Ex 1 Démonstrations : on se donne deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) On suppose que $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim (u_n + v_n) = +\infty$.

Soit $M > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n + v_n \geqslant M$.

Avec "$\varepsilon = 1$", on peut écrire : $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geqslant n_1,\ v_n \geqslant \ell - 1$. Soit n_1 un tel entier.

Avec "$M' = M - \ell + 1$", on peut écrire : $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geqslant n_2,\ u_n \geqslant M - \ell + 1$. Soit n_2 un tel entier.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors $\forall n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{cases} u_n \geqslant M - \ell + 1 \\ v_n \geqslant \ell - 1 \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n \geqslant M \quad \text{CQFD.}$$

b) On suppose que $\lim u_n = -\infty$ et $\lim v_n = \ell < 0$. Montrons que $\lim (u_n v_n) = +\infty$.

Soit $M > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n v_n \geqslant M$.

Avec "$\varepsilon = -\dfrac{\ell}{2} > 0$", on peut écrire : $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geqslant n_1,\ v_n \leqslant \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2}$. Soit n_1 un tel entier.

Avec "$M' = \dfrac{2M}{\ell} < 0$", on peut écrire : $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geqslant n_2,\ u_n \leqslant \dfrac{2M}{\ell}$. Soit n_2 un tel entier.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors $\forall n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{cases} -u_n \geqslant -\dfrac{2M}{\ell} > 0 \\ -v_n \geqslant -\dfrac{\ell}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow u_n v_n \geqslant M \quad \text{CQFD.}$$

c) On suppose que $\lim u_n = \ell \neq 0$ (et que (u_n) ne s'annule pas). Montrons que $\lim \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$

On sait que le produite d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0 converge vers 0. Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell u_n}(\ell - u_n)$$

Il suffit donc de montrer que $\left(\dfrac{1}{\ell u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Or avec $\varepsilon = \left|\dfrac{\ell}{2}\right| > 0$ on peut écrire, puisque $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \geqslant |\ell| - \left|\frac{\ell}{2}\right| = \left|\frac{\ell}{2}\right| > 0$$

#on s'assure que "u_n ne s'approche pas trop de 0". donc

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{1}{\ell u_n}\right| \leqslant \frac{2}{\ell^2}$$

$\left(\dfrac{1}{\ell u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc localement bornée donc bornée, ce qui démontre notre propriété.

Ex 2 Montrons à l'aide de la définition que $\lim \arctan(n) = \dfrac{\pi}{2}$:

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arctan(n) \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$.

L'inégalité de droite est toujours vérifiée, de même que celle de gauche lorsque $\varepsilon \geqslant \dfrac{\pi}{2}$

Si $\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arctan(n) \Longleftrightarrow n \geqslant \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{1}{\tan\varepsilon}$$

Ainsi en posant $n_0 = \left\lceil \dfrac{1}{\tan\varepsilon} \right\rceil$, on a bien $\forall n \geqslant n_0,\ n \geqslant \dfrac{1}{\tan\varepsilon}$, donc $\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arctan(n)$, CQFD.

Ex 3 Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \cos n$: montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Par l'absurde, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers ℓ, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n-1})_{n\geqslant 1}$ aussi.

Donc $(u_{n+1}+u_{n-1})_{n\geqslant 1}$ convergerait vers 2ℓ. Mais pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1}+u_{n-1} = \cos(n+1)+\cos(n-1) = 2\cos(1)\cos(n) \to 2\ell\cos(1)$$

Par unicité de la limite on aurait

$$2\ell = 2\ell\cos(1) \iff (1-\cos(1))\,\ell = 0 \iff \ell = 0 \quad (\text{car } \cos 1 \neq 1)$$

Par ailleurs la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ devrait aussi converger vers ℓ. Or pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$u_{2n} = \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1 = 2u_n^2 - 1 \to -1$$

Par unicité de la limite, $-1 = \ell = 0$, ce qui est absurde, d'où notre résultat.

