Séries numériques

1. Définitions

a) **Séries numériques :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
On appelle **série de terme général** u_n (ou "série des u_n") et on note $\sum u_n$ la suite de terme général

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

Le terme S_n est appelé **somme partielle** d'ordre n de la série.

b) **Convergence :** on dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** lorsque (S_n) converge.
Dans ce cas, la limite S, appelée **somme de la série**, se note

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$$

Le réel $R_n = S - S_n$ est appelé **reste** d'ordre n de la série, de sorte que $S = S_n + R_n$. On a alors

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} \quad \text{et} \quad \boxed{(R_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

Exemple de référence : **séries géométriques** (1) . Soit $x \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\text{Si } |x| < 1, \text{ alors } \sum x^n \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Exemple de référence 2 : **exponentielle** (1). Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\sum \frac{x^n}{n!} \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

En particulier $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente de somme e.

Remarque : on ne modifie pas la nature de la série $\sum u_n$ en modifiant ses premiers termes

2. Propriétés

a) **Limite de (u_n) :** $\boxed{\text{si } \sum u_n \text{ est une série convergente, alors } \lim u_n = 0}$

- **La réciproque est fausse** : $\lim \frac{1}{n} = 0$ mais $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ **diverge** (série harmonique)
- En particulier, par contraposée : $\boxed{\text{si } (u_n) \text{ ne converge pas vers } 0, \text{ alors la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$
  On dit qu'il y a **divergence grossière** de la série.

Exemple de référence : **séries géométriques** (2) . Soit $x \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\sum x^n \text{ est convergente si et seulement si } |x| < 1}$$

b) **Séries télescopiques :** on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si la suite } (v_n) \text{ converge}}$$

En effet, on a pour tout n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

Remarque : c'est une méthode pour la convergence des séries, mais aussi pour l'étude des suites.

c) **Propriétés algébriques :**

(i) $\boxed{\text{Toute combinaison linéaire de deux séries convergentes } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ est convergente.}}$ On a alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \ \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n}$$

(ii) $\boxed{\text{La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente}}$

(iii) Si $u_n = x_n + iy_n$, où (x_n) et (y_n) sont des suites réelles, alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \sum x_n \text{ et } \sum y_n \text{ convergent et alors } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n}$$

3. Séries à termes positifs

a) **Critère de convergence :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **réels positifs.** Alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante. Donc

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge si } (S_n) \text{ est majorée}}$$

b) **Critères de comparaison :** soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives**.

(i) $\boxed{\text{On suppose qu'à partir du rang } N \text{ on ait } u_n \leqslant v_n \text{ et que } \sum v_n \text{ converge. Alors } \sum u_n \text{ converge}}$

On déduit de ce résultat :

1. $\boxed{\text{si } u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ converge}}$
2. $\boxed{\text{si } u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ converge}}$
3. $\boxed{\text{si } u_n \sim v_n \text{ alors } \sum v_n \text{ converge si et seulement si } \sum u_n \text{ converge}}$

(ii) $\boxed{\text{On suppose qu'à partir du rang } N \text{ on ait } u_n \leqslant v_n \text{ et que } \sum u_n \text{ diverge. Alors } \sum v_n \text{ diverge}}$

Ainsi :

1. $\boxed{\text{si } u_n = O(v_n) \text{ et } \sum u_n \text{ diverge, alors } \sum u_n \text{ diverge}}$
2. $\boxed{\text{si } u_n = o(v_n) \text{ et } \sum u_n \text{ diverge, alors } \sum u_n \text{ diverge}}$

Attention : **ces critères sont faux pour des séries à termes quelconques**.

Toutefois, pour l'équivalence, il suffit qu'une des deux suites soit positive (l'autre l'est nécessairement à partir d'un certain rang)

c) **Comparaison séries/intégrales :** on suppose que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est **continue, positive et décroissante.**

On pose $u_n = f(n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n}$$

ou pour tout $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt}$$

Par sommation, on obtient

$$\boxed{\int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \int_0^n f}$$

Ce résultat extrèmement utile (et ses variantes) permet de transférer l'étude d'une série vers une étude d'intégrale et inversement.

En particulier, il permet d'établir la convergence des séries de Riemann :

d) **Convergence des séries de Riemann :** soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

En particulier $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Application : "**méthode du** n^α" : soit $\sum u_n$ une série à termes positifs (à partir d'un certain rang)

$$\boxed{\text{Si on trouve } \alpha > 1 \text{ tel que } n^\alpha u_n \text{ converge vers un réel fini, alors la série } \sum u_n \text{ converge}}$$

En effet si $\lim n^\alpha u_n = 0$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et si $\lim n^\alpha u_n = \ell > 0$ alors $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$.

On conclut avec b). De la même manière :

$$\boxed{\text{Si on trouve } \alpha \leqslant 1 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} n^\alpha u_n \text{ converge vers } \ell > 0 \\ \text{ou } n^\alpha u_n \text{ diverge vers } +\infty \end{array} \right. \text{, alors la série } \sum u_n \text{ diverge}}$$

Exemples : nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+3}$, $v_n = \dfrac{n+1}{n^3+2}$, $w_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$, $z_n = e^{-n}$

4. Séries à termes quelconques

a) **Convergence absolue :** soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques réels ou complexes.

(i) On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

(ii) Théorème : $\boxed{\text{si } \sum u_n \text{ est absolument convergente, alors elle est convergente.}}$

De plus dans ce cas on a l'inégalité triangulaire généralisée

$$\boxed{\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}$$

Attention : la réciproque est fausse. par exemple on montre que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (critère des séries alternées) mais elle n'est pas absolument convergente.

b) <u>**Comparaison à une série à termes positifs :**</u> on suppose (u_n) quelconque et (v_n) **à termes positifs**.

1. $\boxed{\text{si } u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ converge absolument}}$
2. $\boxed{\text{si } u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge, alors } \sum u_n \text{ converge absolument}}$

Attention : éviter l'utilisation d'équivalents pour les séries à termes quelconques.

Exemples : $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2+1}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^2}$ sont absolument convergentes.