Ex 1 Quelle est la classe sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto 1 - 2x + x \sin \sqrt{x}$

a) Par somme, composée et produit, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dérivabilité en 0 : pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -2 + \sin \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\to} 2$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 2$.

c) Continuité de f' en 0 : pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 + \sin \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \cos(x) \\ &= -2 + \sin \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \cos(x) \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -2 = f'(0)$, et f' est continue en 0, ce qui assure :

$$\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}_+)}$$

d) Dérivée seconde : pour tout $x > 0$

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{\sin \sqrt{x}}{x} + \frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} > \frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = +\infty$ et que f' n'est pas dérivable en 0 : $\boxed{f \notin C^2(\mathbb{R}_+)}$

Ex 2 Soit $f : x \mapsto x^3 \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Comme $\lim\limits_0 f = 0$, f se prolonge par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = 0}$.
On note encore f ce prolongement, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit.

b) Classe C^1 : pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = x \ln x \underset{x \to 0}{\to} 0$$

Donc f est dérivable en 0 de dérivée nulle. De plus pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 \underset{x \to 0}{\to} 0 = f'(0)$$

Donc f' est continue en 0. Ainsi $\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}_+)}$

c) Classe C^2 : pour tout $x > 0$:

$$\frac{f'(x)}{x} = 3x \ln x + x \underset{x \to 0}{\to} 0$$

Donc $f''(0)$ existe et vaut 0. De plus pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = 6x \ln x + 5x \underset{x \to 0}{\to} 0 = f''(0)$$

Donc f'' est continue en 0. Ainsi $\boxed{f \in C^2(\mathbb{R}_+)}$

d) Pour tout $x > 0$

$$\frac{f''(x)}{x} = 6 \ln x + 5 \underset{x \to 0}{\to} -\infty$$

Donc $f \notin C^3(\mathbb{R}_+)$.

Ex 3 Convexité. On dit $f \in C^2(I)$ est convexe lorque $f'' \geqslant 0$.

a) Soit $f > 0$ de classe C^2 sur I. On suppose que $\ln f$ est convexe sur I. Alors

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} \quad \text{et} \quad (\ln f)'' = \frac{f''f - f'^2}{f^2} \geqslant 0$$

donc $f''f - f'^2 \geqslant 0$, i.e. $f''f \geqslant f'^2 \geqslant 0$. Comme $f > 0$ sur I, il s'ensuit que $f'' \geqslant 0$ sur I :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I}$$

La réciproque est fausse : la fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ ($f'' : x \mapsto 2$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$), mais $\ln f : x \mapsto \ln\left(x^2\right)$ n'est pas convexe, car $(\ln f)' : x \mapsto \frac{2}{x}$ et $(\ln f)'' : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soient $f > 0$ et $g > 0$ de classe C^2 sur I. On a vu que $\ln f$ est convexe sur I si et seulement si

$$f''f - f'^2 \geqslant 0$$

Or pour tout $t \in I$ le polynôme $P_t : x \mapsto f(t)\,x^2 + 2f'(t)\,x + f''(t)$ a pour discriminant

$$\Delta_t = 4\left(f'^2(t) - f''(t)\,f(t)\right)$$

Donc $\ln f$ convexe sur I si et seulement si $\forall t \in I,\ \Delta_t \leqslant 0$ si et seulement si $\forall t \in I,\ P_t$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Ce signe étant celui de $f(t) > 0$, il vient :

$$\boxed{\ln f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } \forall t \in I,\ P_t \text{ est positif sur } \mathbb{R}}$$

On suppose alors $\ln f$ et $\ln g$ convexes sur I. Le critère précédent assur que $\forall t \in I,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(t)\,x^2 + 2f'(t)\,x + f''(t) \geqslant 0 \\ g(t)\,x^2 + 2g'(t)\,x + g''(t) \geqslant 0 \end{cases}$$

Par somme

$$(f(t) + g(t))\,x^2 + 2\,(f'(t) + g'(t))\,x + (f''(t) + g''(t)) \geqslant 0$$

soit

$$(f+g)(t)\,x^2 + 2\,(f+g)'(t)\,x + (f+g)''(t) \geqslant 0$$

qui à son tour assure que $\boxed{\ln(f+g) \text{ est convexe}}$.

c) Soit $f \in C^2(I)$ une fonction convexe sur I. Montrons que C_f est au dessus de toutes ses tangentes, c'est-à-dire

$$\forall a \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\,f'(a)$$

Fixons $a \in I$ et considérons la fonction :

$$\varphi : x \mapsto f(x) - (f(a) + (x-a)\,f'(a))$$

Par somme de f et d'une fonction affine, φ est de classe C^2 sur I, et $\forall x \in I$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$$

Or $f'' \geqslant 0$ sur I, donc f' est croissante sur I, et on a le tableau :

x		a	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Il s'ensuit que $\forall x \in I,\ \varphi(x) \geqslant 0$, CQFD.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$. Une récurrence donne

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

b) Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

donc par linéarité

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

$$\boxed{g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}\right)}$$

Remarque : comme

$$(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{k}\left(1-(-1)^k\right) x^{n+1-k} = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \tbinom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}$$

on obtient

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \tbinom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}}{(x^2-1)^{n+1}}$$

Ex 5 Soit $f : x \mapsto x^3 e^{-2x}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'après Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= x^3 \frac{d^n}{dx^n} e^{-2x} + 3nx^2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-2x} + 6\frac{n(n-1)}{2} x \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-2x} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} e^{-2x} \\
&= \left(x^3(-2)^n + 3nx^2(-2)^{n-1} + 3n(n-1)x(-2)^{n-2} + n(n-1)(n-2)(-2)^{n-3}\right) e^{-2x} \\
&= (-2)^{n-3}\left(x^3(-2)^3 + 3nx^2(-2)^2 + 3n(n-1)x(-2) + n(n-1)(n-2)\right) e^{-2x}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-2)^{n-3}\left(-8x^3 + 12nx^2 - 6n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right) e^{-2x}}$$

Ex 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$. La formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k e^{-x}}{dx^k} \times \frac{d^{n-k}x^n}{dx^{n-k}} \\
&= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{d^{n-k}x^n}{dx^{n-k}}
\end{aligned}$$

On sait que si $p \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{d^p x^n}{dx^p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$, d'où

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n!}{k!} x^k}$$

qui est bien une expression polynomiale.

