Ex 1 Déterminer $\inf\limits_{x>0} \left(\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \right)$ après avoir justifié son existence.

Ex 2 Soit $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+2x+2}$. Calculer $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$. Sont-ils atteints?

Ex 3 Soit $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et calculer $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$.
<u>Indication</u> : si $\varepsilon > 0$, on pourra chercher un x de la forme $2k\pi$ tel que $f(x) > M - \varepsilon$.

Ex 4 Soit $E = \left\{ \dfrac{n}{mn+1},\ m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que E est borné, et calculer $\sup E$ et $\inf E$.

Ex 5 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que $A \subset B$ et B majorée.
Montrer que A admet une borne supérieure qui vérifie $\sup A \leqslant \sup B$.

Ex 6 Soient f et g deux fonctions strictement positives majorées sur un intervalle I.
Montrer que fg est bornée et que $\sup\limits_I (fg) \leqslant \sup\limits_I (f) \times \sup\limits_I (g)$ et $\inf\limits_I (fg) \geqslant \inf\limits_I (f) \times \inf\limits_I (g)$.

Ex 7 Soit f une fonction majorée sur un intervalle I et sur un intervalle J. On note $M_I = \sup\limits_I f$ et $M_J = \sup\limits_J f$.
Montrer que f est bornée sur $I \cup J$ et que $\sup\limits_{I \cup J} f = \max(M_I, M_J)$.

Ex 8 Soit E un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$, $M = \sup E$, $m = \inf E$. On pose $\mathcal{D} = \left\{ |x-y|,\ (x,y) \in E^2 \right\}$.
Montrer que $\mathcal{D}$ est majoré, et montrer que $\sup \mathcal{D} = M - m$.

Ex 9 Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et borné tel que $\inf A > 0$
On pose $B = \left\{ \dfrac{1}{a},\ a \in A \right\}$. Montrer que B est borné et que $\sup B = \dfrac{1}{\inf A}$

Ex 10 Soit $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés, c'est-à-dire d'intervalles fermés et bornés de type $I_k = [a_k, b_k]$ avec $a_k \leqslant b_k$, et formant une suite décroissante pour l'inclusion ($\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k$).

a) Montrer que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont bornées, et que si $a = \sup a_k$ et $b = \inf b_k$, alors $a \leqslant b$.

b) Montrer que $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k = [a, b]$

Ex 11 Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ vérifiant : $\begin{cases} \forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \in [0,1] \\ \forall (x,y) \in [0,1]^2\,, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \end{cases}$

On se propose de démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]\ /\ f(\alpha) = \alpha$.
On pose à cet effet : $A = \{x \in [0,1]\ /\ f(x) \geqslant x\}$.

a) Montrer que A admet une borne supérieure $m \in [0,1]$.

b) Montrer que $\forall z \in A,\ z \leqslant f(z) \leqslant f(m) + m - z$, et en déduire $m \leqslant \frac{m+f(m)}{2}$. Qu'en déduit-on?

c) On suppose que $m \neq 1$. Montrer que $\forall z \in \,]m,1]\,,\ f(m) \leqslant f(z) + z - m < 2z - m$.
En déduire $m \geqslant \frac{m+f(m)}{2}$. Qu'en déduit-on?

d) Conclure.