EXERCICE 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ et on note :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1. On a la relation attendue :

$$\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$$

puisque

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}{4} - \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}{4} = \frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4}$$

2. On sait que $\overline{(e^z)} = \overline{e^x e^{iy}} = e^x e^{-y} = e^{\overline{z}}$. Ainsi, par linéarité de la conjugaison, il vient

$$\overline{\cos(z)} = \frac{e^{\overline{(iz)}} + e^{-\overline{(iz)}}}{2} = \frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2}$$

soit

$$\boxed{\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})}$$

3. Etant donné que $iz = -y + ix$, on a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(e^{iz}\right) = e^{-y}\cos(x) \\ \operatorname{Im}\left(e^{iz}\right) = e^{-y}\sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\left(e^{-iz}\right) = e^{y}\cos(x) \\ \operatorname{Im}\left(e^{-iz}\right) = -e^{y}\sin(x) \end{cases}$$

D'où, par linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\boxed{\operatorname{Re}\cos(z) = \operatorname{ch}(y)\cos(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\cos(z) = -\operatorname{sh}(y)\sin(x)}$$

et de même en remarquant que si a, b sont réels, $\frac{a+ib}{i} = -ia + b$, on a :

$$\operatorname{Re}\sin(z) = \operatorname{Im}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\sin(z) = -\operatorname{Re}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

soit

$$\boxed{\operatorname{Re}\sin(z) = \operatorname{ch}(y)\sin(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\sin(z) = \operatorname{sh}(y)\cos(x)}$$

4. Les modules de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en découlent :

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= \operatorname{ch}^2(y)\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)\sin^2(x) \\ &= \operatorname{ch}^2(y)\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)\left(1 - \cos^2(x)\right) \quad (\text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1) \\ &= \cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y) \quad (\text{car } \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{|\cos(z)| = \sqrt{\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2(y) - \sin^2(x)}}$$

De même

$$\boxed{|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2(y) - \cos^2(x)}}$$

5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z') &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iz'} + e^{-iz'}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iz'} - e^{-iz'}}{2i} \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\left(e^{iz'} + e^{-iz'}\right) + \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{i\left(z+z'\right)} + 2e^{-i\left(z+z'\right)}\right) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\cos(z + z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')}$$

6. D'après 3., on peut écrire ;

$$\cos(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\cos z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh}(y)\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sh}(y) = 0 \text{ ou} \\ \sin(x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ ou} \\ x = 0 \ [\pi] \end{array} \right.$$

Ainsi les nombres complexes z tels que $\cos(z) \in \mathbb{R}$ sont :

- ♦ Les réels
- ♦ Les nombres de la forme $z = k\pi + iy$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$.

7. Résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation $\sin(z) = -2 \ (E)$:

$$(E) \Longleftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -4i \Longleftrightarrow e^{2iz} + 4ie^{iz} - 1 = 0$$

Posons $\zeta = e^{iz}$: alors (E) s'écrit :

$$\zeta^2 + 4i\zeta - 1 = 0$$

de discriminant $-16 + 4 = -12$, dont une racine carrée est $i\sqrt{12} = 2i\sqrt{3}$.
Les solutions de $\zeta^2 + 4i\zeta - 1 = 0$ sont donc $-2i \pm i\sqrt{3}$, et

$$(E) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{iz} = -\left(2 - \sqrt{3}\right) i \text{ ou} \\ e^{iz} = -\left(2 + \sqrt{3}\right) i \end{array} \right.$$

Comme $2 - \sqrt{3} > 0$ et $2 + \sqrt{3} > 0$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} -\left(2 - \sqrt{3}\right) i &= \left(2 - \sqrt{3}\right) e^{-i\pi/2} = e^{\ln\left(2-\sqrt{3}\right) - i\frac{\pi}{2}} \\ -\left(2 + \sqrt{3}\right) i &= \left(2 + \sqrt{3}\right) e^{-i\pi/2} = e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} (E) &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{iz} = e^{\ln\left(2-\sqrt{3}\right) - i\frac{\pi}{2}} \text{ ou} \\ e^{iz} = e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - i\frac{\pi}{2}} \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ iz = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) - i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \text{ ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ iz = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remarquons que $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$ sont inverses (leur produit vaut 1), donc que $\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) = -\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.
L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\boxed{\left\{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right), \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right), \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Remarque 1 : on a bien, par exemple avec $x = -\dfrac{\pi}{2} + i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$:

