Rédiger, démontrer

1. Principes de rédaction

Une démonstration est une rédaction structurée qui, partant d'**hypothèses** (ce qui est supposé vrai), aboutit à une **conclusion**, à l'aide d'implications et de résultats connus. Dans un problème, on s'appuie souvent sur les résultats démontrés aux questions précédentes.

a) **Rédaction :** la règle idéale est qu'on doit pouvoir lire la rédaction d'un exercice sans connaître l'énoncé de l'exercice : tout doit donc y être introduit, et on doit rédiger une conclusion claire.

Des parties peuvent être rédigées en langage courant, d'autres en écritures symboliques. On veillera à ne pas mélanger les deux! (comme "f est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$" ou "les droites sont sécantes $\Rightarrow$ elles se coupent ...")

Dans tous les cas il faut articuler les phrases, c'est-à-dire les relier par des liens logiques (donc, or, et, si, alors, c'est-à-dire ou i.e., etc, pour le langage courant, $\Longrightarrow$,$\Longleftrightarrow$, et, ou, etc. pour le langage symbolique).

De même, on doit impérativement introduire toutes les lettres, y compris celles données dans l'énoncé, et utiliser les quantificateurs dans les phrases symboliques. Attention, ce ne sont pas des abréviations.

Une phrase non quantifiée n'a aucun sens! ($f(x) = 0$ signifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$?)

b) **Précision sur les variables :** les quantificateurs n'ont pas valeur déclarative :

Ecrire "$\forall x \in E,\ blablabla$" ne crée aucun x. On l'introduira toujours par "soit x dans E. Alors $blablabla$" qui donne effectivement vie à un x sur lequel on peut travailler.

De la même manière, "$\exists x \in E \ /\ blablabla$" ne crée pas d'élément x dans E. En toute rigueur, il faut écrire : "$\exists x \in E \ /\ blablabla$. Soit x un tel élément. Alors..."

D'ailleurs, cette idée s'applique à toutes les variables muettes : ce n'est pas parce qu'on a écrit (ou lu dans l'énoncé) $f : x \mapsto f(x)$ que l'on dispose d'une variable x, pas plus que n'existe un x lorsqu'on écrit $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell$, et surtout lorsqu'on écrit une équation : quand on parle de la droite d'équation $y = 2x + 3$, il n'existe aucun x et aucun y.

Enfin, la portée du $\forall x \in E$ dans "$\forall \in E,\ P(x)$, blablabla" est limitée à $P(x)$.

Par exemple : on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}},\ f(x) = x^2 - 3x + 1$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}},\ f'(x) = 2x - 3$$

c) **Sur les hypothèses et conclusions :** lorsqu'on démontre une proposition du type $P \Rightarrow Q$, on ne démontre pas que Q est vraie, mais qu'elle est vraie lorsque P l'est. On doit donc commencer la démonstration par : "**Supposons que** P **soit vraie**". P est appelée **hypothèse**, et Q **conclusion**.

De même lorsqu'on démontre une proposition du type $P \Leftrightarrow Q$, on ne montre pas que ces propriétés sont vraies, mais seulement que **l'une est vraie lorsque l'autre l'est**.

> ***Remarque :*** lorsque l'hypothèse est de la forme $\forall x \in E,\ P(x)$, on essaie souvent d'exploiter $P(x)$ pour **certaines** valeurs bien choisies de $x \in E$. On dit qu'on **spécialise** x.

2. Equations

Résoudre une équation (E) d'inconnue x sur le domaine $\mathcal{D}$, c'est chercher quels sont les nombres x de $\mathcal{D}$ qui vérifient l'égalité proposée (E). De même pour une inéquation. On n'introduit pas l'inconnue.

Remarque : si x est solution de (E), il peut être plus judicieux d'exploiter (E) qu'une expression de x. Par exemple, la solution $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de $(E) : x^2 - x - 1 = 0$ a pour carré $\Phi^2 = \Phi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

a) Résolution par équivalences : lorsqu'on transforme par **équivalences** (E) en une équation (E') plus simple, les solutions de (E') sont aussi les solutions (E) (puisque vérifier (E) équivaut à vérifier (E')).

b) Résolution par implications : lorsque (E) est transformée en (E') par **implications** , cela signifie que **si** x vérifie (E), **alors** elle vérifie (E'), la réciproque n'étant pas forcément vraie.
Il faut donc **vérifier** si les réels trouvés sont bien solutions (c'est la **réciproque**, ou **synthèse**)

c) Généralisation : raisonnement par analyse et synthèse : pour tout type de problème où l'**on cherche un objet** X vérifiant les propriétés $P_1, \ldots P_n$, on peut raisonner de la manière suivante :

(i) **Analyse** : *on suppose avoir un objet X vérifiant les propriétés.*
A l'aide d'implications, on trouve une ou des conditions nécessaires que doit vérifier X (dont l'existence n'est pas assurée mais supposée à ce stade).
La fin de l'analyse donne lieu à un ou plusieurs candidats pour X. Autrement dit, on a restreint le champ d'investigation.
Supposons avoir trouvé les solutions potentielles du problème $X_1, \ldots, X_p$.

(ii) **Synthèse** : *on définit $X_1, \ldots, X_p$ comme trouvées dans l'analyse.*
On étudie les propriétés $P_1, \ldots, P_n$ pour chacune d'entre elles (c'est une vérification).

(iii) **Conclusion** : on conclut sur **les** solutions du problème.

Attention : le PCSI moyen oublie souvent la synthèse...

