Ex 1 Soit $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ F(p, q) = \dfrac{p}{q}$

a) Les couples $(1, 1)$ et $(2, 2)$ ont la même image $F(1, 1) = f(2, 2) = 1$ donc F n'est pas injective.
Le réel $\sqrt{2}$ n'admet aucun antécédent par F (sinon il existerait un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ / $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et $\sqrt{2}$ serait rationnel). F n'est donc pas non plus surjective.

b) Les antécédents de 0 par F sont les couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{p}{q} = 0$. Autrement dit

$$\boxed{F^{-1}(\{0\}) = \{(0, q)\,,\ q \in \mathbb{N}^*\}}$$

De même les antécédents de 1 par F sont les couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{p}{q} = 1$. Autrement dit

$$\boxed{F^{-1}(\{1\}) = \{(p, p)\,,\ p \in \mathbb{N}^*\}}$$

c) L'"image de F", soit $F(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, est l'ensemble des réels qui ont un antécédent par F, soit

$$\boxed{F(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) = \left\{\frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\} = \mathbb{Q}}$$

Ex 2 L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ **est surjective**, car on sait que tout complexe $A \neq 0$ peut s'écrire $A = \exp(z)$, avec par exemple $z = |A| + i \operatorname{Arg}(A)$, mais elle **n'est pas injective** (car 0 et $2i\pi$ ont la même image : 1).

Ex 3 Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array}$

a) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

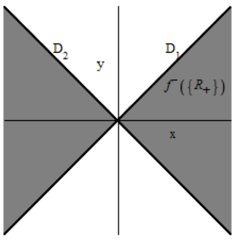
$$\varphi(x, y) = 0 \Longleftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \text{ ou} \\ x = -y \end{array} \right.$$

$\varphi^{-1}(\{0\}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 = 0\right\}$ est donc la réunion des deux droites $D_1 : x = y$ et $D_2 : x = -y$.

b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x, y) \in \varphi^{-1}\langle \mathbb{R}_+ \rangle \Longleftrightarrow (x - y)(x + y) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leqslant x \text{ et } y \geqslant -x \quad \text{ou} \\ y \geqslant x \text{ et } y \leqslant -x \end{array} \right.$$

Cet ensemble s'interprète géométriquement comme la réunion de deux quarts de plans délimités par D_1 et D_2.



Ex 4 On considère les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(n) = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ g(n) = \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

– Injectivité de f : il est clair que si $f(n) = f(m)$, alors $2n = 2m$ et $n = m$: f est **injective**.
– Injectivité de g : $g(4) = 2 = g(5)$: g **n'est pas injective**.
– Surjectivité de f : les images d'entiers par f sont paires, donc 3 n'a pas d'antécédent par f, **non surjective**.
– Surjectivité de g : tout entier m peut s'écrire $m = g(n)$, avec $n = 2m$, donc f est **surjective**.
– Calcul de $f \circ g$: $\forall n \in \mathbb{N},\ f \circ g(n) = 2\frac{n}{2} = n$ si n est pair et $f \circ g(n) = 2\frac{n-1}{2} = n - 1$ si n est impair.
– Calcul de $g \circ f$: $\forall n \in \mathbb{N},\ g \circ f(n) = g(2n) = n, \quad i.e \quad \boxed{g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}}$.

Ex 5 Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}\ /\ \left\{\begin{array}{l} f(n)=\dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ f(n)=-\dfrac{n+1}{2} \text{ sinon}\end{array}\right.$

- $\underline{f \text{ est injective}}$: en effet, si m et n sont deux entiers naturels vérifiant $f(m)=f(n)$, alors m et n ont même parité, car sinon leurs images par f seraient de signe opposé. Mais alors (suivant cette parité)
$$\frac{m}{2}=\frac{n}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{m+1}{2}=-\frac{n+1}{2}$$
Dans les deux cas $m=n$ CQFD.
- $\underline{f \text{ est surjective}}$: en effet si $N\in\mathbb{Z}$:
  - ∗ Si $N\geqslant 0$, $n=2N\geqslant 0$ est un antécédent de N par f ($f(2N)=N$)
  - ∗ Si $N<0$, $n=-(2N+1)\geqslant 0$ est un antécédent de N par f ($f(-2N-1)=N$)

  Tout entier admet donc un antécédent par f dans $\mathbb{N}$, CQFD.

