Ex 1 Montrons que $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{x^2-3x+2} = -\infty$:

Soit $M > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]1,2[\cap]2,+\infty[$,

$$x - 1 \leqslant \alpha \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2} \leqslant -M$$

Plaçons nous sur le voisinage à droite de 1 : $]1,2[$: $\forall x \in]1,2[$, on a

$$\frac{1}{x^2-3x+2} \leqslant -M \iff \frac{1}{(x-1)(x-2)} \leqslant -M < 0 \overset{x-2<0}{\iff} x-1 \leqslant \frac{1}{(2-x)M}$$

Or $0 < 2-x < 1$ donc $\dfrac{1}{2-x} \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{(2-x)M} \geqslant \dfrac{1}{M}$. Alors

$$x - 1 \leqslant \frac{1}{M} \Rightarrow x - 1 \leqslant \frac{1}{(2-x)M} \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2} \leqslant -M$$

Il suffit ainsi de choisir $\alpha = \boxed{\min\left(1, \dfrac{1}{M}\right)}$ (puisque le raisonnement a été fait pour $x \in]1,2[$, soit $x-1<1$).

Ex 2 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et telles que $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$ $(a \in \bar{I})$
On pose, pour tout $x \in I$: $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrons que $\lim\limits_a h = \max(\ell, \ell')$.

Par symétrie des rôle, on peut supposer sans perte de généralité que $\ell' \leqslant \ell$.

- Premier cas : $\ell' < \ell$. Alors , en posant
$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{2}$$
la définition des limites donne
$$\exists \alpha_1 > 0 \,/\, \forall x \in [a - \alpha_1, a + \alpha_1] \cap I,\ \ell - \frac{\ell - \ell'}{2} \leqslant f(x) \leqslant \ell + \frac{\ell - \ell'}{2}$$
et
$$\exists \alpha_2 > 0 \,/\, \forall x \in [a - \alpha_2, a + \alpha_2] \cap I,\ \ell' - \frac{\ell - \ell'}{2} \leqslant g(x) \leqslant \ell' + \frac{\ell - \ell'}{2}$$
On pose $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Comme $\ell - \frac{\ell - \ell'}{2} = \ell' + \frac{\ell - \ell'}{2} = \frac{\ell + \ell'}{2}$, on a
$$\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I,\ g(x) \leqslant \frac{\ell + \ell'}{2} \leqslant f(x)$$
Autrement dit
$$\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I,\ h(x) = f(x)$$
Il vient alors naturellement
$$\lim_a h = \lim_a f = \ell = \max(\ell, \ell') \quad \text{CQFD}$$
- Deuxième cas : $\ell' = \ell$. **On fixe** $\varepsilon > 0$ et on écrit encore les définitions :
$$\exists \alpha_1 > 0 \,/\, \forall x \in [a - \alpha_1, a + \alpha_1] \cap I,\ \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$
et
$$\exists \alpha_2 > 0 \,/\, \forall x \in [a - \alpha_2, a + \alpha_2] \cap I,\ \ell - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$
Alors, **en posant** $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on a
$$\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I,\ \begin{cases} \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \ell + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \max(f(x), g(x)) \leqslant \ell + \varepsilon$$
Autrement dit
$$\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I,\ \ell - \varepsilon \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$
Ce qui prouve indubitablement que
$$\boxed{\lim_a h = \ell = \max(\ell, \ell')}$$

- f continue sur $\mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ d'après les théorèmes généraux.
- $\lim\limits_{0-} f = \frac{1}{3} = f(0) = \lim\limits_{0+} f$, donc f est continue en 0.
- $\lim\limits_{1+} f = \frac{2}{3} = f(1) = \lim\limits_{1-} f$, donc f est continue en 1.

$\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}}$.

Ex 3 Montrons que la fonction $f : x \to \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.
Par l'absurde, sinon on aurait un réel $k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant k|x - y|$.
En particulier pour $y = 0$: $\forall x \in [0, 1]$, $\sqrt{x} \leqslant kx$ d'où
$$\forall x \in \,]0, 1],\ \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant k$$
Ceci est contradictoire, par exemple avec le réel $x = \frac{1}{(k+1)^2} \in [0, 1]$: on obtient $k + 1 \leqslant k$!!

