

# Ecuaciones Diferenciales Parciales

## Lección 22

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería  
Área de Ingeniería en Computadores  
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre 2017

# Contenido

## 1 Introducción

- Ecuaciones diferenciales parciales
- EDP de segundo orden

## 2 Diferencias finitas: ecuaciones elípticas

- Ecuación de Laplace
- Método de Liebmann
- Variables secundarias
- Condiciones en la frontera

## 3 Diferencias finitas: ecuaciones parabólicas

- Método explícito
- Método implícito

## 4 Elementos finitos

# Introducción

(1)

- Dada una función  $u(x, y)$ , sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

- Una ecuación diferencial parcial (EDP) se plantea en términos de derivadas parciales de una función desconocida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1 \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

# Introducción

(2)

- El **orden** de una EDP es el de la derivada parcial de mayor orden en la ecuación.
- La EDP es **lineal** si los coeficientes de las derivadas solo dependen de las variables independientes.
- Aquí nos concentraremos en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

- $A$ ,  $B$ ,  $C$  son funciones de  $x$  e  $y$
- $D$  es una función de  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\partial u / \partial x$  y  $\partial u / \partial y$

## Categorías de EDP de segundo orden

(1)

- La ecuación anterior cae en una de tres categorías con técnicas de solución particulares, y cada una asociada a problemas de ingeniería particulares.

$B^2 - 4AC$	Categoría	Ejemplo
$< 0$	Elíptica	Ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabólica	Ecuación de conducción de calor $\frac{\partial T}{\partial t} + k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
$> 0$	Hiperbólica	Ecuación de onda $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

# Categorías de EDP de segundo orden

(2)

- En general,  $B^2 - 4AC$  depende de  $x$  e  $y \Rightarrow$  tipo de EDP cambia dependiendo de esos valores
- Aquí se revisarán EDP que pertenecen a una única categoría en todo el dominio de solución  $(x, y)$

# Categorías de EDP de segundo orden

(3)

- Las ecuaciones **elípticas** se utilizan para caracterizar sistemas en estado estacionario (no hay derivadas respecto al tiempo).
- Las ecuaciones **parabólicas** determinan la variación temporal de una incógnita espacial, como por ejemplo en problemas de *propagación*.
- Las ecuaciones **hiperbólicas** se asocian a problemas de propagación, pero con una segunda derivada respecto al tiempo que implica oscilaciones.

# Diferencias finitas: ecuaciones elípticas



# Ecuación de Laplace

(1)

- Las ecuaciones elípticas se usan para caracterizar problemas en estado estacionario con valores en la frontera.
- La ecuación de Laplace (caso particular de ec. elíptica)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

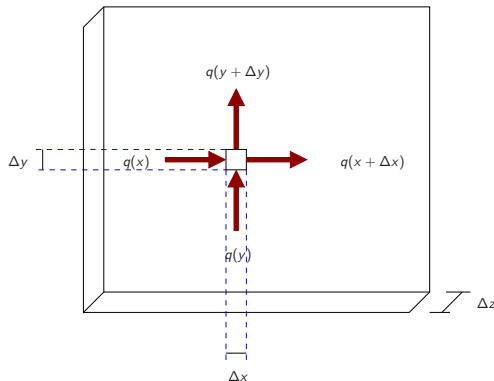
modela problemas relacionados con el “potencial” de una variable desconocida.

- Ejemplo: cómo se distribuye la temperatura en una placa caliente que tiene bordes en contacto con condiciones térmicas dadas.

# Ecuación de Laplace

(2)

- La figura muestra un elemento sobre la cara de una placa rectangular delgada de espesor  $\Delta z$



# Ecuación de Laplace

(3)

- La placa está aislada excepto en sus extremos, donde la temperatura se ajusta a un nivel preestablecido.
- El aislamiento y espesor de la placa permiten que transferencia de calor se limite a las dimensiones  $x$  e  $y$ .
- En estado estacionario el flujo de calor hacia el elemento en una unidad de tiempo  $\Delta t$  debe ser igual al flujo de salida:

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t = q(x+\Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y+\Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t$$

donde  $q(x)$  y  $q(y)$  son los flujos de calor en  $x$  e  $y$  respectivamente [ $\text{cal}/\text{cm}^2\text{s}$ ]

