Ex 1 Interprétons les ensembles suivants comme noyaux d'applications linéaires : ce seront donc des espaces vectoriels.

a) $F = \{X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y = z+t = 0\}$. On pose

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & X = {}^t(x,y,z,t) & \mapsto & f(X) = \begin{pmatrix} x+y \\ z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \end{array}$$

f est linéaire (c'est l'application associée à une matrice), et $\ker f = F$, CQFD.

b) $G = \{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f'' - 3f' + 2f = 0\}$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \Phi(f) = f'' - 3f' + 2f \end{array}$$

Comme, en posant D l'opérateur (linéaire) de dérivation, on a

$$\Phi = D^2 - 3D + 2\,\mathrm{id}_{C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Φ est linéaire (combinaison linéaire d'applications linéaires), et $\ker \Phi = G$, CQFD.

c) $H = \left\{f \in C^0([a,b]) \ / \ \int_a^b f = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & C^0([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \Psi(f) = \int_a^b f - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{array}$$

Ψ est linéaire : en effet, si $(f,g) \in C^0([a,b])^2$, alors

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda f + g) &= \int_a^b (\lambda f + g) - (\lambda f + g)\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ &= \lambda \int_a^b f + \int_a^b g - \lambda f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - g\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ &= \lambda\left(\int_a^b f - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right) + \int_a^b g - g\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ &= \lambda \Psi(f) + \Psi(g) \end{aligned}$$

On a alors $\ker \Psi = H$, CQFD.

Ex 2 Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $f : E \to E$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) * <u>Linéarité</u> : $\forall (X,X') \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda X + X') = A(\lambda X + X') = \lambda AX + AX' = \lambda f(X) + f(X')$

* <u>Injectivité de f</u> : si $X = \binom{x}{y} \in \ker f$, alors $AX = 0_E$, *i.e.* $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ -3x = 0 \end{cases}$, d'où $x = y = 0$, i.. $X = 0_E$.
Le noyau de f est réduit à $\{0_E\}$, donc <u>f est injective</u>

* <u>Image de f</u> : comme A est inversible, le système $AX = Y$ admet une unique solution pour tout $Y \in E$, et donc $\boxed{\operatorname{Im} f = E}$. <u>$f$ est évidemment surjective</u>.

b) f est ainsi un automorphisme de E et f^{-1} est l'endomorphisme asocié à $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, i.e.

$$\boxed{\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ f^{-1}(X) = \begin{pmatrix} -y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}}$$

c) Soit $F = \ker(f - 3\,\mathrm{id}_E)$. On a $F = \ker(A - 3I_2)$, avec $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \iff y = -x \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F \text{ est ainsi la droite d'équation } x + y = 0, \text{ engendrée par le vecteur } e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F}$$

Si $X \in F$, alors par définition $f(X) = 3X$.
Enfin $\operatorname{Im}(f - 3\,\mathrm{id}_E) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une droite vectorielle.

Ex 3 Soit $E=\mathbb{R}^3$, (e_1,e_2,e_3) sa base canonique et $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que :

$$f(e_1)=e_1+2e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\ ,\quad f(e_2)=2e_1-e_2-e_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\ ,\quad f(e_3)=-e_1+e_2+3e_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

a) Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de E. Alors $X=xe_1+ye_2+ze_3$ et par linéarité de f :

$$f(X)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=\begin{pmatrix}x+2y-z\\-y+z\\2x-y+3z\end{pmatrix}=AX,\quad \text{avec } A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

Remarque : la connaissance de f sur une base et sa linéarité entrainent la connaissance de f sur tout E. C'est le principe de la représentation matricielle des applications linéaires. On remarquera aussi que A est la "concaténation" des images $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

$*$ Noyau de f : avec les mêmes notations, on a

$$f(X)=0_E\Longleftrightarrow AX=0_E\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+2y-z=0\\-y+z=0\\2x-y+3z=0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+z=0\\y=z\\2x+2z=0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=-z\\y=z\\(z=z)\end{array}\right.$$

$\ker f$ est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $X=\begin{pmatrix}-z\\z\\z\end{pmatrix}=ze_0$, avec $e_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\neq 0_E$.

C'est donc la droite engendrée par e_0 : $\boxed{\ker f=\mathrm{Vect}(e_0)}$

$*$ Image de f : c'est l'espace engendré par les colonnes C_1,C_2,C_3 de A. Or on voit que $C_3=C_1-C_2$, et que (C_1,C_2) est libre. Donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}(C_1,C_2)\text{ est un plan vectoriel}}$

Remarque1 : de $f(e_0)=0_E$ on peut aussi tirer : $f(-e_1+e_2+e_3)=0_E$ i.e. $-f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=0_E$.
On retrouve ainsi la relation $-C_1+C_2+C_3$ sur les colonnes.
Remarque2 : pour calculer l'image, on peut aussi écrire :

$$Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}\, f\Longleftrightarrow\exists X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E\ /\ f(X)=Y\Longleftrightarrow AX=Y\text{ est compatible}$$

Or avec la matrice augmentée :

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-1&x'\\0&-1&1&y'\\2&-1&3&z'\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&x'\\0&-1&1&y'\\0&-5&5&-2x'+z'\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&x'\\0&-1&1&y'\\0&0&0&-2x'-5y'+z'\end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{Y\in\mathrm{Im}\, f\Longleftrightarrow -2x'-5y'+z'=0}$$

On retrouve que $\mathrm{Im}\, f$ est un plan, dont cette méthode donne une équation.

b) Soit $Y_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$: il vérifie l'équation de $\mathrm{Im}\, f$ $(-2\times3-5(-1)+1=0)$, donc $Y_1\in\mathrm{Im}\, f$.

On peut résoudre le système $AX=Y_1$, ou bien remarquer que

$$Y_1=C_1+C_2=f(e_1)+f(e_2)=f(e_1+e_2)$$

$X_1=e_1+e_2$ est ainsi un antécédent de Y_1, dont l'ensemble des entécédents est donc

$$\boxed{f^{-1}(\{Y_1\})=X_1+\ker f=\{X_1+\lambda e_0,\ \lambda\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}1+\lambda\\1+\lambda\\\lambda\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

En revanche, $Y_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\notin\mathrm{Im}\, f$, et n'a donc pas d'antécédent par f.

