Ex 1 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :

a) $ab\neq 0 \iff [a\neq 0 \text{ et } b\neq 0]$: a et b sont "tous non nuls".

b) $(a,b)\neq(0,0)\iff[a\neq 0 \text{ ou } b\neq 0]$: a et b sont "non tous nuls".

Ex 2 On quantifie la proposition logique :

$$\forall(a,c,b,d)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{*2},\ \left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\ /\ \left\{\begin{array}{l}a=kb\\ c=kd\end{array}\right.\right)$$

Ex 3 Soit $P(x,y,z)$: $x=y=z$. Cette proposition équivaut à la double égalité $x=y$ et $y=z$. Sa négation est donc

$$\boxed{x\neq y \text{ ou } y\neq z}$$

a) $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ x+y^2=0$ est **fausse** car pour $x=1$ et $y=1$, on n'a pas $x+y^2=0$.

b) $\exists x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x+y^2=0$ est **vraie** : il suffit de choisir $x=0$ et $y=0$ et on a bien $x+y^2=0$.

c) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x+y^2=0$ est **fausse** : pour $x=1$, on ne peut pas trouver $y\in\mathbb{R}$ tel que $x+y^2=0$.

d) $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R},\ x+y^2=0$ est **vraie** : pour $y\in\mathbb{R}$ donné, le réel $x=-y^2$ vérifi bien $x+y^2=0$.

e) $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ x+y^2=0$ est **fausse** : si elle était vraie, on aurait un réel x tel que $\forall y\in\mathbb{R},\ y^2=-x$.
En particulier pour $y=0$ on aurait $x=0$ et pour $y=1$ on aurait $x=-1$ **contradiction**.

Ex 4 Traductions et négations :

a) Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif : $\exists x\in\mathbb{R}_+^*\ /\ x^3<0$.
Négation : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x^3\geqslant 0$.

b) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3=2$ est inclus dans $]1,2[$: $\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^3=2\right\}\subset\,]1,2[$
On peut ausi l'écrire de manière plus élémentaire : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^3=2\Rightarrow 1<x<2$.
Négation : $\exists x\in\mathbb{R}\ /\ x^3=2$ et $(x\geqslant 2 \text{ ou } x\leqslant 1)$, soit encore $\exists x\in\,]-\infty,1]\cup[2,+\infty[\ /\ x^3=2$.

c) Tout entier naturel est pair ou impair : $\forall n\in\mathbb{N},\ (\exists k\in\mathbb{N}\ /\ n=2k)$ ou $(\exists k\in\mathbb{N}\ /\ n=2k+1)$.
Négation : $\exists n\in\mathbb{N},\ (\forall k\in\mathbb{N}\ /\ n\neq 2k)$ et $(\forall k\in\mathbb{N}\ /\ n\neq 2k+1)$.

Ex 5 Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat de la variable $x\in E$.
La proposition $\exists! x\in E\ /\ P(x)$ équivaut à $[\exists x\in E\ /\ P(x)]$ et $\left[\forall(x,x')\in E^2,\ (P(x) \text{ et } P(x'))\Rightarrow x=x'\right]$ (la deuxième partie d la proposition exprime l'unicité $P(x)$ et $P(x')$ ne peuvent pas être vraies simultanément si x et x' sont distincts). On a ainsi la négation :

$$\boxed{\left[\forall x\in E\ /\ \overline{P(x)}\right] \text{ ou } \left[\exists(x,x')\in E^2\ /\ x\neq x' \text{ et } (P(x) \text{ et } P(x'))\right]}$$

(autrement dit, soit $P(x)$ n'est jamais vraie, soit il est vrai pour au moins deux valeurs de x).