# Ecuación de Laplace

(4)

- Dividiendo entre  $\Delta x \Delta y$  y reagrupando se obtiene

$$[q(x) - q(x + \Delta x)]\Delta y + [q(y) - q(y + \Delta y)]\Delta x = 0$$

Multiplicando lo primero por  $\Delta x / \Delta x$  y lo segundo por  $\Delta y / \Delta y$

$$\frac{[q(x) - q(x + \Delta x)]}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \frac{[q(y) - q(y + \Delta y)]}{\Delta y} \Delta y \Delta x = 0$$

Dividiendo por  $\Delta x \Delta y$  y haciendo el límite

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

- Esta EDP expresa la conservación de la energía.

# Ecuación de Laplace

(5)

- Si las condiciones de frontera se dan con temperatura, debe reformularse la ecuación, usando la ley de Fourier de conducción de calor:

$$q_i = k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} = k' \frac{\partial T}{\partial i}$$

con  $q_i$  el flujo de calor en la dirección de la dimensión  $i$  [cal/cm<sup>2</sup>s],  $k$  el coeficiente de difusividad térmica [cm<sup>2</sup>s],  $\rho$  la densidad del material [g/cm<sup>3</sup>],  $C$  la capacidad calorífica del material [cal/g °C] y  $T$  la temperatura [°C] definida como

$$T = \frac{H}{\rho CV}$$

donde  $H$  es calor [cal] y  $V$  volumen [cm<sup>3</sup>].

# Ecuación de Laplace

(6)

- El término  $k' = k\rho C$  se denomina coeficiente de conductividad térmica [cal/s cm °C]
- La ecuación de Fourier especifica que el flujo de calor perpendicular al eje  $i$  es proporcional al gradiente de la temperatura en dirección  $i$
- Sustituyendo esta ley de Fourier en la ecuación diferencial resulta en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

que es la ecuación de Laplace

# Ecuación de Laplace

(7)

- Si hay pérdidas o fuentes de calor, la ecuación se replantea como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

y se denomina ecuación de Poisson

# Solución de EDP elíptica

(1)

- Se procede en dirección contraria a la deducción de la Ecuación de Laplace
- La solución numérica trata la placa como una malla de puntos discretos.
- Las diferencias centrales basadas en la malla usan la aproximación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

que tienen errores en el orden  $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$  y  $\mathcal{O}((\Delta y)^2)$



# Solución de EDP elíptica

(2)

- Sustituyendo en la ecuación de Laplace resulta en

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

- Si la malla es cuadrada entonces  $\Delta x = \Delta y$  y la ecuación se convierte en

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

conocida como **Ecuación laplaciana en diferencias**

- Utilizando todos los puntos en la malla bajo consideración de las condiciones iniciales se plantea un sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

## Ejemplo: Malla de $3 \times 3$

Plantee el sistema de ecuaciones lineales para una malla de  $3 \times 3$  con condiciones iniciales constantes en cada borde (condición de frontera de Dirichlet)

# Método de Liebmann

(1)

- El sistema de ecuaciones planteado es **disperso**, esto es, tiene gran cantidad de ceros que ocupan espacio de memoria.
- Por eso, se emplean métodos aproximados para obtener soluciones de EDP elípticas.
- El método comúnmente empleado es el de Gauss-Seidel, que aplicado a las EDP se denomina método de Liebmann.
- La ecuación laplaciana de diferencias se reexpresa como

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

que se resuelve de modo iterativo para  $j = 1 \dots n$  e  
 $i = 1 \dots m$ .

# Método de Liebmann

(2)

- Puesto que las matrices obtenidas son diagonalmente dominantes, el procedimiento converge a una solución estable.
- Se puede emplear la sobrerelajación (luego de cada iteración) para acelerar la velocidad de convergencia:

$$T_{i,j}^{\text{nuevo}} \leftarrow \lambda T_{i,j}^{\text{nuevo}} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{\text{anterior}}$$

con  $\lambda$  entre 1 y 2

- Como método de Gauss-Seidel, se itera hasta que el cambio en cada nodo sea inferior a un umbral.

