Bornes supérieures et inférieures

1. Définitions

a) **Bornes d'un ensemble de réels :** soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

S'il existe, le plus petit des majorants de A. est appellé **borne supérieure de** A, et noté $\sup A$.

S'il existe, le plus grand des minorants de A. est appellé **borne inférieure de** A, et noté $\inf A$.

Dire que $M = \sup A$ revient donc à dire que :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} M \text{ est un majorant de } A : \forall x \in A,\ x \leqslant M \\ \text{Tout majorant de } A \text{ est supérieur à } M \end{array} \right.}$$

b) **Théorème de la borne supérieure** (admis) :

> Tout sous-ensemble non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
> Tout sous-ensemble non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

c) **Cas des fonctions et des suites :**

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, on peut définir le plus petit des majorants de (u_n):

$$\boxed{\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup \underbrace{\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}}_{\text{ens. non vide majoré}}} \qquad \text{(de même pour } \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n\text{)}$$

(ii) Si f est une fonction bornée sur I, on peut définir le plus petit des majorants de f sur I :

$$\boxed{\sup_I f = \sup_{x\in I} f(x) = \sup \underbrace{\{f(x),\ x \in I\}}_{\text{ens. non vide majoré}} = \sup f(I)} \qquad \text{(de même pour } \inf_I f\text{)}$$

2. Cas où la borne est atteinte ("cas facile")

a) **Cas des ensembles :** soit A un sous ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$, et soit $M = \sup A$

Si $M \in A$, on dit que M est **le plus grand élément de** A, ou le **maximum** de A. On le note $M = \max A$.

$$\boxed{M = \max A \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \in A \\ \forall x \in A,\ x \leqslant M \end{array} \right.}$$

On dit que $\sup A$ **est atteint**. On définit de manière analogue le **minimum** $\min A$

Exemple : $\max\,]0,1]$ existe et vaut 1. $\min\,]0,1]$ n'existe pas, alors que $\inf\,]0,1] = 0$

b) **Cas des suites :** **s'il existe**, le maximum de la suite bornée (u_n) est défini par

$$M = \max_{n\in\mathbb{N}} u_n \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \text{ est un majorant de } (u_n) \\ M \in \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} : \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ u_{n_0} = M \end{array} \right.$$

c) **Cas des fonctions :** **s'il existe**, le maximum sur I de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est défini par

$$M = \max_I f \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \\ \exists x_0 \in I \ / \ f(x_0) = M \end{array} \right. \quad (M \text{ est atteint sur } I, i.e.\ M \in f(I))$$

Idem pour $\min\limits_I f$.

Exemple : soit $f : x \to \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer ses bornes.

3. Caractérisations de la borne supérieure

a) Cas des ensembles : soit A une partie non vide majoré de $\mathbb{R}$. Alors

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{tout réel strictement inférieur à } M \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ M - \varepsilon \text{ n'est pas majorant de } A \end{cases}$$

soit

$$\boxed{M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \ / \ x > M - \varepsilon \end{cases}}$$

b) Cas des suites : si (u_n) est bornée,

$$\boxed{M = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ u_{n_0} > M - \varepsilon \end{cases}}$$

c) Cas des fonctions : si f est bornée sur I

$$\boxed{M = \sup_I f \iff \begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in I \ / \ f(x_0) > M - \varepsilon \end{cases}}$$

Remarque : caractérisations à adapter pour les $\inf$.

Exemple 1 : $f : x \to \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2 + 2}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$

Exemple 2 : soit $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Montrer que (u_n) est bornée et calculer ses bornes.

4. Propriétés

a) "Passage au sup" : si A est non vide bornée et M un réel, alors on a l'équivalence

$$\boxed{(\forall x \in A,\ x \leqslant M) \iff \sup A \leqslant M}$$

De même

$$\boxed{(\forall x \in A,\ x \geqslant m) \iff \inf A \geqslant m}$$

Exemple d'application : soient A et B deux sous ensembles non vides majorés de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{a + b, \quad a \in A,\ b \in B\}$$

Montrer que $A + B$ est non vide majoré et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

b) Bornes d'une somme : soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Alors

$$\boxed{\sup_I (f + g) \leqslant \sup_I (f) + \sup_I (g)} \quad \text{et} \quad \boxed{\inf_I (f + g) \geqslant \inf_I (f) + \inf_I (g)}$$

De même pour deux suites bornées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\boxed{\sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n) \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n) + \sup_{n \in \mathbb{N}} (v_n)} \quad \text{et} \quad \boxed{\inf_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n) \geqslant \inf_{n \in \mathbb{N}} (u_n) + \inf_{n \in \mathbb{N}} (v_n)}$$