On rendra seulement une copie par trinôme de colle.

PROBLEME

On note f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \ln(x) - x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

1. Etude de f :

a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$

b) Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f''(x)$ pour $x > 0$.
On l'écrira sous la forme $-\frac{P(x)}{x^2(x+1)^2}$ où P est un polynôme de degré 2 à déterminer.

c) En déduire les variations de f' sur $]0, +\infty[$.

d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ et en déduire le signe de f' sur $]0, +\infty[$.

e) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de f.
Pour la limite en $+\infty$, on pourra poser $y = 1/x$.

f) Vérifier que $f(2) < 0 < f(3)$

2. Réciproque de f :

a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On notera g sa réciproque.

b) Quel est le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$? Quel encadrement de $g(0)$ peut on préciser?

c) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes de f et de g.

3. On note φ la composée de g et de $\ln$, c'est à dire : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = g(\ln(x))$

a) Montrer en étudiant une fonction que $\forall x \geqslant 0,\ \ln(1 + x) \leqslant x$

b) En déduire que $\forall x > 0,\ 0 \leq x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 1$, puis que $f(x) \leqslant \ln x \leqslant f(ex)$

c) Montrer alors que $\forall x > 0,\ x \leqslant \varphi(x) \leqslant ex$

d) Donner un majorant de $\varphi(10)$ (on rappelle que $2,71 < e < 2,72$).

e) Vérifier que $\forall x > 0,\ f(x) = (x + 1)\ln(x) - x\ln(x + 1)$

f) Montrer que $\forall x > 0,\ x^{x+1} > 10(x + 1)^x \iff x > \varphi(10)$

4. Encore une fonction : soit $a \in [e, +\infty]$. On pose $f_a : \begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x x^{-a} \end{array}$

Etudier les variations de f_a et préciser sa limite en $+\infty$.

5. Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 28 tels que p^q et q^p aient le même nombre de chiffres dans le système de numération décimal. On cherche à montrer que $p = q$.

On suppose par l'absurde que $p > q$, i.e. $p \geq q + 1$ puisque p et q sont entiers.

a) Vérifier que $f_q(p) \geqslant f_q(q + 1)$

b) Montrer que $q^{q+1} > 10(q + 1)^q$

c) En déduire que $f_q(p) > 10$

d) En déduire une contradiction et conclure.

$\boxed{\textbf{EXERCICE}}$

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$$

1. Montrer que f est constante sur $[0, 1[$ et préciser sa valeur.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x+1) = f(x) + 1$.
Que peut-on en déduire sur la courbe de f?

3. Soit p un entier naturel. Déterminer, en le justifiant, la valeur de $f(x)$ pour $x \in [p, p+1[$.

4. Déterminer, en le justifiant, une expression de $f(x)$ à l'aide de $\lfloor x \rfloor$ si $x \in \mathbb{R}^+$, puis si $x \in \mathbb{R}^-$. Conclure.