## Variables secundarias

- Hay aplicaciones donde **variables secundarias** interesan
- Por ejemplo, en ejemplo de placa caliente de temperatura se obtiene el flujo de calor como campo vectorial:

$$q_x = -k' \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad q_y = -k' \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

que se pueden expresar en magnitud y ángulo

$$q_n = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad \theta = \arctan \left( \frac{q_y}{q_x} \right)$$

# Condiciones en la frontera

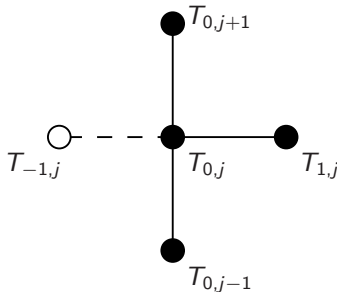
(1)

- La condición de frontera de Dirichlet (fija) es un caso particular.
- Otra condición usual es la condición de frontera de Neumann, donde no se da el valor de la función, sino de la **derivada** en la frontera.
- En el problema de la placa, esto corresponde a especificar el flujo de calor y no la temperatura
- Ejemplo: si la placa está aislada, el flujo de calor (la derivada) es cero. A esto se le conoce como condición de frontera **natural**.
- Estas condiciones permiten además modelar pérdidas de calor en los bordes.

# Condiciones en la frontera

(2)

- La figura muestra un nodo frontera  $(0, j)$ .



# Condiciones en la frontera

(3)

- Aplicando la ecuación laplaciana de diferencias en ese punto

$$T_{1,j} + T_{-1,j} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0$$

que utiliza un punto imaginario  $(-1, j)$  fuera de la placa que permite incluir la derivada.

- Utilizando la primera derivada respecto a  $x$  en  $(0, j)$  en diferencias divididas finitas

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{1,j} - T_{-1,j}}{2\Delta x}$$

se despeja

$$T_{-1,j} = T_{1,j} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x}$$



# Condiciones en la frontera

(4)

- Sustituyendo en la ecuación laplaciana de  $(0, j)$

$$2T_{1,j} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0$$

- El procedimiento se puede repetir para las otras condiciones frontera.

# Diferencias finitas: ecuaciones parabólicas

# Ecuaciones parabólicas

- Las ecuaciones elípticas permitieron modelar el estado estacionario
- Las ecuaciones parabólicas permiten caracterizar problemas que varían en el tiempo.

# Ecuación de conducción de calor

(1)

- Asíumase una barra larga, delgada y aislada, sujeta en sus extremos por un material frío y otro caliente.
- A diferencia del estado estacionario, se considera la cantidad de calor que se almacena en un elemento en un periodo  $\Delta t$ .
- El resultado sigue la forma entradas – salidas = acumulación:

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t - q(x + \Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t = \Delta x\Delta y\Delta z\rho C\Delta T$$

- Dividiendo entre el volumen  $\Delta x\Delta y\Delta z$  y entre  $\Delta t$

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

# Ecuación de conducción de calor

(2)

- Tomando los límites  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Con la ley de Fourier para conducción de calor, sustituyendo se obtiene

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

que es la ecuación de conducción del calor

- Esta también se resuelve sustituyendo las derivadas parciales por diferencias divididas finitas.

# Ecuación de conducción de calor

(3)

- La diferencia con las EDP elípticas es que aquellas están acotadas en todas las dimensiones, pero las EDP parabólicas están abiertas en el tiempo.
- Por la dependencia temporal las soluciones tienen problemas de estabilidad.
- Existen métodos **explícitos** e **implícitos** de solución

# Método explícito

(1)

- La ecuación de conducción del calor

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

requiere aproximaciones de la segunda derivada en el espacio, y la primera derivada en el tiempo.

- La segunda derivada se aproxima con la diferencia dividida finita centrada

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T'_{i+1} - 2T'_i + T'_{i-1}}{\Delta x^2}$$

con error  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

- El superíndice  $i$  denota tiempo y los subíndices el espacio.

# Método explícito

(2)

- La aproximación hacia adelante sustituye a la derivada temporal

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

con error  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .

- Con ambas aproximaciones, a ecuación de conducción del calor es

$$k \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

de donde resulta

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l)$$

donde  $\lambda = k\Delta t/(\Delta x)^2$ .



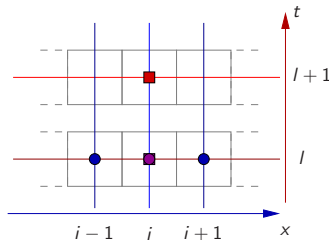
# Método explícito

(3)

- El sistema de ecuaciones que se plantea para el próximo instante  $l + 1$  contiene la ecuación anterior

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l)$$

para todos los nodos interiores de la barra (en el espacio) basándose en los valores presentes  $l$  del nodo y sus vecinos.



# Convergencia y estabilidad

(1)

- **Convergencia** significa que conforme  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tiendan a cero, los resultados de la técnica por diferencias finitas se aproximan a la solución verdadera.
- **Estabilidad** significa que los errores en cualquier etapa del cálculo se atenúa conforme este avanza.
- Carnahan et al. demostraron que el método explícito es convergente y estable si  $\lambda \leq 1/2$  o

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k}$$

- Si bien con  $\lambda \leq 1/2$  asegura que los errores no crecen, estos pueden oscilar.
- Con  $\lambda \leq 1/4$  se asegura que la solución no oscila.

# Convergencia y estabilidad

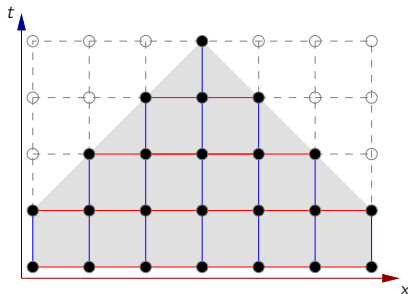
(2)

- Con  $\lambda = 1/6$  se minimizan los errores de truncamiento.
- Nótese que si el tamaño de paso espacial se reduce en 2, entonces el tamaño de paso temporal debe reducirse en 4 para mantener la estabilidad, lo que implica que el total de cálculos requeridos se multiplica por 8.
- Técnicas para introducir la derivada en condiciones frontera se deducen de igual forma que con las EDP elípticas.

# Método implícito

(1)

- Las formulaciones explícitas por diferencias finitas tienen problemas asociados a la estabilidad, e ignoran información que afecta la solución.



# Método implícito

(2)

- En la forma **explícita** se aproxima la derivada espacial para el tiempo  $l$ , de modo que en la aproximación de la EDP se tiene una sola incógnita  $T_i^{l+1}$ , lo que permite despejarla explícitamente.
- En los métodos **implícitos**, la derivada se aproxima en un nivel de tiempo posterior  $l + 1$ . Por ejemplo, la segunda derivada se aproxima con

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}$$

que tiene exactitud de segundo orden.

# Método implícito

(3)

- Lo anterior evita que las ecuaciones se puedan resolver explícitamente y requiere el planteamiento y solución de un sistema completo de ecuaciones, solucionable cuando se consideran las condiciones de frontera.
- Utilizando la ecuación de conducción

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

junto a la segunda derivada anterior y la derivada temporal

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

se obtiene

$$k \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

# Método implícito

(4)

- Con  $\lambda = k\Delta t/(\Delta x)^2$  se expresa como

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1 + 2\lambda) T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l$$

- Esta ecuación se aplica a todos los nodos excepto al primero y último de los nodos interiores que se deben modificar para incluir las condiciones frontera.
- En el extremo izquierdo ( $i = 0$ ), por ejemplo

$$T_0^{l+1} = f_0(t^{l+1})$$

con  $f_0(t^{l+1})$  una función que describe cómo cambia con el tiempo la temperatura en la frontera.