Ex 4 Montrons que l'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire :

Si $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = (n_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{tr}(\lambda M + N) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda M + N]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda m_{ii} + n_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} n_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N) \quad \text{CQFD.}$$

- tr **est** évidemment **surjective** car n'importe quel réel x peut s'écrire $\operatorname{tr} M$, où $M = xE_{11}$.
- **Elle n'est pas injective**, car par exemple $E_{11} - E_{22} \in \ker \operatorname{tr}$.
- Dans le cas où $n = 3$, on a $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \ker \operatorname{tr}$ si et seulement si $m_{33} = -m_{11} - m_{22}$, soit

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & -m_{11} - m_{22} \end{pmatrix} = \sum_{i\neq j} m_{ij} E_{ij} + m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + m_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En notant $A_1 = E_{11} - E_{33} \in \ker \operatorname{tr}$ et $A_2 = E_{22} - E_{33} \in \ker \operatorname{tr}$, on voit que la famille

$$\mathcal{B} = (A_1, A_2, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{23}, E_{31}, E_{32})$$

est génératrice de $\ker \operatorname{tr}$. $\mathcal{B}$ est clairement libre, car

$$\sum_{i\neq j} m_{ij} E_{ij} + m_{11} A_1 + m_{22} A_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & -m_{11} - m_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow m_{11} = \ldots = m_{32=} = 0$$

Ainsi $\boxed{\dim \ker \operatorname{tr} = 8 \text{ et } \mathcal{B} \text{ en est une base}}$

Ex 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

Il est clair que $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que f est linéaire :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda f(M) + f(M')$$

- Calcul du noyau : on pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$M \in \ker f \iff AM = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$M \in \ker f \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

On obtient donc

$$M \in \ker f \iff M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker f$ est donc engendré par les deux matrices $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \ker f$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui sont non colinéaires de manière manifeste.

Ainsi $\boxed{\ker f \text{ est un plan vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

- Calcul de l'image : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est engendré par la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, donc

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$$

On calcule ces quatre images :

$$f(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque que $f(E_{21}) = 2f(E_{11})$, que $f(E_{22}) = 2f(E_{21})$, et que $f(E_{11})$ et $f(E_{12})$ sont libres. Il vient

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right), \quad \text{plan vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

Ex 6 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, et $\varphi : E \to E$ définie par $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P - XP'$.

a) Si $P \in E$, alors $\deg P \leqslant n$, donc $\deg XP' \leqslant n$, et par somme, $\deg \varphi(P) \leqslant n$.

φ prend donc bien ses valeurs dans E.

Montrons sa linéarité : si $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda P + Q - X(\lambda P + Q)' = \lambda(P - XP') + Q - XQ' = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

b) Calcul du noyau : soit $P \in \ker\varphi$. Alors $P = XP'$. Si P est non nul, $d \geqslant 0$ son degré et $a \neq 0$ son coefficient dominant, alors l'identification des termes de degré d donne

$$a = ad \quad \text{d'où} \quad d = 1$$

Inversement, si $P = aX + b$, avec $a \neq 0$, alors $XP' = aX$ ne vaut P que si $b = 0$.

Finalement le noyau de φ est constitué du polynôme nul, et des multiples non nuls de X. Autrement dit

$$\boxed{\ker\varphi = \{aX,\ a \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(X) \quad \text{c'est une droite vectorielle}}$$

c) Calcul de l'image : l'espace $E = \mathbb{K}_n[X]$ est engendré par la famille $(1, X, \ldots, X^n)$, donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est engendrée par la famille des images $(\varphi(1), \varphi(X), \ldots, \varphi(X^n))$. Or si $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi\left(X^k\right) = X^k - kX^k = (1 - k)X^k$$

Cette image est nulle pour $k = 1$ (cf. noyau), et non nulle pour toutes les autres valeurs de $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{1\}$.

$\mathrm{Im}\,\varphi$ est donc engendrée par $1, -X^2, -2X^3, \ldots, (1 - n)X^n$, ou ce qui revient au même :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left(1, X^2, X^3, \ldots, X^n\right)}$$

Remarquons que d'après la formule de Taylor, on peut aussi exprimer $\mathrm{Im}\,\varphi$ sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\varphi = \{P \in \mathbb{K}_n[X]\ /\ P'(0) = 0\}}$$

Ex 7 Soit $E=\mathbb{K}_4[X]$, et $\varphi : E\to E$ définie par $\forall P\in E,\ \varphi(P)=\left(X^2-1\right)P''-(3X+1)P'$.

a) Soit $P\in\in E$, alors $\deg P\leqslant 4$, donc

$$\deg\left(X^2-1\right)P''\leqslant 4,\ \deg(3X+1)P'\leqslant 4 \text{ et donc par somme } \deg\varphi(P)\leqslant 4$$

φ prend donc bien ses valeurs dans E.

Montrons sa linéarité : si $(P,Q)\in\mathbb{E}^2$, et $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q) &= \left(X^2-1\right)(\lambda P+Q)''-(3X+1)(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda\left[\left(X^2-1\right)P''-(3X+1)P'\right]+\left[\left(X^2-1\right)Q''-(3X+1)Q'\right] \\ &= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

b) Calcul du noyau : on cherche les polynômes P de degré inférieur à 4 et vérifiant

$$\left(X^2-1\right)P''=(3X+1)P' \quad (*)$$

Plutôt que d'utiliser la méthode pachydermique de l'identification des coefficients, raisonnons par analyse et synthèse en exploitant les divisibilités :

* **Analyse** : si P **non nul** vérifie $(*)$, alors $\deg P'\leqslant 3$, et P' s'annule en 1 et en -1. On peut donc l'écrire

$$P'=\left(X^2-1\right)Q,\ \text{avec } Q\neq 0 \text{ et } \deg Q\leqslant 1$$

L'hypothèse $\deg Q=0$ ($Q=\lambda$ constant) n'est pas tenable, car alors $P'=\lambda\left(X^2-1\right)$ et $P''=2\lambda X$ et $(*)$ ne peut pas être vérifiée. Donc $\deg Q=1$ et

$$P'=\lambda\left(X^2-1\right)(X-a),\ \text{avec } \lambda\neq 0 \text{ et } a\in\mathbb{K}$$

Mais alors

$$P'=\lambda\left(X^3-aX^2-X+a\right) \quad \text{et} \quad P''=\lambda\left(3X^2-2aX-1\right)$$

$(*)$ force P'' à s'annuler en $-\frac{1}{3}$, soit $\lambda\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}a-1\right)=0\iff a=1$. Ainsi

$$P'=\lambda\left(X^3-X^2-X+1\right)$$

et par intégration on a une constante μ telle que

$$\boxed{P=\lambda\left(\frac{1}{4}X^4-\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+X\right)+\mu}$$

* **Synthèse** : soit P un tel polynôme, avec λ et μ deux scalaires quelconques. Alors

$$P'=\lambda\left(X^3-X^2-X+1\right)=\lambda\left(X^2-1\right)(X-1) \quad \text{et} \quad P''=\lambda\left(3X^2-2X-1\right)=\lambda(3X+1)(X-1)$$

On a donc bien $\left(X^2-1\right)P''=(3X+1)P'$.