Ex 6 a) Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y,2x+y)\end{array}$.

Montrons que f est injective : si (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$ vérifient $f(x,y)=f(x',y')$, alors
$$\left\{\begin{array}{l} x+y=x'+y' \\ x-y=x'-y' \\ 2x+y=2x'+y'\end{array}\right.$$
En ajoutant puis en retranchant les deux premières égalités, on obtient directement $\left\{\begin{array}{l} x=x' \\ y=y'\end{array}\right.$ CQFD.

Calculons l'image $f\langle D\rangle$ de la droite D de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x+y=1$:

Paramétrons D : ses éléments sont les couples de la forme $(t,1-t)$, où t parcourt $\mathbb{R}$. Donc
$$\begin{array}{rcl} f\langle D\rangle & = & \{f(x,y),\ (x,y)\in D\} \\ & = & \{f(t,1-t),\ t\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{(1,-1+2t,1+t),\ t\in\mathbb{R}\}\end{array}$$
Ainsi
$$\boxed{f\langle D\rangle \text{ est la droite de } \mathbb{R}^3 \text{ paramétée par } \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1+2t \\ z=1+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}}$$
On remarque qu'on peut la décrire avec les équations $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y-2z=-3\end{array}\right.$

b) Soit $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z,3x+2y+5z)\end{array}$

Montrons que g est surjective : si (a,b,c) est fixé dans $\mathbb{R}^3$, cherchons $(x,y,)\in\mathbb{R}^3$ tel que $g(x,y,z)=(a,b)$. Cela revient à trouver une solution du système :
$$(S):\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=a \\ 3x+2y+5z=b\end{array}\right.$$
En fixant $z=0$, le système résultant est
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=a \\ 3x+2y=b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2a-b \\ y=-3a+2b\end{array}\right. \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} L_1\leftarrow 2L_1-L_2 \\ L_2\leftarrow -3L_1+2L_2\end{array}\right.$$
Le triplet $(2a-b,-3a+2b,0)$ est donc bien solution de (S), d'où la surjectivité de g.

Calculons l'image $f\langle P\rangle$ du plan P d'équation $x+y+6z=1$: soit $(a,b)\in f\langle P\rangle$: alors

$$\exists\,(x,y,z)\in P\ /\ \left\{\begin{array}{l}2x+y-z=a\\ 3x+2y+5z=b\end{array}\right.$$

Mais alors la différence de ces deux égalités donne

$$b-a=(3x+2y+5z)-(2x+y-z)=x+y+6z=1$$

On a donc $b-a=1$, et on en déduit que $f\langle P\rangle\subset\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\ /\ b-a=1\right\}$.

Inversement, si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifie $b-a=1$, alors cherchons un antécédent de (a,b) par g dans P :

Le triplet $(2a-b,-3a+2b,0)$ trouvé plus haut, qui a pour image (a,b) par g, est par chance un élément de P (puisque $(2a-b)+(-3a+2b)+6\times 0=b-a=1$). On conclut

$$\boxed{f\langle P\rangle=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\ /\ b-a=1\right\}}$$

autrement dit

$$\boxed{f\langle P\rangle\text{ est la droite de }\mathbb{R}^2\text{ d'équation }y-x=1}$$

c) Montrer que $h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (x+2y,2x+3y)\end{array}$ est bijective et déterminer h^{-1}.

Fixons $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et résolvons l'équation (S) : $h(x,y)=(a,b)$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{l}x+2y=a\\ 2x+3y=b\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=-3a+2b\\ y=2a-b\end{array}\right.\quad\text{avec}\ \left\{\begin{array}{l}L_1\leftarrow -3L_1+2L_2\\ L_2\leftarrow 2L_1-L_2\end{array}\right.$$

Ainsi h est bijective et

$$\boxed{h^{-1}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (-3x+2y,2x-y)\end{array}}$$

Ex 7 On note $U=\left]0,+\infty\right[^2$, et $f:\begin{array}{ccc}U & \to & U\\ (x,y) & \mapsto & \left(xy,\frac{y}{x}\right)\end{array}$.

Fixons $(u,v)\in U$, et résolvons l'équation (S) : $f(x,y)=(u,v)$ d'inconnue $(x,y)\in U$:

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{l}xy=u\\ x/y=v\end{array}\right.$$

En effectuant successivement le produit et le quotient des deux équations :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{l}x^2=uv\\ y^2=u/v\end{array}\right.\overset{u,v,x,y>0}{\iff}\left\{\begin{array}{l}x=\sqrt{uv}\\ y=\sqrt{u/v}\end{array}\right.$$

Ainsi f est bijective et

$$\boxed{f^{-1}:\begin{array}{ccc}U & \to & U\\ (x,y) & \mapsto & \left(\sqrt{xy},\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\end{array}}$$

Ex 8 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1+ix}{1-ix}$.

a) i. Injectivité de f : soient x et x' dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)=f(x')$: alors

$$\begin{aligned}\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{1+ix'}{1-ix'} &\iff (1+ix)(1-ix')=(1+ix')(1-ix)\\ &\iff i(x-x')=i(x'-x)\\ &\iff x'=x\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\boxed{f \text{ est injective}}$

ii. Surjectivité de f : il est clair que f n'est jamais nulle, donc 0 n'admet pas d'antécédent par f dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

b) i. Calcul de $f^{-1}(\mathbb{R})$: soit $x\in\mathbb{R}$. On a, sachant que $f(x)=\dfrac{(1+ix)^2}{1+x^2}$,

$$x\in f^{-1}(\mathbb{R})\iff f(x)\in\mathbb{R}\iff\frac{1-x^2+2ix}{1+x^2}\in\mathbb{R}\iff x=0$$

Ainsi

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R})=\{0\}}$$

ii. Calcul de $f(\mathbb{R})$: si $x\in\mathbb{R}$ alors $|f(x)|=\dfrac{|1+ix|}{|1-ix|}=1$. Donc $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{U}$.

Inversement, si $z\in\mathbb{U}$, posons $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$, et résolvons $f(x)=z$:

$$\frac{1+ix}{1-ix}=z\iff i(z+1)x=z-1$$

- Si $z=-1$, alors z n'a aucun antécédent par f dans $\mathbb{R}$
- Sinon, $f(x)=z$ admet l'unique solution $x=\dfrac{z-1}{i(z+1)}$. Reste à voir qu'elle est réelle :

$$x=\frac{e^{i\theta}-1}{i\left(e^{i\theta}+1\right)}=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}}{2i\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}}=\tan\frac{\theta}{2}\in\mathbb{R}$$

Ainsi $z\in f(\mathbb{R})$, et on peut conclure

$$\boxed{f=\mathbb{U}\backslash\{-1\}}$$

Ex 9 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

a) Il est clair que $\underline{f \text{ n'est pas injective}}$ puisque $f(i) = f(-i) = 0$. Montrons qu'elle est surjective :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrons qu"il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) = a$: on a

$$f(z) = a \iff z^2 - az + 1 = 0$$

On sait que cette équation du second degré complexe admet toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}^*$ (le produit de ses deux racines vaut 1), ce qui établit la surjectivité de f.

b) Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Calculons $f(\mathbb{U})$.

* Soit $z \in \mathbb{U}$. On peut écrire $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Mais alors $f(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \in [-2, 2]$
  Donc $\underline{f(\mathbb{U}) \subset [-2, 2]}$.

* Inversement si $x \in [-2, 2]$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = 2\cos\theta$ (il suffit de prendre $\theta = \arccos \dfrac{x}{2}$).
  Donc $x = e^{i^\theta} + e^{-i\theta}$. En posant $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, il vient $x = f(z) \in f(\mathbb{U})$.
  Donc $\underline{[-2, 2] \subset f(\mathbb{U})}$.

* Par double inclusion, on a ainsi $\boxed{[-2, 2] = f(\mathbb{U})}$

c) Soit $\mathbb{J} = i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs. Déterminons la préimage de $\mathbb{J}$ par f :

* Soit $z \in f^{-1}(\mathbb{J})$: alors $f(z) \in \mathbb{J}$, donc il existe un réel x tel que

  $$f(z) = ix \iff z^2 - ixz + 1 = 0$$

  Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = -x^2 - 4 < 0$, d'où

  $$z = \frac{1}{2}\left(ix + i\sqrt{x^2+4}\right) = \frac{i}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) \in \mathbb{J} \quad \text{ou} \quad z = \frac{i}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4}\right) \in \mathbb{J}$$

  Dans les deux cas $z \in \mathbb{J}\setminus\{0\}$. On en déduit $\underline{f^{-1}(\mathbb{J}) \subset \mathbb{J}\setminus\{0\}}$.

* Inversement, si $z \in \mathbb{J}\setminus\{0\}$, alors $\exists x \in \mathbb{R}^* \ / \ z = ix$. Alors

  $$f(z) = ix + \frac{1}{ix} = ix - \frac{i}{x} = i\left(x - \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{J}$$

  Il s'ensuit : $\underline{\mathbb{J}\setminus\{0\} \subset f^{-1}\langle\mathbb{J}\rangle}$.

* Par double inclusion, on peut conclure $\boxed{\mathbb{J}\setminus\{0\} = f^{-1}(\mathbb{J})}$

Remarque : autre méthode (directe) : si $z \neq 0$:

$$z \in f^{-1}(\mathbb{J}) \iff f(z) \in \mathbb{J} \iff \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\left(z + \frac{1}{z}\right) \iff \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = -z - \frac{1}{z}$$

Donc

$$z \in f^{-1}(\mathbb{J}) \iff z + \bar{z} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \iff z + \bar{z} = -\frac{z + \bar{z}}{|z|^2} \iff (z + \bar{z})\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$$

et finalement

$$z \in f^{-1}(\mathbb{J}) \iff \bar{z} = -z \iff z \in \mathbb{J}\setminus\{0\}$$

Ex 10 Soit f l'application définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ par $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$.

a) Soit $h \in \mathbb{C}$. L'équation $f(z) = h$ (d'inconnue $z \in \mathcal{D}$) s'écrit $z^2 - hz + 2ih = 0$.

b) Le discriminant de cette équation est $\Delta = h^2 - 8ih = h(h-8i)$

- Si $h \in \{0, 8i\}$, alors $f(z) = h$ admet la racine (double) $\dfrac{h}{2} \neq 2i$:
  $\underline{h \text{ admet un unique antécédent}}$.par f dans $\mathcal{D}$.
- Si $h \notin \{0, 8i\}$, Δ admet deux racines carrées complexes et $f(z) = h$ admet deux solutions distinctes.
  De plus $2i$ n'est pas solution (car $(2i)^2 - 2ih + 2ih = -4 \neq 0$).
  $\underline{h \text{ admet deux antécédents}}$ par f dans $\mathcal{D}$.

c) Tout élément de $\mathbb{C}$ admet donc au moins un antécédent par $f$dans $\mathcal{D}$. $\underline{f \text{ est surjective}}$.

Mais un complexe autre que 0 ou $8i$ admet deux antécédents par f dans $\mathcal{D}$. $\underline{f \text{ n'est pas injective}}$.

Ex 11 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

a) On suppose que $g \circ f$ est injective et f surjective. Montrons que g est injective :
Soit $(y, y') \in F^2$ vérifiant $g(y) = g(y')$. Par surjectivité de f :

$$\exists x \in E \ / \ y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in E \ / \ y' = f(x')$$

Si x et x' sont de tels éléments, on peut alors écrire

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{soit} \quad (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$

L'injectivité de $g \circ f$ entraine alors l'égalité $x = x'$, qui donne $f(x) = f(x')$, soit $y = y'$, CQFD.

b) On suppose que $g \circ f$ est surjective et g injective. Montrons que f est surjective.
Soit $y \in F$. On cherche $x \in E$ vérifiant $f(x) = y$.
Par surjectivité de $g \circ f$, l'élément $g(y) \in G$ admet un antécédent par $g \circ f$:

$$\exists x \in E \ / \ g(y) = (g \circ f)(x) \quad \text{soit} \quad g(y) = g(f(x))$$

Si $x \in E$ est un tel élément, on a alors par injectivité de g :

$$y = f(x) \quad \text{CQFD.}$$

Ex 12 Soit $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective, et montrons qu'elle est surjective :

$\underline{\text{Soit } y \in E}$. Alors $f(y) \overset{(*)}{=} f(f(f(y)))$. Par injectivité de f, on a donc $y = f(f(y))$.

