Ex 1 Simplifications : on utilise évidemment les formes trigonométriques, qui sont mieux adaptées aux puissances :

$$(1+i)^{25} = \left(\sqrt{2}e^{1\pi/4}\right)^{25} = 2^{25/2}e^{25i\pi/4} = 2^{12}\sqrt{2}e^{i(6\pi+\pi/4)} = 4096\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Soit

$$\boxed{(1+i)^{25} = 4096\,(1+i)}$$

De même

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\frac{e^{20i\pi/3}}{e^{-20i\pi/4}} = 2^{10}\frac{e^{i(6\pi+2\pi/3)}}{e^{-5i\pi}} = -2^{10}e^{2i\pi/3} = -2^{10}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 512\,(1-i\sqrt{3})}$$

Ex 2 Soit $k \in \mathbb{Z}$. Simplifions $\left(1+i\sqrt{3}\right)^k - \left(1-i\sqrt{3}\right)^k$ à l'aide de la forme trigonométrique :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^k - \left(1-i\sqrt{3}\right)^k = \left(2e^{i\pi/3}\right)^k - \left(2e^{-i\pi/3}\right)^k = 2^k\left(e^{ik\pi/3} - e^{-ik\pi/3}\right)$$

Les formules d'Euler donnent donc

$$\boxed{\left(1+i\sqrt{3}\right)^k - \left(1-i\sqrt{3}\right)^k = 2^{k+1}i\sin\frac{k\pi}{3}}$$

Ex 3 Soit $x \in \mathbb{R}$, et $z = 1+ix$. Appelons $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ l'argument principal de z. Comme $\operatorname{Re} z > 0$, on a $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or

$$\tan\theta = x$$

Il vient

$$\boxed{\theta = \arctan(x)}$$

Remarque : on a aussi $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, donc $\boxed{\theta = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

En revanche, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, mais $\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ seulement si $x \geqslant 0$. Sinon, $\theta = -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Ex 4 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(3z_n + 2\overline{z_n}\right)$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons $x_n = \operatorname{Re} z_n$ et $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Alors la relation de récurrence s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3\,(x_n+iy_n) + 2\,(x_n - iy_n)\right) = x_n + i\frac{y_n}{5}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{5} \end{cases}$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite constante de valeur $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $y_0 = \operatorname{Im} z_0$ et de raison $1/5$. Il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = x_0 + \frac{y_0}{5^n}}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La limite de } (z_n) \text{ existe et vaut } \operatorname{Re} z_0}$$

Ex 5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $Z = \dfrac{1+(\cos\theta + i\sin\theta)^3}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2} = \dfrac{1+e^{3i\theta}}{e^{2i\theta}}$. On sait réduire Z :

$$Z = \left(2\cos\frac{3i\theta}{2}e^{3i\theta/2}\right)e^{-2i\theta} = 2\cos\frac{3\theta}{2}e^{-i\theta/2}$$

On discute alors sur θ :

– Si $\cos\frac{3\theta}{2} = 0$, alors $\boxed{Z = 0}$

Cela arrive lorsque $\frac{3\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, soit $\theta \equiv \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$, *i.e.* lorsque θ est de la forme $\frac{(2k+1)\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

– Si $\cos\frac{3\theta}{2} > 0$, alors $\boxed{|Z| = 2\cos\frac{3\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg Z \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]}$

Cela arrive lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{-\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3\theta}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

soit

$$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{-\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}$$

Autrement dit lorsque

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\tfrac{(4k-1)\pi}{3}, \tfrac{(4k+1)\pi}{3}\right[$$

– Si $\cos\frac{3\theta}{2} < 0$, alors $\boxed{|Z| = -2\cos\frac{3\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg Z \equiv \frac{\theta}{2} + \pi\ [2\pi]}$ (puisque $Z = -2\cos\frac{3\theta}{2}e^{-i\theta/2}e^{i\pi}$).