Ex 7 Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Montrons par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H(n):\forall x>0,\ \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $H(1)$ est vraie car $\forall x>0,\ \dfrac{d}{dx}\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{-1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$:

$$\forall x>0,\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En effet, pour tout $x>0$, en écrivant $x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x\times x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a d'après Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= = x\times\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)+(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= x\times\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\quad\text{(d'après } H(n)\text{)}\\
&= (-1)^n x\left[\frac{-(n+1)}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^{n+1}}\frac{-1}{x^2}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\quad\text{CQFD.}
\end{aligned}$$

- Par récurrence, notre proposition est établie pour tout entier $n\geqslant 1$.

Ex 8 Pour $x\in\,]-1,1[$, on pose $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
f est bien définie sur $]-1,1[$ (car on a sur cet intervalle $x^2<1$, donc $x^2-1>0$)

De plus elle est la composée de fonctions de classe C^∞ : $\underline{f \text{ est donc de classe } C^\infty \text{ sur }]-1,1[}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N},\ H(n)$: il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}$$

- $H(0)$ est vraie avec le polynôme constant $P_0=1$ (évident).
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$: l'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned}
\forall x\in\,]-1,1[,\quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}\Big)\\
&= \frac{P_n'(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}+\frac{2x\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(1-x^2)^{n+3/2}}P_n(x)\\
&= \frac{\left(1-x^2\right)P_n'(x)+(2n+1)\,xP_n(x)}{(1-x^2)^{n+3/2}}
\end{aligned}$$

En posant

$$\boxed{P_{n+1}(x)=\left(1-x^2\right)P_n'(x)+(2n+1)\,xP_n(x)}\quad(*)$$

on a bien

$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad f^{(n+1)}(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}\quad\text{CQFD.}$$

On a vu que $\forall x\in\,]-1,1[,\ \boxed{P_0(x)=1}$, et la relation $(*)$ donne

$$\boxed{P_1(x)=x}\quad\text{puis}\quad\boxed{P_2(x)=1+2x^2}$$

Ex 9 Pour $x \in \left]-1,1\right[$, on pose $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) Il n'est pas difficile de dériver f (de classe C^∞ sur $\left]-1,1\right[$ par produit $\arcsin \times \arcsin'$) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-1,1\right[,\quad f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} f(x) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \left(1-x^2\right) f'(x) - x f(x) = 1} \qquad (*)$$

b) Soit $n \geqslant 2$. Appliquons la formule de Leibniz à l'ordre n à cette égalité : pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(1-x^2\right) f'(x)\right] &= \left(1-x^2\right) f^{(n)}(x) - (n-1)\, 2x f^{(n-1)}(x) - \tfrac{(n-1)(n-2)}{2} 2 f^{(n-2)}(x) + \mathbf{0} \\ &= \left(1-x^2\right) f^{(n)}(x) - (2n-2)\, x f^{(n-1)}(x) - (n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) \end{aligned}$$

et

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x f(x)\right] = x f^{(n-1)}(x) + (n-1) f^{(n-2)}(x) + \mathbf{0}$$

La dérivation de $(*)$ donne ainsi

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(1-x^2\right) f'(x)\right] - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x f(x)\right] = 0$$

soit

$$\boxed{\left(1-x^2\right) f^{(n)}(x) - (2n-1)\, x f^{(n-1)}(x) - (n-1)^2 f^{(n-2)}(x) = 0}$$

c) On pose $u_n = f^{(n)}(0)$. On substitue 0 à x dans la formule précédemment étable : $\forall n \geqslant 2$

$$u_n - (n-1)^2 u_{n-2} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{u_n = (n-1)^2 u_{n-2}} \qquad (\$)$$

i. <u>Termes d'indice pair</u> : montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{2p} = 0}$

- On a clairement $u_0 = f^{)0}(0) = f(0) = 0$.
- Si $p \in \mathbb{N}$ et $u_{2p} = 0$, alors la formule (\$) donne $u_{2(p+1)} = (2p+2-1)^2 u_{2p} = 0$: récurrence établie.

ii. <u>Termes d'indice impair</u> : remarquons

$$\begin{aligned} u_1 &= f^{(1)}(0) = f'(0) = 1 \quad ((*) \text{ nous le dit}) \\ u_3 &= 2^2 u_1 = 2^2 \\ u_5 &= 4^2 u_3 = 2^2 4^2 \end{aligned}$$

On conjecture

$$u_{2p+1} = 2^2 4^2 \cdots (2p)^2 = (2.4 \cdots (2p))^2 = (2^p p!)^2$$

Montrons donc par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2}$

- La formule est valable pour $p = 0$, comme on l'a vu.
- Si $p \in \mathbb{N}$ et $u_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2$, alors la formule (\$) donne

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)+1} &= u_{2p+3} \\ &= (2p+2)^2 u_{2p+1} \quad (*) \\ &= 2^2 (p+1)^2 2^{2p} (p!)^2 \quad \text{(HDR)} \\ &= 2^{2(p+1)} \left[(p+1)!\right]^2 \ \text{CQFD} \end{aligned}$$

La récurrence est donc établie