Systèmes linéaires

1. Généralités

1.1. Définitions

a) **Systèmes :** on appelle **système linéaire de** n **équation à** p **inconnues** une conjonction de n équations linéaires

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où **les** inconnues sont les réels $x_1, \ldots, x_p$ ou **le** p-uplet $X = (x_1, \ldots, x_p)$, et

$$\forall (i,j) \in [[1,n]] \times [[1,p]],\ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ (coefficients du système)} \quad \text{et} \quad (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

Une solution se (S) est donc un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ vérifiant simultanément les n équations $L_1, \ldots, L_n$

- Si (S) n'admet aucune solution, il est dit **incompatible** (sinon il est compatible)
- Si $p = n$ (autant d'inconnues que d'équations), on dit que le système est **carré**
- Si $(b_1, \ldots, b_n) = (0, \ldots, 0)$, on dit que le système est **homogène** ("sans second membre")
  Le p-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène (qui est donc compatible)
  On notera (S_0) le système homogène associé à (S)

Remarque 1 : si deux systèmes sont équivalents, alors ils ont mêmes solutions.

Remarque 2 : on peut envisager des systèmes à coefficients complexes et d'inconnues complexes.

Exemples : $(S)\begin{cases} x + y + z - t - u = 1 \\ 2x + y + 4z - 4u = 0 \\ x + 2y - z + t - 3u = -1 \end{cases}$, $(S')\begin{cases} x + 2iy - (3+i)\,z = 4 + 2i \\ ix + \qquad + z = 1 - i \\ (5+i)\,y - 4z = 3 \\ 4x + iy = e^{i\pi/7} \end{cases}$,

$(S'') : ax + by + cz = d$

b) **Matrices associées :**

- Le tableau à n lignes et p colonnes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$ est appelé matrice du système.
- On notera le **second membre** B et la **matrice augmentée** A' :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : on peut écrire $(S) : AX = B$, où $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$

Remarque 2 : A est la matrice (augmentée ou pas) du système homogène (S_0) associé

Exemple : le système $(S)\begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$ a pour matrice $A =$

Sa matrice augmentée est $B =$

1.2. Cas particuliers

a) Matrices diagonales : si la matrice de (S) (carrée) est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors (S) s'écrit banalement :

En particulier lorsque $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, on dit que $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ est la **matrice identité**

(S) est alors trivial :

Exemple : résoudre les systèmes de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en prenant pour second membre successivement $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Matrices triangulaires : si la matrice de (S) (carrée) est de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$, on dit que A est **triangulaire supérieure**. Cela signifie : $\boxed{\forall i > j,\ a_{ij} = 0}$.

Le système (S) est dit alors lui aussi triangulaire supérieur, et de la forme

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & +a_{n-1n}x_n & = b_{n-1} \\ & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

Exemple : résoudre les systèmes de matrices augmentées

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Matrices échelonnées en ligne : on dit que A (ou (S)) est **échelonnée par ligne** lorsqu'elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j_1} & \cdots & & & & & a_{1p} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & & & a_{2p} \\ & & & 0 & & & & \vdots \\ & & & & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rp} \\ \vdots & & & & & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les nombres $a_{1j_1}, \ldots, a_{r_{j_r}}$ sont **non nuls**, et appelés **pivots** de la matrice. Autrement dit :

(i) Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.

(ii) À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de système $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$ est échelonnée. Solutions?

d) **Matrices échelonnées réduites en ligne :** une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes. Solutions du système?

1.3. Opérations sur les lignes

a) **Opérations élémentaires :** on ne change pas les solutions du système linéaire (S) :

- En échangeant deux lignes : opération $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- En multipliant une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$: opération $\boxed{L_i \leftarrow \lambda L_i}$.
- En ajoutant un multiple d'une ligne à une autre : opération $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$.

b) **Matrices équivalentes en ligne :** lorsqu'on opère sur la matrice augmentée B de (S), on on obtient une matrice B' dite **équivalente par ligne** à B, que l'on note $B \underset{L}{\sim} B'$.

Plus généralement deux matrices B et B' sont dites **équivalentes par lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Les systèmes (S) et (S') associés à B et B' sont alors équivalents.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. La méthode du pivot

2.1. Deux exemples

a) **Exemple 1 :** $(S) \begin{cases} x & -2y & +2z & +t & = 7 \\ 2x & -4y & +3z & +4t & = 3 \\ 3x & -3y & +4z & +7t & = -7 \\ -x & +5y & & -4t & = 5 \end{cases}$ de matrice augmentée $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 4 & 7 & -7 \\ -1 & 5 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) **Exemple 2 :** $(S) \begin{cases} x + y + z - t - u = 1 \\ 2x + y + 4z - 4u = 4 \\ x + 2y - z + t - 3u = -1 \end{cases}$

2.2. L'algorithme du pivot de Gauss

$\boxed{\text{Tout système est équivalent à un système échelonné par lignes}}$

2.3. L'algorithme de Gauss-Jordan

$\boxed{\text{Tout système est équivalent à un \textbf{unique} système échelonné \textbf{réduit} par lignes}}$

3. Résolution des systèmes

3.1. Résolution à l'aide de la réduite

a) Rang : on appelle **rang du système** (S) ou **rang de la matrice** A associée le nombre de pivots (non nuls) de la réduite échelonnée par lignes de A. On le note $r = \operatorname{rg} A$

- Deux systèmes équivalents ont même rang, deux matrices équivalentes par lignes ont même rang.
- Le rang est aussi le nombre de pivots de n'importe quel système échelonné par ligne équivalent.

Remarque : $\operatorname{rg} A \leqslant \min(n, p)$, où n est le nombre d'équations et p le nombre d'inconnues.

b) Résolution des systèmes échelonnés : supposons que le système (S) de matrice A soit équivalent au système échelonné (réduit) par lignes (S_e) de matrice A_e.
On pose $r = \operatorname{rg} A$, et on suppose que les pivots de A_e sont $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$.

- Les r premières équations sont appelées **équations principales**, les autres **équations auxiliaires**.
- Les inconnues $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**, les autres **inconnues auxilaires** ou **paramètres**.

Pour résoudre (S_e) , c'est-à-dire (S) :

- On vérifie la compatibilité de (S) avec les équations auxiliaires (L_i) , $i > r$
  - Si $\exists i > r \ / \ L_i : 0 = a$, avec $a \neq 0$ alors (S) est **incompatible**
  - Si $\forall i > r$, $L_i : 0 = 0$, alors (S) est **compatible**
- En cas de compatibilité, on résout le système triangulaire inversible $L_1, \ldots, L_r$ d'inconnues $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, en passant les inconnues auxiliaires dans le second membre.
  On obtient alors des solutions paramétrées par les inconnues auxiliaires.
  Si p est le nombre de colonnes (d'inconnues), alors

$$\boxed{\text{le nombre de paramètres de la solution est } p - r}$$

Exemple 1 : on suppose $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Résoudre le système lorsque le second membre est ramené à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Exemple 2 : on suppose $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Même question avec $Y' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$

Exemple 3 : on suppose $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Même question avec $Y' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

c) Théorème : un système linéaire admet :

- Soit **aucune solution** (système incompatible)
- Soit **une unique solution** (système compatible, aucune inconnue auxiliaire)
- Soit **une infinité de solutions** (système compatible, au moins une inconnue secondaire)

Exemple 1 : $(S)\quad \begin{cases} ax-y=1 \\ x+2y=a \\ x+ay=a \end{cases}$. Discuter sur $a\in\mathbb{R}$

Exemple 2 : $(S)\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 4x+11y \qquad = a \end{cases}$. Discuter sur $a\in\mathbb{R}$

3.2. Cas particulier des systèmes carrés

a) Systèmes de Cramer (Gabriel) :

On appelle **système de Cramer** un système (S) carré de taille n **ET** de rang n.

Autrement dit, si (S) est un système carré de taille n,

(S) est de Cramer si et seulement si la réduite de Gauss-Jordan de sa matrice est l'identité

En particulier :

Tout système de Cramer admet **une unique solution**.

Remarque 1 : sa matrice est équivalente en ligne à une matrice **triangulaire de diagonale non nulle**.

Remarque 2 : on dit aussi que le système est **inversible** (ou que sa matrice l'est).

Remarque 3 : le fait de supprimer des équations et de passer des inconnues en paramètres permet de se ramener à des systèmes de Cramer

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX=Y$ avec $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

b) Cas des matrices triangulaires : soit $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. Alors

A est inversible si et seulement si $\lambda_1\cdots\lambda_n\neq 0$ (aucun zéro sur la diagonale)

3.3. Structure de l'ensemble des solutions

a) Opérations sur les "vecteurs colonnes" : on définit la somme de deux colonnes (éléments de $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$) et la multiplication d'une colonne par un réel λ par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ \vdots \\ x_p+x_p' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_p \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on peut construire des combinaisons linéaires, pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^p$:

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1+\mu x_1' \\ \vdots \\ \lambda x_p+\mu x_p' \end{pmatrix}$$

L'addition est commutative et associative, et la colonne nulle est neutre.
On notera plus volontier les colonnes $X,Y,\ldots$, et leurs combinaisons linéaires $\lambda X+\mu Y$

b) Distributivité de la multiplication matricielle : on rappelle qu'on a posé, pour

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

La "colonne produit" :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

Alors, pour toutes colonnes X, X', on a

$$\boxed{A(X + X') = AX + AX'}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Rappel : si $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système $\left\{ \begin{array}{lcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$ s'écrit $\boxed{AX = B}$

c) Théorème :

> Si (S) : $AX = B$ est compatible et si X_1 est une solution de (S) , alors les solutions de (S) s'écrivent
> $$X = X_1 + X_0$$
> où X_0 est une solution quelconque du système homogène associé (S_0) : $AX = 0$

Remarque 1 : ♡ La colonne nulle est toujours solution de (S_0)

♡ Toute combinaison linéaire de solutions de (S_0) est solution de (S_0)

Remarque 2 : lorsque les solutions de (S) s'expriment par des égalités

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \alpha_1 + t_1u_{11} + \cdots + t_qu_{1q} \\ \vdots & \vdots \\ x_p = \alpha_p + t_1u_{p1} + \cdots + t_qu_{pq} \end{array} \right. \quad , \quad (t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^q$$

Alors, en posant $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$, et $U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{p1} \end{pmatrix}, \dots, U_q = \begin{pmatrix} u_{1q} \\ \vdots \\ u_{pq} \end{pmatrix}$,

- X_1 est une solution particulière de (S)
- Les solutions de (S_0) sont les combinaisons linéaires de $U_1, \dots, U_q$ (et on a $q = p - \text{rg } A$)

Exemple : (S) $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y - z + t = 1 \\ -2x + 4y + 3z - t = 3 \end{array} \right.$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On constate que $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, est inversible (et $\det A' = 1$) : on résout

$$\left\{ \begin{array}{l} x + t = 1 + 2y + z \\ -2x - t = 3 - 4y - 3z \end{array} \right. \quad i.e.\ A' \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2y + z \\ 3 - 4y - 3z \end{pmatrix}$$

Comme $A'^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2y + z \\ 3 - 4y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2y + 2z \\ 5 - z \end{pmatrix}$$

D'où les solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 2y + 2z \\ y = y \\ z = z \\ t = 5 - z \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$