Ex 4 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et $F : x \to \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrons que sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$: si $x < y$, alors

$$|\sin y - \sin x| = \left|-\int_x^y \cos(t)\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{I.T.}}{\leqslant} \int_x^y |\cos(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y \mathrm{d}t = |y - x|$$

Par symétrie des rôles de x et y, on a le résultat pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Soient donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_a^b f(t)(\sin(yt) - \sin(xt))\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{I.T.}}{\leqslant} \int_a^b |f(t)|\,|\sin(yt) - \sin(xt)|\,\mathrm{d}t$$

En appliquant le résultat de la question a),

$$|F(y) - F(x)| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,|yt - xt|\,\mathrm{d}t \leqslant |y - x| \int_a^b |f(t)|\,|t|\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\boxed{F \text{ est lischitzienne sur } \mathbb{R} \text{ de rapport } K = \int_a^b |tf(t)|\,\mathrm{d}t}$$

Ex 5 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

a) Montrons qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = f(\alpha)$.

On pose

$$g : \begin{array}{ll} \left]0, \frac{1}{2}\right[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) \end{array}$$

* g est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par composée et somme.
* $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$
* $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \overset{\text{hyp.}}{=} f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$

Ainsi $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont opposés, et on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\ / \ g(\alpha) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = f(\alpha) \qquad \text{CQFD}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'il existe $\alpha_n \in [0, 1]$ tel que $f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$.

On pose de la même manière

$$g_n : \begin{array}{ll} \left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \end{array}$$

g_n est continue sur $\left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[$ par composée et somme. Considérons la somme télescopique sur la subdivision régulière :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) \overset{\text{hyp.}}{=} 0$$

Cette somme est nulle, donc au moins deux de ses termes sont de signes opposés :

$$\exists (k, \ell) \in [\![0, n-1]\!] \ / \ k < \ell \text{ et } g_n\left(\frac{k}{n}\right) g_n\left(\frac{\ell}{n}\right) \leqslant 0$$

On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g_n entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{\ell}{n}$:

$$\exists \alpha_n \in \left]\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}\right[\ / \ g_n(\alpha_n) = 0 \quad i.e. \quad f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n) \qquad \text{CQFD}$$

Ex 6 Un marcheur parcourt 12 km en une heure.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sa loi horaire ($f(t)$ est la distance parcourue à l'instant t).

f est continue sur $[0,1]$ (hypothèse physique raisonnable), $f(0) = 0$ et $f(1) = 12$. Posons

$$g : \begin{array}{ll} \left]0, \frac{1}{2}\right[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) - 6 \end{array}$$

On a

$$g(0) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f(0) - 6 = f\left(\tfrac{1}{2}\right) - 6 \quad \text{et} \quad g\left(\tfrac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\tfrac{1}{2}\right) - 6 = 6 - f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Ainsi $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont opposés, et on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\ / \ g(\alpha) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) - f(\alpha) = 6$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{il existe un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il parcourt exactement 6 km}}$$

Ex 7 Soit f continue sur $[a,b]$, et p, q deux réels positifs. ($(p,q) \neq (0,0)$).

Montrons qu'il existe $c \in [a,b] \ / \ pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$, c'est-à-dire $\dfrac{pf(a) + qf(b)}{p+q} = f(c)$:

Le réel $m = \dfrac{pf(a) + qf(b)}{p+q}$ est la moyenne pondérée de $f(a)$ et $f(b)$.

Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change pas le résultat, on peut supposer $f(a) \leqslant f(b)$.

Montrons alors que $m \in [f(a), f(b)]$:

$$f(a) = \frac{pf(a) + qf(a)}{p+q} \leqslant \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} \leqslant \frac{pf(b) + qf(b)}{p+q} = f(b)$$

On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f continue sur $[a,b]$:

$$m \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists c \in [a,b] \ / \ f(c) = m = \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} \quad \text{CQFD.}$$

Ex 8 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue positive sur $[0, +\infty]$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell < 1$.

Montrons qu'il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $f(x_0) = x_0$.

On pose classiquement $g : x \mapsto f(x) - x$, qui est continue sur $[0, +\infty[$ par somme.

- On a $g(0) = f(0) \geqslant 0$.
- D'après l'hypothèse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - 1\right) = \ell - 1 < 0$.

  Par définition de la limite (avec "$\varepsilon = 1 - \ell > 0$"), il existe un réel $A > 0$ tel que $g(x) < 0$

On peut ainsi appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g entre 0 et A :

$$\exists x_0 \in [0, A] \ / \ g(x_0) = 0 \quad \text{donc} \quad \exists x_0 \geqslant 0 \ / \ f(x_0) = x_0 \quad \text{CQFD.}$$

Ex 9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

- Première méthode : le théorème des valeurs intermédiaires dit que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle. Mais il est inclus dans $\mathbb{Z}$. La seule possibilité est que $f(\mathbb{R})$ soit un singleton $\{k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi

  $$\boxed{f \text{ est constante (égale à } k)}$$

- Deuxième méthode : **par l'absurde**, si f n'était pas constante, elle prendrait deux valeurs **distinctes** k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

  $$\exists x_1 \in \mathbb{R} \ / \ f(x_1) = k_1 \quad \text{et} \quad \exists x_2 \in \mathbb{R} \ / \ f(x_2) = k_2$$

  Quitte à considérer $-f$, qui à les mêmes proriétés, on peut supposer $x_1 < x_2$ et $k_1 < k$.

  La continuité de f permet d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f sur $[x_1, x_2]$:

  Pour $m \in]k_1, k_1[$, il existe un réel x tel que $f(x) = m$. En particulier pour $m = k_1 + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse. D'où le résultat.

Ex 10 Soit f une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**. la suite de terme général $x_n = x + nT$ diverge vers $+\infty$. D'après le critère séquentiel, on a donc

$$\left(f\left(x+nT\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge vers } \ell$$

Mais par périodicité, la suite de terme général $f\left(x+nT\right)$ est constante et vaut $f\left(x\right)$. D'où $f\left(x\right) = \ell$

Finalement

$$\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$$

Ex 11 Soit f une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

f est **continue** sur le **segment** $[0, T]$, donc elle y est **bornée** (par théorème) :

$$\exists M \geqslant 0 \ / \ \forall t \in [0, T], \ |f\left(t\right)| \leqslant M$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Il exite un entier n tel que $x - nT \in [0, T]$: en effet

$$0 \leqslant x - nT \leqslant T \Longleftrightarrow x - T \leqslant nT \leqslant x \Longleftrightarrow \frac{x}{T} - 1 \leqslant n \leqslant \frac{x}{T}$$

Il suffit donc de choisir $n = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$. Mais alors

$$|f\left(x\right)| = |f\left(x - nT\right)| \leqslant M$$

$$\boxed{f \text{ est donc bornée sur } \mathbb{R}} \quad \text{CQFD.}$$

Ex 12 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$ on pose $m(x) = \sup\limits_{t\in[a,x]} f(t)$.

a) Soient $x \leqslant y$ dans $[a,b]$. Alors $\forall t \in [a,x]$, on a $t \in [a,y]$, donc

$$f(t) \leqslant m(y)$$

Il en résulte $\sup\limits_{[a,x]} f \leqslant m(y)$, c'est-à-dire

$$m(x) \leqslant m(y)$$

$$\boxed{m \text{ est croissante sur } [a,b]}$$

b) Soient $x \leqslant y$ dans $[a,b]$. Alors $\forall t \in [x,y]$

$$f(t) = f(x) + (f(t) - f(x)) \leqslant m(x) + \sup_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x))$$

D'où

$$\sup_{t\in[x,y]} f(t) \leqslant m(x) + \sup_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x))$$

Par ailleurs, comme $\sup\limits_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x)) \geqslant 0$ (puisque $f(x) - f(x) = 0$), on a

$$\sup_{t\in[a,x]} f(t) \leqslant m(x) \leqslant m(x) + \sup_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x))$$

De l'égalité classique $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ on déduit

$$m(y) = \sup_{t\in[a,y]} f(t) = \max\left(\sup_{t\in[a,x]} f(t), \sup_{t\in[x,y]} f(t)\right) \leqslant m(x) + \sup_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x))$$