Ex 4 Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2, n-2]\!]$. Montrons que $\dbinom{n}{k} \geqslant \dbinom{n}{2}$:

– Première méthode : on écrit

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)\cdots(n-k+1)}{3\times\cdots\times k}$$

Soit

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{2}\frac{\prod_{i=3}^{k}(n-i+1)}{\prod_{i=3}^{k} i}$$

Après inversion du compteur ($3\times\cdots\times k = k\times\cdots\times 3$) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{2}\frac{\prod_{i=3}^{k}(n-i+1)}{\prod_{i=3}^{k}(k+3-i)} = \binom{n}{2}\prod_{i=3}^{k}\frac{n-i+1}{k+3-i}$$

Il suffit alors de montrer que la fraction est supérieure à 1 : or

$$\forall i \in [\![3,k]\!],\ (n-i+1)-(k+3-i) = n-2-k \geqslant 0 \text{ car } k \in [\![2,n-2]\!]$$

Comme de plus les facteurs sont positifs, il en résulte que

$$\forall i \in [\![3,k]\!],\ \frac{n-i+1}{k+3-i} \geqslant 1$$

et par produit

$$\prod_{i=3}^{k}\frac{n-i+1}{k+3-i} \geqslant 1 \quad \text{CQFD.}$$

– Deuxième méthode : on étudie la monotonie de la suite de terme général $a_k = \dbinom{n}{k}$: $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} - \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \\ &= n!\frac{(n-k+1)-k}{k!\,(n-k+1)!} \\ &= n!\frac{n+1-2k}{k!\,(n+1-k)!} \end{aligned}$$

Or

$$n+1-2k > 0 \iff k < \frac{n+1}{2} \iff k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

(a_k) croit donc de 0 à $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et décroit de $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ à n.

k	2		$\frac{n}{2}$		$n-2$
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\binom{n}{2}$

En particulier, comme $a_2 = a_{n-2} = \dbinom{n}{2}$, on a

$$\forall k \in [\![2, n-2]\!]\,,\ a_k \geqslant a_2 \quad \text{soit} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$$

On en déduit alors pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1}$$

Mais

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{2}^{-1} = \frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{k=2}^{n-2} 1 = \frac{2\,(n-3)}{n\,(n-1)}$$

On peut alors encadrer u_n :

$$2 + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{1}{n} + \frac{2\,(1-3/n)}{n\,(1-1/n)}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 2}$$

Ex 5 Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx}\mathrm{d}x = \int_0^n \left(xe^{-x}\right)^n \mathrm{d}x$.

Etudions sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$: On a $f' : x \mapsto (1-x)\,e^{-x}$, qui a le signe de $(1-x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

Il s'ensuit

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{e}$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant x^n e^{-nx} \leqslant \frac{1}{e^n}$$

Par intégration, il vient

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{e^n} \int_0^n \mathrm{d}x = \frac{n}{e^n}$$

Sachant que $n = o\left(e^{-n}\right)$, le résultat résulte du théorème des gendarmes.

Ex 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Soit $k \geqslant 2$. On a

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} \quad \text{car } k \geqslant k-1 > 0$$

Soit n un entier supérieur à 2. En sommant de 2 à n, il vient

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Or la suite $(u_n)_{n e \mathbb{N}^*}$ est croissante car $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Elle est majorée par 2, donc on peut conclure :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$$

Ex 7 Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n}\ (\heartsuit)$:

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et

$$2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Ainsi

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) \quad (*)$$

et par sommation puis télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$2\sqrt{n+1} - 2 = 2\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant S_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = 2\sqrt{n} \quad \text{CQFD.}$$

En divisant par $\sqrt{n}$, il vient

$$2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 2$$

Le théorème des gendarmes donne alors $\lim \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$, d'où

$$\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$$

b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Alors

$$\forall n \geqslant 2,\ T_n - T_{n-1} = S_n - S_{n-1} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \leqslant 0$$

d'après l'encadrement $(*)$. $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. De plus l'encadrement $(\heartsuit)$ donne:

$$\forall n \geqslant 1,\ R_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - 2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 1\right) \geqslant -2$$

$$\boxed{\text{La suite } (R_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante et minorée, donc converge.}}$$

Ex 8 **Constante d'Euler**. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall t > 0,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

Par intégration il vient

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}} \quad (*)$$

b) On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0 \quad \text{d'après } (*)$$

Donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. De plus, en sommant $(*)$ de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{d'où} \quad u_n \geqslant \ln(n+1)$$

d'où par télescopage :

$$u_n \geqslant \ln(n+1) \quad i.e. \quad v_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$$

$$\boxed{(v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante et minorée, donc converge vers un réel } \gamma \text{, appelé constante d'Euler}}$$

c) On peut écrire alors $v_n = \gamma + o(1)$, i.e. $u_n = \ln n + \gamma + o(1)$. Comme $\gamma + o(1) \ll \ln n$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Ex 9 Soient $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

Soit $x \geqslant 0$. Alors

$$x - f(x) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = \frac{x\left(\sqrt{x+1} - 1\right)}{\sqrt{1+x}} \overset{\text{quantité conjuguée}}{=} \frac{x^2}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sqrt{1+x}}$$

