EXERCICE 1 On considère la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x/2)} & \text{si } x \in \left]0, \pi\right] \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. – Il est clair que g est continue sur $\left]0, \pi\right]$ (quotient de fonctions continues, dénominateur non nul)

– De plus, en écrivant $\forall x \in \left]0, \pi\right],\ g(x) = 2x \dfrac{x/2}{\sin x/2}$ et en remarquant que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x/2}{\sin x/2} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

on obtient par produit, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$: d'où la continuité de g en 0, et par suite sur $[0, \pi]$.

2. D'autre part, $\forall x \in \left]0, \pi\right],\ \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \dfrac{x}{\sin(x/2)} = 2\dfrac{x/2}{\sin(x/2)}$, d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 2$$

On en déduit que g est dérivable en 0, et que $\boxed{g'(0) = 2}$.

3. g est clairement dérivable sur $\left]0, \pi\right]$, et

$$\forall x \in \left]0, \pi\right], \quad g'(x) = \frac{2x}{\sin(x/2)} - \frac{x^2 \cos(x/2)}{2\sin^2(x/2)} = 4\,\frac{x/2}{\sin x/2} - 2\cos(x/2)\left(\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right)^2$$

De $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x/2}{\sin x/2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x/2}{\sin x/2}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 0} (x/2) = 1$, on tire donc

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 2 = f'(0)$$

g' est donc continue en 0. Comme elle l'est banalement sur $\left]0, \pi\right]$, elle est finalement continue sur $[0, \pi]$
Conclusion :

$$\boxed{g \in C^1([0, \pi])}$$

$\boxed{\textbf{EXERCICE 2}}$ On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que $f(x)$ existe, il faut que $\dfrac{2x}{1+x^2}$ soit dans l'intervalle $[-1,1]$. Or

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \Longleftrightarrow -1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2$$

– La première inégalité revient à $x^2+2x+1 \geqslant 0$, ce qui est vrai ($(x+1)^2 \geqslant 0$).

– La deuxième revient à $x^2-2x+1 \geqslant 0$, ce qui est vrai ($(x-1)^2 \geqslant 0$).

Donc $\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ a bien un sens pour tout réel x. $\arctan$ étant définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R} \text{ (et continue par somme et composée)}}$$

2. Dérivée : f est dérivable en tout point x tel que $\frac{2x}{1+x^2} \notin \{-1,1\}$ (car $\arcsin$ n'est pas dérivable en -1 et 1). L'étude précédente montre que

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \Longleftrightarrow x = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2x}{1+x^2} = -1 \Longleftrightarrow x = -1$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4-2x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\left(1-\text{signe}\left(1-x^2\right)\right)}$$

3. Simplifications

a) On suppose que $x \in \left]-1,1\right[$. Alors $1-x^2>0$,et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}(1-1) = 0$
f est donc constante sur $\left]-1,1\right[$. Comme $f(0)=0$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[,\ f(x) = 0}$$

Remarque : par continuité de f, on a alors nécessairement $f(1) = f(-1) = 0$

b) On suppose que $x \in \left]1,+\infty\right[$. Alors ici $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}(1-(-1)) = \dfrac{1}{1+x^2}$
Donc $\exists C \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f(x) = \arctan x + C$. Or

$$\begin{cases} f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} - \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{1+3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \\ f(\sqrt{3}) = \arctan\sqrt{3} + C = \frac{\pi}{3} + C \end{cases} \Rightarrow C = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}}$$

c) On suppose que $x \in]-\infty, -1[$. On a encore $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Donc $\exists C' \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in]-\infty, -1[\,,\ f(x) = \arctan x + C'$. On trouve $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{3} + C'$. d'où

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, -1[\,,\ f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{4}}$$

4. On pose $\theta = \arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Alors $\tan\theta = x$, et

$$f(x) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\arcsin\left(2\tan\theta\cos^2\theta\right)$$

Soit

$$\boxed{f(x) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\arcsin(\sin 2\theta)}$$

b) On distingue donc trois cas :

– Si $x \in]-1, 1[$, alors $-\dfrac{\pi}{4} < \arctan x < \dfrac{\pi}{4}$, d'où $-\dfrac{\pi}{2} < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\arcsin(\sin 2\theta) = 2\theta$$

Donc

$$f(x) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}2\theta = \boxed{0}$$

– Si $x \in]1, +\infty[$, alors $\dfrac{\pi}{4} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\dfrac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$. Alors

$$\arcsin(\sin 2\theta) = \pi - 2\theta$$

Donc

$$f(x) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}(\pi - 2\theta) = \theta - \frac{\pi}{4} = \boxed{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$$