Ainsi

$$\boxed{m(y) - m(x) \leqslant \sup_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x))}$$

c) f est continue sur $[a,b]$. Soit $x_0 \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \alpha > 0$ /

$$\forall t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \ |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Alors si $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$,

$$0 \leqslant m(x) - m(x_0) \leqslant \sup_{t\in[x_0,x]} (f(t) - f(x_0)) \leqslant \sup_{t\in[x_0,x_0+\alpha]} (f(t) - f(x_0)) \leqslant \varepsilon$$

et si $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant m(x_0) - m(x) &\leqslant \sup_{t\in[x,x_0]} (f(t) - f(y)) \\
&\leqslant \sup_{t\in[x_0-\alpha,x_0]} (f(t) - f(x_0) + f(x_0) - f(x)) \\
&\leqslant \sup_{t\in[x_0-\alpha,x_0]} |f(t) - f(x_0)| + \sup_{t\in[x_0-\alpha,x_0]} |f(x_0) - f(x)| \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to x_0} m(x) = m(x_0)$ et

$$\boxed{m \text{ est continue sur } [a,b]}$$

d) On suppose f lipschitzienne sur $[a,b]$. Alors

$$\exists k \geqslant 0 \ / \ \forall (x,y) \in [a,b]^2 , \ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

Donc si $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$,

$$0 \leqslant m(y) - m(x) \leqslant \sup_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x)) \leqslant \sup_{t\in[x,y]} |f(t) - f(x)| \leqslant k \sup_{t\in[x,y]} |t - x| = k|y - x|$$

Donc m est aussi k-lipschitzienne.

Ex 13 Déterminons les fonctions f continues en 0 telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)\ \ (*)$

– **Analyse** : soit f une telle fonction.

i. $(*)$ appliquée au couple $(0,0)$ donne $\underline{f(0) = 0}$.

ii. $(*)$ appliquée au couple $(x, -x)$ donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, d'où f est impaire.

iii. soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x) \quad H(n)$

· $H(0)$ est vraie (cf. a)).

· Si $n \in \mathbb{N}$ et $H(n)$ est vraie, alors $f((n+1)x) \overset{(*)}{=} f(nx) + f(x) \overset{H(n)}{=} (n+1)x$, d'où $H(n+1)$

iv. On pose $a = f(1)$. Alors d'après (iii) (avec $x = 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = an \quad \mathcal{A}(n)$$

v. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(-n) = -f(n) = -an = a(-n)$. Donc $H(-n)$ est vraie.

$\mathcal{A}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

vi. Soit $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $f(qx) = f(p)$. Mais avec (iii) et (v), cela donne

$$qf(x) = ap \quad \text{soit} \quad f(x) = a\frac{p}{q} = ax$$

$\mathcal{A}(x)$ est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

vii. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$: si $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall h \in \mathbb{R}$

$$f(a+h) \overset{(*)}{=} f(a) + f(h)$$

Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = f(0) \overset{\text{(i)}}{=} 0$, d'où $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, qui assure la continuité de f en a.

viii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Mais comme f est continue en x, le critère séquentiel donne

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{soit} \quad \lim_{n \to +\infty} ax_n = f(x) \quad \text{ou encore} \quad ax = f(x)$$

Finalement on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax}$$

– **Synthèse** : si $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto ax$ est bien continue en 0 et vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

– **Conclusion** : les fonctions répondant au problèmes sont les fonctions linéaires, i.e. de la forme

$$\boxed{f : x \mapsto ax, \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$$

Ex 14 Trouvons toutes les fonctions continues en 0 et en 1 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x^2\right) = f(x) \quad (*)$.

Analyse : supposons que f soit solution du problème.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) \overset{(*)}{=} f\left((-x)^2\right) = f\left(x^2\right) = f(x)$ donc f est paire.

Fixons $x > 0$. Alors la relatio $(*)$ s'écrit aussi

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

Montrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) \quad H(n)$

- $H(0)$ est une évidence.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $H(n)$ est vraie, alors

$$f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) \overset{(*)}{=} f\left(\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right)$$

  d'où $H(n+1)$ est vraie.

