Ex 1 Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n\sqrt{n}}\right)$

b) $u_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)} - 1$

c) $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$

d) $u_n = \dfrac{\arctan n}{n^2}$

e) $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

f) $u_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ $\quad (-b \notin \mathbb{N})$

g) $u_n = \ln\cos\dfrac{1}{n}$

h) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (majorer convenablement)

i) $u_n = \dfrac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$

j) $u_n = \arccos\dfrac{n}{n+1}$ (rappel : $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$)

k) $u_n = \dfrac{a^n}{b^n + n}$, en discutant sur $a > 0,\ b > 0$

l) $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ (comparer à une intégrale)

m) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$

n) $u_n = \displaystyle\int_{n}^{2n} \frac{dt}{1 + t\sqrt{t}}$

Ex 2 Montrer que $\left(2+\sqrt{3}^n\right) + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in 2\mathbb{N}$ et en déduire la nature de $\sum \sin\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$

Ex 3 On admet que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (cf critère des séries alternées).
Montrer que $\sum \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}\right)$ est convergente mais non absolument convergente.

Ex 4 On admet que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (cf critère des séries alternées).
A l'aide d'un développement asymptotique, montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ diverge.

Ex 5 Soit (u_n) une suite positive. Montrer que la convergence d'une des séries suivantes entraine celle des autres :

$$\sum u_n, \quad \sum \frac{u_n}{1+u_n}, \quad \sum \ln(1+u_n)$$

Ex 6 Montrer que les séries suivantes converge et calculer leur somme :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ (fraction rationnelle) b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Ex 7 Soit $x \in \left]0,1\right[$. A l'aide de la fonction $t \to \dfrac{1}{1-t}$, montrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum n x^{n-1}, \quad \sum n x^n, \quad \sum n(n-1)x^n, \quad \sum n^2 x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{n^2 - (-1)^n}{3^n}$$

Ex 8 Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum \frac{n^2+n-1}{n!}, \quad \sum \frac{n^3+1}{n!}$$

Indication : décomposer les polynômes sur la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$

Ex 9 Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
Etudier la suite (u_n) et déterminer la nature de la série $\sum u_n$

Ex 10 Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $\delta_n = u_n - u_{n+1}$ soit croissante.
En considérant la série $\sum \delta_n$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n \leqslant 0$, et en déduire que (u_n) est convergente

Ex 11 Soit f une fonction continue positive décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On pose si $n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f - f(n)$.
Montrer que $\sum w_n$ converge.

Ex 12 Séries de Bertrand :

a) Déterminer en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln^{\beta} n}$ (comparer à une intégrale)

b) Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$ ("règle du n^{α}")

Ex 13 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{n-a}{n-b}\, u_n$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{N})^2$.

a) On pose $v_n = n^{\alpha} u_n$. Calculer α pour que $\ln(n^{\alpha} u_n)$ converge vers un réel λ.
On pourra faire un développement limité de $\ln v_{n+1} - \ln v_n$.

b) En déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b > 1$, ce qu'on supposera au c) :

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, u_{n+1} - n u_n = (b+1)\, u_{n+1} - a u_n$ et en déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ex 14 Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

a) Soit $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k$. Calculer $\lim r_n$ et comparer $2n u_{2n}$ et r_n. En déduire que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b) Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\,(u_n - u_{n+1})$ converge et que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n \geqslant 1} n\,(u_n - u_{n+1})$

c) Soit $p \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n\,(n+1) \cdots (n+p)}$.
Montrer que $\sum u_n$ converge et déduire du b) la valeur de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$

Ex 15 Critère des séries alternées : soit a_n une suite positive décroissante et de limite nulle
On considère la série $\sum (-1)^n a_n$, et on note (S_n) la somme partielle de cette série.

a) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que $\sum (-1)^n a_n$ converge

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leqslant a_{n+1}$

c) Etablir la convergence de $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, puis avec $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$

Ex 16 Critère de d'Alembert : soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite strictement positive telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

a) On suppose que $\ell < 1$. On considère $q \in]\ell, 1[$. Montrer qu'$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant q u_n$.
En déduire que $\sum u_n$ converge

b) On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $u_{n+1} \geqslant u_n$. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

c) Applications : nature des séries $\sum \dfrac{x^n}{n!}$, $\sum \dfrac{n!}{n^n}$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ $(x > 0)$

Ex 17 Règle de Duhamel* (cas où $\ell = 1$ dans le critère de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Ex 18 Soient (u_n) et (v_n) des suites positives telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.
On note S_n et S'_n leurs sommes partielles.

a) On suppose que $u_n = o(v_n)$. Montrer $S_n = o(S'_n)$

b) On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer $S_n \sim S'_n$

Ex 19 Développement décimal :

a) Montrer que tout réel x s'écrit sous la forme $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{10^n}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n \in [\![0, 9]\!]$

b) Montrer que $0,999\ldots = 1$. Que penser de l'unicité de l'écriture décimale?

c) On suppose que la suite (a_n) est stationnaire. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$.