En cualquier paso m, la matriz $\mathbf{A}$ es tridiagonal en sus últimas $m-1$ filas y columnas.
- Los eigenvectores de $\mathbf{A}$ se obtienen aplicando la transformación acumulada $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_{n-2}$$

a los eigenvectores de la matriz tridiagonal obtenida con el método de Householder.

Resumen

1. Introducción
2. Método de Givens
3. Método de Householder

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux