PROBLEME

On note f la fonction définie pour tout $x>0$ par $f(x)=\ln(x)-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

1. Etude de f :

a) Somme, produit et composée de fonctions usuelles, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0$,

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+1/x}=\boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

b) Pour les mêmes raisons f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0$,

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+1/x}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}$$

Après mise au même dénominateur :

$$\boxed{f''(x)=-\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)^2}}$$

c) Le numérateur de cette dernière expression est un trinôme sans racines réelles (discriminant négatif). Il est donc de signe constant, et on en déduit sans souci que :

$$\boxed{f' \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[}$$

d) Les trois termes de l'expression de f' sont tous évidemment de limite nulle en $+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0}$

Comme f' est continue strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit (un raisonnement par l'absurde le montrerait rigoureusement) que $\boxed{f' \text{ est strictement positive sur }]0,+\infty[}$

e) Etudions les "limites aux bornes" de f :

$*$ En 0 : on a $\forall x>0$,

$$f(x)=\ln x-x\ln\frac{x+1}{x}=\ln x-x\ln(x+1)+x\ln x$$

Comme $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ (classique), on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty}$

$*$ En $+\infty$: posons $y=\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Alors

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{\ln(1+y)}{y}=-\ln(y)-\frac{\ln(1+y)}{y}$$

Or $\lim\limits_{y\to0}\ln y=-\infty$ et $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$ (taux de variation), donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

On a ainsi le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f) Vérifions que $f(2)<0<f(3)$: on calcule :

$$f(2)=\ln2-2\ln\frac{3}{2}=\ln2-2\ln3+2\ln2=3\ln2-2\ln3=\ln\frac{2^3}{3^2}=\ln\frac{8}{9}<0$$

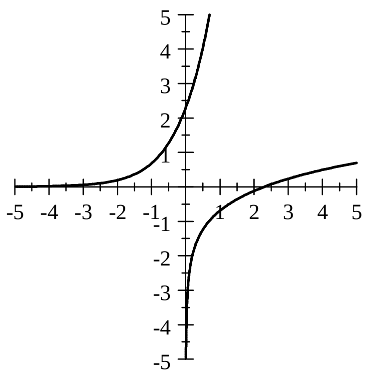
De même
$$f(3) = \ln 3 - 3\ln\frac{4}{3} = \ln 3 - 3\ln 4 + 3\ln 3 = \ln\frac{3^4}{4^3} = \ln\frac{81}{64} > 0$$

2. Réciproque de f :

a) f est donc continue strictement croissante, et vérifie $\lim\limits_{0} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
On en déduit que f réalise ainsi une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, dont on note g la réciproque.

b) Montrons que g est strictement croissante su $\mathbb{R}$: si $y < y'$, on pose $x = g(y)$ et $x' = g(y')$ de sorte que
$$f(x) = y \quad \text{et} \quad f(x') = y'$$
Si on avait $x \geqslant x'$, alors par stricte croissance de f on aurait $f(x) \geqslant f(x')$ soit $y > y'$ contradiction.
On en déduit donc $x < x'$, c'est à dire $g(y) < g(y')$, CQFD.
En appliquant ce résultat à l'inégalité $f(2) < 0 < f(3)$, on obtient $\boxed{2 < g(0) < 3}$

c) Courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$de f et de g (elles sont symétriques par rapport à la droite Δ : $y = x$)



3. On note φ la composée de g et de $\ln$, c'est-à-dire : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = g(\ln(x))$

a) L'étude rapide sur $[0, +\infty[$ de $h : x \to x - \ln(1+x)$, de dérivée $h' : x \to 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1} > 0$ montre que celle-ci est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Comme $h(0) = 0$, on en déduit qu'elle est positive sur $[0, +\infty[$, i.e. $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x}$

b) Soit $x > 0$. Substituons $\frac{1}{x} > 0$ à x dans l'inégalité précédente : $0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$. Il vient
$$\boxed{0 \leqslant x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant 1}$$
Mais alors,
$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \ln x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \geqslant 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow f(x) \leqslant \ln x$$
Par ailleurs
$$\left\{\begin{array}{l} f(ex) = \ln(ex) - ex\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) = 1 + \ln x - ex\ln\left(1 + \frac{1}{ex}\right) \\ ex\ln\left(1 + \dfrac{1}{ex}\right) \leqslant 1 \quad \text{(encadrement précédent en } ex\text{)} \end{array}\right., \Rightarrow f(ex) \geqslant 1 + \ln x - 1 = \ln x$$
Finalement
$$\boxed{f(x) \leqslant \ln x \leqslant f(ex)}$$

c) On applique g dont on a montré la croissance sur $\mathbb{R}$: $\forall x > 0,\ g(f(x)) \leqslant g(\ln x) \leqslant g(f(ex))$, soit
$$\boxed{x \leqslant \varphi(x) \leqslant ex}$$

d) De l'encadrement $2,71 < e < 2,72$ on tire donc facilement $\boxed{\varphi(10) \leqslant 10e < 28}$

e) Un calcul mené plus haut aboutit très vite à $\forall x > 0$, $\boxed{f(x) = (x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)}$

f) Soit $x > 0$. Alors on a les équivalences ($\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$x^{x+1} > 10(x+1)^x \iff (x+1)\ln x > \ln 10 + x\ln(x+1) \iff f(x) > \ln 10$$

