Factorielles

Ex 1 Soient n, p des entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. Exprimer à l'aide de factorielles les produits suivants :

$$\prod_{k=p}^{n} k \quad ; \quad \prod_{k=1}^{p} (n+k) \quad ; \quad \prod_{k=1}^{p} (n-p+k) \quad ; \quad \prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k}$$

Ex 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}\right)$ à l'aide de factorielles

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de factorielles (on pourra introduire les nombres pairs).

Télescopages et translations d'indices

Ex 4 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+2} + a_{k+1} - 2a_k)$

Ex 5 Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ b) $\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x) \quad (x \in \mathbb{C})$ c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

d) $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ e) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ f) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Ex 6 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$ et en déduire une simplification de

$$S = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

Ex 7 Trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-2\},\ \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

En déduire une simplification pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$ et sa limite.

Ex 8 Soit $x \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la formule $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, simplifier le produit :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Ex 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement d'indice $j = n-k$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ (on calculera $2S_n$)

Sommes classiques

Ex 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calcul de $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$

a) Première méthode :

i. Trouver un polynôme P du troisième degré tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^2$. Le factoriser.

ii. En déduire une expression (factorisée) de T_n

b) Deuxième méthode : relier $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$, et en déduire une expression (factorisée) de T_n

Ex 11 Calculer une expression factorisée de $U_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ en adaptant les méthodes de l'exercice précédent.

Ex 12 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$

a) Calculer S_n si $a = 1$.

b) Si $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$. En déduire la valeur de S_n.

c) Retrouver ce résultat en dérivant la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$

Sommes doubles

Ex 13 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes et produits suivants :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$

c) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(1-2^i\right)2^{ij}$

e) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j$

f) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$

Ex 14 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes (triangulaires) suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$

Ex 15 $(*)$ Pour tout entier naturel i et j, on pose : $\max(i,j) = \begin{cases} i \text{ si } i \geqslant j \\ j \text{ si } j \geqslant i \end{cases}$ et $\min(i,j) = \begin{cases} i \text{ si } i \leqslant j \\ j \text{ si } j \leqslant i \end{cases}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Pour tout entier i et j, simplifier $\max(i,j) + \min(i,j)$.

c) En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$.