Remarque : si la fin de l'analyse donne lieu à un seul "candidat" potentiel, elle aura montré l'**unicité** d'une éventuelle solution (sans en montrer l'existence).
Si la synthèse la valide, elle établit l'**existence** d'une solution, et la conclusion clamera **l'existence et l'unicité** d'une solution au problème.

Exemple : déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m+n) = f(m) + f(n)$$

3. Quelques démarches de base pour démontrer une proposition

a) **Démontrer une proposition P par l'absurde :** on la suppose fausse, et on raisonne jusqu'à tomber sur une contradiction. On utilise la conjonction **donc** et ses synonymes.

b) **Démontrer une proposition de la forme $\forall x \in E,\ P(x)$:** on commence par écrire "soit x dans E", puis on raisonne, puis on conclut.

c) **Démontrer une proposition de la forme $\exists x \in E,\ P(x)$:**

- Première possibilité : on **construit** l'élément x, ou on l'**exhibe**, ou on utilise un "théorème d'existence" (comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires)
- Deuxième possibilité : on raisonne par l'absurde : on suppose que $P(x)$ est fausse pour tout x et on tombe sur une contradiction.

d) **Démontrer une proposition de la forme $P \Rightarrow Q$:**

- Première possibilité : à l'aide d'une succession d'implications.

  On commence par écrire "On suppose que P est vraie" puis on raisonne jusqu'à établir que Q est vraie.

  On utilise la conjonction **donc** et ses synonymes, parfois $\Rightarrow$ dans une écriture purement mathématique.

  Ne pas partir de la fin, sauf si on peut raisonner par équivalence jusqu'à P, ce qui est très déconseillé.
- Deuxième possibilité : par **contraposée** : on suppose Q fausse, et on montre qu'alors P l'est aussi.

  Remarque : cette méthode est proche du raisonnement par l'absurde, qui peut s'envisager ici :
  On suppose que P est vraie et Q est fausse, et on tombe sur une contradiction

e) **Démontrer une proposition de la forme $P \Leftrightarrow Q$:**

- Première méthode : à l'aide d'une succession d'équivalences (**attention**)
- Deuxième méthode : on montre successivement l'implication : $P \Rightarrow Q$, **puis** : $Q \Rightarrow P$.
  - On suppose P. Alors...... D'où Q est vraie.
  - On suppose Q. Alors...... D'où P est vraie CQFD.

  Attention : l'oubli de la "réciproque" est l'erreur la plus partagée par les étudiants.

f) **Démontrer une proposition de la forme $A \subset B$:** c'est-à-dire $\boxed{x \in A \Rightarrow x \in B}$

On part donc d'un élément de A, et on démontre qu'il est dans B.

Soit $x \in A$. Alors......d'où $x \in B$ CQFD.

g) **Démontrer une égalité d'ensembles $A = B$:**

- Première méthode : on montre l'équivalence $\boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in B}$
- Deuxième méthode : double inclusion : $A = B$ se traduit aussi par : $\boxed{A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A}$

  On montre donc successivement les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$:
  - Soit $x \in A$. Alors...... D'où $x \in B$.
  - Soit $x \in B$. Alors...... D'où $x \in A$ CQFD.

  Attention : là encore, il faut être vigilant, et ne pas oublier la moitié de la démonstration.

4. Le raisonnement par récurrence

Soit à démontrer une proposition du type : $\forall n \geqslant n_0\ ,\ P(n)$ est vraie, où n_0 est un entier naturel, et $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On a le résultat logique :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ P(n_0) \text{ est vraie} \\ 2.\ \forall k \geqslant n_0,\ [P(k) \text{ vraie} \Longrightarrow P(k+1) \text{ vraie}] \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall n \geqslant n_0\ ,\ P(n) \text{ est vraie}$$

Dans la pratique, on définit **précisément** le prédicat $P(n)$, puis on rédige de la manière suivante :

(i) **Initialisation** : on montre que $P(n_0)$ est vraie.

(ii) **Hérédité** : on pose $n \geqslant n_0$, et on suppose $P(n)$ vraie.
On montre que sous cette condition $P(n+1)$ est vraie.

(iii) **Conclusion** : par principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$

Attention : la proposition "$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie" ne dépend pas de n.

Remarque 1 : bien sûr, il revient au même de montrer : $\forall n \geqslant n_0+1,\ [P(n-1) \text{ vraie} \Longrightarrow P(n) \text{ vraie}]$

Remarque 2 : le ressort d'une récurrence réside dans "ce qui fait passer de l'ordre n à l'ordre $n+1$" :

- Pour les puissances, on utilise $a^{n+1} = a^n \times a$
- Pour les factorielles, on utiilise $(n+1)! = (n+1) \times n!$
- Pour des sommes on écrit $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$
- Pour les dérivées n-ièmes, on utilise $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ ou $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$ (voir plus loin).

Bien sûr, il y a des cas beaucoup plus compliqués...

Exemple : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! \leqslant n^{n-1}$

Variante 1 : récurrence à deux pas :

on démontre :

(i) **Initialisation :** $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies

(ii) **Hérédité** : $\forall k \geqslant n_0\ ,\ [P(k)$ et $P(k+1)$ vraies $\Longrightarrow P(k+2)$ vraie$]$

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,\ u_1 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$

Variante 2 : récurrence forte :

on démontre :

(i) **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie

(ii) **Hérédité** : $\forall n \geqslant n_0\ ,\ [P(n_0), P(n_0+1), \ldots P(n)$ vraies $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie$]$

Exemple : montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

Remarque : il est souvent plus pratique de montrer : $\forall n \geqslant n_0+1\ ,\ [(P(n_0), \ldots P(n-1)) \Rightarrow P(n)]$