En composant par la fonction strictement croissante g, il vient donc

$$\boxed{x^{x+1} > 10(x+1)^x \iff \varphi(x) > 10}$$

4. Encore une fonction : soit $a \in [e, +\infty]$. On pose $f_a : \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x x^{-a} \end{array}$

Produit de fonctions dérivables (usuelles) sur $[a, +\infty[$, f_a l'est aussi et $\forall x \geqslant a$

$$f_a'(x) = \ln(a)\, a^x x^{-a} - a a^x x^{-a-1} = a^x x^{a-1}(\ln(a)\, x - a)$$

Comme $a \geqslant e$, $\ln(a) \geqslant 1$ et donc $a\ln(a) \geqslant a$. Il va sans dire que $a^x x^{a-1} > 0$, donc $f_a'(x) \geqslant 0$ et ne s'annule qu'éventuellement en a. $\underline{f_a \text{ est ainsi strictement croissante sur } [a, +\infty[}$

De plus $\forall x \geqslant a$, $f_a(x) = e^{x\ln a - a\ln x}$. Or

$$x\ln a - a\ln x = x\left(\ln a - a\frac{\ln x}{x}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\ln a \geqslant 0$ on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a - a\ln x = +\infty$ et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty}$$

5. Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 28 tels que p^q et q^p aient le même nombre de chiffres dans le système de numération décimal. On cherche à montrer que $p = q$.

On suppose par l'absurde que $p > q$, i.e. $p \geqslant q + 1$ puisque p et q sont entiers.

a) Par croissance de la fonction f_q sur $[q, +\infty[$, on a $p \geqslant q + 1 \geqslant q \Rightarrow \boxed{f_q(p) \geqslant f_q(q+1)}$

b) Or $q \geqslant 28$, et la majoration de $\varphi(10)$ obtenue en 3.d) assure $q > \varphi(10) = g(\ln(10))$.

On en déduit par stricte croissance de f sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(q) > \ln 10 &\iff (q+1)\ln(q) - q\ln(q+1) > \ln 10 \\ &\iff \ln\frac{q^{q+1}}{(q+1)^q} > \ln 10 \\ &\iff \frac{q^{q+1}}{(q+1)^q} > 10 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{q^{q+1} > 10(q+1)^q}$$

c) L'inégalité du a) se traduit alors par

$$f_q(p) \geqslant \frac{q^{q+1}}{(q+1)^q} > \frac{10(q+1)^q}{(q+1)^q} = 10$$

d) Ainsi $f_q(p) > 10$, ce qui s'écrit $\dfrac{q^p}{p^q} > 10$ ou encore $\boxed{q^p > 10p^q}$

Cette inégalité contredit l'hypothèse selon laquelle p^q et q^p ont le même nombre de chiffres décimaux, puisque la multiplication par 10 en ajoute 1.

Il s'ensuit que l'hypothèse $p > q$ n'est pas tenable, ce qui permet de conclure à

$$\boxed{p = q}$$

EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$$

1. Soit $x \in [0,1[$. Alors$\forall k \in [[0, n-1]]$, $\dfrac{k}{n} \leqslant \dfrac{x+k}{n} < \dfrac{1+k}{n}$, donc $0 \leqslant \dfrac{x+k}{n} < 1$. Il s'ensuit $\left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$.

Par sommation on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$: $\boxed{f \text{ est nulle sur } [0,1[}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$: alors

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+1+k}{n} \right\rfloor \underset{\text{d'indice}}{\overset{\text{changement}}{=}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$$

Comme $\left\lfloor \dfrac{n+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \dfrac{k}{n} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \dfrac{k}{n} \right\rfloor$, il s'ensuit que

$$\boxed{f(x+1) = f(x) + 1.}$$

3. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N},\; H(p)$: $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x+p) = f(x) + p$:

- $H(0)$ est une banalité.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $H(p)$ est vraie alors $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x+p+1) \overset{\text{Q.2.}}{=} f(x+p) \overset{H(p)}{=} f(x)$ CQFD.

Ainsi, si $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [p, p+1[$, alors en posant $t = x - p$, on a $t \in [0,1[$, donc

$$f(x) = f(t+p) = f(t) + p \overset{\text{Q.1.}}{=} p$$

$$\boxed{f \text{ est donc constante égale à } p \text{ sur } [p, p+1[}$$

4. On voit ainsi que f coïncide avec la fonction partie entière sur $\mathbb{R}_+$: $\forall x \geqslant 0,\; f(x) = \lfloor x \rfloor$.
Mais si $p \in \mathbb{N}$, en substituant $x - p$ à x dans $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x+p) = f(x) + p$, il vient

$$f(x-p) = f(x) - p$$

Donc si $x \in [-p, -p+1[$, en posant $t = x + p \in [0,1[$ on obtient $f(x) = f(t-p) = f(t) - p = -p$.
L'expression trouvée sur $\mathbb{R}_+$ est ainsi valable aussi sur $\mathbb{R}_-$: en conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = \lfloor x \rfloor}$$