– Si $x \in]-\infty, -1[$, alors $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < -\dfrac{\pi}{4}$, d'où $-\pi < 2\theta < -\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\arcsin(\sin 2\theta) = -\pi - 2\theta$$

Donc

$$f(x) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}(-\pi - 2\theta) = \theta + \frac{\pi}{4} = \boxed{\arctan x + \frac{\pi}{4}}$$

Remarque : il est clair que f est impaire, donc on peut déduire du calcul sur $]1, +\infty[$ que

$$\forall x \in]-\infty, -1[\,,\ f(x) = -f(-x) = -\left(\arctan(-x) - \frac{\pi}{4}\right) = \arctan x + \frac{\pi}{4}$$

5. Courbe de f:

PROBLEME On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad \forall x\neq 0,\ f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$$

1. Etude des variations de f

a) i. Continuité en 0 : pour $x\neq 0$, posons $y=\dfrac{1}{x}$, de sorte que $f\left(\dfrac{1}{y}\right)=y^2e^{-y}$. Alors

- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2}{e^y}=0=f(0)$ (comparaison classique)
- $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{y\to-\infty} y^2e^{-y}=+\infty$ de manière immédiate.

Ainsi f est continue à droite en 0 mais n'est pas continue à gauche

ii. Dérivabilité en 0 : f n'est évidemment pas dérivable à gauche (elle n'est pas continue).
Etudions le taux de variations en $0+$:

$$\forall x>0,\ \tau(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x^3}e^{-1/x}$$

Le même changement qu'au dessus, $y=\dfrac{1}{x}$, donne donc $\lim\limits_{x\to 0}\tau(x)=0$. Donc

f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

b) Dérivons f sur $\mathbb{R}^*$ (elle y est de classe C^∞) :

$$\forall x\neq 0,\ f'(x)=\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x}=\frac{1-2x}{x^4}e^{-1/x}$$

Le tableau de variations vient immédiatement, quand on a remarqué que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-1/x}=1$, donc $\lim\limits_{\pm\infty} f=0$.

x	$-\infty$	0	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖ $0 \nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow 0$

L'axe (Ox) est ainsi asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$, et l'axe (Oy) en 0^-.

2. Dérivées successives de la fonction f et polynômes associés

a) Sur $]0,+\infty[$, f est le produit de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ de classe C^∞ et de la fonction composée de l'exponentielle, de classe C^∞ avec la fonction $x\mapsto-\dfrac{1}{x}$, également de classe C^∞. Les théorèmes généraux permettent de conclure à $\boxed{f\in C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})}$

b) Montrons par récurrence la proposition $H(n)$ suivante

Il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x>0,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-1/x}$

i. La proposition $H(0)$ est évidente avec le polynôme $P=1$.

ii. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$: par hypothèse de récurrence on a

$$\forall x>0,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-1/x}$$

que l'on peut dériver

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)}{x^{2n+2}}e^{-1/x}-\frac{(2n+2)P_n(x)}{x^{2n+3}}e^{-1/x}+\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\times\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\\ &= \frac{x^2P_n'(x)-x(2n+2)P_n(x)+P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-1/x}\\ &= \frac{x^2P_n'(x)+[1-2(n+1)x]P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-1/x}\end{aligned}$$

En posant

$$\boxed{P_{n+1} = X^2 P_n' + [1 - 2(n+1) X] P_n} \quad (*)$$

(c'est bien un polynôme), on a bien $H(n+1)$, i.e.

$$\forall x > 0,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} e^{-1/x}$$

iii. $H(n)$ est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(*)$ permet d'obtenir le polynôme P_{n+1} à l'aide de P_n.

c) Calculons les premiers :

$$\boxed{P_0 = 1}, \ \boxed{P_1 = 1 - 2X} \quad \text{(vu en 1.b)}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= -2X^2 + (1-4X)(1-2X) = \boxed{6X^2 - 6X + 1} \\ P_3 &= X^2(12X - 6) + (1 - 6X)\left(6X^2 - 6X + 1\right) = \boxed{-24X^3 + 36X^2 - 12X + 1} \end{aligned}$$

d) Le coefficient constant de P_n est $P_n(0)$. Mais en substituant 0 à X dans $(*)$, il vient

$$P_{n+1}(0) = P_n(0)$$

Ce coefficient constant est indépendant de n et vaut donc 1 (celui de P_0 par exemple)

e) Montrons par récurrence que

$$K(n) : \begin{cases} \deg P_n = n \\ \text{Le coefficient dominant de } P_n \text{ est } a_n = (-1)^n (n+1)! \end{cases}$$

i. $K(0)$ et $K(1)$ sont vraies, vus les calculs du c).

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $K(n)$ et montrons $K(n+1)$: par hypothèse de récurrence

$$\deg X^2 P_n' = 2 + (n-1) = n + 1 \quad \text{et} \quad [1 - 2(n+1) X] P_n = 1 + n$$

Donc d'après $(*)$ et par somme

$$\deg P_{n+1} \leqslant n + 1$$

Calculons pour conclure le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} :

- Dans $X^2 P_n'$, c'est $n a_n$
- Dans $[1 - 2(n+1) X] P_n$, c'est $-2(n+1) a_n$
- Par somme, dans P_{n+1}, le coefficient de X^{n+1} est

$$(-n-2) a_n = -(n+2)(-1)^n (n+1)! = (-1)^{n+1} (n+2)! \neq 0$$

Ainsi

$$\begin{cases} \deg P_{n+1} = n + 1 \\ \text{Le coefficient dominant de } P_{n+1} \text{ est } a_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+2)! \end{cases} \quad \text{CQFD.}$$

f) Calculons la limite à droite en 0 de $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x}$: déjà $\lim\limits_{0} P_n = P_n(0) = 1$. Il suffit donc de voir

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^{2n+2}} e^{-1/x}$$

Comme en 1.a), on pose $y = 1/x$, de sorte que

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^{2n+2}} e^{-1/x} = \lim_{y \to +\infty} y^{2n+2} e^{-y} = 0 \quad \text{(comparaison classique)}$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{0+} f^{(n)} = 0}$

On admet que cela entraine que f est de classe sur $[0, \infty[$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

3. Nouvelles relations entre les polynômes P_n

On considère la fonction g définie sur $]0,\infty[$ par $g(x)=x^2 f(x)$.

a) Dérivons g (de classe C^∞ sur $]0,\infty[$ évidemment) :

$$\forall x>0,\ g'(x)=\frac{d}{dx}e^{-1/x}=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}=f(x)$$

En dérivant n fois ce dernier résultat, il vient

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x>0,\ g^{(n+1)}(x)=f^{(n)}(x)}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Appliquons la formule de Leibniz au produit $g(x)=x^2f(x)$: $\forall x>0$

$$f^{(n)}(x)=g^{(n+1)}(x)=x^2f^{(n+1)}(x)+2(n+1)xf^{(n)}(x)+(n+1)nf^{(n-1)}(x)$$

Soit

$$x^2f^{(n+1)}(x)=[1-2(n+1)x]f^{(n)}(x)-n(n+1)f^{(n-1)}(x)$$

D'après la question 2.b) il vient

$$x^2\frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}}e^{-1/x}=\left[[1-2(n+1)x]\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}-n(n+1)\frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n-2}}\right]e^{-1/x}$$

En multipliant le tout par $x^{2n+2}e^{1/x}\neq 0$, on obtient

$$\boxed{P_{n+1}(x)=[1-2(n+1)x]P_n(x)-n(n+1)x^2P_{n-1}(x)}\qquad(\$)$$

En comparant avec la formule de récurrence $(*)$ on a donc pour tout $x>0$

$$[1-2(n+1)x]P_n(x)-n(n+1)x^2P_{n-1}(x)=x^2P_n'(x)+[1-2(n+1)x]P_n(x)$$

qui se simplifie en

$$\boxed{P_n'(x)=-n(n+1)P_{n-1}(x)}\qquad(€)$$

4. Etude des racines du polynôme P_n

a) Montrons par récurrence la proposition L_n : $\forall x>0,\ P_n(x)\neq 0$ ou $P_{n-1}(x)\neq 0$

(c'est-à-dire : $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ ne peuvent être simultanément nuls)

i. $P_0(x)=1$ et $P_1(x)$ ne peuvent pas être simultanément nuls puisque $P_0(x)$ ne l'est pas. D'où L_1.

ii. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons L_n et montrons L_{n+1} : par l'absurde, si il existait un $x>0$ tel que

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)=0$$

alors la relation $(\$)$ donnerait

$$0=-n(n+1)x^2P_{n-1}(x)\quad i.e.\quad P_{n-1}(x)=0$$

On conclurait alors à $P_{n-1}(x)=P_n(x)=0$, qui contredirait notre hypothèse de récurrence CQFD.

b) Supposons alors que pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$ on ait $P_n(x)=0$. Alors $P_{n-1}(x)\neq 0$ d'après le a), et la formule (€) nous assure alors que

$$P_n'(x)\neq 0$$

puisque n et $n+1$ ne sont pas nuls.