Cela arrive lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3\theta}{2} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

soit

$$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} < \theta < \pi + \frac{4k\pi}{3}$$

autrement dit lorsque

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\tfrac{(4k+1)\pi}{3}, \tfrac{(4k+3)\pi}{3}\right[$$

Ex 6 Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. Alors

$$Z = e^{i\alpha}\left(1 + e^{i(\beta-\alpha)}\right) = 2e^{i\alpha}\cos\tfrac{\beta-\alpha}{2}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Ainsi

$$\boxed{Z = 2\cos\tfrac{\beta-\alpha}{2}e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}}$$

Remarque : une autre méthode pour arriver à cette factorisation de Z est de mettre directement en facteur le complexe $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, par analogie avec la mise en facteur de $e^{i\frac{\theta}{2}}$ dans $1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta}$: on obtient

$$Z = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = 2\cos\tfrac{\beta-\alpha}{2}e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

On discute alors sur le signe de $\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$:

– Si $\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$, alors $\boxed{Z = 0}$

– Si $\cos\frac{\beta-\alpha}{2} > 0$, alors $\boxed{|Z| = 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \arg Z \equiv \frac{\alpha+\beta}{2}\ [2\pi]}$

– Si $\cos\frac{\beta-\alpha}{2} < 0$, alors $\boxed{|Z| = -2\cos\frac{\beta-\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \arg Z \equiv \frac{\alpha+\beta}{2} + \pi\ [2\pi]}$ (puisque $Z = -2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}e^{i\pi}$).

Ex 7 Soient a et b deux complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$: montrons que $Z = \frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$. On a :

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1+\overline{ab}} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1+\bar{a}\bar{b}}$$

Or $a \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \bar{a}a = 1 \Longleftrightarrow \bar{a} = \frac{1}{a}$ et de même $b \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \bar{b} = \frac{1}{b}$. Ainsi

$$\overline{Z} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{ab}} = \frac{b+a}{ab+1} = Z$$

On peut en conclure que Z est réel, CQFD.

Ex 8 Soit z un nombre complexe et $Z = \frac{1+zi}{1-zi}$. Alors

$$|Z| = 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{1+zi}{1-zi}\right| = 1 \Longleftrightarrow |1+zi| = |1-zi| \Longleftrightarrow |1+zi|^2 = |1-zi|^2$$

La définition du module donne alors

$$\begin{aligned} |Z| = 1 \quad & \Longleftrightarrow \quad (1+zi)\,\overline{(1+zi)} = (1-zi)\,\overline{(1-zi)} \\ & \Longleftrightarrow \quad (1+zi)\,(1-\overline{z}i) = (1-zi)\,(1+\overline{z}i) \\ & \Longleftrightarrow \quad zi - \overline{z}i = -zi + \overline{z}i \\ & \Longleftrightarrow \quad z = \overline{z} \end{aligned}$$

Finalement, on a l'équivalence

$$\boxed{|Z| = 1 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}}$$

Ex 9 Soient a et b deux réels, $z = a+ib$, $A = |z|\,,\ \varphi = \operatorname{Arg} z$ et $f(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta$. Alors

$$\bar{z}e^{i\theta} = (a+ib)\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Donc

$$\operatorname{Re}\left(\bar{z}e^{i\theta}\right) = a\cos\theta + b\sin\theta = f(\theta)$$

Par ailleurs

$$\bar{z}e^{i\theta} = Ae^{-i\varphi}e^{i\theta} = Ae^{i(\theta-\varphi)}$$

Il vient donc

$$\operatorname{Re}\left(\bar{z}e^{i\theta}\right) = A\cos(\theta-\varphi)$$

En égalant, on retrouve la réduction utile en physique :

$$\boxed{f(\theta) = A\cos(\theta-\varphi)}$$

Ex 10 Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Montrons que $|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$:

$$\begin{aligned} |z+z'|^2+|z-z'|^2 &= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)+(z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right) \\ &= 2z\overline{z}+2z'\overline{z'}+0 \\ &= 2\left(|z|^2+|z'|^2\right) \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Géométriquement, considérons le parallélogramme $ABCD$, et posons

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u'}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

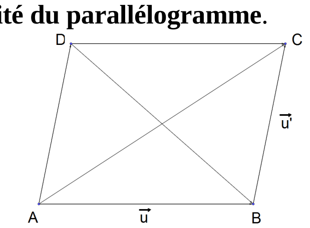
On a alors $\vec{u}+\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}-\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{DB}$. En notant z et z' les affixes de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$, on obtient

$$AC^2+DB^2=2\left(AB^2+BC^2\right)$$

ou encore

$$AC^2+DB^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$$

Autrement dit la somme des carrés des deux diagonales vaut la somme des carrés des 4 côtés. Ce résultat de géométrie est connu sous le nom d'**identité du parallélogramme**.