En posant $x = f(y)$, on a bien $\underline{y = f(x)}$. y admet donc l'antécédent x, ce qui assure la surjectivité de f.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f surjective, et montrons qu'elle est injective :
Soient x et x' deux éléments de E ayant la même image par f : la surjectivité de celle-ci nous permet d'envisager t et t' des antécédents de x et x' par f, soit

$$\exists (t, t') \in E^2 \ / \ f(t) = x \text{ et } f(t') = x'$$

On a donc

$$\underline{f(x) = f(x')} \Rightarrow f(f(t)) = f(f((t'))) \Rightarrow f(f(f(t))) = f(f(f(t'))) \overset{(*)}{\Rightarrow} f(t) = f(t') \Rightarrow \underline{x = x'}$$

f est donc injective.

Par double implication, l'équivalence annoncée est donc établie.

Ex 13 Soit E un ensemble, et $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f = f \ (*)$

a) On suppose f injective : alors pour tout $x \in E$, on a $f(f(x)) = f(x)$, ce qui par injectivité de f donne
$$f(x) = x$$
Ainsi $\underline{f = \mathrm{id}_E}$.

b) On suppose p surjective : alors $\forall x \in E, \exists t \in E \ / \ f(t) = x$. En composant par f, il vient
$$f(f(t)) = f(x) \quad \text{soit } (*) \quad f(t) = f(x) \quad i.e. \quad x = f(x)$$
Ainsi $\underline{f = \mathrm{id}_E}$.

c) Si $f : E \to E$ vérifie $(*)$, alors $\forall x \in f(E)$ il existe par définition un élément $t \in E$ tel que $f(t) = x$. Comme précédemment
$$f(x) = f(f(t)) \overset{(*)}{=} f(t) = x$$
Inversement, si $\forall x \in f(E),\ f(x) = x$, alors pour tout $t \in E,\ f(t) \in f(E)$ donc
$$f(f(t)) = f(t)$$
On en déduit $f \circ f = f$. Finalement
$$\boxed{f \text{ vérifie } (*) \text{ si, et seulement si } \forall x \in f\langle E\rangle,\ f(x) = x}$$

Ex 14 Soit $f : E \to F$ une application.

a) Soit $A \subset E$.

i. On a $A \subset f^{-1}(f(A))$ (un dessin patatoïdal permet de s'en rendre compte)
En effet, si $x \in A$, alors par définition $f(x) \in f(A)$, ce qui toujours par définition s'écrit $x \in f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$.

ii. On suppose de plus f injective. Montrons alors l'égalité $A = f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$.
Si $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f\langle A\rangle$, ce qui signifie : $\exists a \in A \ / \ f(x) = f(a)$.
L'injectivité de f assure alors $x = a \in A$, d'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Par double inclusion, on a l'égalité ensembliste souhaitée.

b) Inversement, supposons : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$, et montrons que f est injective.
Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On a donc
$$f(\{x\}) = f(\{x'\}) = \{f(x)\}$$
On en déduit
$$f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}\langle f(\{x'\})\rangle$$
et par hypothèse (en substituant $\{x\}$ puis $\{x'\}$ à A) :
$$\{x\} = \{x'\}$$
Cela prouve que $x = x'$, d'où l'injectivité de f.

c) Soit $B \subset F$.

i. On a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ (là encore, illustrer pour s'en persuader).
En effet, si $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, alors par définition $\exists x \in f^{-1}(B) \ / \ y = f(x)$.
Mais par définition aussi, $\exists x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$, ce qui signifie que $y \in B$ CQFD.

ii. On suppose de plus f surjective. Montrons alors l'égalité $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
Si $y \in B$, alors par surjectivité de f, $\exists x \in E \ / \ y = f(x)$.
Mais alors $f(x) = y \in B$, d'où $x \in f^{-1}(B)$, et donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$ CQFD.

d) Inversement, supposons : $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f\left(f^{-1}(B)\right)$, et montrons que f est surjective.
On a de manière générale
$$f^{-1}(F) = \{x \in E \ / \ f(x) \in F\} = E$$
On en déduit
$$f\left(f^{-1}(F)\right) = f\langle E\rangle$$

Et par hypothèse (avec $B = F$) :

$$F = f(E)$$

ce qui caractérise la surjectivité de f, CQFD.

