МАТЕМАТИКА ЗА ПЕТИ КЛАС

Делимост

- Ако числото a се дели на числото b без остатък, то числото a се нарича кратно на числото b, а числото b - делител на числото a.

- Ако всяко едно от събираемите на даден сбор се дели на едно и също число, то и сборът се дели на това число.

- Ако дадено произведение съдържа множител, който се дели на едно число, то и произведението се дели на това число.

- Признаци за делимост. Едно число се дели на:

  – 2, ако е четно (завършва на 0, 2, 4, 6, 8);
  – 3, ако сборът от цифрите му се дели на 3;
  – 4, ако числото формирано от последните му две цифри се дели на 4;
  – 5, ако завършва на 0 или 5;
  – 6, ако се дели едновременно на 2 и на 3;
  – 8, ако числото формирано от последните му две цифри се дели на 8;
  – 9, ако сборът от цифрите му се дели на 9;
  – 10, ако завършва на 0.

- Прости числа се наричат числата които се делят само на едно и на себе си (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...).

- Съставни числа се наричат числата, които имат повече от 2 делителя (числото 1 не нито просто, нито съставно, защото има само един делител).

- Прост множител е множител, който е просто число.

- Разлагане на съставно число на прости множители: представяне на съставното число като произведение от прости множители (съставното число се дели на прости числа, докато се получи 1, за удобство винаги се използва най-малкото възможно просто число).

- Намиране на НОД (най-голям общ делител): всяко число отделно се разлага на прости множители, след това се намира произведението от общите делители на числата, на които се иска да се намери НОД.
- Намиране на НОК (най-малко общо кратно или най-малкото число, което се дели на всички числата, на които се намира НОК): числата, на които се търси НОК се разлагат заедно, подредени с запетаи, като се делят на прости числа, започвайки винаги от най-малкото възможно просто число, на което се дели поне едно от числата на които се търси НОК. НОК е произведението на използваните прости числа.

✎ Обикновени дроби

- Обикновена дроб е число от вида $\frac{a}{b}$, където a се нарича числител, a b - знаменател, а дробната черта е знак за деление.
- Правилна дроб: числителят е по-малък от знаменателя.
- Неправилна дроб: числителят е по-голям или равен на знаменателя.
- Реципрочна дроб на дробта $\frac{a}{b}$ е $\frac{b}{a}$.
- Разширяване на дроб: умножаване на числителя и знаменателя с едно и също число, което се нарича допълнителен множител и се изписва с дъгичка над дробта.
- Съкращаване на дроб: деление на числителя и знаменателя с едно и също число.
- Най-малък общ знаменател на дроби е НОК на знаменателите.
- Правило за привеждане на дроби към най-малък общ знаменател: първо се намира НОК на знаменателите, след това се намират допълнителен множител за всяка от дробите, допълнителния множител за всяка дроб е различено число и се получава като общия знаменател разделим на знаменателя на дробта, след това разширяваме всяка дроб (умножаваме и числителя и знаменателя) с получения за тази дроб допълнителен множител.
- Сравняване на обикновени дроби: най-удобно е първо да се преведем към общ знаменател и след това да сравним само числителите, дробта с по-голям числител е по-голяма от дробта с по-малък числител при еднакви знаменатели на дробите.

- Събиране|изваждат на обикновени дроби: първо дробите трябва да се направят с общ знаменател и след това се събират|изваждат само числителите, знаменателя е числото, което е общ знаменател ($\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$).

- Смесени числа: число от вида $a\frac{b}{c}$, чете се a цяло и $\frac{b}{c}$.

- Превръщане на смесено число в обикновена неправилна дроб: $a\frac{b}{c} = \frac{a.c+b}{c}$.

- Превръщане на неправилна дроб $\frac{a}{b}$ в смесено число: числителя a се дели на знаменателя b, като се получава частно q и остатък p и $\frac{a}{b} = q\frac{p}{b}$.