* **Conclusion** : le noyau de φ est constitué des polynômes de la forme

$$P=\lambda\left(\frac{1}{4}X^4-\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+X\right)+\mu, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$$

$\ker\varphi$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des polynômes

$$\boxed{P_0=1} \quad \text{et} \quad \boxed{P_1=\tfrac{1}{4}X^4-\tfrac{1}{3}X^3-\tfrac{1}{2}X^2+X}$$

soit

$$\boxed{\ker\varphi=\operatorname{Vect}(P_0,P_1)}$$

C'est un plan vectoriel dont (P_0,P_1) st une base.

c) Soit $Q=\varphi\left(X^3\right)$. Alors l'équation linéaire $\varphi(P)=Q$ admt X^3 pour solution.

On sait que l'ensemble de ses solutions est alors le plan affine $X^3+\ker\varphi$. Autrement dit les antécédents de Q par φ sont les polynômes de la forme

$$\boxed{X^3+\lambda\left(\frac{1}{4}X^4-\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+X\right)+\mu, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2}$$

Ex 8 Soit $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et φ définie sur E par $\forall f \in E,\ \varphi(f) : x \mapsto xf(x)$

a) Notons $i : x \mapsto x$. Par produit $\varphi(f) = i \times f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. φ est donc bien à valeurs dans E.

<u>Linéarité</u> : si $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(\lambda f + g) = i \times (\lambda f + g) = \lambda i \times f + i \times g = \lambda\varphi(f) + \varphi(g) \text{ CQFD.}$$

<u>φ est donc bien un endomorphisme de E.</u>

b) <u>Noyau et image de φ</u> :

i. <u>Noyau</u> : soit $f \in \ker\varphi$. Alors $\varphi(f)$ est la fonction nulle (notée $\mathbb{O}$), i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = 0$

Mais alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 0$, mais par continuité de f en 0, on en déduit aussi $f(0) = 0$.

Ainsi f est la fonction nulle, et $\boxed{\ker\varphi = \{\mathbb{O}\}}$ (φ est injective).

ii. <u>Image</u> : soit $g \in \operatorname{Im}\varphi$. Alors $\exists f \in E \ /\ \varphi(f) = g$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = g(x)$

En particulier <u>$g(0) = 0$</u>. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

Par continuité de f en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = f(0)$, ce qui prouve que <u>$g$ est dérivable en 0</u>.

Inversement, si $g \in E$ s'annule en 0 et est dérivable en 0, alors montrons que g admet un antécédent par φ. On pose

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f et continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient, continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) = f(0)$.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(f)(x) = x \times \frac{g(x)}{x} = g(x) \quad \text{et} \quad \varphi(f)(0) = 0 = g(0)$$

Ainsi $f \in E$ et $\varphi(f) = g$, donc $g \in \operatorname{Im} f$.

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Im} g \text{ est l'ensemble des fonctions de } E \text{ dérivables en 0 et s'annulant en 0}}$.

Ex 9 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et $T : E \to E$ définie par $\forall u \in E, T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

– <u>Linéarité de T</u> : si $(u,v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda u + v$ a pour terme général $\lambda u_n + v_n$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [T(u)]_n = [\lambda u + v]_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda [T(u)]_n + [T(v)]_n$$

Il s'ensuit que $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$.

– <u>Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $F_\lambda = \ker(T - \lambda\, \mathrm{id}_E)$</u>. Alors

$$u \in F_\lambda \iff T(u) = \lambda u \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda u_n$$

F_λ est donc l'ensemble des suites géométriques de raison λ, soit, en notant $\ell = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$F_\lambda = \left\{(u_0\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_0 \in \mathbb{C}\right\} = \{u_0\ell,\ u_0 \in \mathbb{C}\} = \operatorname{Vect}(\ell)$$

$$\boxed{F_\lambda \text{ est donc la droite vectorielle engendrée par } \ell.}$$

– <u>Injectivité</u> : la suite $d = (\delta_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle ($d_0 = 1$), mais $T(d) = (0)_{n\in\mathbb{N}}$. $\boxed{T \text{ n'est pas injective}}$.

Remarque : en fait $\ker T = F_0 = \operatorname{Vect}\left((0^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \operatorname{Vect}(d)$ d'après le calcul de F_λ.

– <u>Surjectivité</u> : si $v \in E$ est donnée, alors la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = v_{n-1} \end{cases}$ vérifie $T(u) = v$, donc $\boxed{\text{l'application } T \text{ est surjective}}$.

Remarque : les antécédents de v sont de la forme $u' = u + \lambda d$, d définie plus haut, i.e. $\begin{cases} u'_0 = \lambda \\ \forall n \geqslant 1,\ u'_n = v_{n-1} \end{cases}$

Ex 10 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe des réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des vecteurs non nuls $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ f(x_k) = \lambda_k x_k.$$

Montrons que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Démonstration par récurrence : $H(n)$: $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

- $H(1)$ est vraie car $x_1 \neq 0_E$, donc (x_1) est libre.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons $H(n-1)$ et montrons $H(n)$: soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E \quad (1)$$

Alors, par linéarité de l'endomorphisme f :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = 0_E$$

Et par hypothèse

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = 0_E \quad (2)$$

En multipliant l'égalité (1) par λ_n et en retranchant l'égalité (2) , on élimine le dernier terme :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i x_i = 0_E \quad \text{soit} \quad (\lambda_n - \lambda_1) \alpha_1 x_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \alpha_{n-1} x_{n-1} = 0_E$$

L'hypothèse de récurrence (indépendance de $X_1, \ldots, x_{n-1}$) assure que

$$(\lambda_n - \lambda_1) \alpha_1 = \cdots = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \alpha_{n-1} = 0$$

Et comme $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont distincts, $\boxed{\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0}$. Mais alors il reste de (1) :

$$\alpha_n x_n = 0_E$$

qui donne $\boxed{\alpha_n = 0}$ puisque $x_n \neq 0_E$. $H(n)$ est donc bien vraie.

Ex 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E, \ f(x)$ est colinéaire à x. Montrons que f est une homothétie de E.