Remarque : on peut aussi raisonner à partir d'un élément y de F et appliquer l'hypothèse au singleton $\{y\}$ de manière analogue à la question b) :

$$f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$$

qui assure que y est atteint par au moins un élément de E (si $f^{-1}\langle\{y\}\rangle$ était vide, on aurait $\{y\} = f(\varnothing) = \varnothing$)

e) Si $B \subset F$, montrons que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$:

i. Si $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, alors $y \in B$ (vu au c)) et $y \in f\left(f^{-1}(B)\right) \subset f\langle E\rangle$, d'où $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$.

ii. Inversement, si $y \in B \cap f(E)$, alors $\exists x \in E \;/\; f(x) = y$.
Mais alors $f(x) \in B$, d'où $x \in f^{-1}(B)$, et ainsi $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.

iii. On a alors

$$\begin{aligned}
\left[\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f\left(f^{-1}(B)\right)\right] &\iff [\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = B \cap f(E)] \\
&\iff [\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B \subset f(E)] \\
&\iff f(E) = F \quad \text{(prendre } B = F\text{)} \\
&\iff f \text{ est surjective}
\end{aligned}$$

ce qui redémontre le résultat précédent (c) et d)).

Ex 15 Soit $f : E \to F$ une application. Montrons que

$$\left[\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')\right] \iff [f \text{ est injective}]$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f injective. On sait que $f\langle A \cap A'\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle$. Montrons l'inclusion inverse :
Soit $y \in f(A) \cap f(A')$: alors

$$\begin{cases} y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \;/\; y = f(x) \\ y \in f(A') \Rightarrow \exists x' \in A \;/\; y = f(x') \end{cases}$$

Mais alors $f(x) = f(x')$, et par injectivité de f : $x = x'$.
On en déduit qu $x \in A \cap A'$, et donc que $y \in f(A \cap A')$, CQFD.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$. Montrons que f est injective.
Si x et x' dans E vérifient $f(x) = f(x')$, appliquons l'hypothèse à $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$:

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$$

Or

$$f(\{x\}) = f(\{x'\}) = \{y\} \quad \text{donc} \quad f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = \{y\}$$

Ainsi

$$f\langle\{x\} \cap \{x'\}\rangle = \{y\}$$

Cela n'est possible que si $\{x\} \cap \{x'\} \neq \varnothing$, puisqu'il est assez évident que $f(\varnothing) = \varnothing$.
Mais $\{x\} \cap \{x'\} \neq \varnothing$ entraine automatiquement que $x = x'$, d'où l'injectivité de f.

Par double implication, notre équivalence est établie.

Ex 16 Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.

On considère les applications f et g de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{array}$$

a) Montrons que f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ $A = E$.

- Si $A = E$, alors $\forall X \in \mathcal{P}(E)\,,\ f(X) = X \cap E = X$, i.e. $f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$, qui est injective et surjective.
- Si f est injective, alors comme $f(E) = E \cap A$ et $f(A) = A \cap A = A$, on a $f(E) = f(A)$ d'où $\boxed{E = A}$
- Si f est surjective, alors E admet un antécédent par f, i.e. $\exists X \in \mathcal{P}(E)\ /\ X \cap A = E$

  Mais alors $E = X \cap A \subset A$. Comme évidemment on a aussi $A \subset E$, il vient $\boxed{E = A}$.

Finalement les deux équivalences sont établies.

b) Montrons que g injective $\Longleftrightarrow$ g surjective $\Longleftrightarrow$ $A = \varnothing$.

- Si $A = \varnothing$, alors $\forall X \in \mathcal{P}(E)\,,\ g(X) = X \cup \varnothing = X$, i.e. $g = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$, qui est injective et surjective.
- Si g est injective, alors comme $g(\varnothing) = A$ et $g(A) = A \cup A = A$, on a $g(\varnothing) = g(A)$ d'où $\boxed{A = \varnothing}$
- Si g est surjective, alors $\varnothing$ admet un antécédent par g, i.e. $\exists X \in \mathcal{P}(E)\ /\ X \cup A = \varnothing$.

  Mais alors $A \subset X \cup A = \varnothing$. Comme évidemment on a aussi $\varnothing \subset A$, il vient $\boxed{A = \varnothing}$.