Comme $\sqrt{1+x} \geqslant 1$, il vient facilement :

$$\boxed{0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$ écrivons cet encadrement pour $x = \frac{k}{n^2} \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \frac{k}{n^2} - f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k^2}{2n^4}$$

En sommant :

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - S_n \leqslant \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Ce qui donne

$$0 \leqslant \frac{n+1}{2n} - S_n \leqslant \frac{1}{2n^4}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a finalement l'encadrement

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$$

Comme $\frac{n+1}{2n} \sim \frac{1}{2}$ et $\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \sim \frac{1}{6n} \to 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer :

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{1}{2}}$$

Ex 10 Soit $u_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (il y a n radicaux).

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ \sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases}$ (H_n)

* $H(1)$ est vraie car $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$: par linéarisation on a

$$\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \quad \text{et} \quad \sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Comme $\frac{\pi}{2^{n+2}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} > 0$, on a donc par hypothèse de récurrence

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (n+1 \text{ radicaux})$$
$$\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (n+1 \text{ radicaux})$$

L'hérédité est établie.

b) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi$$

Ainsi

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \pi}$$

Ex 11 Soit (u_n) une suite strictement positive, telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0,1[$. : montrons (u_n) converge vers 0.

– <u>Première méthode</u> : en écrivant la définition avec "$\varepsilon = 1-\ell > 0$", on obtient :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

Cela signifie que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $a \in [0,1]$.
Par l'absurde, si $a \in]0,1]$ (i.e..$a \neq 0$) alors on aurait $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{a} = 1$ contradiction.

On en déduit que $a = 0$ CQFD.

– <u>Deuxième méthode</u> : soit $q \in]\ell, 1[$. En appliquant la définition avec "$\varepsilon = q-\ell > 0$", on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q \quad \text{soit} \quad 0 < u_{n+1} \leqslant q u_n$$

Une récurrence facile laissée au lecteur donne alors (cf. suites géométriques) :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 < u_n \leqslant q^{n-n_0}u_{n_0} = \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}\,q^n$$

Comme $0 < q < 1$, le théorème des gendarmes assure alors que (u_n) converge vers 0.

– <u>Application</u> : montrons que pour $a > 1$, $a^n \ll n! \ll n^n$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $\frac{a^n}{n!}$ et $\frac{n!}{n^n}$. Alors pour tout entier n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{1}{a(n+1)} \to 0 = \ell$$

Par application du résultat précédent, on déduit (u_n) converge vers 0, i.e. $a^n \ll n!$. De même

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

Comme $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim n \times \left(\frac{n}{n+1}-1\right) = -\frac{n}{n+1} \sim -1,$, on en déduit que $\lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-1} \in]0,1[$, d'où (v_n) converge vers 0, i.e.$n! \ll n^n$.

Ex 12 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.

La fonction φ définie sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = x^n + x - 1 = 0$ est continue srictement croissante (somme de fonctions strictement croissantes), donc réalise une bijection de $]0,1[$ sur son image, soit $]-1,1[$ qui contient 0. Il existe donc un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $\varphi(x_n) = 0$, soit

$$\boxed{x_n^n + x_n - 1 = 0}$$

b) Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x} = \dfrac{-\ln(1-x)}{-\ln x}$ définie sur $]0,1[$.

$x \mapsto -\ln(1-x)$ est continue positive strictement croissante sur $]0,1[$, de même que $x \mapsto -\dfrac{1}{\ln x}$. Par produit, f est continue strictement croissante sur $]0,1[$, donc réalise une bijection de $]0,1[$ sur son image $]0,+\infty[$. (En effet $\lim\limits_{0} f = 0$ et $\lim\limits_{1} f = +\infty$). On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n^n + x_n - 1 = 0 \Longleftrightarrow x_n^n = 1 - x_n \Longleftrightarrow n \ln x_n = \ln(1 - x_n) \Longleftrightarrow n = f(x_n)$$

Finalement

$$x_n = f^{-1}(n)$$

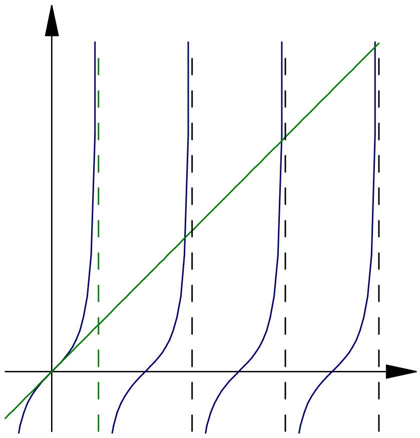
Or

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = 1$$

On en déduit ainsi

$$\boxed{\lim x_n = 1}$$

Ex 13 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[= I_n$.
On étudie la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur I_n.