Or la suite $\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(e^{\frac{\ln x}{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, la **continuité** en 1 de f et le critère séquentiel donnent

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

Il s'ensuit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et **par parité** sur $\mathbb{R}^*$:

$$\exists K \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = K$$

On passe à la limite quand $x \to 0$. La continuité de f en 0 assure $f(0) = K$.

finalement f est constante sur $\mathbb{R}$

Synthèse : il est clair que les fonctions constantes répondent au problème.

Conclusion :

$$\boxed{\text{seules les fonctions constantes répondent au problème}}$$

.

Ex 15 On se propose de décrire toutes les fonctions continues en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos x\ \ (*)$.

a) Soit f une telle fonction et $x \in \mathbb{R}^*$. en substituant $\frac{x}{2}$ à x dans $(*)$:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

puis successivement

$$f(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\dots$$

Par récurrence, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \qquad H(n)$$

* $H(1)$ a été vue
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $H(n)$ est vraie, alors

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \overset{(*)}{=} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

d'où $H(n+1)$ est vraie.

Supposons que $x \notin A = \{2^p k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\}$. Alors de la formule

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sin\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sin\left(\frac{2x}{2^{k+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

et du fait que $\sin\frac{x}{2^k} \neq 0$ puisque $\frac{x}{2^k} \neq 0\ \ [\pi]$ on tire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)} \overset{\text{télesc.}}{=} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \qquad (\heartsuit)$$

En revanche si $x \in A$, i.e $\exists (p,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\ /\ \frac{x}{2^p} = k\pi$, alors on peut supposer k impair (quitte à diviser par 2 et incrémenter p). Donc $\cos\frac{x}{2^{p+1}} = \cos\frac{k\pi}{2} = 0$ et

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^{p+1}}\right)\prod_{k=1}^{p+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0$$

b) On suppose $x \notin A$. On passe à la limite quand n tend vers 0 dans la formule $(\heartsuit)$:

* $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$ par continuité de f en 0 et critère séquentiel
* $2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\frac{x}{2^n} = x \neq 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin x}{x}$

Ainsi

$$\boxed{f(x) = f(0)\frac{\sin x}{x}}$$

Si $x \in A$, alors $x = 0\ \ [\pi]$ donc $\sin x = 0$ et on a vu que $f(x) = 0$. La formule précédente reste donc vraie.

Synthèse : soit $a \in \mathbb{R}$, et f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \neq 0,\ f(x) = a\frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad f(0) = a$$

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et de plus si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(2x) = a\frac{\sin(2x)}{2x} = a\frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x} = a\frac{\sin(x)}{x}\cos(x) = f(x)\cos(x)$$

Formule évidemment vraie pour $x = 0$.

Conclusion : les fonctions répondant au problème sont de la forme

$$\boxed{f : x \mapsto \begin{cases} a\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{sinon} \end{cases},\ \text{avec } a \in \mathbb{R}}$$

Ex 16 Bijections et continuité

a) Montrons que la réciproque d'une bijection strictement monotone est strictement monotone de même sens.

Traitons le cas où $f : I \to J$ est bijective strictement croissante :

Si $y < y'$ sont dans J, montrons que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$: **par l'absurde**, sinon on aurait

$$f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y') \Longrightarrow f\left(f^{-1}(y)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(y')\right) \Longrightarrow y \geqslant y' \text{ contradiction}$$

Le cas où f est strictement décroissante se traite de la même manière.

b) On suppose $f : I \to J$ continue et bijective. Montrons que f est strictement monotone sur I.

f monotone signifie que si $a < b < c$ sont dans I, alors $f(b) - f(a)$ et $f(c) - f(b)$ ont même signe.

Si donc f n'était pas strictement monotone sur I, on aurait trois éléments de I, soit $a < b < c$ tels que

$$\begin{cases} f(a) < f(b) \\ f(c) < f(b) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(a) > f(b) \\ f(c) > f(b) \end{cases} \quad \text{(les inégalités sont strictes car } f \text{ est injective)}$$

Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change pas les hypothèses, on peut ne traiter que le premier cas :

Soit m un réel strictement inférieur à $f(b)$ et strictement supérieur à $\max(f(a), f(c))$.

