EXERCICE

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note I_n^k le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments qui laissent invariants exactement k éléments.

1. Calculer $I_n^n,\ I_n^{n-1}$ (pour $n \geqslant 1$) et I_n^{n-2} (pour $n \geqslant 2$).

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} I_n^k$.

3. a) Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $I_n^k = \binom{n}{k} I_{n-k}^0$.

b) En déduire la table des I_n^k pour n allant de 0 à 6 (expliquer un peu la démarche).

4. a) Combien y a-t-il de permutations laissant invariant un élément donné.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k I_n^k = n!$

Indication : on pourra compter de deux manières la somme de tous les invariants des permutations de E.

5. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_k^0 = n!$

6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n^0 = n I_{n-1}^0 + (-1)^n$.

7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n^0 = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

8. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$.

b) En déduire la limite de $\frac{I_n^0}{n!}$ (on pourra majorer l'intégrale précédente) et interpréter.

PROBLEME

PARTIE 1

1. Nombre d'involutions : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments.

On appelle **involution de** E toute bijection s de E sur E vérifiant $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

On note t_n le nombre d'involutions de E. On admet qu'il ne dépend que de n, le cardinal de E.

a) Calculer $t_1,\ t_2$ et t_3.

b) On fixe un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer en fonction de t_i, où $1 \leqslant i < n$:

i. Le nombre d'involutions s de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $s(n) = n$.

ii. Le nombre d'involutions s de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $s(n) = k$.

c) En déduire la relation : $t_n = t_{n-1} + (n-1)\, t_{n-2}$. On soignera la rédaction.

2. Expression à l'aide d'une suite de polynômes.

Soit $u : x \mapsto e^{x^2/2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n, et H_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = H_n(x)\, u(x) \quad (*)$$

a) Pour tout x réel, exprimer $u'(x)$ à l'aide de $u(x)$ et en déduire la relation entre $u^{(n)}(x), u^{(n-1)}(x)$ et $u^{(n-2)}(x)$ pour $n \geqslant 2$

b) Calculer H_0 et H_1, puis déduire de la question précédente la formule :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x)(x) = x H_{n-1}(x) + (n-1)\, H_{n-2}(x)$$

c) Montrer que H_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0,\ H_n(x) \geqslant 0$

e) Comparer t_n et $H_n(1)$

3. Etude des deux derniers coefficients de H_n

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = H_n(0)$. Exprimer h_n en fonction de h_{n-2} pour $n \geqslant 2$.
En déduire h_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer une expression de h_{2p} en fonction de $p \in \mathbb{N}$. On l'exprimera à l'aide de factorielles.

c) A l'aide des relations de la question 2., montrer que $\forall n \geqslant 1,\ H_n' = nH_{n-1}$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n' = H_n'(0)$. Donner une expression de h_n' en distinguant suivant la parité de n.

PARTIE 2

On se propose de trouver un équivalent de t_n. **On admettra** la célèbre relation de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1. Un lemme préliminaire : soit f une fonction de classe C^2 strictement positive sur $[0,1]$.
On suppose qu'il existe trois constantes strictement positives a, α et β telles que

$$f(0) = a,\ f'(0) = 0,\ \text{et } \forall x \in [0,1],\ \alpha^2 f(x) \leqslant f''(x) \leqslant \beta^2 f(x)$$

On se propose de montrer que $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{a}{2}\, e^{\alpha x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{a}{2}\left(e^{\beta x}+1\right)$

a) Exprimer à l'aide de la fonction ch l'unique solution φ de l'équation différentielle $y'' = \beta^2 y$ avec les conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$.

b) On pose $\omega = f\varphi' - f'\varphi$. En étudiant ω sur $[0,1]$ montrer que $\forall x \in [0,1],\ \omega(x) \geqslant 0$.

c) En déduire que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant \varphi(x)$ (envisager le quotient) puis que $f(x) \leqslant \dfrac{a}{2}\left(e^{\beta x}+1\right)$

d) En utilisant une démarche analogue, démontrer que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant \dfrac{a}{2}\, e^{\alpha x}$

2. Un encadrement : on fixe $n \in \mathbb{N}$, et on pose $v_n : x \mapsto H_n(x)\, e^{x^2/4}$.

a) Etudier le signe de v_n et de v_n' sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $v_n(0)$ et $v_n'(0)$.

b) En dérivant deux fois la relation $(*)$, établir $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n''(x) + xH_n'(x) - nH_n(x) = 0$

c) Exprimer $v_n''(x)$ en fonction de $v_n(x)$, n et x, et en déduire que

$$\forall x \in [0,1],\ \left(n+\tfrac{1}{2}\right) v_n(x) \leqslant v_n''(x) \leqslant \left(n+\tfrac{3}{4}\right) v_n(x)$$

On pose pour la suite $\alpha_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}}$ et $\beta_n = \sqrt{n+\frac{3}{4}}$ pour tout entier n.

3. Cas où n est pair.

a) A l'aide du lemme préliminaire, montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^{-1/4}h_{2p}}{2}\, e^{\alpha_{2p}} \leqslant H_{2p}(1) \leqslant \frac{e^{-1/4}h_{2p}}{2}\left(e^{\beta_{2p}}+1\right)$$

b) A l'aide de la formule de Stirling, calculer un équivalent de h_{2p} (commencer par un équivalent de $(2p)!$)

c) Déduire des deux questions précédentes que $t_{2p} \sim \dfrac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}}\, e^{\sqrt{2p}} \left(\dfrac{2p}{e}\right)^p$

4. Avec des techniques analogues, on pourrait démontrer que $t_{2p+1} \sim \dfrac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2p+1}} \left(\dfrac{2p+1}{e}\right)^{p+1/2}$
(**ce n'est pas demandé ici**). Conclure sur un équivalent de t_n.