- Умножение на дроби: първо ако може се съкращава някой числител с някой знаменател (делят се на едно и също число), след това се умножа числител с числите и знаменател с знаменател ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$). Всяко цяло число може да се представи като дроб като му се сложи знаменател 1.

- Деление на обикновени дроби: превръща се в умножение с реципрочна дроб ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$)

- Част от число: $\frac{a}{b}$ части от числото c се записва като $\frac{a}{b}.c$. Думичката „от“ винаги се замества със знак за умножение. Думичките „са/е“ се заместват с „=“. Ако p, a и b са числа, тогава израза p от a e b се записва: $p.a = b$, като може някое от трите числа да е неизвестно, тогава на негово място се пише x.

Десетични дроби

- Във всяка десетична дроб може да се добавят и махат нули нули в края на дробната част $(2,5 = 2,50 = 2,500 = 2,5000....)$

- Десетична дроб е число, в което цялата и дробната част са разделени с десетична запетая. Пример: 2,5 се чете две цяло и 5 десети; 2,51 се чете 2 цяло и 51 стотни; 2,512 се чете 2 цяло и 512 хилядни.

- Десетична дроб се умножава с 10, 100, 1000, 10000,....., като преместим десетичната запетая надясно с толкова позиции, колкото са нулите в числото 10, 100, 1000, 10000,.....Ако в десетичната дроб няма достатъчно цифри се добавят нули накрая на дробната част ($2,5.100$ десетичната запетая трябва да се премести с две позиции надясно, защото 100 има 2 нули, така $2,5.100 = 2,50.100 = 250$).

- Десетична дроб се дели с 10, 100, 1000, 10000,....., като преместим десетичната запетая наляво с толкова позиции, колкото са нулите в числото 10, 100, 1000, 10000,.....Ако в десетичната дроб няма достатъчно цифри се добавят нули в началото преди цялата част ($2,5 : 100$ десетичната запетая трябва да се премести с две позиции наляво, защото 100 има 2 нули, така $2,5 : 100 = 002,5 : 100 = 0,025$).

- Закръгляне на десетична дроб с дадена точност: ако първата цифра след дадената точност е по-малка от 5, последната цифра остава същата, но ако е по-голяма или равна на 5, последната цифра се увеличава с едно. С точност 0,1 означава да има един знак след запетаята, с 0,01 - два занака, с 0,001 - три знака, с точност до 1 означава да се закръгли до цялата част, а с точност 10 до десетиците. ($45,124 \approx 45,1$, защото $2 < 5$, но $45,164 \approx 45,2$, защото $6 > 5$.)

- Събиране и изваждане на десетични дроби: за удобство дробите се записват една под друга, като десетичните запетаи са една под друга и изравняваме броя на позициите след запетаята, като добавяме нули в дробта с по-малко позиции, след това се събират|изваждат отзад напред, като естествените числа.

- Умножение на десетична дроб с естествено число или с десетична дроб: в работно поле се умножават числата без запетаите, след това се слага запетая в полученото произведението, с толкова позиции след запетаята, колкото са общо позициите в десетичните дроби, които се умножават ($0,2.1,2 = 0,24$, защото $2.12 = 24$, в първата дроб има една позиция след запетаята, във втората - също една, общо стават 2 позиции и в отговора трябва да има 2 позиции след запетаята.)

- Деление на десетична дроб с естествено число: делението се извършва с опашка, като започваме отляво на дясно, като свърши цялата част се слага запетая и в частното.

- Деление на десетична дроб с десетична дроб: делителя не трябва да е десетична дроб, затова се умножават и делимото и делителя с 10, 100, 1000,... с толкова нули колкото са позициите след запетаята в делителя ($0,25 : 0,5 = 2,5 : 5 = 0,5$).

- Превръщане на обикновени дроби в десетични: дели се числителя на знаменателя.

- Превръщане на десетични дроби в обикновени: в числителя се пише дадената десетична дроб, но без запетаята, а в знаменателя се пише 10, 100, 1000, ... с толкова нули, колкото са позициите след запетаята.