Sa dérivée sur I_n est $f' : x \mapsto \tan^2(x) > 0$ sauf en $n\pi$, donc f est continue strictement croissante sur I_n et réalise une bijection de I_n sur son intervalle image, ici $\mathbb{R}$, puisque $\lim\limits_{-\pi/2+n\pi+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{\pi/2+n\pi-} f = +\infty$.
Il s'ensuit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée x_n, vérifiant donc :

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}+n\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+n\pi & (1) \\ \tan(x_n) = x_n & (2) \end{cases}$$

D'après (1), il est évident que

$$\boxed{(x_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$

Mais de plus

$$-\frac{1}{2n}+1 < \frac{x_n}{n\pi} < \frac{1}{2n}+1$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim \frac{x_n}{n\pi} = 1$, i.e. $\boxed{x_n \sim n\pi}$ ou

$$\boxed{x_n = n\pi + o(n)}$$

b) Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - n\pi$. Alors $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus par π-périodicité

$$\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n$$

On en déduit

$$y_n = \arctan(x_n)$$

Comme $\lim x_n = +\infty$, on a par composée

$$\boxed{\lim y_n = \frac{\pi}{2}}$$

Autrement dit $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$, soit encore

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}$$

Posons alors $u_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = y_n - \frac{\pi}{2}$. Comme $x_n > 0$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \arctan(x_n) - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

Mais comme $\dfrac{1}{x_n}$ converge vers 0 et $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a ainsi :

$$u_n \sim -\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi}$$

Cela s'écrit $u_n = -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où finalement le développement à trois termes :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Ex 14 Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $v_n = u_{2n}$, et $w_n = u_{2n+1}$.

a) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :

$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \\ w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est croissante et (w_n) décroissante.

$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} \to 0 \quad \text{CQFD.}$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, autrement dit les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, ce qui assure la convergentce de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x$, donc par linéarité de l'intégralepour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} \right) \mathrm{d}x$$

Or pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1+(-x)^n}{1+x} \quad \text{car } -x \neq 1$$

Donc

$$u_n = \int_0^1 \frac{1+(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n \Rightarrow 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ converge vers 0, donc aussi $(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ par produit avec une suite bornée. Finalement

$$\boxed{\lim u_n = \ln 2}$$

Ex 15 Montrons que les suites suivantes sont adjacentes :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}} \quad (p \geqslant 2)$.

* Il est évident que $v_n - u_n = \frac{1}{n^{p-1}} \to 0$ puisque $p - 1 > 0$.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^p} > 0 \quad \text{donc } (u_n) \text{ croît}$$

et

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \\ &= \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^p} - \frac{1}{n^{p-1}} \\ &= -\frac{(n+1)^p - n^{p-1}(n+2)}{(n+1)^p n^{p-1}} \\ &= -\frac{(n+1)^p - n^p - 2n^{p-1}}{(n+1)^p n^{p-1}} \end{aligned}$$

On développe avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{n^p + pn^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} n^k - n^p - 2n^{p-1}}{(n+1)^p n^{p-1}} \\ &= -\frac{(p-2)\, n^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} n^k}{(n+1)^p n^{p-1}} \end{aligned}$$

Comme $p-2 \geqslant 0$, et que tous les autre protagonistes de cette expression sont positifs, il vient $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, donc (v_n) est décroissante, et les deux suites sont adjacentes.

b) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$.

* Les deux suites sont strictement positives, on étudie donc les quotients, plus pratiques : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} > 1 \quad \text{donc } (u_n) \text{ croît}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \times \frac{n}{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \#\text{''} + 1 - 1\text{''} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^4} < 1 \quad \text{donc } (v_n) \text{ décroît} \end{aligned}$$

* Alors pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 < v_n - u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n - u_n = \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{v_n}{n} \overset{(v_n)\text{ décroît}}{\leqslant} \frac{v_0}{n}$$

Le théorème des gendarmes assure ainsi que $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et que les deux suites sont adjacentes.