Ex 11 Soient z,z',u des nombres complexes vérifiant $zz'=u^2$,et ζ,ζ' des racines carrées de z et z'. Montrons que

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|$$

On peut écrire $z=\zeta^2$ et $z'=\zeta'^2$. Mais $u^2=zz'=\left(\zeta\zeta'\right)^2$, d'où $u=\zeta\zeta'$ ou $u=-\zeta\zeta'$; mais dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}-u\right| &= \left|\frac{\zeta^2+\zeta'^2}{2}+\zeta\zeta'\right|+\left|\frac{\zeta^2+\zeta'^2}{2}-\zeta\zeta'\right| \quad \text{\#symétrie} \\ &= \left|\frac{\zeta^2+\zeta'^2+2\zeta\zeta'}{2}\right|+\left|\frac{\zeta^2+\zeta'^2-2\zeta\zeta'}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(\zeta+\zeta'\right)^2\right|+\left|\left(\zeta-\zeta'\right)^2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\zeta+\zeta'\right|^2+\left|\zeta-\zeta'\right|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\zeta+\zeta'\right)\left(\bar{\zeta}+\overline{\zeta'}\right)+\left(\zeta-\zeta'\right)\left(\bar{\zeta}-\overline{\zeta'}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\zeta\bar{\zeta}+2\zeta'\overline{\zeta'}\right) \\ &= |\zeta|^2+\left|\zeta'\right|^2 \\ &= \left|\zeta^2\right|+\left|\zeta'^2\right| \\ &= |z|+|z'| \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Ex 12 Soit α un réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $z=\dfrac{1}{1+i\tan\alpha}$.

a) On a, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos\alpha\neq 0$:

$$z=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{e^{i\alpha}}=\cos\alpha e^{-i\alpha}$$

Or $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\underline{\cos\alpha>0}$. On peut alors "identifier" module et argument

$$\boxed{\begin{cases}|z|=\cos\alpha\\ \operatorname{Arg} z=-\alpha\ [2\pi]\end{cases}}$$

b) On en déduit :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} z &= \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\\ \operatorname{Im} z &= -\cos\alpha\sin\alpha=-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}$$

$\underline{\text{On pose } \theta=-2\alpha}$.On a alors

$$\boxed{\begin{cases}\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\\ \operatorname{Im} z=\quad\ \frac{1}{2}\sin\theta\end{cases}}$$

c) Lorsque α varie dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, θ varie dans $]-\pi,\pi[$, et le point M d'affixe z vérifie

$$z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{i\theta}$$

En particulier $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ donc M est sur le cercle Γ de centre C d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, avec $M\neq O$ (puisque $\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$, $z-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}e^{i\theta}\neq-\frac{1}{2}$, et donc $z\neq 0$)

Inversement, tout point $M(z)$ de $\Gamma\backslash\{O\}$ vérifie $CM=\frac{1}{2}$ donc $\exists\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$ tel que $z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{i\theta}$. Ainsi

$$\boxed{M \text{ décrit } \Gamma \text{ privé du point } O}$$

d) Soit M_0 le point d'affixe $z_0=\dfrac{1}{1+i\tan\frac{7\pi}{8}}=\dfrac{1}{1+i\tan\left(\frac{-\pi}{8}\right)}$.

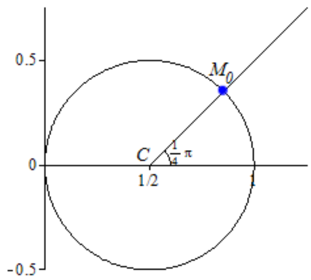
D'après la question précédente, M_0 est sur le cercle Γ.

De plus il correspond à la valeur $-\frac{\pi}{8}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de α, c'est-à-dire à la valeur $\frac{\pi}{4}$ de θ.

Ainsi $z_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{i\pi/4}$, ce qui entraine que $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{CM_0}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

On construit donc le cercle Γ, puis la demi-droite issue de C faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe (Ox).