Процент

- $a\% = \frac{a}{100}$
- Ако в задачата се пита колко процента от числото a е числото b, то става уравнение $\frac{x}{100}.a = b$
- Намаление на числото a с p% от него: $a - \frac{p}{100}.a$. Използва се при намаление на цена на дадена стока и др.
- Увеличение на числото a с p% от него: $a + \frac{p}{100}.a$. Използва се при увеличение на цена на дадена стока и др.

Решаване на уравнения

$x + a = b$	$x - a = b$	$a - x = b$	$a.x = b$	$x.a = b$	$x : a = b$	$a : x = b$
$x = b - a$	$x = b + a$	$x = a - b$	$x = b : a$	$x = b : a$	$x = b.a$	$x = a : b$

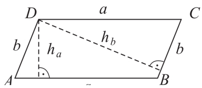
Основни геометрични фигури

- Перпендикулярни прави: образуват прав ъгъл (90 градуса) при пресичането си.
- Успоредни прави: нямат общи точки, колкото и да се удължат правите никога няма да се пресекат.
- Височини в триъгълник: отсечка от някой връх на триъгълника до отсрещната страна, като прави прав ъгъл със страната. Всеки триъгълник има 3 височини. В остроъгълния триъгълник трите височини са в триъгълника, в правоъгълния има една височина в триъгълника, а другите две са катетите (страните, между които е правия ъгъл, третата страна се нарича хипотенуза), в тъпоъгълния има само една височина в триъгълника (от тъпия ъгъл), другите две са извън триъгълника, като за да се построят страните на триъгълника се удължават с пунктирана линия.
- За означаване на обиколка|периметър се използва буквата P, а за означаване на лице|площ се използва буквата S.
- Квадрат: четирите страни са равни и се означават с a.
$P = 4.a, S = a.a$

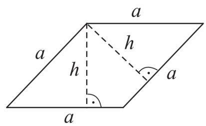
- Правоъгълник: две по две страните му са равни и се означават с a и b. $P = 2.(a + b)$ или $P = 2.a + 2.b, S = a.b$

- Триъгълник: страните на триъгълника се означават с a, b c, a височините съответно към тези страни с h_a, h_b, h_c. $P = a + b + c$, $S = \frac{a.h_a}{2}$ или $S = \frac{b.h_b}{2}$ или $S = \frac{c.h_c}{2}$. Ако триъгълника е правоъгълен, лицето се намира по една от двете формули: $S = \frac{a.b}{2}$ или $S = \frac{c.h_c}{2}$, където a и b са катетите (страните между които е правия ъгъл), а c е хипотенузата (страната срещу правия ъгъл).

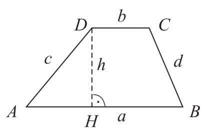
- Успоредник: Две по две страните са равни и успоредни, означават се с a и b, а височините към тях са съответно h_a, h_b. $P = 2.a + 2.b$ или $P = 2.(a + b)$, $S = a.h_a$ или $S = b.h_b$



- Ромб: страните са две по две успоредни, и всички страни са равни, означават се с буквата a, височината с h. $P = 4.a, S = a.h$



- Трапец: страните се означават с a, b, c, d, като a се нарича голяма основа, b - малка основа, a c и d - бедра. Ако трапеца е равнобедрен, тогава $c = d$. Височината на трапеца се означава с h. Един трапец може и да е правоъгълен, ако едно от бедрата сключва прав ъгъл с основите на трапеца, тогава височината на трапеца е бедрото, което сключва правия ъгъл с основите.



✎ Геометрични тела

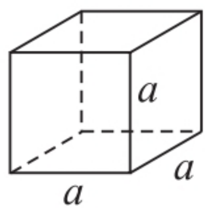
- Куб: Има 8 върха, 12 ръба (които са равни отсечки), 6 стени (които са еднакви квадрати), от които 2 са основи (долна и горна), а 4 околни стени.