Ex 16 Soient $0 < p < q$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = p, \quad v_0 = q$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}, \quad v_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{pu_n + qv_n}{p+q} - \frac{qu_n + pv_n}{p+q} \\ &= \frac{q-p}{q+p}(v_n - u_n) \end{aligned}$$

La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{q-p}{q+p} \in \left]0,1\right[$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = \left(\frac{q-p}{q+p}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{q-p}{q+p}\right)^n (q-p) \geqslant 0$$

En particulier, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n}$ et $\boxed{\lim (v_n - u_n) = 0}$

– Monotonie :

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{qu_n + pv_n}{p+q} - u_n = \frac{p}{p+q}(v_n - u_n) \geqslant 0 \\ \forall n &\in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} - v_n = \frac{p}{p+q}(u_n - v_n) \leqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

Ainsi (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et convergent donc vers une même limite ℓ. Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q} + \frac{pu_n + qv_n}{p+q} = u_n + v_n$$

La suite $(u_n + v_n)$ est donc constante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = u_0 + v_0 = p + q$$

En passant à la limite, il vient facilement

$$\boxed{\ell = \frac{p+q}{2}}$$

Ex 17 Critère de Cauchy : on suppose que $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{\min(p,q)\to\infty} |x_q - x_p| = 0$.

On considère $M_n = \sup\limits_{p\geqslant n}(x_p)$ et $m_n = \inf\limits_{p\geqslant n}(x_p)$. Montrons que (M_n) et (m_n) sont adjacentes :

– On a pour tout $n \in \mathbb{N},\ \{x_p,\ p \geqslant n+1\} \subset \{x_p,\ p \geqslant n\}$. On en déduit

$$\begin{cases} \sup\{x_p, p \geqslant n+1\} \leqslant \sup\{x_p,\ p \geqslant n\} \\ \inf\{x_p, p \geqslant n+1\} \geqslant \inf\{x_p,\ p \geqslant n\} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} M_{n+1} \leqslant M_n \\ m_{n+1} \geqslant m_n \end{cases}$$

Ainsi (M_n) décroît tandis que (m_n) croît.

– Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant n_0,\ \forall q \geqslant n_0,\ |x_q - x_p| \leqslant \varepsilon$.
Soit $n \geqslant n_0$. Alors $\forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ |x_q - x_p| \leqslant \varepsilon$, donc $x_q \leqslant x_p + \varepsilon$.
A $p \geqslant n$ fixé, on a donc $\forall q \geqslant n,\ x_q \leqslant x_p + \varepsilon$ et par "passage au sup" $M_n \leqslant x_p + \varepsilon$.
Mais alors $\forall p \geqslant n,\ x_p \geqslant M_n - \varepsilon$ et "passage à l'inf" $m_n \geqslant M_n - \varepsilon$. Finalement

$$M_n - m_n \leqslant \varepsilon$$

On en déduit que $(M_n - m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

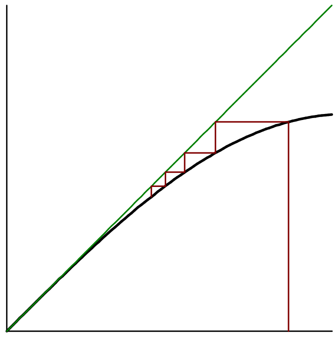
Ainsi (M_n) et (m_n) convergent vers la même limite ℓ. Mais $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \{x_p, p \geqslant n\}$, donc

$$m_n \leqslant x_n \leqslant M_n$$

Le théorème des gendarmes donne immédiatement

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge (vers } \ell)}$$

Ex 18 Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $\begin{cases} 0 < u_0 < \frac{\pi}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$.



a) $\sin$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

L'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par sinus, et une récurrence facile montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On peut même dire que $]0, 1[$ est stable par $\sin$, et donc $\forall n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1$.

Etudions $\varphi : x \mapsto \sin(x) - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\varphi' : x \mapsto \cos(x) - 1$. Donc $\varphi' > 0$ sauf en 0, et φ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que φ est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'annule qu'en 0.

Ainsi l'unique point fixe de la fonction (continue) sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est 0. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = \varphi(u_n) \leqslant 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

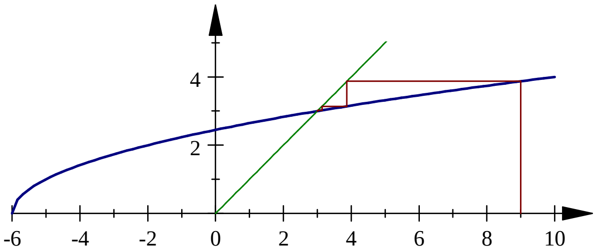
b) Minorée par 0 et décroissante :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers son unique point fixe, c'est-à-dire } 0}$$

De plus comme $\lim u_n = 0$, on a $\sin(u_n) \sim u_n$, i.e.

$$\boxed{u_{n+1} \sim u_n}$$

Ex 19 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. On pose $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$.



a) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-6, +\infty[$, et en particulier sur $I = [3, +\infty[$.
De plus $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc $f(I) = [f(3), +\infty[= [3, +\infty[= I$. Ainsi $\underline{I \text{ est stable par } f}$.