Le point de rencontre avec Γ est le point M_0 cherché.



Ex 13 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résolvons le système (S) : $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta + \cos(\theta + x) + \cos(\theta + y) = 0 \\ \sin\theta + \sin(\theta + x) + \sin(\theta + y) = 0\end{array}\right.$.

Sachant que pour a et b réels on peut écrire $\left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow a + ib = 0$, on a

$$\begin{aligned}(S) &\Longleftrightarrow \cos\theta + \cos(\theta + x) + \cos(\theta + y) + i(\sin\theta + \sin(\theta + x) + \sin(\theta + y)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow e^{i\theta} + e^{i(\theta + x)} + e^{i(\theta + y)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow e^{i\theta}\left(1 + e^{ix} + e^{iy}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 + e^{ix} + e^{iy} = 0 \quad \text{puisque } e^{i\theta} \neq 0\end{aligned}$$

On revient alors aux parties réelles et imaginaires :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + \cos(x) + \cos(y) = 0 \\ \sin(x) + \sin(y) = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(x) + \cos(y) = -1 \\ \sin(y) = \sin(-x)\end{array}\right.$$

L'égalité des sinus fournit donc :

$$\begin{aligned}(S) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(x) + \cos(x) = -1 \\ y \equiv -x \ [2\pi]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}\cos(x) + \cos(\pi + x) = -1 \\ y \equiv \pi + x \ [2\pi]\end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(x) = -\frac{1}{2} \\ y \equiv -x \ [2\pi]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 0 = -1 \\ y \equiv \pi + x \ [2\pi]\end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \\ y \equiv -x \ [2\pi]\end{array}\right.\end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right),\ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\} \cup \left\{\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right),\ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}}$$

Ex 14 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$.

a) $(E) : z^2 - (2+i)\,z - 1 + 7i = 0$ a pour discriminant $\Delta = (2+i)^2 + 4\,(1-7i) = 7 - 24i$
Déterminons une racine carrée δ de Δ : si $x = \operatorname{Re}\delta$ et $y = \operatorname{Im}\delta$, alors

$$\delta^2 = \Delta \iff \left\{ \begin{array}{l} |\delta|^2 = |\Delta| = 25 \\ x^2 - y^2 + 2xy = 7 - 24i \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -24 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ xy < 0 \end{array} \right.$$

On choisit $\underline{\delta = 4 - 3i}$ d'où les deux solutions de (E) :

$$\frac{2+i+4-3i}{2} = \boxed{3-i} \quad \text{et} \quad \frac{2+i-4+3i}{2} = \boxed{-1+2i}$$

b) $(E) : z^4 - (5-14i)\,z^2 - 2\,(5i+12) = 0$. En posant $Z = z^2$, elle se ramène à

$$(E') : Z^2 - (5-14i)\,Z - 2\,(5i+12) = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = (5-14i)^2 + 8\,(5i+12) = -75 - 100i = 5^2\,(-3-4i)\,.$
Déterminons une racine carrée δ' de $\Delta' = -3 - 4i$: si $x = \operatorname{Re}\delta$ et $y = \operatorname{Im}\delta$, alors

$$\delta^2 = \Delta \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{array} \right.$$

On choisit $\delta' = 1 - 2i$: Alors $\delta = 5\,(1-2i)$ est un racine carrée de Δ, d'où

$$(E') \iff \left\{ \begin{array}{ll} z^2 = \dfrac{5-14i+5-10i}{2} = 5 - 12i & (e_1) \\ z^2 = \dfrac{5-14i-5+10i}{2} = -2i & (e_2) \end{array} \right.$$

Résoudre (e_1) revient à extraire les racines carrées de $5 - 12i$: en posant $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$,

$$z^2 = 5 - 12i \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 3 - 2i \\ z = -3 + 2i \end{array} \right.$$

Pour résoudre (e_2) , on passe par la forme trigonométrique

$$z^2 = -2i \iff z^2 = 2e^{-i\pi/2} \iff z = \pm\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 1 - i \\ z = -1 + i \end{array} \right.$$

Au total les quatre solutions de (E) sont

$$\boxed{3-2i,\ -3+2i,\ 1-i,\ -1+i}$$

c) $(E) : z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right) z - i\sqrt{3} = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 + 4i\sqrt{3} = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2$$

On en déduit ses deux solutions :

$$\frac{-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{2} = \boxed{i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \frac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1}$$

Qui étaient prévisibles quand on avait remarqué que -1 était solution évidente!

