Ex 1 **Produit d'espaces vectoriels** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On pose

$$\forall\left((x,y),(x',y')\right)\in(E\times F)^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \left\{\begin{array}{l}(x,y)+(x'y')=(x+x',y+y')\\ \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\end{array}\right.$$

Montrer que ces lois définissent une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $E\times F$ (dite structure produit).

Ex 2 Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E.
Montrer $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel que si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Ex 3 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

a) Ensemble E_1 des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$, E_2 des fonctions vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+1)=f(x)+1$.

b) Ensemble E_3 des polynômes unitaires, E_4 des polynômes divisibles par X^2+1.

c) L'ensemble E_5 des suites complexes convergentes, E_6 des suites géométriques réelles, et E_7 des suites géométriques de raison 2.

d) Ensemble E_8 des suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=5u_{n+1}-2u_n$.

Ex 4 Soient $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ 2x-y+t-3z=0\right\}$ et $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ \left\{\begin{array}{l}x+y-t=0\\ 2x-y+z-t=0\end{array}\right.\right\}$
Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner la dimension et une base de chacun.

Ex 5 Soit $E=\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F=\left\{\begin{pmatrix}a+b & -b+c & 3b-c\\ 2b & a+2b-c & b+2c\\ -3b & -2b & a-b+2c\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer sa dimension et une base.

Ex 6 Soient $E=\mathbb{C}^4$, et $a\in\mathbb{C}$. On pose

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\\a^3\end{pmatrix};\ X_2=\begin{pmatrix}a\\a^2\\a^3\\1\end{pmatrix};\ X_3=\begin{pmatrix}a^2\\a^3\\1\\a\end{pmatrix};\ X_4=\begin{pmatrix}a^3\\1\\a\\a^2\end{pmatrix}$$

a) On suppose $a^4\neq 1$. Montrer que $\mathrm{Vect}(X_1,X_2,X_3,X_4)=E$.

b) Qu'en est-il lorsque $a^4=1$?

Ex 7 Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$. On considère la famille $\mathcal{B}=(P_1,P_2,P_3,P_4)$ définie par

$$\begin{array}{rcll}P_1&=&(X-2)(X-3)(X-4) & P_2=(X-1)(X-3)(X-4)\\ P_3&=&(X-1)(X-2)(X-4) & P_4=(X-1)(X-2)(X-3)\end{array}$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

Ex 8 **Base de Lagrange**. Soient $n\in\mathbb{N}$, $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts, et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
On pose pour $p\in[\![0,n]\!]$: $L_p=\dfrac{\prod\limits_{k\neq p}(X-a_k)}{\prod\limits_{k\neq p}(a_p-a_k)}$. Montrer que $\mathcal{B}=(L_0,\dots,L_n)$ est une famille libre, puis que c'est une base de E. Exprimer un polynôme $P\in E$ dans $\mathcal{B}$.

Ex 9 On pose $f_0:x\to 1,\ f_1:x\mapsto\cos x,\ f_2:x\mapsto\cos^2 x,\ f_3:x\mapsto\cos^3 x,\ g_2:x\mapsto\cos 2x,\ g_3:x\mapsto\cos 3x$.
Montrer que dans $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on a : $\mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2,f_3)=\mathrm{Vect}(f_0,f_1,g_2,g_3)$.

Ex 10 Soit $E=C^0(\mathbb{R})$, et $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts ($n\geqslant 2$). Les familles suivantes sont elles libres dans E ?

a) $(f_1,\dots,f_n)$, avec $f_i:x\mapsto e^{a_i x}$

b) $(g_1,\dots,g_n)$, avec $g_i:x\mapsto e^{x+a_i}$

c) $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, avec $\varphi_i:x\mapsto\cos(x+a_i)$

d) $(h_1,\dots,h_n)$, avec $h_i:x\mapsto|x-a_i|$

Ex 11 Soient $a_1<\ldots<a_p$ des réels positifs. Pour $a\in\mathbb{R}_+$, on note $u(a)$ la suite de terme général a^n
Montrer que $(u(a_1),\dots,u(a_p))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ex 12 a) T l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{tr} M = 0 = m_{11} + m_{22} + m_{33}$. (ensemble des matrices "de trace nulle"). Montrer que T est un hyperplan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

b) Généraliser à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 13 a) Déterminer une base des espaces $\mathcal{S}_3, \mathcal{A}_3$ des matrices carrées réelles d'ordre 3 symétriques et antisymétriques, et en déduire leur dimension. Retrouver le fait qu'ils sont supplémentaires.

b) Généraliser ce raisonnement à $\mathcal{S}_n, \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$.

Ex 14 Soit F_T l'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_T est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Identifier l'ensemble $F_4 \cap F_6$. Montrer que $F_4 + F_6 \subset F_{12}$.

Ex 15 Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\quad F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 2z = 0\right\}$, $\quad G = \mathbb{R}X_0$, avec $X_0 = (1, -1, 1)$.
Montrer que $E = F \oplus G$ et donner pour tout X de E une expression des composantes de X sur F et G

Ex 16 Même question avec $E = \mathbb{R}^4$, $F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - 2t = 0 \end{array} \right. \right\}$ et $G = \operatorname{Vect}(X_1, X_2)$,
avec $X_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $X_2 = (1, 1, 1, -1)$.

Ex 17 Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, F l'ensemble des matrices scalaires ($\lambda I_3, \ \lambda \in \mathbb{R}$) et G l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Ex 18 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Soit $F = \{P \in E \ / \ P(a) = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v de E, et en déterminer la dimension, une base. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

b) Même question avec $G = \{P \in E \ / \ P(a) = P'(a) = 0\}$

Ex 19 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 0$. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{K}[X]$ de $F = \{PQ, \ Q \in \mathbb{K}[X]\}$

Ex 20 Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et interpréter.
Décomposer $\exp$ et $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - x - 3$ sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.

Ex 21 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ / \ f(1) = f(2) = 0\}$, et G l'ensemble des fonctions affines.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Ex 22 Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 23 Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E vérifiant $F \cap H \subset G, \ H \subset F + G$ et $G \subset H$.
Montrer que $G = H$.

Ex 24 Soient F, G, H, K des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E vérifiant $E = F \oplus G = H \oplus K$
On suppose que $F \subset H$ et $G \subset K$. Montrer que $F = H$ et $G = K$.

Ex 25 Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E vérifiant $E = F + G$
Si G' est un supplémentaire de $F \cap G$ dans G, montrer que $E = F \oplus G'$.

Ex 26 Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soient $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On pose $F = \operatorname{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ et $G = \operatorname{Vect}(a_4, a_5)$. Calculer les dimensions de $F, \ G, \ F \cap G, \ F + G$.

Ex 27 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $F, \ G$ deux sous-espaces de E tels que : $\dim F + \dim G > n$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Ex 28 a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $H, \ K$ deux hyperplans. Calculer la dimension de $H \cap K$.

b) Plus généralement, si F est un sous-espace de dimension p, calculer $\dim(H \cap F)$.