$*$ On en déduit, puisque $u_0 \in I$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$
(par récurrence : c'est vrai d'u_0, et si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$).
En particulier (u_n) est minorée par 3.

$*$ Comme f est continue, les seules limites possibles de (u_n) sont des points fixes. On résout :

$$f(x) = x \iff \sqrt{x+6} = x \iff \left\{ \begin{array}{l} x + 6 = x^2 \\ x \geqslant 0 \end{array} \right. \iff x = 3$$

$\underline{3 \text{ est l'unique limite possible de } (u_n)}$.

b) On sait, f étant croissante sur I stable par f, que la suite (u_n) est monotone.
Or $u_1 = \sqrt{15} < 9$, donc (u_n) est décroissante. Minorée par 3, elle converge donc vers son unique point fixe :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 3}$$

Remarque : on peut aussi étudier $g : x \mapsto f(x) - x$: $\forall x \geqslant 3$,

$$g(x) = \frac{x + 6 - x^2}{\sqrt{x+6} + x} = \frac{-(x-3)(x+2)}{\sqrt{x+6} + x} \leqslant 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \geqslant 3$, on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leqslant 0$

c) On a sur $]-6, +\infty[$:

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$$

qui est décroissante sur I et tend vers 0 en $+\infty$.
Donc $f'(I) =]0, f'(3)] = \left]0, \frac{1}{6}\right]$, et on en déduit : $\sup f' = \frac{1}{6}$. Alors en intégrant :

$$\forall t \in I,\ f'(t) \leqslant \frac{1}{6} \Rightarrow \forall x \geqslant 3,\ \int_3^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{6}(x-3) \Rightarrow \forall x \geqslant 3,\ f(x) - f(3) \leqslant \frac{1}{6}(x-3)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on substitue u_n à x : comme $f(3) = 3$, on obtient

$$u_{n+1} - 3 \leqslant \frac{1}{6}(u_n - 3) \qquad (*)$$

On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{0 < u_n - 3 \leqslant \frac{1}{6^{n-1}}}$$

$*$ C'est vrai de u_0 $(0 < 9 - 3 \leqslant \frac{1}{6^{-1}})$

$*$ Si $n \in \mathbb{N}$ et $0 < u_n - 3 \leqslant \dfrac{1}{6^{n-1}}$ alors $(*)$ entraine

$$0 < u_{n+1} - 3 \leqslant \frac{1}{6}(u_n - 3) \overset{\text{HdR}}{\leqslant} \frac{1}{6^n} \qquad \text{CQFD}$$

(on a $u_{n+1} - 3 > 0$ car $]3, +\infty[$ est stable par f donc $u_{n+1} = f(u_n) > 3$)

Ex 20 Soit $f : x \mapsto \ln \dfrac{e^x - 1}{x}$. On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ e^x > 1 + x$.

a) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \mathbb{R}_+ \text{en posant } f(0) = 0}$$

De plus pour tout $x > 0$,

$$e^x > 1 + x \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 1 \Rightarrow \ln \frac{e^x - 1}{x} > 0$$

f est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x} - \ln e^x = \ln \frac{e^x - 1}{xe^x} = \ln \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

Mais l'inégalité rappelée donne en substitant $-x$ à x :

$$e^{-x} > 1 - x \quad \text{d'où} \quad 0 < 1 - e^{-x} < x \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1 - e^{-x}}{x} < 1$$

Il vient donc facilement

$$\boxed{\forall x > 0,\ g(x) < 0}$$

c) Soit (u_n) la suite définie par

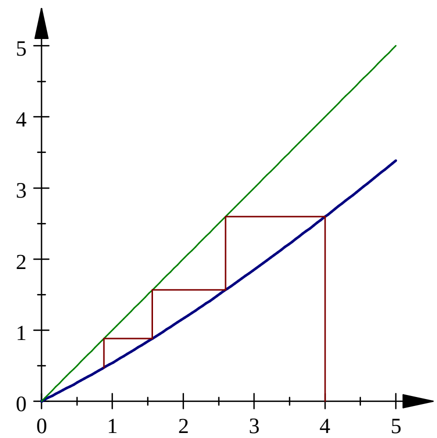
$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