Ex 15 Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère l'équation complexe $(E_t) \quad z^2 - 2\left(1 + 2e^{it}\right) z - 3 = 0$

a) Le discriminant de (E_t) s'écrit

$$\Delta_t = 4\left(\left(1 + 2e^{it}\right)^2 + 3\right) = 4\left(4 + 4e^{it} + 4e^{2it}\right) = 16\left(1 + e^{it} + e^{2it}\right)$$

Or on sait que $1 + e^{2it} = 2\cos t e^{it}$, d'où

$$\Delta_t = 16\left(e^{it} + 2\cos t e^{it}\right)$$

Finalement

$$\boxed{\Delta_t = 16u\left(t\right)e^{it}}, \quad \text{avec } \underline{u\left(t\right) = 1 + 2\cos t}$$

b) Solutions de (E_t).

* 1^er^ cas : $1 + 2\cos t = 0$. Cela équivaut à $\cos t = -\frac{1}{2}$, soit $t \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $t \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

  Alors $\Delta_t = 0$ et (E_t) admet la solution double

  $$\boxed{z_t = 1 + 2e^{it}}$$

  On peut préciser : si $t \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, alors $\boxed{z_t = i\sqrt{3}}$ et si $t \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, alors $\boxed{z_t = -i\sqrt{3}}$

* 2^ème^ cas : $1 + 2\cos t > 0$. Cela équivaut à $\cos t > -\frac{1}{2}$, soit

  $$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

  Déterminons une racine carrée δ_t de Δ_t : la forme trigonométrique vue plus haut nous permet de choisir, puisque $u\left(t\right) > 0$,

  $$\boxed{\delta_t = 4\sqrt{u\left(t\right)}e^{it/2}}$$

  Les solutions de (E_t) sont alors

  $$\boxed{\begin{cases} z_t = 1 + 2e^{it} - 2\sqrt{u\left(t\right)}e^{it/2} \\ z'_t = 1 + 2e^{it} + 2\sqrt{u\left(t\right)}e^{it/2} \end{cases}}$$

* 3^ème^ cas : $1 + 2\cos t < 0$. Cela équivaut à $\cos t < -\frac{1}{2}$, soit

  $$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

  Déterminons une racine carrée δ_t de Δ_t : la forme trigonométrique de Δ_t est, puisque $1 + 2\cos t < 0$,

  $$\Delta_t = -16u\left(t\right)e^{it+\pi}$$

  On peut donc choisir

  $$\delta_t = 4\sqrt{-u\left(t\right)}e^{i(t/2+\pi/2)}$$

  soit

  $$\boxed{\delta_t = 4\sqrt{-u\left(t\right)}ie^{it/2}}$$

  Les solutions de (E_t) sont alors

  $$\boxed{\begin{cases} z_t = 1 + 2e^{it} - 2i\sqrt{-u\left(t\right)}e^{it/2} \\ z'_t = 1 + 2e^{it} + 2i\sqrt{-u\left(t\right)}e^{it/2} \end{cases}}$$

Ex 16 Cherchons une solution réelle de l'équation $(E) : iz^3 + (2i-1)\,z^2 - (i+4)\,z + 3\,(2i-1) = 0$. Si $z \in \mathbb{R}$,

$$(E) \iff -z^2 - 4z - 3 + i\left(z^3 + 2z^2 - z + 6\right) = 0 \iff \begin{cases} z^2 + 4z + 3 = 0 \text{ et} \\ z^3 + 2z^2 - z + 6 = 0 \end{cases}$$

$z^2 + 4z + 3$ admet les solutions -1 et -3 mais -1 n'est pas solution de $z^3 + 2z^2 - z + 6$ et -3 l'est.
On peut en conclure que $\boxed{-3 \text{ est solution de } (E)}$, qui se factorise donc par $z+3$:

$$iz^3 + (2i-1)\,z^2 - (i+4)\,z + 3\,(2i-1) = (z+3)\left(iz^2 - (1+i)\,z - 1 + 2i\right)$$

Cette factorisation peut s'obtenir par coefficients indéterminés ou par division euclidienne polynomiale). Alors

$$(E) \iff \begin{cases} z = -3 \text{ ou} \\ iz^2 - (1+i)\,z - 1 + 2i = 0 \;\; (E') \end{cases}$$

Pour résoudre (E'), on calcule le discriminant $\Delta = (1+i)^2 + 4i\,(1-2i) = 8 + 6i$.