Finalement les deux équivalences sont établies.

Ex 17 Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

a) On suppose que f est injective et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n\ \ (\heartsuit)$

Montrons que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n : H(n)$.

On raisonne par récurrence forte :

- $H(0)$ est vraie car $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0) \overset{(\heartsuit)}{\leqslant} 0$, donc $f(0) = 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ f(k) = k$. Montrons que $f(n) = n$.
  On a d'après $(\heartsuit)$: $f(n) \leqslant n$. Par l'absurde, si $f(n) < n$. Notons $k = f(n) \in [\![0, n-1]\!]$.
  Alors $f(n) = k = f(k)$ d'après $H(k)$. Par injectivité de f, on a donc $k = n$ contradiction.
  Ainsi $f(n) = n$
- Le principe de récurrence forte assure que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$ CQFD.

b) On suppose que f est surjective et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n\ \ (\clubsuit)$

Montrons que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n : K(n)$.

On raisonne de même par récurrence forte :

- $K(0)$ est vraie car 0 admet un antécédent $k \in \mathbb{N}$ par f vérifiant $0 = f(k) \overset{(\clubsuit)}{\geqslant} k$.
  On en déduit $k = 0$, et par suite $f(0) = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ f(k) = k$. Montrons que $f(n) = n$.
  Par surjectivité de f, n admet un antécédent $k \in \mathbb{N}$ par f. Supposons par l'absurde que $k \neq n$.
  - Si $k < n$, alors $f(k) = k$ par hypothèse de récurrence, contradiction
  - Si $k > n$, alors $n = f(k) \overset{(\clubsuit)}{\geqslant} k$ contradiction.

  Dans tous les cas il y a contradiction, d'où $k = n$, c'est-à-dire $f(n) = n$.
- Le principe de récurrence forte assure que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$ CQFD.

Ex 18 Soit f une application de F dans G.

a) Soit E un ensemble.

Montrons que f injective si et seulement si $\forall (g,h) \in \left(F^E\right)^2,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective. Montrons que $\forall (g,h) \in \left(F^E\right)^2,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$

Soient donc g et h de E dans F vérifiant $f \circ g = f \circ h$: alors pour tout $x \in E$,

$$f(g(x)) = f(h(x))$$

Par injectivité de f, il vient $g(x) = h(x)$, ce qui établit $g = h$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\forall (g,h) \in \left(F^E\right)^2,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$. Montrons que f est injective.

Soient donc y et y' dans F vérifiant $f(y) = f(y')$.

On considère les applications g constante égale à y, et h constante égale à y' : alors on a bien $\forall x \in E$,

$$f \circ g(x) = f(y) = f(y') = f \circ h(x)$$

Par hypothèse $g = h$, ce qui signifie $y = y'$, d'où l'injectivité de f.

Par double implication, l'équivalence est établie.

b) Soit H un ensemble contenant au moins deux points.

Montrons que f surjective si et seulement si $\forall (g,h) \in \left(H^G\right)^2,\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est surjective. Montrons que $\forall (g,h) \in \left(G^H\right)^2,\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$

Soient donc g et h des applications de G dans H vérifiant $g \circ f = h \circ f$ et montrons que $g = h$:

Soit y dans G, il faut voir que $g(y) = h(y)$: par surjectivité de f, on a un $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Or pour tout $x \in E$, on a $g(f(x)) = h(f(x))$ par hypothèse. Donc $g(y) = h(y)$ CQFD.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que$\forall (g,h) \in \left(G^H\right)^2$, $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$. Montrons que f est surjective.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que y n'admet pas d'antécédent par f.

Il faut construire deux applications g et h de G dans H qui amènent à une contradiction :

On se donne z et z' éléments distincts de H (existent par hypothèse), et on pose :

$$\begin{cases} g(y) = z \\ h(y) = z' \\ g(t) = h(t) \text{ pour toute autre valeur } t \in G \text{ autre que } y \end{cases}$$

Alors pour tout $x \in E,\ g(f(x)) = h(f(x))$ puisque $f(x)$ ne vaut jamais y.

Par hypothèse, on a donc $g = h$, ce qui est contradictoire.

Par double implication, l'équivalence est établie.