  Сбора от всички ръбове на куба е: 12.

  Лице на околна повърхнина на куб (лицето на четирите квадрата, които са околни стени и са еднакви): $S = 4.a.a$

  Лице на повърхнина на куб (лицето на шестте стени, които са еднакви квадрати): $S_1 = 6.a.a$

  Обем на куб: $V = a.a.a$



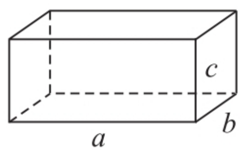
- Паралелепипед: тяло от шест правоъгълника, но не всички са еднакви а два по два (тези които са един срещу друг). Има 8 върха, 12 ръба , 6 стени, от които 2 са основи (долна и горна), а 4 околни стени.

  Сбора от всички ръбове на куба е: $4. + 4.b + 4.c$

  Лице на околна повърхнина на куб (лицето на четирите правоъгълника, които са околни стени): $S = 2(a + b).c$

  Лице на повърхнина на куб (лицето на шестте стени): $S_1 = S + 2.B$, където $B = a.b$ е лицето на правоъгълника, който е основа.

  Обем на куб: $V = a.a.a$



✎ **Мерни единици**

- За дължина

$$m \underset{:10}{\overset{.10}{\rightleftarrows}} dm \underset{:10}{\overset{.10}{\rightleftarrows}} cm \underset{:10}{\overset{.10}{\rightleftarrows}} mm$$

- За лице: наричат се квадратни мерни единици. Често използвани единици за намиране на площ са ар, дка (декар) и ха (хектар), като 1 ар = $100m^2$; 1 дка = $1000m^2$; 1 ха = $10000m^2$.

$$m^2 \underset{:100}{\overset{.100}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{:100}{\overset{.100}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{:100}{\overset{.100}{\rightleftarrows}} mm^2$$

- За обем: наричат се кубични мерни единици.

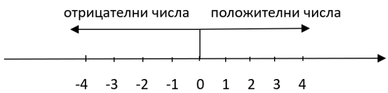
$$m^3 \underset{:1000}{\overset{.1000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{:1000}{\overset{.1000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{:1000}{\overset{.1000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

МАТЕМАТИКА ЗА ШЕСТИ КЛАС

Рационални числа

- Всички положителни числа, отрицателни числа и числото 0 образуват множеството на рационалните числа, което се означава с $\mathbb{Q}$.

- Изобразяване на рационални числа върху числова ос:



- **Числото 0** е нито положително нито отрицателно. Всички числа по-малки от 0 са **отрицателни**, а всички по-големи от 0 – **положителни**.

- **Неотрицателни числа:** положителните числа и нулата. **Неположителни:** отрицателните числа и нулата.

- **Противоположни числа:** две рационални числа, които се различават само по знак. Пример 5 и -5; -1 и 1.

- **Абсолютна стойност (Модул):** разстоянието от началото 0 на числовата ос до образа на даденото число. Модулът на едно число е винаги положително число. Пример $|5| = 5, |-5| = 5$.

- Събиране|Изваждане на рационални числа с:
  - **еднакви знаци:** събираме числата и пишем знака им. Пример: $2 + 3 = 5$; $-2 - 3 = -5$.
  - **различни знаци:** от по-голямото по абсолютна стойност число, изваждаме по-малкото и пишем знака на по-голямото. Пример: $5 - 3 = 2$; $3 - 5 = -2$.

Правила:

$a + (+b) = a + b$; $a + (-b) = a - b$;

$a - (+b) = a - b$; $a - (-b) = a + b$.

- При умножение и деление на две рационални числа с

– **еднакви знаци:** винаги се получава положително число. Пример: $2.3 = 6$; $-2.(-3) = 6$.

– **различни знаци:** винаги се получава отрицателно число. Пример: $5.(-3) = -15$; $-2.5 = -10$.