# Método implícito

(5)

- Para el primer nodo la ecuación cambia a

$$(1 + 2\lambda)T_1^{l+1} - \lambda T_2^{l+1} = T_1^l + \lambda f_0(t^{l+1})$$

- De modo similar, para el último nodo

$$-\lambda T_{m-1}^{l+1} + (1 + 2\lambda)T_m^{l+1} = T_m^l + \lambda f_{m+1}(t^{l+1})$$

donde  $f_{m+1}(t^{l+1})$  describe los cambios de temperatura en el extremo derecho ( $l = m + 1$ )

- El sistema de ecuaciones resultante es tridiagonal, lo que permite emplear métodos más eficientes de solución (p.ej. algoritmo de Thomas).
- El método implícito es estable y convergente, pero tiene exactitud de primer orden para la componente temporal y de segundo orden para la espacial.



# Método de Crank-Nicolson

(1)

- El método de Crank-Nicolson ofrece un esquema implícito alternativo que tiene exactitud de segundo orden tanto en espacio como en tiempo.
- Se utilizan aproximaciones por diferencia en el punto medio del incremento del tiempo  $t^{l+1/2}$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

La segunda derivada espacial se determina en el punto medio promediando las aproximaciones por diferencias al principio ( $t^l$ ) y al final ( $t^{l+1}$ ) del incremento del tiempo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2} \right]$$

# Método de Crank-Nicolson

(2)

- Sustituyendo en la ecuación de conducción de calor y reagrupando

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + 2(1+\lambda) T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = \lambda T_{i-1}^l + 2(1-\lambda) T_i^l - \lambda T_{i+1}^l$$

$$\text{con } \lambda = k\Delta t / (\Delta x)^2$$

- Las condiciones de frontera las determinan  $T_0^{l+1} = f_0(t^{l+1})$  y  $T_{m+1}^{l+1} = f_{m+1}(t^{l+1})$ .
- El primer nodo interior tiene la ecuación

$$2(1+\lambda) T_1^{l+1} - \lambda T_2^{l+1} = \lambda f_0(t^l) + 2(1-\lambda) T_1^l + \lambda T_2^l + \lambda f_0(t^{l+1})$$

- El último nodo interior

$$-\lambda T_{m+1}^{l+1} + 2(1+\lambda) T_m^{l+1} = \lambda f_{m+1}(t^l) + 2(1-\lambda) T_m^l + \lambda T_{m-1}^l + \lambda f_{m+1}(t^{l+1})$$

- El sistema resultante también es tridiagonal, y por tanto eficientemente solucionable.

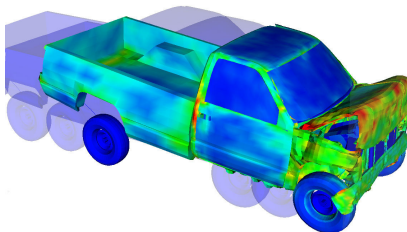
# Hasta ahora...

Hasta ahora:

- Diferencias finitas para solucionar EDP
- Dominio de solución ha sido malla discreta
- Solución: derivadas parciales se reemplazan por diferencias divididas finitas
- Conceptualmente fáciles de entender
- No aplican a geometrías irregulares, con condiciones frontera complejas, o de composición heterogénea

# Elementos finitos

- Elementos finitos son la alternativa usada para todas las condiciones anteriores



# Elementos finitos

- Dominio de solución se divide en **elementos**
- Se desarrolla solución a EDP para cada elemento
- Solución total se genera uniendo soluciones individuales, y asegurando continuidad de solución en las fronteras entre elementos.

# Enfoque general

- ① Discretización
- ② Ecuaciones de elementos
  - Elección de funciones de aproximación
  - Ajuste de funciones a solución
- ③ Ensamble
- ④ Condiciones de frontera
- ⑤ Solución
- ⑥ Postprocesamiento

# Resumen

## 1 Introducción

- Ecuaciones diferenciales parciales
- EDP de segundo orden

## 2 Diferencias finitas: ecuaciones elípticas

- Ecuación de Laplace
- Método de Liebmann
- Variables secundarias
- Condiciones en la frontera

## 3 Diferencias finitas: ecuaciones parabólicas

- Método explícito
- Método implícito

## 4 Elementos finitos

*Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo  $\text{\LaTeX}$ , Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux*



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-LicenciarIgual 3.0 Unported. Para ver una copia de esta Licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

© 2005-2017 Pablo Alvarado-Moya Área de Ingeniería en Computadores Instituto Tecnológico de Costa Rica