Partie entière

1. Définitions

a) **Partie entière d'un réel :** soit x un réel.

$\boxed{\text{La **partie entière** (par défaut) de } x\text{, notée } E(x) \text{ ou } \lfloor x \rfloor\text{, est le plus grand entier relatif inférieur à } x}$

b) **Caractérisation :**

$\lfloor x \rfloor \quad x \quad \lfloor x \rfloor + 1$

$\lfloor x \rfloor$ est donc caractérisé par $\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}}$ [1]

ou encore $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}}$

Méthode : pour calculer la partie entière d'un réel x, on l'encadre entre deux entiers consécutifs :

$$n \leqslant x < n + 1 : \text{ alors } \lfloor x \rfloor = n$$

Exemples : $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, car $1 < \sqrt{2} < 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4$, car $-4 < -\pi < -3$ (Attention!)

c) **Partie décimale :** le nombre $\boxed{D(x) = x - E(x)}$ est appelé **partie décimale** de x. On a $\boxed{0 \leqslant D(x) < 1}$

d) **Partie entière par excès :** la **partie entière par excès** de x, notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier supérieur à x.

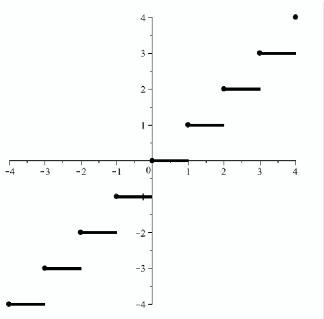
On a pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, et pour $x \in \mathbb{Z}$, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$

2. Propriétés

a) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k}$

Remarque : la fonction D est 1 périodique. Quelle est sa courbe?

b) **Courbe de $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:** $\forall k \in \mathbb{Z}$, E est constante sur $[k, k+1[$: $\forall x \in [k, k+1[$, $E(x) = k$



On a $\lim\limits_{k+} E = k$, $\lim\limits_{k-} E = k - 1$ et $E(k) = k$, donc E n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$. Elle l'est sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

c) **Monotonie :** <u>E est croissante</u>, et on a donc

$$x \leqslant y \Longrightarrow E(x) \leqslant E(y)$$

Plus précisément, on a, si $x \in \mathbb{R}$ et <u>$n \in \mathbb{N}$</u> :

$$\boxed{n \leqslant E(x) \Longleftrightarrow n \leqslant x} \quad \text{et} \quad \boxed{E(x) < n \Longleftrightarrow x < n}$$

Remarque : si p et q sont **entiers**, on a $\boxed{p < q \Longleftrightarrow p \leqslant q - 1}$

[1] $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand minorant entier de x donc $\lfloor x \rfloor + 1$ n'est pas minorant de x