Ex 1 Soient $n \in \mathbb{N},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $I_n = \displaystyle\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n \,\mathrm{d}x$.

A l'aide de n intégrations par parties successives, calculer I_n.

Ex 2 Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x$ et $J(p,q) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \cos^{2q+1} t \,\mathrm{d}t$

a) A l'aide du changement de variable $x = \sin^2 t$, montrer que $J(p,q) = \dfrac{1}{2} I(p,q)$.

b) A l'aide du changement de variable $y = \sin t$, montrer que $J(p,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{2p+2k+2}$.

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n-1} \ln(1+x) \,\mathrm{d}x$, $\quad$ et $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Montrer que $\forall x \neq -1,\ \dfrac{x^{2n}}{1+x} = \dfrac{1}{1+x} - \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$ et en déduire que $I_n = \dfrac{1}{2n} S_n$.

Ex 4 Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} t \,\mathrm{d}t$ $\quad$ et $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Calculer I_0, puis montrer que (I_n) est convergente.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n-1} = \dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim I_n$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n I_n - I_0 = S_n - 1$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$ notée $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Ex 5 Soit f une bijection de classe C^1 de $[0,a]$ sur $[0,a]$ telle que $f' > 0$ sur $[0,a]$.

Montrer que $\forall x \in [0,a]$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = x f(x)$. Interpréter géométriquement.

Ex 6 Soit f une fonction continue 2π-périodique.

Montrer que les primitives de f sont 2π-périodiques si et seulement si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ex 7 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ex 8 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F se prolonge par continuité en 0.

Ex 9 Calculer, pour tout réel x, $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Après avoir réduit l'intervalle d'étude, on pourra dériver F puis calculer $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ex 10 Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. Montrer que F est impaire et étudier ses variations.

Ex 11 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+t) \cos t \,\mathrm{d}t$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g' (on commencera par un changement de variables)

Ex 12 Lemme de Riemann-Lebesgue : soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer (à l'aide d'une intégration par parties) que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ex 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'encadrement : $\forall x \geqslant 0, \quad 1 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$, et en déduire un encadrement de u_n. Montrer que (u_n) converge vers un réel à déterminer.

Ex 14 On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^k\, t}$.

a) Démontrer que cette suite est monotone.

b) Démontrer que pour tout réel t, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, t} \leqslant 2e^{-t}$,

c) En déduire que $u_n \leqslant \dfrac{2^k}{k}$ et que (u_n) converge.

Ex 15 Soit $I = \displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$: montrer à l'aide d'une intégration par parties que $0 \leqslant I \leqslant \dfrac{1}{100\pi}$.

Ex 16 On pose, pour $x > 0$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $\forall x > 0, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{\pi}{x}\right) \quad$ et $\quad |g(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{x(x+\pi)}$. En déduire que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

b) Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$, et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

c) Montrer l'encadrement pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{2}{x+\pi} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$ par deux méthodes différentes

Ex 17 Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b) Etudier la parité de F.

c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$.

d) Montrer que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{6}\right]$, $\ln 3 \cos 3x \leqslant F(x) \leqslant \ln 3 \cos x$

e) En déduire que F se prolonge par continuité en 0.

f) Ce prolongement est-il dérivable en 0?

Ex 18 On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$. On se propose d'étudier la fonction F.

a) Montrer que $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x)$ existe et $F(x) \geqslant 0$.

b) Montrer que F est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer F'. En déduire les variations de F.

c) Démontrer que $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\dfrac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x^2-x}{\ln x}$ (séparer les cas $x \in]0,1[$ et $x > 1$).

d) En déduire existence et valeurs de $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Ex 19 Intégrale de Wallis : pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\mathrm{d}t$

b) Montrer en intégrant par parties que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$

c) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)}$$

Ecrire ces résultats en utilisant des factorielles.

d) Montrer que (I_n) est décroissante, strictement positive, et que nI_nI_{n-1} est constante.

e) En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $0 < I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Que peut-on en déduire?

f) Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$ (par encadrement), et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$