Par définition, pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, $f(x)$ et x sont colinéaires, et comme x n'est pas nul, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x . x$. Cela reste vrai pour $x = 0_E$ puisque $f(0_E) = 0_E$.

Soit x et y dans E, non nuls.

- Si (x, y) est libre. alors par linéarité de f :

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

Il en résulte que

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) y = 0_E$$

L'indépendance de (x, y) assure alors $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$

- Si (x, y) est liée par exemple $y = kx$ avec $k \in \mathbb{K}^*$, on a $f(y) = kf(x)$ donc

$$\lambda_y kx = k \lambda_x x \quad \text{ou} \quad k(\lambda_y - \lambda_x) x = 0_E$$

Comme $k \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on a encore $\lambda_x = \lambda_y$

Comme on peut prendre n'importe quel λ_{0_E}, on en conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \lambda_x = \lambda_y}$$

On dispose donc d'un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, \ f(x) = \lambda x$: $\boxed{f \text{ est une homothétie de } E}$

Ex 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :

a) Montrons : $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

i. On suppose $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

· Montrons $\ker f \subset \ker f^2$:
Si $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0_E$ d'où $f^2(x) = f(0_E) = 0_E$, i.e. $x \in \ker f^2$ CQFD.

· Montrons $\ker f^2 \subset \ker f$:
Si $x \in \ker f^2$, alors $f(f(x)) = 0_E$, d'où $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f \overset{\text{hyp}}{=} \{0_E\}$. Donc $f(x) = 0_E$ CQFD.

Par double inclusion, on a donc bien $\ker f = \ker f^2$

ii. On suppose $\ker f = \ker f^2$.

· On a évidemment $\{0_E\} \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$ puisque $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

· Montrons $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0_E\}$: si $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, alors

$$\begin{cases} f(x) = 0_E \\ \exists t \in E \ / \ x = f(t) \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(f(t)) = 0_E \quad \text{i.e.} \quad t \in \ker f^2$$

L'hypothèse permet donc d'écrire : $t \in \ker f$, d'où $x = f(t) = 0_E$ CQFD.

Par double implication, notre équivalence est démontrée.

b) Montrons : $\ker f + \operatorname{Im} f = E \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

i. On suppose que $\ker f + \operatorname{Im} f = E$.

· Montrons que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$:
Si $y \in \operatorname{Im} f^2$, alors $\exists t \in E \ / \ y = f(f(t)) = f(x)$ en posant $x = f(t)$. D'où $y \in \operatorname{Im} f$ CQFD.

· Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$:
Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $\exists x \in E \ / \ y = f(x)$. On peut par hypothèse décomposer x :

$$\exists (x_0, x_1) \in \ker f \times \operatorname{Im} f \ / \ x = x_0 + x_1$$

Mais alors par linéarité $y = f(x_0) + f(x_1) = f(x_1)$. Mais comme $x_1 \in \operatorname{Im} f$,

$$\exists t \in E / \ x_1 = f(x) \quad \text{d'où} \quad y = f(f(t)) \in \operatorname{Im} f^2 \text{CQFD.}$$

Par double inclusion, on a donc bien $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

ii. On suppose que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

· Il est évident que $\ker f + \operatorname{Im} f \subset E$.

· Montrons que $E \subset \ker f + \operatorname{Im} f$: soit $x \in E$ alors $f(x) \in \operatorname{Im} f \overset{\text{hyp}}{=} \operatorname{Im} f^2$. Donc

$$\exists t \in E \ / \ f(x) = f(f(t))$$

Si t est un tel vecteur, alors par linéarité $f(x - f(t)) = 0_E$. Posons $\begin{cases} x_0 = x - f(t) \in \ker f \\ x_1 = f(t) \in \operatorname{Im} f \end{cases}$

Alors on a bien $x = x_0 + x_1 \in \ker f + \operatorname{Im} f$, CQFD.

Par double implication, notre équivalence est démontrée.

Ex 13 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrons que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par g :

i. Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $\exists x \in E \ / \ y = f(x)$, donc $g(y) = g(f(x)) \overset{\text{hyp}}{=} f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$

ii. Si $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0_E$ donc $f(g(x)) = g(f(x)) = f(0_E) = 0_E$, d'où $g(x) \in \ker f$.

Par symétrie des rôles, on a de même : $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$ sont stables par f.

b) On suppose que $E = \ker f + \ker g$. Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \ker g$:

Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $\exists x \in E \ / \ y = f(x)$. par hypothèse, x se décompose sur $\ker f$ et $\ker g$:

$$\exists (x_f, x_g) \in \ker f \times \ker g \ / \ x = x_f + x_g$$

Mais alors par linéarité de f :

$$y = f(x_f) + f(x_g) = f(x_g)$$

Ainsi

$$g(y) = g(f(x_g)) \overset{\text{hyp}}{=} f(g(x_g)) = f(0_E) = 0_E \quad \text{i.e.} \quad y \in \ker g \text{ CQFD.}$$

Par symétrie des rôles, on a de même $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.

Ex 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$. Alors

$$\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - f^n = (\mathrm{id}_E - f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ (\mathrm{id}_E - f)$$

Il s'ensuit que g est inversible et

$$\boxed{g^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \mathrm{id}_E + f + \cdots + f^{n-1}}$$

Ex 15 Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E :
Analyse : pour que la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ soit libre, il faut que chacun de ses vecteurs soient non nul, et en particulier $f^{n-1}(x)$ (car nécessairement les autres seront aussi non nuls.
Synthèse : considérons un vecteur $x \in E \ / \ f^{n-1}(x) \neq 0_E$ (possible puisque $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

– Montrons que $\mathcal{B} = \left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ est libre : si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ vérifient

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$$

Alors en appliquant f^{n-1} il vient :

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) + 0_E = 0_E \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 0} \quad (\text{car } f^{n-1}(x) \neq 0_E)$$

Donc

$$\lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$$

On applique f^{n-2} :

$$\lambda_1 f^{n-1}(x) + 0_E = 0_E \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

puis $f^{n-3}, \dots, f$ pour obtenir successivement $\boxed{\lambda_2 = 0, \dots \lambda_{n-2} = 0}$. Il reste enfin

$$\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E \Rightarrow \boxed{\lambda_{n-1} = 0} \quad \text{CQFD}$$

– La famille $\mathcal{B}$ est alors génératrice : en effet, sinon on aurait un vecteur $y \notin \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$. Mais alors la famille $\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x), y\right)$ serait libre, et $\operatorname{Vect}\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x), y\right) \in E$ serait de dimension $n+1$, ce qui contredit le fait que $\dim E = n$.

