Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0} \quad (*)$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, avec $ac \neq 0$ (sinon on est ramené à des suites géométriques)

<u>Théorème</u> :

On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$, et on appelle λ et μ ses deux racines (complexes)

<u>1^er cas : si $\lambda \neq \mu$</u> $\quad \left(b^2 - 4ac \neq 0\right)$: alors les suites vérifiant $(*)$ ont un terme général de la forme

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n, \quad \alpha, \beta \text{ constantes}$$

<u>2^d cas : si $\lambda = \mu$</u> $\quad \left(b^2 - 4ac = 0\right)$: alors les suites vérifiant $(*)$ ont un terme général de la forme

$$u_n = (\alpha n + \beta)\,\lambda^n, \quad \alpha, \beta \text{ constantes}$$

Les constantes α et β sont déterminées de manière unique par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1.

<u>Preuve</u> : on appelle E l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(*)$.

- Il est facile de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Considérons l'application $\varphi : E \to \mathbb{C}^2$ définie, pour $u \in E$, par $\varphi(u) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

  Il est facile de vérifier que φ est linéaire.

  De plus la donnée d'un couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ permet la construction par récurrence (à deux pas) d'une unique suite u de E vérifiant $u_0 = x$ et $u_1 = y$

  (si u_n et u_{n+1} sont construits, la relation $(*)$ donne sans ambiguité le terme suivant u_{n+2}).

  Autrement dit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ admet un unique antécédent u par φ.

  On en conclut que φ est un isomorphisme, et donc que

  $$\boxed{\dim E = 2}$$

- <u>1^er cas : si $\lambda \neq \mu$</u> : soit $L = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $M = (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites géométriques de raison λ et μ.

  <u>Alors (L, M) est une base de E</u> : en effet

  - <u>L et M sont bien dans E</u>, car $\forall n \in \mathbb{N}$,

    $$\begin{cases} a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = \lambda^n \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0 \\ a\mu^{n+2} + b\mu^{n+1} + c\mu^n = \mu^n \left(a\mu^2 + b\mu + c\right) = 0 \end{cases} \quad (\lambda \text{ et } \mu \text{ racines de } P)$$

  - <u>(L, M) est libre</u>, car si $\alpha L + \beta M = \mathbb{O}$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\lambda^n + \beta\mu^n = 0$.
    Les valeurs 0 et 1 de n donnent

    $$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = 0 \quad (\text{car } \lambda \neq \mu)$$

  Finalement toute suite de E est combinaison linéaire de manière unique de L et M : son terme général est donc de la forme

  $$\boxed{u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2} \quad \text{CQFD}$$

- 2[d] cas : si $\lambda = \mu$: soit $L = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $L' = (n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Alors (L, L') est une base de E : en effet

  - $L \in E$ (vu) et $L' \in E$, car $\forall n \in \mathbb{N}$,

    $$a\,(n+2)\,\lambda^{n+2} + b\,(n+1)\,\lambda^{n+1} + cn\lambda^n = n\lambda^n\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + \lambda^{n+1}\,(2a\lambda + \mu) = 0$$

    puisque λ est racine double de P, donc racine de P et P'.

  - (L, L') est libre, car si $\alpha L + \beta L' = \mathbb{O}$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\lambda^n + n\lambda^n = 0$.
    Les valeurs 0 et 1 de n donnent

    $$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \alpha\lambda + \beta\lambda = 0\end{array}\right. \qquad \text{d'où} \quad \alpha = \beta = 0 \quad (\text{car } c \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0)$$

  Finalement toute suite de E est combinaison linéaire de manière unique de L et L' : son terme général est donc de la forme

  $$\boxed{u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n = (\alpha + \beta n)\,\lambda^n, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2} \quad \text{CQFD}$$