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right) &= -\cos\left(i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right) \\ &= -\frac{e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} + e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2} \\ &= -\frac{\frac{1}{2+\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Remarque 2 : on a

$$\boxed{\cos z = \operatorname{ch}(iz) \quad \text{et} \quad \sin z = -i\operatorname{sh}(iz)}$$

et

$$\boxed{\operatorname{ch}(z) = \cos(iz) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(iz) = -i\sin(iz)}$$

EXERCICE 2

Pour tout réel t, on considère l'équation complexe

$$(E_t) \qquad z^2 - 2\left(1+2e^{it}\right)z - 3 = 0$$

On notera z_t et z_t' ses solutions (qui dépendent de t).

1. a) Soit P le point d'affixe $p = \dfrac{z_t + z_t'}{2}$: on sait (somme des racines) que

$$p = \frac{z_t + z_t'}{2} = 1 + 2e^{it}$$

Donc

$$p - 1 = 2e^{it} \quad i.e. \quad \begin{cases} |p-1| = 2 \\ \operatorname{Arg}(p-1) = t \ [2\pi] \end{cases}$$

Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, le point P décrit donc le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe 1 et de rayon 2.

b) On suppose que z_t et z_t' sont réels : alors $\dfrac{z_t + z_t'}{2}$ est réel, et donc $1 + 2\cos t + 2i\sin t \in \mathbb{R}$, ce qui entraine

$$\sin t = 0$$

d'où

$$t = 0 \ [\pi]$$

c) Supposons inversement que $t = 0 \ [\pi]$, soit $t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Alors (E_t) s'écrit

$$z^2 - 2\left(1 + 2e^{ik\pi}\right)z - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2\left(1 + (-1)^k 2\right)z - 3 = 0$$

∗ Si k est pair on obtient

$$z^2 - 6z - 3 = 0$$

dont les solutions sont $3 + 2\sqrt{3}$ et $3 - 2\sqrt{3}$: elles sont bien réelles.

∗ Si k est impair, on obtient

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

dont les solutions sont 1 et -3 : elles sont bien réelles.

2. Soit Δ_t le discriminant de (E_t) : on a

$$\Delta_t = 4\left(\left(1+2e^{it}\right)^2 + 3\right) = 4\left(4 + 4e^{it} + 4e^{2it}\right) = 16\left(1 + e^{it} + e^{2it}\right)$$

Or on sait que $1 + e^{2it} = 2\cos(t)\,e^{it}$ (méthode de l'angle moitié), d'où

$$\Delta_t = 16\left(e^{it} + 2\cos t e^{it}\right)$$

Finalement

$$\boxed{\Delta_t = 16\left(1 + 2\cos t\right)e^{it}}$$

Pour simplifier les notations, nous noterons par la suite

$$\boxed{u(t) = 1 + 2\cos t}$$

3. On a $z_t = z_t'$ lorsque $\Delta_t = 0$, c'est-à-dire lorsque $1 + 2\cos t = 0$, soit $\cos t = -\dfrac{1}{2}$: cela donne des valeurs de t de la forme

$$\boxed{t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{et} \quad t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}}$$

4. On suppose dans cette question que $1 + 2\cos t > 0$.

a) Cette condition est-elle remplie lorsque $\cos t > -\dfrac{1}{2}$, i.e.(faire un dessin)

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z}\ /\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$$

b) Déterminons une racine carrée δ_t de Δ_t : la forme trigonométrique vue plus haut nous permet de choisir, puisque $u(t) > 0$,

$$\boxed{\delta_t = 4\sqrt{u(t)}e^{it/2}}$$

Les solutions de (E_t) sont alors

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} z_t = 1 + 2e^{it} - 2\sqrt{u(t)}e^{it/2} \\ z'_t = 1 + 2e^{it} + 2\sqrt{u(t)}e^{it/2} \end{array}\right.}$$

c) Calculons alors $z_t - 3$ et $z'_t - 3$:

$$z_t - 3 = 2e^{it} - 2\sqrt{u(t)}e^{it/2} - 2 = 2\left(e^{it} - 1 - \sqrt{u(t)}e^{it/2}\right)$$