– Finalement $\mathcal{B}$ est une base de E, CQFD.

Ex 16 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ker f^k \subset \ker f^{k+1}$:

Si $x \in \ker f^k$ alors $f^k(x) = 0_E$, d'où $f^{k+1}(x) = 0_E$, i.e. $x \in \ker f^{k+1}$ CQFD.

La suite $\left(\ker f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc croissante pour l'inclusion.

b) On suppose : $\exists p \in \mathbb{N}^* \ / \ \ker f^{p-1} \subsetneq \ker f^p = \ker f^{p+1}$.

i. Montrons que $\forall k \geqslant p$, on a $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ ($\left(\ker f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire*)

Soit $k \geqslant p$, et $x \in \ker f^{k+1}$. Alors

$$f^{k+1}(x) = 0_E \Rightarrow f^{p+1}\left(f^{k-p}(x)\right) = 0_E \Rightarrow f^{k-p}(x) \in \ker f^{p+1} \overset{\text{hyp.}}{=} \ker f^p$$

On en déduit :

$$f^p\left(f^{k-p}(x)\right) = 0_E \Rightarrow f^k(x) = 0_E \Rightarrow x \in \ker f^k$$

Ainsi $\ker f^{k+1} \subset \ker f^k$, ce qui doublé de l'inclusion du a) donne l'égalité cherchée.

ii. Montrons que $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \ker f^k \subsetneq \ker f^{k+1}$.

Par l'absurde sinon il existerait $k \in [\![0, p-1]\!] \ / \ \ker f^k \not\subsetneq \ker f^{k+1}$.

Mais la démonstration du (i) montre qu'alors $\left(\ker f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k, i.e.

$$\forall j \geqslant k,\ \ker f^j = \ker f^{j+1}$$

En particulier pour $j = p-1$, cela donne $\ker f^{p-1} = \ker f^p$, contradiction.

c) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

Si $y \in \operatorname{Im} f^{k+1}$ alors $\exists x \in E \ / \ y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$, d'où $y \in \operatorname{Im} f^k$ CQFD.

La suite $\left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante pour l'inclusion.

d) On suppose : $\exists p \in \mathbb{N}^* \ / \ \operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^p \subsetneq \operatorname{Im} f^{p-1}$.

i. Montrons que $\forall k \geqslant p$, on a $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$ ($\left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire*)

Soit $k \geqslant p$, et $y \in \operatorname{Im} f^k$. Alors

$$\exists x \in E \ / \ y = f^k(x) = f^{k-p}\left(f^p(x)\right)$$

Mais $f^p(x) \in \operatorname{Im} f^p \overset{\text{hyp.}}{=} \operatorname{Im} f^{p+1}$, donc $\exists t \in E \ / \ f^p(x) = f^{p+1}(t)$. Alors

$$y = f^{k-p}\left(f^{p+1}(t)\right) = f^{k+1}(t) \in \operatorname{Im} f^{k+1}$$

Ainsi $\operatorname{Im} f^k \subset \operatorname{Im} f^{k+1}$, qui compte tenu de l'inclusion c) donne l'égalité.

ii. Montrons que $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \operatorname{Im} f^{k+1} \subsetneq \operatorname{Im} f^k$.

Par l'absurde sinon il existerait $k \in [\![0, p-1]\!] \ / \ \operatorname{Im} f^{k+1} \not\subsetneq \ker f^k$.

Mais la démonstration du (i) montre qu'alors $\left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang k, i.e.

$$\forall j \geqslant k,\ \operatorname{Im} f^j = \operatorname{Im} f^{j+1}$$

En particulier pour $j = p-1$, cela donne $\operatorname{Im} f^{p-1} = \operatorname{Im} f^p$, contradiction.

Ex 17 Soit $E=\mathbb{R}^4$, F l'espace d'équation $x-y+t=0$, G la droite engendrée par le vecteur $u=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

- On a $E=F\oplus G$. En effet soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E$. Cherchons $(X_F,X_G)\in F\times G\ /\ X=X_F+X_G$

  X_G s'écrit nécessairement sous la forme $X_G=\lambda u$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Donc
  $$X_G=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad X_F=X-X_G=\begin{pmatrix}x-\lambda\\y-\lambda\\z-2\lambda\\t+\lambda\end{pmatrix}$$
  Mais
  $$X_F\in F\Rightarrow(x-\lambda)-(y-\lambda)+(t+\lambda)=0\Rightarrow\lambda=-x+y-t$$
  Ainsi
  $$X_F=\begin{pmatrix}2x-y+t\\x+t\\2x-2y+z+2t\\-x+y\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad X_G=\begin{pmatrix}-x+y-t\\-x+y-t\\-2x+2y-2t\\x-y+t\end{pmatrix}$$
  Inversement, il est facile de vérifier que pour X_G et X_F ainsi définis, on a bien
  $$X=X_F+X_G,\quad X_f\in F\quad\text{et}\quad X_G\in G$$
- Mais alors, si p et q sont les projecteurs associés à cette décomposition, on a
  $$\forall X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E,\ \begin{cases}p(X)=X_F=\begin{pmatrix}2x-y+t\\x+t\\2x-2y+z+2t\\-x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\2&-2&1&2\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\\q(X)=X_G=\begin{pmatrix}-x+y-t\\-x+y-t\\-2x+2y-2t\\x-y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&-1\\-1&1&0&-1\\-2&2&0&-2\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\end{cases}$$
  Les matrices canoniques de p et q sont donc respectivement
  $$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\2&-2&1&2\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&0&-1\\-1&1&0&-1\\-2&2&0&-2\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$$
  Si de plus s et la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors sa matrice S est :
  $$S=A-B=\begin{pmatrix}3&-2&0&2\\2&-1&0&2\\4&-4&1&4\\-2&2&0&-1\end{pmatrix}$$

Ex 18 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $(*)$:

a) La relation $(*)$, en notant $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{id} = \mathrm{id}_E$, s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} f \circ (f - 3\,\mathrm{id}) = 2\,\mathrm{id} \\ (f - 3\,\mathrm{id}) \circ f = 2\,\mathrm{id} \end{array}\right.$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ est inversible d'inverse } f^{-1} = \frac{1}{2}(f - 3\,\mathrm{id})}$$

b) Montrons que $\boxed{E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id})}$.

On pose $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et $G = \ker(f - 2\,\mathrm{id})$. Remarquons tout de suite :

$$x \in F \Longleftrightarrow f(x) = x \quad \text{et} \quad x \in G \Longleftrightarrow f(x) = 2x$$

Soit $x \in E$. On cherche $(x_F, x_G) \in F \times G \;/\; x = x_F + x_G$.