L'étude de f montre que l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe} \quad \text{et} \quad u_n > 0 \quad \text{\#récurrence}$$

L'étude de g montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$, donc (u_n) décroît.
Décroissante et minorée (par 0), la suite (u_n) converge, et comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, sa limite est un point fixe de f (ou une racine de g). Mais l'étude du b) montre que g ne s'annule qu'en 0, et donc que 0 est l'unique point fixe de f. On peut conclure

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$$



Ex 21 Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$u_1 = \ln a \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - u_k)$$

On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \ln(a - u_k) = u_n + \ln(a - u_n)$$

En posant $f : x \mapsto x + \ln(a - x)$, la suite (u_n) vérifie la relation :

$$u_1 = \ln a \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_n = f(u_n)$$

Notons que f est définie sur l'intervalle $I =]-\infty, a]$, et que

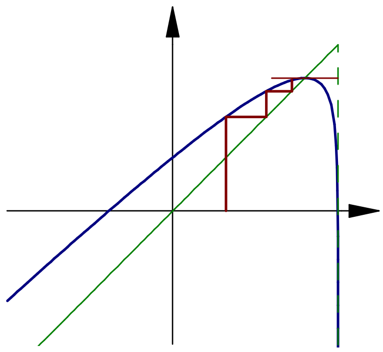
$$f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{a-x} = \frac{a-1-x}{a-x}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$a-1$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$a-1$	$\searrow$	$-\infty$

Pour la limite en $-\infty$, on pose $y = a - x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \ln(a - x)) = \lim_{y\to+\infty} a - y + \ln y = -\infty \quad \text{car} \quad \ln y \underset{y\to+\infty}{\ll} y$$



Comme f est croissante sur $I =]-\infty, a-1]$, on a $f(J) =]-\infty, f(a-1)] =]-\infty, a-1] = J$.

L'intervalle J est donc stable par f. Comme $u_1 = \ln a \leqslant a - 1$ (inégalité très classique), on a par récurrence

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n \text{ existe et } u_n \leqslant a - 1$$

De plus

$$\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n = \ln(a - u_n) \geqslant 0 \quad \text{car} \quad a - u_n \geqslant 1$$

Il s'ensuit que (u_n) est majorée (par $a - 1$) et croissante, donc converge.

Comme f est continue sur J, la limite de (u_n) est nécessairement un point fixe de f, solution de :

$$f(x) = x \iff \ln(a - x) = 0 \iff a - x = 1 \iff x = a - 1$$

Finalement

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } a - 1}$$

Ex 22 Etude de la suite définie par

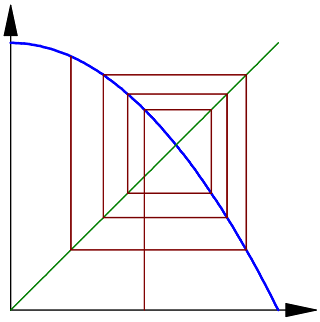
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

On pose $f : x \mapsto 1 - x^2$.

– Il est clair que f est décroissante sur $[0,1]$, donc $f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1]$

  L'intervalle $[0,1]$ est stable par f, et on en déduit par une récurrence rapide que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

  (C'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$).



– La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc une éventuelle limite ℓ de (u_n) doit vérifier $f(\ell) = \ell$.

  Or $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. Les seules limites possibles de (u_n) sont

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in [0,1]} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin [0,1]}$$

– On pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$, et $g = f \circ f$. On a

$$v_0 = u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad w_0 = u_1 = f(u_0) = \frac{3}{4}$$

  De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(v_n) \\ w_{n+1} & = & u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = g(w_n). \end{array}$$

  (v_n) et (w_n) vérifient donc la même relation de récurrence donnée par la fonction $h = f \circ f$.

  Remarque : α et β sont points fixes de g. Sont-ils les seuls?

– Soit $\varphi : x \mapsto g(x) - x$. On a

$$\begin{array}{rcll} g(0) & = & f(1) = 0 & \text{donc} \quad \varphi(0) = 0 \\ g(1) & = & f(0) = 1 & \text{donc} \quad \varphi(1) = 0 \\ g(\alpha) & = & f(\alpha) = \alpha & \text{donc} \quad \varphi(\alpha) = 0 \\ g(\beta) & = & f(\beta) = \beta & \text{donc} \quad \varphi(\beta) = 0 \end{array}$$

  De plus pour tout réel x :

$$\varphi(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^2 - x$$

  est polynomiale de degré 4 et de coefficient dominant -1. Donc

$$\boxed{\varphi(x) = -x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}$$

  On obtient alors aisément le signe de φ sur l'intervalle $[0,1]$: (β est négatif)

x	0		α		1
$\varphi(x)$	0	$-$	0	$+$	0

  Au passage, g admet trois points fixes sur $[0,1]$: $0, \alpha$ et 1.

