Continuité-Dérivation

1. Continuité

I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1. Définitions

a) Continuité en un point : soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

$$\boxed{\text{On dit que } f \text{ est } \textbf{continue en } a \text{ si } \lim_a f = f(a).}$$

Exemple : la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

b) Continuité globale : $\boxed{\text{on dit que } f \text{ est } \textbf{continue sur } I \text{ lorsqu'elle est continue en tout point de } I}$.

On notera $C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Exemple 1 : $\ln \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$: $\ln$ est continue (ou de classe C^0) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 2 : $\mathrm{inv} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est néanmoins pas un intervalle).

c) Prolongement par continuité : soit f une fonction continue sur $I \backslash \{a\}$, non définie en a.

On suppose que $\lim_a f = \ell$. Alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ \tilde{f}(a) = \ell \end{cases} \quad \text{est continue sur } I.$$

On dit que f **se prolonge par continuité en** a, ou que $\tilde{f}$ est **le prolongement par continuité de** f **en** a.

Remarque : dans la pratique, on note souvent f plutôt que $\tilde{f}$.

Exemple 1 : $f : x \to \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ se prolonge par continuité en 2 en posant $f(2) =$

Exemple 2 : $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) =$

Exemple 3 : $f : x \to x \ln x$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) =$

d) Continuité à droite, à gauche : si $\lim_{a+} f = f(a)$, on dit que f est **continue à droite en** a (idem à gauche).

Exemple 1 : la fonction partie entière est continue à droite sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 : $f(x) = e^{1/x}$ se prolonge par continuité à gauche en 0 en posant $f(0)$

1.2. Opérations sur les fonctions continues

a) Sommes et produits et quotients :

Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$ et fg aussi.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I

b) Composées :

(i) Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, la **composée** de g et de f est la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \ \boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Autrement dit on prend l'image de x par f, puis l'image par g de $f(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

(ii) si f est continue sur J, u continue sur I à valeurs dans J, alors $f \circ u$ est continue sur I

Exemple : $x \to \sqrt{1-e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}_-$.

c) Continuité de la réciproque :

si f continue réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, alors f^{-1} est continue sur J

d) Utilisation : les fonctions suivantes sont continues sur leurs intervalles de définition :

- Les polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction valeur absolue.
- Les fonctions $\cos, \sin, \tan, \ln, \exp, x \mapsto a^x, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}, \arcsin, \ \arccos, \ \arctan$
- Les fonctions $x \to x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$. En particulier $x \to \sqrt{x}$

La plupart du temps, la continuité des fonctions s'étudie en utilisant les opérations sur les fonctions usuelles (ou **théorèmes généraux**) :

Exemple 1 : $f : x \to \dfrac{\mathrm{th}\, x \sin\left(e^{x^2}\right)}{e^{2x}+e^x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 : soit $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Alors est continue sur $\mathbb{R}$:

2. Rappels et compléments sur la dérivation

I désignera un intervalle non réduit à un point.

2.1. Définitions

a) Dérivation :

(i) Dérivée en un point : on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable en** $a \in I$ lorsque le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a : on note alors :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

(ii) Fonction dérivée : lorsque f est dérivable en tout point de I, on dit que f est **dérivable sur** I, et on note :

$$\begin{array}{rl} f' : & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) \end{array} \qquad \text{appelée } \textbf{fonction dérivée} \text{ de } f \text{ sur } I$$

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x \neq 0$

Notation : on notera $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I (par exemple $\arcsin \in \mathcal{D}(]-1,1[)$).

b) Lien avec la tangente : on suppose f dérivable en a.

(i) Si $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$, le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la droite (AM).

En "passant à la limite", on montre que

$$\boxed{f'(a) \text{ est la pente de la tangente } (T_a) \text{ à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ au point d'abscisse } a.}$$

(ii) Equation de (T_a) : c'est la droite de pente $f'(a)$ passant par $A(a, f(a))$ et dirigée par $\vec{d}(1, f'(a))$

$$\boxed{(T_a) \quad y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

(iii) $\boxed{\text{Si } \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty, \text{ alors } \mathcal{C}_f \text{ présente une tangente verticale } A(a, f(a))}$.

Exemple : $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Remarque : **approximation affine**. Soit f est dérivable en a

Pour x "au voisinage de a", on a l'approximation $f(x) \simeq f(a) + (x - a) f'(a)$. Mais à quelle précision?

En posant $x = a + h$, on a donc pour h "petit" : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$. La suite nous permettra de "controler" cette approximation.

Par exemple, si $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 4$, $h = 10^{-3}$ quelle approximation de $\sqrt{4,001}$ obtient-on?

c) Dérivées à droite et à gauche : si ces limites existent, on note :

$$\boxed{f'_d(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{et} \quad f'_g(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

et on dit que f est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) en a. On a alors

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ est dérivable à gauche et à droite et } f'_d(a) = f'_g(a)}$$

Exemple : $f : x \to \sin|x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0

d) **Fonctions de classe C^1 :**

$$\boxed{\text{On dit que } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ lorsque } \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ f' \text{ est continue sur } I \end{cases}}$$

L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I se note $C^1(I, \mathbb{R})$.

Exemple 1 : $\ln \in C^1(]0, +\infty[)$.

Exemple 2 : $f : x \to \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est dérivable mais pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

2.2. Propriétés des dérivées

a) **Continuité :** $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable sur } I\text{, alors } f \text{ est continue sur } I}$.