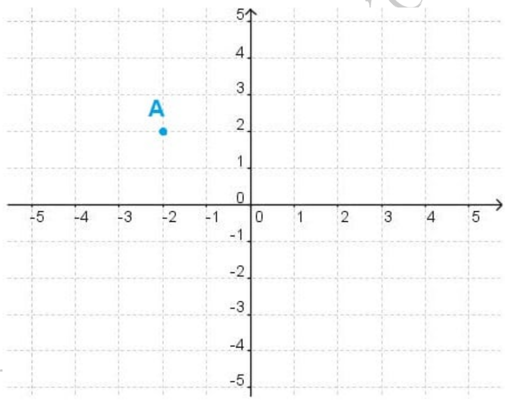
- При умножение и деление на повече от две рационални числа, от които:

  – **четен брой са отрицателни:** винаги се получава положително число. Пример: $(-2).(-3).(-1).(-6) = 36$; $-2.(-3).2.1 = 12$.

  – **нечетен брой са отрицателни:** винаги се получава отрицателно число. Пример: $5.(-3) = -15$; $-2.(-5).(-1) = -10$.

✎ Декартова координатна система

- Изобразяване

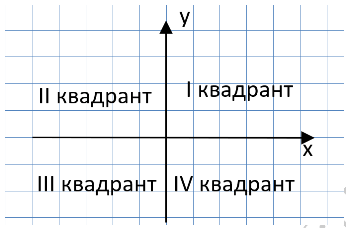


- Декартовата координатна система се означава с Oxy. Оста Ox се нарича абсцисна ос, а оста Oy – ординатна ос. Мястото на произволна точка A се определя от числата x_A и y_A. Точка се записва по следния начин: (x_A, y_A), където x_A се нарича абсциса на точката, а y_A – ордината, x_A и y_A се наричат координати на точката A. Точката от чертежа е $A(-2, 2)$

- Квадранти

  – Ако точка A има (+) абсциса и (+) ордината, то казваме, че точка е е в I квадрант.

- Ако точка A има (-) абсциса и (+) ордината, то казваме, че точка е е в II квадрант.
- Ако точка A има (-) абсциса и (-) ордината, то казваме, че точка е е в III квадрант.
- Ако точка A има (-) абсциса и (+) ордината, то казваме, че точка е е в IV квадрант.



✎ Симетрична точка на точката (x_A, y_A) относно:

- абсцисната ос е точката $(x_A, -y_A)$
- ординатната ос е точката $(-x_A, y_A)$
- Началото на координатната система е точката $(-x_A, -y_A)$

✎ Степенуване. Основни формули

- $a^n.a^m = a^{n+m}$; $\quad a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
- $(a.b)^n = a^n.b^n$; $\quad (a:b)^n = (\frac{a}{b})^n = a^n.b^n$;
- $(a^n)^m = a^{n.m}$; $\quad a^0 = 1$; $\quad a^1 = a$;
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\quad (\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$;
- $(-a)^n = a^n$, при n четно число.
- $(-a)^n = -a^n$, при n нечетно число.

✎ Уравнения

- Уравнение с едно неизвестно се нарича равенство, в което едно число, означено с буква се приема за неизвестно.

- Корен (решение) на уравнение е числото, което като се постави на мястото на неизвестното, образува вярно числено равенство. Да се реши едно уравнение означава да се намери корена му.
- Всеки член на едно уравнение може да се прехвърли от едната му страна в другата с противоположен (обратен) знак.