– On sait que f est décroissante sur $[0,1]$. Donc

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(b) \leqslant f(a) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(f(a)) \leqslant f(f(b)) \leqslant 1$$

g est donc croissante sur $[0,1]$ ..En particulier

$$g([0,\alpha]) = [g(0), g(\alpha)] = [0,\alpha] \quad \text{et} \quad g([\alpha,1]) = [g(\alpha), g(1)] = [\alpha,1]$$

$[0,\alpha]$ et $[\alpha,1]$ sont donc stables par g.

Or $v_0 = \frac{1}{2} \in [0,\alpha]$ et $w_0 = \frac{3}{4} \in [\alpha,1]$. Par récurrence (comme plus haut),

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \leqslant w_n \leqslant 1$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= g(v_n) - v_n = \varphi(v_n) \leqslant 0 \quad \text{puisque } v_n \in [0,\alpha] \\ w_{n+1} - w_n &= g(w_n) - w_n = \varphi(w_n) \geqslant 0 \quad \text{puisque } w_n \in [\alpha,1] \end{aligned}$$

Donc (v_n) est minorée (par 0) et décroissante, donc converge vers un point fixe de g inférieur à $v_0 = \frac{1}{2} < \alpha$. D'où

$$\boxed{\lim v_n = 0}$$

De même (w_n) est majorée (par 1) et croissante, donc converge vers un point fixe de g supérieur à $w_0 = \frac{3}{4} > \alpha$. D'où

$$\boxed{\lim w_n = 1}$$

– Si la suite (u_n) convergeait vers un réel a, on aurait $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$.

  Ce n'est visiblement pas le cas puisque les limites de $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont distinctes. Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est divergente}}$$

Remarque : une méthode plus courte. Comme g est croissante sur $[0,1]$ stable par g, on en déduit que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones. On calcule

$$v_1 = u_2 = 1 - u_1^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} < v_0 \quad \text{et} \quad w_1 = u_3 = 1 - u_2^2 = 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{207}{256} > w_0$$

On en déduit que (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante, donc $(w_n - v_n)$ est croissante.
Comme $w_0 - v_0 > 0$, cette différence ne peut pas tendre vers 0, ce qui interdit la convergence de (u_n).
Cette méthode ne donne pas les limites des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), appelées **valeurs d'adhérence** de (u_n).

Ex 23 Méthode de Césarò : si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite, on pose $v_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$

a) On suppose que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de $\lim u_n = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Mais alors $\forall n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| \overset{\text{I.T.}}{\leqslant} \frac{|u_{n_0}|+|u_{n_0+1}|+\cdots+|u_n|}{n} \leqslant \frac{(n-n_0+1)\times\varepsilon/2}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

car $n-n_0+1 \leqslant n$.

n_0 ainsi fixé, la suite $\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}$ converge vers 0 (son numérateur est constant).

Il existe donc un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, en posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a $\forall n \geqslant n_2$:

$$|v_n| \overset{\text{I.T.}}{\leqslant} \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui assure que

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0}$$

Cette méthode, qui consiste à partager une expression en plusieurs parties dont la "petitesse" est assurée par des arguments différents, s'appelle la **méthode de Césaro**, elle est employée dans de multiples situations.

b) On suppose si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On peut écrire alors $u_n = \ell + \delta_n$, où (δ_n) converge vers 0. Donc

$$v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \frac{n\ell+\delta_1+\cdots+\delta_n}{n} = \ell + \frac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$$

D'après la question précédente, $\dfrac{\delta_1+\cdots+\delta_n}{n}$ converge vers 0, d'où l'on déduit que

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \ell}$$

c) On suppose que $\lim(u_{n+1}-u_n) = \ell \neq 0$, alors en appliquant le résultat précédent à la suite (w_n) de terme général $w_n = u_n - u_{n-1}$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1}) \to \ell \quad \text{soit} \quad \frac{1}{n}(u_n-u_0) \to \ell \quad \text{et donc} \quad \frac{u_n}{n} \to \ell$$

On conclut à

$$\boxed{u_n \sim n\ell}$$

Ce résultat s'appelle le **lemme de l'escalier**.