

Геометрия треугольника



В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём и Отрезки CP и CQ — биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.

б) Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

(ЕГЭ-2019, основная волна)

В трапеции $ABCD$ основание $AD = 2BC$. Точка M внутри трапеции такова, что углы ABM и MCD прямые.

а) Докажите, что $MA = MD$.

б) Найдите угол BAD , если расстояние от точки M до AD равно BC , а угол ADC равен 55° .

(ЕГЭ-2017)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если

$$\cos \angle BAC = \frac{7}{25}.$$

(ЕГЭ-2016)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.

а) Докажите, что $MN \perp NH$.

б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH , а Q – точка пересечения прямых BC и MN . Найдите площадь треугольника PQM , если $AN = 4$ и $BH = 2$.

(ЕГЭ-2016)

В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что $EH \parallel AC$;

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30^\circ$.

(ЕГЭ-2016)

Геометрия четырехугольника



Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении $1 : 2$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60. В ответе запишите максимальную площадь параллелограмма $ABCD$.

В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, $\angle CAD = 60^\circ$. Отношение площадей треугольников AOD и BOC , где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Длины оснований равны 2 и 5. Найдите длину высоты трапеции.

Дан треугольник ABC . На сторонах AB , BC и CA взяты точки X , Y и Z соответственно таким образом, что четырёхугольник XYZ является ромбом. Известно, что $AZ = 1$, а $BY = 4$.
Найдите сторону ромба.

Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите сумму длин большего основания и меньшей боковой стороны трапеции.

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причем $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от ее середины. Из нее на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60° .

Дан четырехугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.

На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно точки M и N , причем M - середина AD , а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырехугольника, вершины которого находятся в точках C , N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC , если $S_{ABCD} = 48$.

Дана равнобедренная трапеция, в которой $AD = 3BC$, CM – высота трапеции.

а) Докажите, что M делит AD в отношении $2 : 1$.

б) Найдите расстояние от точки C до середины BD , если $AD = 18$, $AC = 4\sqrt{13}$.

(ЕГЭ-2017)

Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма длин оснований равна 17.

а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции.

(ЕГЭ-2017)

Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найти отношение длин оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{64}$ от площади трапеции $ABCD$. (ЕГЭ-2017)

Точки E и K – середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$ соответственно. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O .

а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO , если сторона квадрата равна 1.

(ЕГЭ-2017)

Прямая, проходящая через вершину B , прямоугольника $ABCD$, перпендикулярная диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M , равноудаленной от вершин B и D .

а) Докажите, что BM и BD делят угол B на три равных угла.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ до прямой CM , если $BC = 6\sqrt{21}$.

(ЕГЭ-2016)

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

- а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$, пересекаются на стороне AD .
- б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM , DM , BN и CN , равна 24. (ЕГЭ-2015)

Геометрия окружности



Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO , где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

а) Докажите, что $OP = AP$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC$ и радиус описанной окружности равен 18.

(ЕГЭ-2019, основная волна)

Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN . Высота BH пересекает эту окружность в точке K .

а) Докажите, что $AN = CK$

б) Найдите KN , если $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$, а радиус окружности равен 12.

(ЕГЭ-2019, основная волна)

Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$ (ЕГЭ-2019, основная волна)

В остроугольном треугольнике ABC , Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

(ЕГЭ-2019, основная волна)

Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что $AB = BC$.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника, проведённая из вершины A , делит сторону BC .

(ЕГЭ-2019, резервный день)

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH .

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH , вторично пересекающей отрезок AC в точке P , а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH , вторично пересекающей отрезок BC в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2 , если $AC = 22$, $BC = 18$
(ЕГЭ-2019, резервный день)

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

(ДемоЕГЭ-2018)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

- а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.
- б) Найдите AD , если угол DAE равен углу BAC , а радиус второй окружности в четыре раза больше радиуса первой и $AB = 2$.
(ЕГЭ-2017)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая MK пересекающая обе окружности в точках M и K , причем точка A находится между ними.

а) Докажите, что треугольники BMK и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой MK , если $O_1O_2 = 5$, $MK = 7$.

(ЕГЭ-2017)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$, прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK : KA$.

(ЕГЭ-2017)

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 20$ и $BC = 15$.

(ЕГЭ-2017)

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точке C и M .

а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD .

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

(ЕГЭ-2017)

Задание 16

©

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$.

а) Докажите, что $AD = 4BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

(ЕГЭ-2017)

В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

(ЕГЭ-2017)

В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M .

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$ если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

(ЕГЭ-2016)

Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK и KE , если $\angle ECD = 15^\circ$.
(ЕГЭ-2016)

Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC .

(ЕГЭ-2016)

Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K .

а) Докажите, что отрезок BK больше отрезка CK .

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N . Найдите AB , если $BK = 18$ и $BN = 17$.

(ЕГЭ-2015)