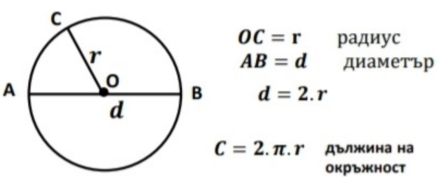
✎ Пропорции

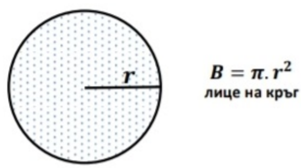
- Частното на две числа се нарича отношение на тези числа. Пишем $a : b$ или $\frac{a}{b}$ и четем a към b или a се отнася към b. Две равни отношения, свързани с знака за равенство, образуват пропорция, т.е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, четем a към b се отнася тъй както c към d.
- **Основно свойство на пропорциите:** ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a.d = b.c$. Ако две неща, например числата u и v се отнасят тъй като числата a и b, то мажем да запишем, че $u = a.x$ $v = b.x$. Пример ако $u : v : w$ се отнасят тъй както 1:2:3, то $u = 1.x$, $v = 2.x$ и $w = 3.x$.
- Права пропорционалност: казваме че величините x и y са правопропорционални, ако $y = k.x$, където k се нарича коефициент на пропорционалност.
- Обратна пропорционалност: казваме че величините x и y са обратнопропорционални, ако $y = k : x$, където k се нарича коефициент на пропорционалност.

✎ Геометрични фигури

- Окръжност и кръг

  Окръжността е линията, която загражда кръг. Центърът и се означава с O. За да се измери дължината и (означава се с C) се използва числото π (чете се пи) и е приблизително равно на 3,14 или на $\frac{22}{7}$. Радиус на окръжност е отсечка от центъра и до окръжността и се означава с r. Диаметър на окръжност е отсечка, минаваща през центъра, започваща и завършваща в точка от окръжността, означава се с d и $d = 2.r$. Лице на кръг: площта заградена от окръжност.

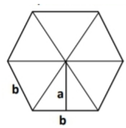




- Многоъгълник

  Правилен многоъгълник: всички му страни и ъгли са равни. За да се начертае правилен многоъгълник се използва окръжност, построява се в окръжността, като центъра на окръжността е център и на многоъгълника.

  Означения: страната на правилен многоъгълник се означава с b, броя на ъглите|страните с n, апотемата му с a (апотема е осечка от центъра на многоъгълника до страна на триъгълника, като сключва прав ъгъл с тази страна). Формулите са в сила само за правилни многоъгълници.



$$P = n.b$$
$$B = \frac{P.a}{2}$$
$$B = \frac{n.b.a}{2}$$

✎ Геометрични тела

С P се означава обиколката на основата, с B – лицето на основата, с S – лицето на околната повърхнина, с S_1– лицето на повърхнината, с V –обем и с $\sum$ – сборът от всички ръбове.

- Призма.

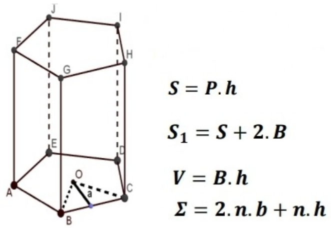
  Правилна призма: всички страни в основата са равни. Правилна 4-риъгълна призма има основа квадрат, правилна триъгълна призма има основа равностранен триъгълник.

  Елементи на призмата: две основи: два еднакви n-ъгълника; основни ръбове (b): страните на основите, 2.n на брой; околни ръбове (l/h)- останалите

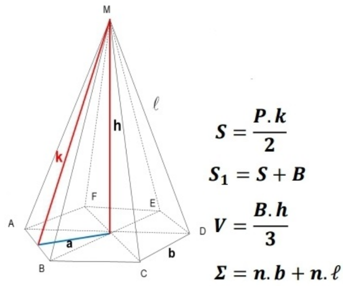
- Пирамида.

  Правилна пирамида: всички страни в основата са равни. Правилна 4-риъгълна пирамида има основа квадрат, правилна триъгълна пирамида има основа равностранен триъгълник.

  Елементи на пирамидата: 1 основа: n-ъгълник; връх - точката отгоре, в която се събират всички околни ръбове; основни ръбове (b): страните на основите, n на брой; околни ръбове (l) - останалите ръбове, които не са в основата, n на брой; общо ръбове: 2n на брой; околни стени: триъгълници; апотема (k)- височина в триъгълник (околна стена) към основния ръб; височина (h) - свързва върха на пирамидата с центъра на основата (Фигура 2).



