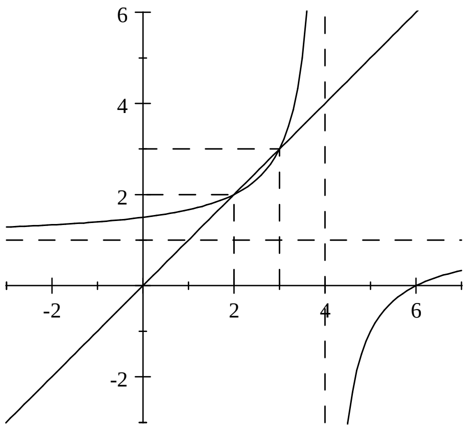
Etude de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 4}$.

1. Généralités

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-6}{x-4} = 1 - \dfrac{2}{x-4}$ est strictement croissante sur $]-\infty, 4[$ et $]4, +\infty[$

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et sa réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{4x-6}{x-1}$



La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ a pour expression, $\forall x \neq 4$

$$g(x) = -\frac{x^2 - 5x + 6}{x-4} = -\frac{(x-2)(x-3)}{x-4}$$

et pour signe

x		2		3		4	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

$$\boxed{f \text{ admet ainsi 2 points fixes : 2 et 3}}$$

Intervalles stables : les intervalles $]-\infty, 2[\,,\ ]2, 3[$ sont stables par f

2. Discussion

- 1^er cas : $u_0 \in \{2, 3\}$: alors (u_n) est constante.
- 2^ème cas : $u_0 < 2$: alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 2$ (stabilité de $]-\infty, 2[$), et donc $g(u_n) > 0$.
  Croissante et majorée par 2, (u_n) converge vers son unique point fixe dans cet intervalle : 2
- 3^ème cas : $2 < u_0 < 3$: alors $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 < u_n < 3$, et donc $g(u_n) < 0$
  Décroissante et minorée par 2, (u_n) converge vers un point fixe ℓ de f.
  Mais $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 < 3$ donc $\ell < 3$: (u_n) converge vers 2.
- 4^ème cas : $u_0 > 4$: alors $u_1 < 1$: on est ramené au 2^ème cas : (u_n) converge vers 2.
- 5^ème cas : $3 < u_0 < 4$: montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant 4$
  Par l'absurde, sinon, on aurait $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 4$. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 < u_n < 4$.
  Mais alors $g(u_n) > 0$, donc (u_n) croissante et majorée, converge vers un réel supérieur à u_0.
  Mais il n'y a pas de point fixe supérieur à u_0 contradiction.
  - $*$ Si $u_{n_0} = 4$, l'a suite n'est plus définie au delà de n_0
  - $*$ si $u_{n_0} > 4$, alors $u_{n_0+1} < 1$, et on est ramené au 2^ème cas : (u_n) converge vers 2.

Conclusion :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers 2 sauf dans deux cas : } u_0 = 3 \text{ ou } u_0 \in]3, 4[\text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ u_{n_0} = 4}$$

3. <u>Une autre approche</u> : si $u_0 \neq 3$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 3$
En effet si $u_n = 3$ alors $u_0 = \left(f^{-1}\right)^n (u_n) = \left(f^{-1}\right)^n (3) = 3$ contradiction.
Supposons donc $u_0 \neq 3$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 3}}$$

Si $v_n \neq 1$, on a donc

$$\boxed{u_n = \frac{3v_n - 2}{v_n - 1}}$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n-6}{u_n-4} - 2}{\frac{u_n-6}{u_n-4} - 3} = \frac{u_n - 6 - 2\left(u_n - 4\right)}{u_n - 6 - 3\left(u_n - 4\right)} = \frac{2 - u_n}{6 - 2u_n} = \frac{1}{3} v_n$$

Ainsi (suite géométrique)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3^n} v_0$$

Alors pour $n \geqslant 1$, on a

$$v_n = 1 \iff v_0 = 3^n \iff u_0 = \frac{3^{n+1} - 2}{3^n - 1}$$

- Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^* \ /\ u_0 = \dfrac{3^{n+1} - 2}{3^n - 1}$: alors la suite (u_n) n'est définie que pour $n < n_0$

- Sinon, on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{u_n = \frac{2 - v_0/3^{n-1}}{1 - v_0/3^n},\ \text{où } v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 3}}$$

  On en déduit que

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 2}$$

Etude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n$.