$*$ **Analyse** : supposons avoir x_F et x_G : alors par linéarité $f(x) = f(x_F) + f(x_G)$, d'où

$$f(x) = x_F + 2x_G$$

Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_F + x_G \\ f(x) = x_F + 2x_G \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x_F = 2x - f(x) = (f - 2\,\mathrm{id})(-x) \\ x_G = f(x) - x = (f - \mathrm{id})(x) \end{array}\right.}$$

$*$ **Synthèse** : Soient x_F et x_G ainsi définis :

- On a bien $x_F + x_G = x$.
- Montrons que $x_F \in F$:

  Première méthode : on a par linéarité

  $$f(x_F) = 2f(x) - f^2(x) \overset{(*)}{=} 2f(x) - (3f(x) - 2x) = 2x - f(x) = x_F \quad \text{CQFD}$$

  Deuxième méthode : $(*)$ s'écrit aussi $(f - \mathrm{id}) \circ (f - 2\,\mathrm{id}) = \mathbb{O}$. donc

  $$(f - \mathrm{id})(x_F) = (f - \mathrm{id}) \circ (f - 2\,\mathrm{id})(-x) = 0_E \quad \text{CQFD}$$

- Montrons que $x_G \in G$:

  Première méthode : on a par linéarité

  $$f(x_G) = f^2(x) - f(x) \overset{(*)}{=} 3f(x) - 2x - f(x) = 2(f(x) - x) = 2x_G \quad \text{CQFD}$$

  Deuxième méthode : $(*)$ s'écrit aussi $(f - 2\,\mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id}) = \mathbb{O}$. donc

  $$(f - 2\,\mathrm{id})(x_G) = (f - 2\,\mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id})(x) = 0_E \quad \text{CQFD}$$

c) Soit $p = f - \mathrm{id} \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$p^2 = f^2 - 2f + \mathrm{id} \overset{(*)}{=} (3f - 2\,\mathrm{id}) - 2f + \mathrm{id} = f - \mathrm{id} = p$$

On en déduit que p est un projecteur de E, dont l'associé est $q = \mathrm{id} - p = 2\,\mathrm{id} - f$.

Mais on sait qu'alors $E = \ker p \oplus \ker q$, ce qui permet de retrouver :

$$E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(2\,\mathrm{id} - f) = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id})$$

Ex 19 Soit $E=\mathbb{R}^3$, et (e_1,e_2,e_3) sa base canonique. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1)=5e_1+e_2-2e_3 \quad ; \quad f(e_2)=e_1+5e_2+2e_3 \quad ; \quad f(e_3)=-2e_1+2e_2+2e_3$$

a) Par linéarité, si $X=xe_1+ye_2+ze_3$, on a

$$f(X)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=x\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}=AX,\text{ avec } A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$$

Notons $C_1,C_2,\ C_3$ les colonnes de A. On remarque que $C_1-C_2=-2C_3$, donc

$$\boxed{\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(C_1,C_2,C_3)=\operatorname{Vect}(C_1,C_2),\text{ avec } (C_1C_2) \text{ libre}}$$

Pour le noyau : $X\in\ker f \iff AX=0_E$. Or

$$A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&2\\5&1&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&2\\0&-24&-12\\0&12&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker f\iff\begin{cases}x+y=0\\2y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-y\\z=-2y\end{cases}\iff X=y\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\ker f \text{ est la droite engendrée par } X_0=e_1-e_2+2e_3}$$

b) On pose $p=\frac{1}{6}f\in\mathcal{L}(E)$: on calcule

$$A^2=\begin{pmatrix}30&6&-12\\6&30&12\\-12&12&12\end{pmatrix}=6A\quad\text{donc}\quad\left(\frac{1}{6}A\right)^2=\frac{1}{36}A^2=\frac{1}{6}A$$

Il en résulte que $p^2=p$ et donc que <u>p est un projecteur de E</u>.

∗ <u>Espace de projection</u> (ou base): $\operatorname{Im} p=\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(C_1,C_2)$.

∗ <u>Direction</u> : $\ker p=\ker f=\operatorname{Vect}(e_0)$.

c) On en déduit que $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} p=\ker(p-\mathrm{id})=\ker(f-6\,\mathrm{id})$. Ainsi

$$\boxed{X\in\operatorname{Im} f\iff f(X)=6X}$$

∗ Le système $(S_1)\begin{cases}5x+y-2z=3\\x+5y+2z=3\\-2x+2y+2z=0\end{cases}$ s'écrit $f(X)=Y_1$, avec $Y_1=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$. Or

$$f(Y_1)=AY_1=\begin{pmatrix}18\\18\\0\end{pmatrix}=3Y_1$$

On en déduit que $Y_1\in\operatorname{Im} f$, et donc que (S_1) est **compatible**.

∗ Le système $(S_2)\begin{cases}5x+y-2z=1\\x+5y+2z=0\\-2x+2y+2z=0\end{cases}$ s'écrit $f(X)=Y_2$, avec $Y_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Or

$$f(Y_2)=AY_2=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}\neq 3Y_2$$

On en déduit que $Y_2\notin\operatorname{Im} f$, et donc que (S_2) est **incompatible**.

Ex 20 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, s un endomorphisme de F et φ un isomorphisme de F sur G. On pose, si $x = y + z \in E$, avec $y \in F$ et $z \in G$,

$$f(x) = \varphi(y) + s(y) + \varphi^{-1}(z)$$

On considère les projecteurs p et q asociés à la décomposition $E = F \oplus G$. Alors $\forall x \in E$,

$$f(x) = \varphi(p(x)) + s(p(x)) + \varphi^{-1}(q(x)) \quad i.e. \quad \boxed{f = \varphi \circ p + s \circ p + \varphi^{-1} \circ q}$$

Par composition et somme, on en déduit la linéarité de f. Reste à voir sa bijectivité :
Soit donc un élément x' de E : considérons l'équation $f(x) = x'$ $(*)$. On pose

$$\left\{\begin{array}{l} y = p(x) \\ z = q(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y' = p(x') \\ z' = q(x') \end{array}\right.$$

<u>Analyse</u> : si x est solution de $(*)$, alors

$$\varphi(y) + s(y) + \varphi^{-1}(z) = y' + z'$$

Par hypothèse, $\varphi(y) \in G,\ s(y) \in F,\ \varphi^{-1}(z) \in F,\ y' \in F$ et $z' \in G$. Par unicité de la décomposition sur F et G, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(y) = z' \\ s(y) + \varphi^{-1}(z) = y' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = \varphi^{-1}(z') \\ \varphi^{-1}(z) = y' - s\left(\varphi^{-1}(z')\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = \varphi^{-1}(z') \\ z = \varphi(y') - \varphi\left(s\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right) \end{array}\right.$$