On cherche une racine carrée δ de Δ avec $x = \operatorname{Re}\delta$ et $y = \operatorname{Im}\delta$:

$$\delta^2 = 8 + 6i \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

On choisit $\delta = 3 + i$, d'où les deux racines de (E') : $\frac{1+i+3+i}{2i} = \boxed{1-2i}$ et $\frac{1+i-3-i}{2i} = \boxed{i}$
On conclut avec les solutions de (E) :

$$\boxed{-3,\ i,\ 1-2i}$$

Ex 17 Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)\,x$.

a) On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re} e^{2ikx} = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} \left(e^{2ix}\right)^k$. Notons $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(e^{2ix}\right)^k$

* Si $2x \equiv 0\ [2\pi]$, *i.e.* $x \equiv 0\ [\pi]$, alors $e^{2ix} = 1$ et $Z_n = \boxed{n+1 = S_n}$
* Si $2x \not\equiv 0\ [2\pi]$, *i.e.* $x \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $e^{2ix} \neq 1$ et

$$Z_n = \frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}} = \frac{-2i\sin((n+1)\,x)\,e^{i(n+1)x}}{-2i\sin(x)\,e^{ix}} = \frac{\sin((n+1)\,x)}{\sin x} e^{inx}$$

Il vient

$$\boxed{S_n = \frac{\sin((n+1)\,x)}{\sin x}\cos(nx)}$$

b) De même $T_n == \operatorname{Re}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ix}\right)^k e^{ix} = \operatorname{Re}\left(e^{ix} Z_{n-1}\right)$.

* Si $2x \equiv 0\ [2\pi]$, *i.e.* $x \equiv 0\ [\pi]$, alors $e^{2ix} = 1$ et $e^{ix} Z_{n-1} = ne^{ix}$ et $\boxed{T_n = n\cos x}$
* Si $2x \not\equiv 0\ [2\pi]$, *i.e.* $x \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $e^{2ix} \neq 1$ et d'après a) :

$$e^{ix} Z_{n-1} = e^{ix}\frac{\sin(nx)}{\sin x} e^{i(n-1)x} = \frac{\sin(nx)}{\sin x} e^{inx}$$

Il vient

$$\boxed{T_n = \frac{\sin(nx)}{\sin x}\cos(nx) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}}$$

c) Posons $S = \cos^2\dfrac{\pi}{14} + \cos^2\dfrac{3\pi}{14} + \cos^2\dfrac{5\pi}{14}$. En linéarisant

$$S = \frac{1}{2}\left(3 + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}(3 + T_3)$$

Avec $x = \frac{\pi}{7}$. d'où

$$S = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{\sin(6\pi/7)}{2\sin(\pi/7)}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{\sin(\pi/7)}{2\sin(\pi/7)}\right) = \boxed{\frac{7}{4}}$$

Ex 18 Soit $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. On suppose de plus que $x \neq 0\ [\pi]$, et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \sin x}$. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx) + i\sin(kx)}{\cos^k x} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(e^{ix}\right)^k}{\cos^k x} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k$$

Or $x \neq 0\ [\pi]$, donc $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} = 1 + i\tan x \neq 1$, et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k &= \frac{1 - \left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{e^{ix}}{\cos x}} \\
&= \frac{\cos x}{\cos^{n+1} x} \times \frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} \\
&= \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{-i\sin x} \\
&= \frac{i\left(\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x\right) + \sin(n+1)x}{\sin x}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{S_n = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}}$$

Si $x = 0\ [\pi]$, alors $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} = 1 + i\tan x = 1$, d'où $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1}$