1. Généralités : l'intervalle $[0,1]$ est stable par $\cos$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
Soit $g : x \mapsto \cos(x) - x$ de dérivée $g' : x \mapsto -\sin x - 1 < 0$ sur $[0,1]$.
Donc g continue strictement décroissante réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[\cos(1)-1, 1]$
Or $\cos 1 - 1 < 0$: donc $0 \in [\cos(1)-1,1]$: il en résulte l'existence d'un unique point fixe α de $\cos$ sur $[0,1]$.

$$\exists! \alpha \in [0,1]\ /\ \cos\alpha = \alpha$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$ et $h = \cos \circ \cos$. On a pour tout entier n :

$$\begin{cases} v_{n+1} = u_{2n+2} = \cos(u_{2n+1}) = \cos\cos(u_{2n}) = h(v_n) \\ w_{n+1} = u_{2n+3} = \cos(u_{2n+2}) = \cos\cos(u_{2n+1}) = h(w_n) \end{cases}$$

Or h est croissante sur $[0,1]$ (stable par h) donc (v_n) et (w_n) sont monotones.
Comme $\begin{cases} v_1 = \cos 1 > 0 = v_0 \\ w_1 = \cos(\cos 1) < 1 = w_0 \end{cases}$, (v_n) croit et (w_n) décroit. Elles convergent donc toutes les deux.
De plus, la fonction $\varphi : x \mapsto h(x) - x$ admet pour dérivée $\varphi' : x \mapsto \sin(x)\sin(\cos(x)) - 1$
Donc $\varphi' < 0$ sur $[0,1]$ et φ est injective. Comme $\varphi(\alpha) = \cos(\cos(\alpha)) = \cos(\alpha) = \alpha$, on en déduit que h admet α pour unique point fixe sur $[0,1]$. Nécessairement (v_n) et (w_n) convergent vers α, et on conclut :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$$

Remarque : on a $u_{10} \leqslant \alpha \leqslant u_{11}$.

Une calculatrice donne $u_{10} \simeq 0.731$ et $u_{11} \simeq 0.745$ à 10^{-3} d'où $u_{11} - u_{10} < 0.015$

On en déduit que $\boxed{\alpha \simeq 0.731 \text{ par défaut à } 1.5.10^{-2} \text{ près}}$

3. Une autre approche : soit $k = \sin 1 \simeq 0.84 \in]0,1[$: montrons que $\cos$ est k-contractante sur $[0,1]$:
Soient $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. Alors

$$|\cos y - \cos x| = \left|\int_y^x \sin t\, dt\right| \leqslant \int_x^y |\sin t|\, dt \leqslant k \int_x^y dt = k(y-x) = k|y-x| \text{ CQFD.}$$

On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$. On applique l'inégalité précédente à u_n et $\alpha \in [0,1]$:

$$|\cos u_{n+1} - \cos\alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$$

i.e.

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$$

Par récurrence, on montre alors que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant k^n |u_0 - \alpha| = k^n \alpha}$$

Conclusion : d'après le théorème des gendarmes $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$

Remarque : cela fournit une majoration de l'erreur : par exemple en prenant $k < 0,85$, et $\alpha < \frac{3}{4}$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| < 0,85^n$$

Avec $n = 10$, on a $|u_{10} - \alpha| < (0.75) \times (0.85)^{10} < 0.15$. Une calculatrice donne : $u_{10} \simeq 0.7$ à $1.5.10^{-1}$

Mieux : on est sûr d'avoir $|u_n - \alpha| < 10^{-10}$ pour $0.85^n \leqslant \dfrac{10^{-10}}{0.75}$, soit

$$n \geqslant \frac{-10 - \log_{10}(0.75)}{\log_{10}(0.85)} \quad : \quad \underline{n = 140 \text{ convient}}$$

$$\boxed{u_{140} \simeq 0.7390851332 \quad \text{est une approximation de } \alpha \text{ à } 10^{-10} \text{ près.}}$$

En fait $n = 52$ suffit!..