矩阵在数字图像中的应用（PCA人脸识别）

理论分析

1. 构造数据矩阵

假设有 M 张人脸图像，每张图像表示为长度为 d 的列向量 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$
首先计算平均脸（Mean Face）：

$$\mathbf{\Psi} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x}_i$$

计算每张脸与平均脸的偏差（去中心化）：

$$\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{\Psi}$$

将这些偏差向量作为列构造数据矩阵 A：

$$A = [\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_M] \in \mathbb{R}^{d \times M}$$

2. 协方差矩阵

样本的协方差矩阵 C 可以表示为数据矩阵 A 与其转置的乘积：

$$C = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} \mathbf{\Phi}_i \mathbf{\Phi}_i^T = \frac{1}{M-1} A A^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

3. 特征值分解

对协方差矩阵 C 进行特征值分解:

$$C \mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l$$

由于 d 通常很大，我们通过求解 $A^T A$ 的特征向量 $\mathbf{v}_l$ 来简化计算：

$$(A^T A) \mathbf{v}_l = \mu_l \mathbf{v}_l$$

由此推导出 C 的特征向量（特征脸）：

$$\mathbf{u}_l = A \mathbf{v}_l$$

选取前 k 个最大特征值对应的特征向量构成特征空间基矩阵 U_k：

$$U_k = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{d \times k}$$

4. 投影与降维

对于任意去中心化后的图像向量 $\mathbf{\Phi}$，其在特征空间中的投影（即低维表示）通过投影算子的转置相关部分计算：

$$\mathbf{\Omega} = U_k^T \mathbf{\Phi}$$

其中 $\mathbf{\Omega} = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k]^T$ 为该图像在特征脸基下的坐标。

奇异值分解（SVD）的简化计算

为了避免直接对维度极高的协方差矩阵 $C = \frac{1}{M-1} AA^T$ 进行特征值分解，我们可以直接对去中心化后的数据矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d \times M}$ 进行奇异值分解：

$$A = U \Sigma V^T$$

其中：

- $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_d] \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 是左奇异向量矩阵，其列向量是正交的。
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times M}$ 是对角矩阵，对角线元素 σ_i 为奇异值。
- $V \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 是右奇异向量矩阵。

1. 左奇异向量与协方差矩阵特征向量的关系

将 A 的 SVD 形式代入协方差矩阵的表达式：

$$C = \frac{1}{M-1} AA^T = \frac{1}{M-1} (U \Sigma V^T)(U \Sigma V^T)^T$$

利用矩阵转置性质 $(BC)^T = C^T B^T$ 及 $V^T V = I$（正交性）：

$$C = \frac{1}{M-1} U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T = \frac{1}{M-1} U (\Sigma \Sigma^T) U^T$$

由此可见，C 的形式符合特征值分解的定义 $C = U \Lambda U^T$。这证明了：
数据矩阵 A 的左奇异向量 U 正是协方差矩阵 C 的特征向量（即特征脸）。

2. 特征值与奇异值的关系

协方差矩阵的特征值 λ_i 与数据矩阵的奇异值 σ_i 存在如下关系：

$$\lambda_i = \frac{\sigma_i^2}{M-1}$$

3. 计算优势

在人脸识别中，由于图像维度 d 远大于样本数 M，直接对 A 进行 SVD 分解（或截断 SVD）相比于显式计算 AA^T 具有以下优点：

1. **数值稳定性**：SVD 算法在处理近奇异矩阵时比特征值分解更稳健。
2. **计算效率**：成熟的 SVD 算法（如分治法）可以高效地只计算前 k 个最大的奇异值及其对应的左奇异向量 U_k，直接构建特征空间基矩阵：

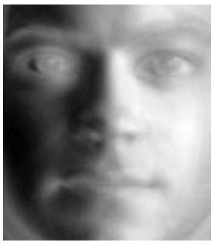
$$U_k = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k]$$

实验展示

1. 平均脸

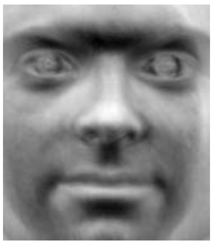
所有训练样本的平均值，代表了该人脸库的共同特征

2. 特征值以及对应的特征脸

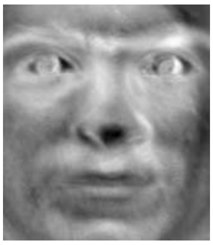


λ=42587680.0

λ=21281902.0



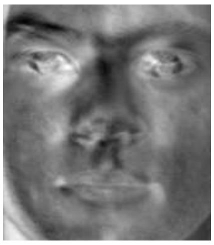
λ=7886554.0



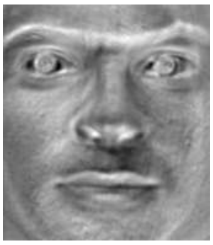
λ=4789814.0

λ=2504138.25

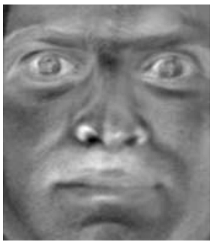
λ=1492121.5



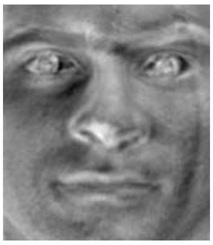
λ=1256461.25



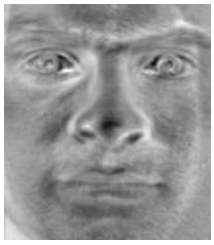
λ=1058738.25



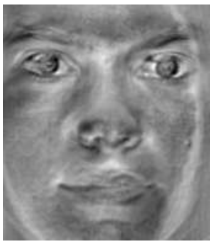
λ=864673.0



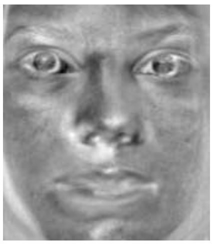
λ=744577.88



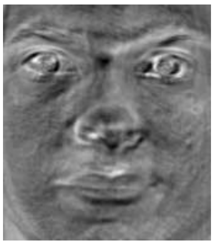
λ=581877.19



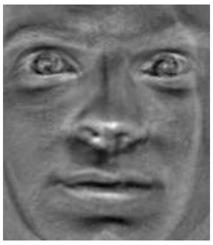
λ=531729.25



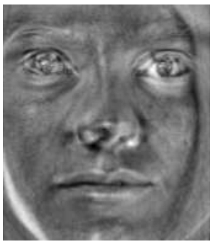
λ=483631.72



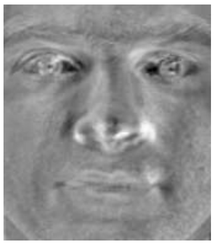
λ=394392.5



λ=280139.0



λ=253026.55



λ=232007.06

3. 识别结果

取前17个特征值及其对应的特征向量，识别结果达到百分之百（train: 30 + test: 11, 不信跑C++代码）

4. 重建对比图