LA RECIPROQUE EST FAUSSE (cf. $f : x \to |x|$)

b) **Linéarité-Produit :** soient f et g dérivables sur I. Alors :

(i) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable et $\boxed{(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'}$

(ii) fg est dérivable et $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$

c) **Composée :**

(i) Théorème :

> Si $f : J \to \mathbb{R}$ est dérivable sur J, $u : I \to J$ est dérivable sur I, alors $f \circ u$ est dérivable sur I et
>
> $$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \frac{d}{dx}\left(f(u(x))\right) = u'(x) \times f'(u(x))}$$

Remarque : les physiciens écrivent : "$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du} \times \dfrac{du}{dx}$".

Exemple : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et f dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(ax + b)\right] = af'(ax + b)}$$

En particulier

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(-x)\right] = -f'(-x)}$$

(ii) Cas particuliers :

– Si u est dérivable sur I et strictement positive sur I, alors

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha - 1}}$$

Par exemple

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)' = -\frac{u'}{u^{\alpha+1}}}$$

– Si u est dérivable et non nulle sur I alors

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}}$$

– Pour tout u dérivable sur I, on a

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u} \quad \text{et} \quad \boxed{(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}}$$

– Si u est dérivable sur I à valeurs dans $]-1,1[$, alors

$$\boxed{(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

d) Dérivée d'une réciproque :

> Soit f une bijection dérivable de I sur J (intervalles). On suppose que f' ne s'annule pas sur I
>
> Alors f^{-1} est dérivable sur J et $\forall x \in J,\quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

On a ainsi la formule (pour f' ne s'annulant pas sur I) :

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Exemple : calculer la dérivée de $\ln$ connaissant celle de $\exp$, de $x \to \sqrt[3]{x}$ connaissant celle du cube

Remarque : on retrouve ce résultat en dérivant l'égalité $\forall x \in J,\ f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

2.3. Résultats fondamentaux (provisoirement admis) :

Soit I un **intervalle**, f une fonction continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ (intervalle ouvert de mêmes bornes que I)

a) $\boxed{f \text{ est constante sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = 0}$

Attention : ce théorème est faux si I n'est pas un intervalle :
Par exemple la fonction partie entière sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $x \to \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

b) $\boxed{f \text{ est croissante sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geqslant 0}$ (même chose pour f décroissante)

Exemple : $f : x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$ car sa dérivée est positive sur $]0,+\infty[$.

Attention : même avertissement qu'au a) si I n'est pas un intervalle (cf. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$)

c) $\boxed{\text{SI } \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) > 0, \text{ ALORS } f \text{ est strictement croissante sur } I}$

Remarque 1 : la **réciproque est fausse** : cf. $f : x \to x^3$

Remarque 2 : f' peut s'annuler aux bornes de I sans que le théorème soit en défaut (cf. $\cos$ sur $[0,\pi]$)

Généralisation : si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante sur I.

3. Dérivées d'ordre supérieur

3.1. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

a) Dérivées n-ièmes : si ces fonctions existent, on note : $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$...

Plus généralement on définit par récurrence **la dérivée d'ordre de** n **de** f sur I par

$$\boxed{f^{(0)} = f} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \boxed{f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'}$$

Notations : $f^{(n)}$ se note aussi $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$
On notera $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.

b) Fonctions de classe C^n : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On dit que } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \text{ lorsque } \begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } I \end{cases}}$$

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Remarque : soit f dérivable sur I : alors $\boxed{f \in \mathcal{C}^n(I) \Longleftrightarrow f' \in \mathcal{C}^{n-1}(I)}$.

Exemple : on pose $\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ f(x) = -x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais pas $\mathcal{C}^2$.

c) Fonction indéfiniment dérivables : lorsque $f^{(n)}$ existe pour tout entier n, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I

On a

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^2(I) \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)}$$

Exemples : $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\ln \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

3.2. Propriétés

a) Linéarité :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } (f, g) \in \mathcal{C}^n(I)^2 \text{ et } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{ alors } \lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I), \text{ et} \\ (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}\end{array}}$$

en particulier toute combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞ sur I est C^∞ sur I

b) Produit : formule de Leibniz :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } (f, g) \in \mathcal{C}^n(I)^2, \text{ alors } fg \in \mathcal{C}^n(I) \text{ et} \\ (fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\end{array}}$$

En particulier le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2 e^x$: calculer $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Composée :

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R}) \text{ et } u \in \mathcal{C}^n(I, J), \text{ alors } f \circ u \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I}$$

En particulier la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est $\mathcal{C}^\infty$.

d) Réciproque :

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathcal{C}^n(I, J) \text{ est bijective } \textbf{et si } f' \textbf{ ne s'annule pas sur } I, \text{ alors } f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, I)}$$

En particulier, la réciproque d'une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de I sur J dont la dérivée ne s'annule pas est $\mathcal{C}^\infty$ sur J

e) Fonctions usuelles : les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition :

- Les polynômes et les fractions rationnelles, les fonctions puissance ($x \mapsto x^\lambda$ sur $]0, +\infty[$)
- $\exp, \ln, \sin, \cos, \tan, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \operatorname{th}, \arctan$ les exponentielles et logarithmes de base a.
- $\arcsin$ et $\arccos$ sur $]-1, 1[$