Фигура 1: Призма

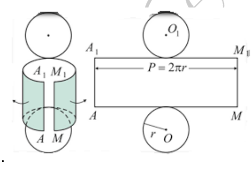


Фигура 2: Пирамида

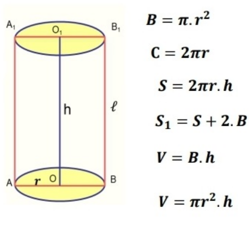
- Цилиндър.

  Елементи на цилиндър: две основи- два кръга с център съответно O и O_1; лицето на основата е $B = \pi.r^2$, обиколката на основата е $P = C = 2\pi.r$; осно сечение - OO_1.

  Цилиндър се получава при пълно завъртане на правоъгълник, като страната около която се завърта правоъгълника е височина (h) на цилиндъра, а другата страна става радиус (r) на основата. Развивка на цилиндър е показана на Фигура 3, а цилиндър на Фигура 4.



Фигура 3: Развивка на цилиндър



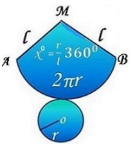
Фигура 4: Цилиндър

- Конус. Елементи на конуса: една основа - кръг; лицето на основата е $B = \pi.r^2$, обиколката на основата е $P = C = 2\pi.r$.

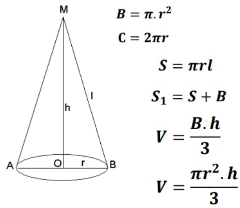
  Конус се получава при завъртане на триъгълник, като тази страна около, която се завърта е височината на конуса.

Височината на конуса се означава с h. Образуващата се означава с l. Ос на въртене на конуса е височината. Осно сечение на конус е триъгълник, който се завърта за да стане конус.

Централен ъгъл на конус - ъгъл чийто връх е центъра на окръжността, която е основа на конуса. $x^0 = \frac{l}{r}.360°$. На Фигура 3 това е ъгъл AMB.

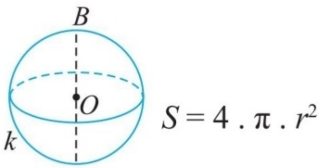


Фигура 5: Развивка на конус

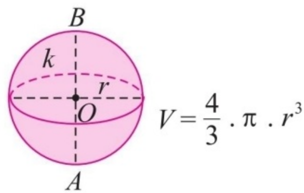


Фигура 6: Конус

- Сфера и кълбо.



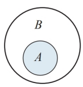
Сфера



Кълбо

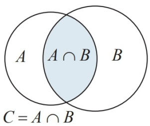
✎ Множества

- Множество: съвкупност от обекти. Всеки обект, който принадлежи (означаваме $\in$) се нарича елемент на това множество.
- Празно множество: не съдържа нито един елемент. Означа се с $\varnothing$.
- Множество A се нарича подмножество на множеството B, ако всички елемент на A са елементи и на B. Означаваме с $A \subset B$.

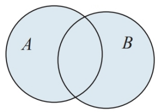


- Сечение на множествата A и B е множество, което се състои от общите елементи на A и B. Означаваме $A \bigcap B$.

- Обединение на множествата A и B е множество, което се състои от елементи и на A и на B, ако имат общи елементи те се изпъсват само веднъж в множеството, което е сечение. Означаваме $A \bigcup B$.



$C = A \cap B$



$C = A \cup B$

✎ Вероятност на събитие

- Достоверно събитие: сигурно е, че ще се случи.

- Невъзможно събитие: не може да се случи.

- Случайно събитие: може да настъпи, а може и да не настъпи при извършване на даден опит.

- Класическа вероятност: за събитието A е $P(A) = \frac{m}{n}$, където m е броя на благоприятните изходи (тези, които са елементи от множеството A), а n е броя на всички възможни изхода, свързани с дадения опит. $0 \leq P(A) \leq 1$.

✎ Средноаритметично

Средноаритметичното на дадени числа е сбора на числата, разделен на броя им.