Ainsi, l'unique solution possible de $(*)$ est

$$\boxed{x = \varphi^{-1}(z') + \varphi(y') - \varphi \circ s \circ \varphi^{-1}(z')}$$

<u>Synthèse</u> : ce vecteur ainsi défini est bien solution de $(*)$: en effet, comme sa composante sur F est $\varphi^{-1}(z')$ et sa composante sur G : $\varphi(y') - \varphi\left(s\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right)$ on a

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \varphi\left(\varphi^{-1}(z')\right) + s\left(\varphi^{-1}(z')\right) + \varphi^{-1}\left(\varphi(y') - \varphi\left(s\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right)\right) \\ & = & z' + s\left(\varphi^{-1}(z')\right) + y' - s\left(\varphi^{-1}(z')\right) \\ & = & z' + y' \\ & = & x' \end{array}$$

Finalement $(*)$ admet une unique solution dans E et f est un automorphisme de E, et sa réciproque a pour expression, si $x = y + z$, avec $y \in F, z \in G$:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \varphi^{-1}(z) + \varphi(y) - \varphi \circ s \circ \varphi^{-1}(z)}$$

Ex 21 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non trivial, et p et q deux projecteurs de E.
Montrons que $p \circ q = q \circ p = p \iff \left\{\begin{array}{l} \ker q \subset \ker p \\ \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q \end{array}\right.$

- On suppose que $p \circ q = q \circ p = p$:
  - Si $x \in \ker q$, alors $q(x) = 0_E$, donc $p(x) = p(q(x)) = 0_E$, donc $x \in \ker p$. Ainsi $\boxed{\ker q \subset \ker p}$
  - Si $x \in \operatorname{Im} p$, alors $p(x) = x$, donc $q(x) = q(p(x)) = p(x) = x$, donc $x \in \operatorname{Im} q$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q}$
- On suppose que $\left\{\begin{array}{l} \ker q \subset \ker p \\ \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q \end{array}\right.$: on a $E = \operatorname{Im} q \oplus \ker q$, donc pour montrer que $p \circ q = q \circ p = p$, il suffit (par linéarité) de montrer que ces trois applications coïncident sur $\operatorname{Im} q$ et $\ker q$:
  - Si $x \in \operatorname{Im} q$, alors $q(x) \in \operatorname{Im} q$, et $p(x) \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$ donc $q(p(x)) = p(x)$ et $p(q(x)) = p(x)$.
  - Si $x \in \ker q \subset \ker p$, alors $p(q(x)) = q(p(x)) = p(x) = 0_E$.

  Par linéarité, on a bien $p \circ q = q \circ p = p$.

Remarque : on pouvait aussi écrire plus formellement (à l'aide des projecteurs associés) :

$$\begin{array}{rcl} p \circ q & = & p \iff p \circ (\mathrm{id}_E - q) = 0 \iff \operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - q) \subset \ker p \iff \ker q \subset \ker p \\ q \circ p & = & p \iff (\mathrm{id}_E - q) \circ p = 0 \iff \operatorname{Im} p \subset \ker(\mathrm{id}_E - q) \iff \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q \end{array}$$

Ex 22 Soient p et q deux projecteurs de E. Montrons que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=\mathbb{O}$.
Rappelons que $p^2=p$ et $q^2=q$, et $p+q$ est un projecteur si et seulement si $(p+q)^2=p+q$. Or

$$\begin{aligned}(p+q)^2=p+q \quad &\Leftrightarrow \quad p^2+p\circ q+q\circ p+q^2=p+q\\ &\Leftrightarrow \quad p+p\circ q+q\circ p+q=p+q\\ &\Leftrightarrow \quad p\circ q=-q\circ p\end{aligned}$$

– Si $p+q$ est un projecteur, alors $p\circ q=-q\circ p$, d'où

$$\left\{\begin{array}{l} p\circ p\circ q=-p\circ q\circ p\\ p\circ q\circ p=-q\circ p\circ p\end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} p\circ q=-p\circ q\circ p\\ p\circ q\circ p=-q\circ p\end{array}\right.$$

On en déduit que $p\circ q=q\circ p$, ce qui, comparé à $p\circ q=-q\circ p$ donne $p\circ q=q\circ p=\mathbb{O}$.

– La réciproque est évidente (si $p\circ q=q\circ p=\mathbb{O}$, alors $(p+q)^2=p^2+p\circ q+q\circ p+q^2=p+q$), d'où

$$\boxed{p+q \text{ est un projecteur} \Longleftrightarrow p\circ q=q\circ p=\mathbb{O}}$$

Supposons que $p+q$ soit un projecteur. Alors :

– Montrons que $\ker(p+q)=\ker p\cap\ker q$ par double inclusion :

  * Si $x\in\ker p\cap\ker q$, alors $p(x)=q(x)=0_E$, d'où $(p+q)(x)=0_E$: $x\in\ker(p+q)$.

$$\ker p\cap\ker q\subset\ker(p+q)$$

  * Inversement, si $x\in\ker(p+q)$, alors $p(x)+q(x)=0_E$. En composant par p et par q à gauche :

$$\left\{\begin{array}{l} p\circ p(x)+p\circ q(x)=0_E\\ q\circ p(x)+q\circ q(x)=0_E\end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} p(x)=0_E\\ q(x)=0_E\end{array}\right. \quad (\text{car } p\circ q=q\circ p=\mathbb{O})$$

  D'où $x\in\ker p\cap\ker q$, et donc $\ker(p+q)\subset\ker p\cap\ker q$.

– Montrons que $\operatorname{Im}(p+q)=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Im}q$.