On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f (continue) entre a et b puis entre a et c :

$$\exists x_1 \in \left]a, b\right[\text{ et } \exists x_2 \in \left]a, b\right[\ / \ f(x_1) = f(x_2) = m$$

ce qui contredit l'injectivité de f. Le résultat est donc démontré.

c) On suppose f strictement monotone sur I et que $f(I)$ est un intervalle. Montrons que f est continue sur I.

Soit x_0 un point de I qui ne soit pas une borne de I (on dit que x_0 est *intérieur* à I).

f est croissante sur $I \cap \left]-\infty, x_0\right[$ et elle est majorée par $f(x_0)$, donc $\lim\limits_{x_0^-} f$ existe et vaut $\ell_- = \sup\limits_{I \cap]-\infty, x_0[} f$.

On a par croissance de f : $\ell_- \leqslant f(x_0)$ (puisque $f(x_0)$ majore tous les $f(x)$ pour $x < x_0$).

Par l'absurde, si $\ell_- < f(x_0)$, alors soit $m \in \left]\ell_-, f(x_0)\right[$: on a

$$\forall x \in I \cap \left]-\infty, x_0\right[, \ f(x) \leqslant \ell_- < m \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap \left[x_0, +\infty\right[, \ f(x) \geqslant f(x_0) > m$$

Ce qui signifie que $m \notin f(I)$.

Mais si $x \in I \cap \left]-\infty, x_0\right[$, alors $\begin{cases} f(x) \in f\langle I \rangle \\ f(x_0) \in f\langle I \rangle \end{cases}$, et donc $[f(x), f(x_0)] \subset f\langle I \rangle$ (cf. caractérisation des intervalles). Cela est évidemment contradictoire puisque $m \in [f(x), f(x_0)]$.

Ainsi $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$, i.e. f est continue à gauche en x_0.

Un raisonnement parfaitement symétrique montre qu'elle est aussi à droite, donc continue sur x_0.

De même, si x_0 est une borne de I, un des deux raisonnements précédents prouve que f est continue en x_0.

Au total

$$\boxed{f \text{ est continue sur } I}$$

d) Soit donc $f : I \to J$ une bijection continue.

D'après b), f est strictement monotone, donc d'après a) f^{-1} est strictement monotone.

Mais $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle, donc d'après c), f^{-1} est continue sur J. Ainsi

$$\boxed{\text{la réciproque de la bijection continue } f \text{ est continue sur } J}$$

Ex 17 On suppose f continue sur $[a,b]$. On veut établir que f est bornée sur $[a,b]$.
Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, on définit les suites (a_n) et (b_n) de $[a,b]$ par récurrence :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b$$

et si $a_n \leqslant b_n$ sont construits, on pose $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = m_n \text{ si } f \text{ et non bornée sur } [a_n, m_n] \\ a_{n+1} = m_n \text{ et } b_{n+1} = b_n \text{ sinon} \end{cases}$$

On établit facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant m_n \leqslant b_n$$

et

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Il vient aussi par construction que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.
(a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $\ell \in [a,b]$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

De plus, par récurrence aussi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f \text{ est non bornée sur } [a_n, b_n]}$$

- C'est l'hypothèse pour $n = 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si c'est vrai pour $[a_{n,}b_n]$, alors f est non bornée sur un des deux intervalles $[a_n, m_n]$ et $[m_n, b_n]$.
  - Si $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$ alors f est non bornée sur $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ par construction.
  - Si $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$, elle est bornée sur $[a_n, m_n]$, donc non bornée sur $[m_n, b_n] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Or la continuité en ℓ entraine l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha]\ ,\ f(\ell) - 1 \leqslant f(x) \leqslant f(\ell) + 1$$

Mais il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in [\ell - \alpha, \ell]$ et $b_{n_0} \in [\ell, \ell + \alpha]$, d'où

$$[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$$

Mais alors, f n'étant pas bornée sur l'intervalle $[a_{n_0}, b_{n_0}]$,

$$\exists x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]\ /\ f(x) > f(\ell) + 1 \quad \text{contradiction}$$