Ex 19 On considère un complexe z tel que $|z| \leqslant 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1+z}{2}$ et S_n la somme des $n+1$ premiers termes de (u_n), soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) On suppose $|z| < 1$. donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n < 1$. Donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
De plus $\left|\frac{1+z}{2}\right| \overset{\text{IT}}{\leqslant} \frac{1}{2}(1+|z|) < 1$, on a $\frac{1+z}{2} \neq 1$ et on peut écrire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1+z}{2}\right)^n}{1 - \frac{1+z}{2}}$$

Mais $\left|\frac{1+z}{2}\right| < 1$ entraine que $\left(\left(\frac{1+z}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Il s'ensuit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$\boxed{S = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z}}$$

b) On suppose $|z| = 1$ et on pose $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \left]-\pi, 0\right[\cup \left]0, \pi\right[$. Alors

$$\frac{1+z}{2} = \frac{1+e^{i\theta}}{2} = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

En particulier

$$\left|\frac{1+z}{2}\right| = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \in \left]0,1\right[\quad \text{puisque } \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

On peut alors encore écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1+z}{2}\right)^n}{1 - \frac{1+z}{2}}$$

et comme au a), $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{-2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

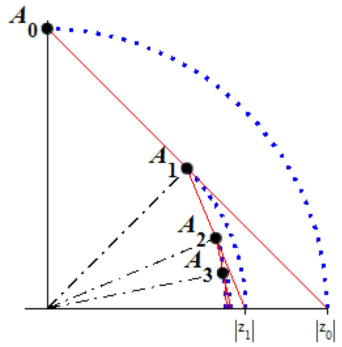
Finalement

$$\boxed{S = 1 + i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}}$$

Ex 20 On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par $\begin{cases} z_0 = i \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right) \end{cases}$

Pour tout entier n, on pose : $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, avec $\rho_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_n \in \left]-\pi, \pi\right]$

a) Le point $A_1(z_1)$ est le milieu de $A_0(z_0)$ et $B_0(|z_0|)$, le point $A_2(z_2)$ est le milieu de $A_1(z_1)$ et $B_1(|z_1|)$, et ainsi de suite.



b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \notin \mathbb{R} : H(n)$.

i. $H(0)$ est vraie (car $i \notin \mathbb{R}$)

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1) : z_{n+1} \notin \mathbb{R}$.

Par l'absurde, si $z_{n+1} \in \mathbb{R}$, on aurait un réel x tel que $\dfrac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right) = x$.

Mais alors on aurait $z_n = 2x - |z_n| \in \mathbb{R}$, ce qui est contraire à $H(n)$. Ainsi $z_{n+1} \notin \mathbb{R}$

iii. Par récurrence, $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c) La relation de récurrence vérifiée par (z_n) s'écrit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \rho_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n\right) = \frac{1}{2}\rho_n\left(e^{i\theta_n} + 1\right) = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}\, e^{i\frac{\theta_n}{2}}$$

Comme $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a bien $\rho_n . \cos\frac{\theta_n}{2} > 0$. On en déduit, par "unicité" de la forme trigonométrique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \rho_{n+1} = \rho_n \cos\dfrac{\theta_n}{2} \\ \theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2} \end{cases}}$$

$(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où, comme $\theta_0 = \arg(z_0) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

d) (ρ_n) vérifie donc la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2} = \rho_n \cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Conséquemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \rho_n = \rho_{n-1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \rho_{n-2}\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \ldots = \rho_0 \cos\frac{\pi}{2^2}\ldots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Ainsi ($\rho_0 = |i| = 1$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \rho_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

Remarque : pour montrer plus rigoureusement cette égalité, on peut raisonner par récurrence, ou multiplier terme à terme les égalités

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \rho_k = \rho_{k-1}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

Cela donne
$$\prod_{k=1}^{n} \rho_k = \prod_{k=1}^{n} \rho_{k-1} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \rho_k \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$
Comme les ρ_k sont non nuls, on peut simplifier, et il reste
$$\rho_n = \rho_0 \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la formule
$$\sin\left(2\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2\sin \frac{\pi}{2^{k+1}} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$
Comme $\frac{\pi}{2^{k+1}} \in \left]0, \pi\right[$, on a $\sin \frac{\pi}{2^{k+1}} \neq 0$, et on peut donc écrire
$$\cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^k}}{2\sin \frac{\pi}{2^{k+1}}}$$
En passant au produit, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le télescopage :
$$\rho_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin \dfrac{\pi}{2^k}}{2\sin \dfrac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \dfrac{\pi}{2}}{\sin \dfrac{\pi}{4}} \times \frac{\sin \dfrac{\pi}{4}}{\sin \dfrac{\pi}{8}} \times \cdots \times \frac{\sin \dfrac{\pi}{2^n}}{\sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^n \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$
$$\boxed{\rho_n = \frac{1}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}}$$

e) Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$z_n = \rho_n e^{i\theta_n} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{2^n \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\cos \dfrac{\pi}{2^{n+1}} + i \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$
Soit
$$\boxed{z_n = \frac{1}{2^n}\left(\operatorname{cotan} \frac{\pi}{2^{n+1}} + i\right) = \frac{1}{2^n \tan \dfrac{\pi}{2^{n+1}}} + \frac{i}{2^n}}$$
<u>Calcul de la limite</u> : posons $x = \dfrac{\pi}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On sait que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1$$
D'où par composée
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan \dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = 1 \quad \text{soit} \quad \lim_{n\to\infty} 2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2}$$
Comm $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$, il vient
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{2}{\pi}}$$

Ex 21 Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\}$; on considère les points $A(1)$, $B(-1)$, $M(z)$, $M'\left(\frac{1}{z}\right)$, et I le milieu de $[MM']$.
Montrons que (MM') est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)$, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM'}\right)=\left(\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{IB}\right)$:
Le point I a pour affixe $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$. Alors

$$\text{aff }\overrightarrow{IA}=1-\frac{z^2+1}{2z}=-\frac{(z-1)^2}{2z}\quad\text{et}\quad\text{aff }\overrightarrow{IB}=-1-\frac{z^2+1}{2z}=-\frac{(z+1)^2}{2z}$$

enfin

$$\text{aff }\overrightarrow{IM'}=\frac{1}{z}-\frac{z^2+1}{2z}=-\frac{z^2-1}{2z}=-\frac{(z-1)(z+1)}{2z}$$

Alors

$$\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM}\right)\equiv\arg\frac{\text{aff }\overrightarrow{IM'}}{\text{aff }\overrightarrow{IA}}\equiv\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ [2\pi]$$

et

$$\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\arg\frac{\text{aff }\overrightarrow{IB}}{\text{aff }\overrightarrow{IM'}}\equiv\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ [2\pi]$$

On a bien l'égalité des angles, d'où notre résultat.

Ex 22 Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points du plan : on dit que ABC est équilatéral direct lorsque $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{3}$.

a) Montrons que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a+bj+cj^2=0$:
On a ABC est équilatéral direct si et seulement si

$$\begin{cases} AB=AC \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}\iff\begin{cases}\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1 \\ \arg\dfrac{c-a}{b-a}\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}\iff\frac{c-a}{b-a}=e^{i\pi/3}$$

Remarquons que $e^{i\pi/3}=-e^{4i\pi/3}=-j^2$. Il vient

$$ABC\text{ est équilatéral direct si et seulement si } c-a=-j^2(b-a)$$

Cela s'écrit aussi

$$-\left(1+j^2\right)a+j^2b+c=0$$

En se souvenant que $1+j+j^2=0$, cela équivaut à

$$ja+j^2b+c=0$$

et en multipliant par j^2, sachant que $j^3=1$, à

$$a+bj+cj^2=0\quad\text{CQFD.}$$

b) Montrons que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$:
On montre comme au a) que

$$ABC\text{ est équilatéral indirect si et seulement si } a+bj^2+cj=0$$

(en effet, il suffit de remarquer que ABC est équilatéral indirect si et seulement si ACB est équilatéral direct)
On a alors

ABC est équilatéral si et seulement si ABC est équilatéral direct ou ABC est équilatéral indirect
si et seulement si $a+bj+cj^2=0$ ou $a+bj^2+cj=0$
si et seulement si $\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right)=0$ #règle du produit nul
si et seulement si $a^2+b^2j^3+c^2j^3+\left(j+j^2\right)ab+\left(j+j^2\right)ac+\left(j+j^2\right)bc=0$

Avec les relations $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$, il vient

$$\boxed{ABC\text{ est équilatéral si et seulement si } a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca}\quad\text{CQFD.}$$