  * Si $x\in\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q$, alors $p(x)=x$ donc $q(p(x))=q(x)=x$, et comme $q\circ p=q\circ p=\mathbb{O}$, on a $x=0_E$.
  On en déduit que la somme $\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q$ est directe.
  Montrons $\operatorname{Im}(p+q)=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Im}q$ par double inclusion :

  * Si $x\in\operatorname{Im}(p+q)$, alors ($p+q$ est un projecteur) : $(p+q)(x)=x$, i.e. $x=p(x)+q(x)\in\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q$

$$\operatorname{Im}(p+q)\subset\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q$$

  * Si $x\in\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q$, alors $\exists(y,z)\in E^2\ /\ x=p(y)+q(z)$.
  En composant : par p : $p(x)=p\circ p(y)+p\circ q(z)=p(y)$
  par q : $q(x)=q\circ p(y)+q\circ q(z)=q(z)$
  On en déduit : $x=p(x)+q(x)=(p+q)(x)\in\operatorname{Im}(p+q)$:

$$\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q\subset\operatorname{Im}(p+q)$$

Ex 23 Soient f, p, q trois endomorphismes de E et a, b deux scalaires distincts vérifiant : $\left\{\begin{array}{ll} p+q=\mathrm{id} & (H_0) \\ ap+bq=f & (H_1) \\ a^2p+b^2q=f^2 & (H_2) \end{array}\right.$.

On notera $\mathbb{O}$ pour $0_{\mathcal{L}(E)}$ et id pour id_E .

a) Un calcul simple donne, à l'aide de H_0, H_1 et H_2

$$\begin{aligned}(f-a\,\mathrm{id})\circ(f-b\,\mathrm{id}) &= f^2-(a+b)\,f+ab\,\mathrm{id} \\ &= \left(a^2p+b^2q\right)-(a+b)\,(ap+bq)+ab\,(p+q) \\ &= \mathbb{O}\end{aligned}$$

Mais par ailleurs, toujours avec H_0 et H_1

$$\left\{\begin{array}{l} f-a\,\mathrm{id}=(b-a)\,q \\ f-b\,\mathrm{id}=(a-b)\,p \end{array}\right. \quad \text{d'où } -(b-a)^2\,(q\circ p)=\mathbb{O}$$

Comme $a\neq b$, il vient $q\circ p=\mathbb{O}$. Alors

$$p^2\overset{H_0}{=}(\mathrm{id}-q)\circ p=p-q\circ p=p$$

p est donc un projecteur de E et $q=\mathrm{id}-p$ est son associé.

Remarque : on a alors automatiquement $p\circ q=\mathbb{O}$.

b) <u>Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^n=a^np+b^nq$.</u>

On peut démontrer facilement ce résultat par récurrence, mais nous proposons une méthode plus directe :

Puisque p et q commutent, on peut écrire pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f^n=(ap+bq)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ap)^k\circ(bq)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\left(p^k\circ q^{n-k}\right)$$

Isolons les termes extrêmes et utilisons que si $j\geqslant 1$, alors $p^j=p$ et $q^j=q$:

$$\begin{aligned}f^n &= a^np^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\left(p^k\circ q^{n-k}\right)+b^nq^n \\ &= a^np+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\,(p\circ q)+b^nq \\ &= a^np+b^nq\end{aligned}$$

La formule est de plus vraie pour $n=0$ (hypothèse H_0), d'où le résultat.

c) On suppose $ab\neq 0$: la formule montrée en a)

$$f^2-(a+b)\,f+ab\,\mathrm{id}=\mathbb{O}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f\circ(f-(a+b)\,\mathrm{id})=-ab\,\mathrm{id} \\ (f-(a+b)\,\mathrm{id})\circ f=-ab\,\mathrm{id} \end{array}\right.$$

montre que $f\in GL(E)$ et $f^{-1}=\frac{1}{ab}\left((a+b)\,\mathrm{id}-f\right)$. Mais alors, si $n\in\mathbb{N}$, posons

$$g_n=a^{-n}p+b^{-n}q$$

Alors

$$g_n\circ f^n=\left(a^{-n}p+b^{-n}q\right)\circ\left(a^np+b^nq\right)=p^2+\mathbb{O}+\mathbb{O}+q^2=p+q=\mathrm{id}$$

Cela prouve que f^n admet pour inverse g_n, et donc

$$f^{-n}=(f^n)^{-1}=a^{-n}p+b^{-n}q$$

Autrement dit $\boxed{\text{la formule du b) reste valable pour } n\in\mathbb{Z}}$

Ex 24 On se donne une application linéaire $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

On suppose qu'il existe une application linéaire $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ vérifiant $f\circ g\circ f=f\ \ (*)$

a) $*$ En composant par g à droite dans $(*)$, il vient $f\circ g\circ f\circ g=f\circ g\quad i.e.\quad (f\circ g)^2=f\circ g$:
<u>$f\circ g$ est donc un projecteur de $\mathbb{R}^m$</u> (il est clair que $f\circ g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$).

$*$ De même à gauche : $g\circ f\circ g\circ f=g\circ f$, et <u>$g\circ f$ un projecteur de $\mathbb{R}^n$</u>.

$*$ <u>Montrons que $\operatorname{Im}(f\circ g)=\operatorname{Im}f$</u> par double inclusion :

- $\operatorname{Im}(f\circ g)\subset\operatorname{Im}f$ est un fait général.
- Inversement $\operatorname{Im}f\overset{(*)}{=}\operatorname{Im}((f\circ g)\circ f)\subset\operatorname{Im}(f\circ g)$ par la même propriété.

$*$ <u>Montrons que $\ker(g\circ f)=\ker f$</u> par double inclusion :

- $\ker f\subset\ker(g\circ f)$ est un fait général.
- $\ker(g\circ f)\subset\ker(f\circ(g\circ f))=\ker f$.

b) Soit $Y\in\mathbb{R}^m$. Puisque $\operatorname{Im}f=\operatorname{Im}(f\circ g)$, et que $f\circ g$ est un projecteur, on a donc

$$\boxed{Y\in\operatorname{Im}f\iff Y\in\operatorname{Im}(f\circ g)\iff f\circ g(Y)=Y}$$

c) Soit donc $Y\in\operatorname{Im}f$. Alors l'équation linéaire $f(X)=Y$ s'écrit

$$\begin{aligned}f(X)=Y&\iff f(X)=f\circ g(Y)\\&\iff f(X)-f\circ g(Y)=0_{\mathbb{R}^m}\\&\iff f(X-g(Y))=0_{\mathbb{R}^m}\\&\iff X-g(Y)\in\ker f\end{aligned}$$

Mais comme $\ker f=\ker(g\circ f)=\operatorname{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}-g\circ f)$ (projecteur associé), on a, en posant $h=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}-g\circ f$:

$$f(X)=Y\iff X-g(Y)\in\operatorname{Im}(h)\iff\exists Z\in\mathbb{R}^n\ /\ X-g(Y)=h(Z)$$

Ainsi, avec $\boxed{h=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}-g\circ f}$, les solutions de $f(X)=Y$ sont de la forme

$$\boxed{X=g(Y)+h(Z),\quad Z\in\mathbb{R}^n}$$