On peut alors dire que P_n', continue sur $\mathbb{R}$, est de signe constant dans un voisinage de x, c'est-à-dire un intervalle contenant x (et dont x n'est pas extrémité), donc que P_n est strictement monotone sur cet intervalle. Comme $P_n(x)=0$, P_n change nécessairement de signe en x.

c) On va montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes dans $]0,+\infty[$

Initialisation : $P_1=1-2X$ admet 1 racine réelle : $1/2$.
Hérédité : supposons cette proposition vraie pour un rang $n\geqslant 1$.

On note $0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ les racines de P_n

i. P_n est de signe constant sur chaque intervalle $[0,x_1[\,,]x_1,x_2[\,,\ldots,]x_{n-1},x_n[$ (continue ne s'annulant pas). De plus $P_n(0)=1>0$ donc P_n est positive sur $[0,x_1[$. Enfin, on a vu que P_n changeait de signe en $x_1,\ldots,x_n$ (question b)). Elle est donc négative sur $]x_1,x_2[$, positive sur $]x_2,x_3[$, etc. On peut conclure avec un peu d'imagination

$$\boxed{\forall i \in [[1, n-1]], P_n \text{ est du signe de } (-1)^i \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[}$$

Remarque : on peut aussi affirmer que P_n est du signe de $(-1)^n$ sur $]x_n, +\infty[$

ii. Soit alors $i \in [[1, n]]$ on a vu en b) qu'on pouvait écrire

$$\begin{cases} P_n(X) = (X - x_i) Q_n(X) \\ Q_n(x_i) = \lambda \neq 0 \end{cases}$$

En dérivant, il vient $P_n'(X) = Q_n(X) + (X - x_i) Q_n'(X)$. On en tire $P'(x_i) = Q_n(x_i) = \lambda$.

On a donc au voisinage de x_i

$$P_n(t) \underset{t \to x_i}{\sim} P'(x_i)(t - x_i)$$

Pour assurer le signe de $(-1)^i$ à droite et donc l'opposé à gauche de x_i, il faut fatalement que

$$\boxed{\text{le signe de } P'(x_i) \text{ soit } (-1)^i}$$

Remarque : on peut aussi dire que si $P'(x_i)$ avait le signe de $(-1)^{i+1}$, alors la monotonie de P_n au voisinage de x_i serait contradictoire avec les signes de P_n à gauche et à droite de x_i. Il faut faire deux cas et un dessin, avis aux artistes.

iii. La question 2.b) nous rappelle que

$$P_{n+1}(x_i) = x_i^2 P_n'(x_i) + [1 - 2(n+1) x_i] P_n(x_i) = x_i^2 P_n'(x_i)$$

Il s'ensuit assez banalement que $\underline{P_{n+1}(x_i) \text{ a le même signe que } P_n'(x_i)\text{, c'est-à-dire } (-1)^i}$.

iv. $\underline{\text{La limite de } P_{n+1} \text{ en } +\infty \text{ est } (-1)^{n+1}\infty}$, puisque $P_{n+1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1}$ (question 2.d))

v. Ainsi

- $P_{n+1}(0) = 1 > 0$ et $P_{n+1}(x_1) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires[1] assure qu'il existe une racine de P_{n+1}, soit y_1 entre 0 et x_1.
- $P_{n+1}(x_1) < 0$ et $P_{n+1}(x_2) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une racine de P_{n+1}, soit y_2 entre x_1 et x_2.
- De la même manière, pour tout $i \in [[1, n]]$ on trouve une racine y_i entre x_{i-1} et x_i
- Enfin $P(x_n)$ a le signe de $(-1)^n$ et la limite de P_{n+1} en $+\infty$ est $(-1)^{n+1}\infty$, ce qui entraîne l'existence d'un réel x_{n+1} supérieur à x_n tel que $P_{n+1}(x_{n+1})$ soit du signe de $(-1)^{n+1}$. Un dernière application du théorème des valeurs intermédiaires entre x_n et x_{n+1} assure l'existence d'une racine y_{n+1} de P_{n+1} supérieure à x_n

Bilan :

	0	y_1	x_1	y_2	x_2	...	x_{n-1}	y_n	x_n	y_{n+1}	x_{n+1}	$+\infty$
P_{n+1}	$+$	0	$-$	0	$+$	...	$(-1)^{n-1}$	0	$(-1)^n$	0	$(-1)^{n+1}$	

.

On a construit $n+1$ racines distinctes $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+1}$ de P_{n+1} dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Cela amorce la récurrence et prouve donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes dans }]0, +\infty[}$$

[1] P_n est continue sur $\mathbb{R}_+$