Ex 6 Soient E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats de la variable $x\in E$.

a) La proposition $\exists x\in E\ /\ P(x)$ et $Q(x)$ **n'est pas équivalente à** $\exists x\in E\ /\ P(x)$ et $\exists x\in E\ /\ Q(x)$.
En effet si $E=\mathbb{R}$ et par exemple $P(x)$: $x>1$ et $Q(x)$: $x<-1$, alors :

- $\exists x\in E\ /\ P(x)$ et $\exists x\in E\ /\ Q(x)$ est vraie car par exemple $P(2)$ est vraie et $Q(-2)$ est vraie
- $\exists x\in E\ /\ P(x)$ et $Q(x)$ est fausse car un réel x ne peut pas vérifier à la fois $x<-1$ et $x>1$.

b) La proposition $\forall x\in E,\ P(x)$ ou $Q(x)$ **n'est pas non plus équivalente à** $\forall x\in E,\ P(x)$ ou $\forall x\in E,\ Q(x)$.
En effet si $E=\mathbb{R}$ et par exemple $P(x)$: $x>0$ et $Q(x)$: $x\leqslant 0$, alors :

- $\forall x\in E,\ P(x)$ ou $Q(x)$ est vraie puisqu'un réel est soit positif soit négatif ou nul,
- $\forall x\in E,\ P(x)$ ou $\forall x\in E,\ Q(x)$ est fausse car tout réel n'est pas positif et tout réel n'est pas négatif.

Ex 7 Soient P, Q, R trois assertions. On a par définition de l'implication, et en utilisant les règles de calculs sur les propositions logiques :

$$\begin{aligned}[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] &\Leftrightarrow \left[\overline{P} \text{ ou } (Q \Rightarrow R)\right] \\ &\Leftrightarrow \left[\overline{P} \text{ ou } \left(\overline{Q} \text{ ou } R\right)\right] \\ &\Leftrightarrow \left[\left(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}\right) \text{ ou } R\right] \\ &\Leftrightarrow \left[\overline{(P \text{ et } Q)} \text{ ou } R\right] \\ &\Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \Rightarrow R]\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \text{ est équivalente à } (P \text{ et } Q) \Rightarrow R}$$

Ex 8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

a) "f est croissante sur I" se traduit symboliquement par : $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
Sa négation est donc : $\exists (x, y) \in I^2 \ / \ x \leqslant y$ **et** $f(x) > f(y)$.

b) "si f s'annule en un point de I, alors elle est nulle sur I" se traduit symboliquement par :

$$(\exists x \in I \ / \ f(x) = 0) \Rightarrow (\forall x \in I,\ f(x) = 0)$$

Sa contraposée est : $(\exists x \in I \ / \ f(x) \neq 0) \Rightarrow (\forall x \in I,\ f(x) \neq 0)$

Sa négation est : $(\exists x \in I \ / \ f(x) = 0)$ **et** $(\exists x \in I \ / \ f(x) \neq 0)$

c) Soit P : $(\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0) \Longrightarrow (\exists x \in I \ / \ f(x) \neq 0)$
Sa négation est $\overline{P}$: $(\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0)$ **et** $(\forall x \in I \ / \ f(x) = 0)$, autrement dit $\forall x \in I \ / \ f(x) = 0$

Sa contraposée est $(\forall x \in I \ / \ f(x) = 0) \Rightarrow (\exists x \in I,\ f(x) < 0)$: elle est équivalente à P.

d) Soit Q : $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
Sa contraposée est $\forall (x, y) \in I^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Elle équivaut à Q.
Sa négation est $\overline{Q}$: $\exists (x, y) \in I^2 \ / \ f(x) = f(y)$ **et** $x \neq y$.

Ex 9 Soient x, y, z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose les implications

$$\text{(i) } x = 0 \Rightarrow y > 0 \quad \text{(ii) } x > 0 \Rightarrow y < 0 \quad \text{(iii) } y \neq 0 \Rightarrow z > 0$$

On peut faire une disjonction de cas sur le signe de y :

- Si $y > 0$, alors (iii) donne $z > 0$ ce qui contredit que deux réls non nuls de $\{x, y, z\}$ sont de signe contraire.
- Si $y < 0$, alors la contraposée de (i) donne $x \neq 0$. Mais alors $z = 0$ (un des réels doit être nul). La contraposée de (iii) entraine alors $y = 0$ contradiction.

Finalement $y = 0$. Mais alors $x < 0$ (contraposée de (ii)) et donc $z > 0$. ainsi

$$\boxed{x < y = 0 < z}$$