Or on sait que $e^{it} - 1 = 2i\sin\dfrac{t}{2}e^{it/2}$ (toujours la même méthode) : donc

$$z_t - 3 = 2\left(-\sqrt{u(t)} + 2i\sin\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$$

De même

$$z'_t - 3 = 2\left(\sqrt{u(t)} + 2i\sin\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$$

d) On pose $\zeta_t = \sqrt{u(t)} + 2i\sin\dfrac{t}{2}$. Alors $-\sqrt{u(t)} + 2i\sin\dfrac{t}{2} = -\overline{\zeta_t}$. On en déduit alors

$$|z'_t - 3| = 2|\zeta_t| = 2\left|-\overline{\zeta_t}\right| = |z_t - 3|$$

Ainsi

$$\boxed{z_t - 3 \text{ et } z'_t - 3 \text{ ont même module}}$$

Remarque : ce module vaut :

$$\begin{array}{rcl} 2|\zeta_t| & = & 2\sqrt{u(t) + 4\sin^2\dfrac{t}{2}} \\ & = & 2\sqrt{1 + 2\cos t + 2(1 - \cos t)} \\ & = & 2\sqrt{3} \end{array}$$

5. <u>On suppose dans cette question que $1 + 2\cos t < 0$.</u>

a) Cette condition est-elle remplie lorsque $\cos t < -\dfrac{1}{2}$, i.e.(faire un dessin)

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi}$$

b) Déterminons une racine carrée δ_t de Δ_t : la forme trigonométrique de Δ_t est, puisque $1 + 2\cos t < 0$,

$$\Delta_t = -16u(t)\,e^{it+\pi}$$

On peut donc choisir

$$\delta_t = 4\sqrt{-u(t)}e^{i(t/2+\pi/2)}$$

soit

$$\boxed{\delta_t = 4\sqrt{-u(t)}ie^{it/2}}$$

Les solutions de (E_t) sont alors

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} z_t = 1 + 2e^{it} - 2i\sqrt{-u(t)}e^{it/2} \\ z'_t = 1 + 2e^{it} + 2i\sqrt{-u(t)}e^{it/2} \end{array}\right.}$$

c) Calculons alors $z_t - 3$ et $z'_t - 3$:

$$z_t - 3 = 2e^{it} - 2i\sqrt{-u(t)}e^{it/2} - 2 = 2\left(e^{it} - 1 - i\sqrt{-u(t)}e^{it/2}\right)$$

Or on sait que $e^{it} - 1 = 2i\sin\frac{t}{2}e^{it/2}$ (décidément...) : donc

$$z_t - 3 = 2i\left(-\sqrt{-u(t)} + 2\sin\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$$

et de même

$$z'_t - 3 = 2i\left(\sqrt{-u(t)} + 2\sin\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$$

On notera $c(t) = -\sqrt{-u(t)} + 2\sin\frac{t}{2}$ et $d(t) = \sqrt{-u(t)} + 2\sin\frac{t}{2}$

d) Calculons le produit $c(t)\,d(t)$:

$$c(t)\,d(t) = 4\sin^2\frac{t}{2} + u(t) = 4\frac{1-\cos t}{2} + 1 + 2\cos t = 3$$

On en déduit que les réels $c(t)$ et $d(t)$ ont même signe, et donc même argument (0 ou π).

Mais alors

$$\arg(z_t - 3) = \frac{\pi}{2} + \arg(c(t)) + \frac{t}{2}\ \ [2\pi]$$

et

$$\arg(z'_t - 3) = \frac{\pi}{2} + \arg(d(t)) + \frac{t}{2}\ \ [2\pi]$$

On en conclut que

$$\boxed{z_t - 3 \text{ et } z'_t - 3 \text{ ont même argument}}$$