Puissances

1. Puissances généralisées

a) **Définition :** on fixe $a > 0$. On constate que $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n \ln a$ d'où $a^n = e^{n \ln a}$.
On pose donc naturellement pour tout **réel** x :

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}} \quad (\text{ou } a^x = \exp(x \ln a))$$

généralisant ainsi la notion de "puissance naïve" : si $n \in \mathbb{N},\ a^n = \underbrace{a \times a \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$, étendue à $n \in \mathbb{Z}$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple : $2^\pi = e^{\pi \ln 2}$. On ne peut pas définir les puissances non naïves de -3.

Remarque 1 : cela justifie la notation pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$

Remarque 2 : pour tout réel x : $1^x = 1$.

Remarque 3 : $\forall a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{a^x > 0}$

b) **Propriétés :** les propriétés des puissances (et celles de l'exponentielle) sont conservées par cette généralisation

(i) $x \mapsto a^x$ a les mêmes propriétés algébriques que $x \mapsto e^x$: pour x, y réels,

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y} \qquad \boxed{(a^x)^y = a^{xy}} \qquad \boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}} \qquad \boxed{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}$$

(ii) $\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{(ab)^x = a^x b^x}$

(iii) Dérivée :

Remarque : on a la généralisation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(a^x) = x \ln a}$

c) **Exponentielle de base $a > 0$:** on note $\exp_a : x \mapsto a^x$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, elle y est dérivable, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)\, a^x}$$

Exercice : en discutant les cas $a < 1,\ a = 1,\ a > 1$, construire le tableau de variation de $\exp_a$

Exemple : donner l'allure des courbes de $x \mapsto 2^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) **Etude des fonctions de la forme u^v :** on se donne deux fonctions u et v définies sur I, avec u strictement positive sur I, et on considère

$$f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$$

Pour étudier f, on passe **SYSTEMATIQUEMENT** à la forme

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}}$$

Exemple 1 : calculer $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$

Exemple 2 : calculer la dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x^x$

2. Fonctions puissance

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$

a) **Domaine de définition et prolongement :** dans le cas général, f est définie sur $]0, +\infty[$

(i) Prolongement par continuité en 0 : si $\boxed{a > 0}$ on peut prolonger f en posant $f(0) = 0$
La nouvelle fonction ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}^+$ (en particulier en 0)

(ii) Cas des puissances entières :

- Si $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in \boxed{\mathbb{R}}$, $x^n = x \times \cdots \times x$. On peut donc prolonger f à $\mathbb{R}$ tout entier
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $x \in \boxed{\mathbb{R}^*}$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x \times \cdots \times x}$. On peut donc prolonger f à $\mathbb{R}^*$

Exemples : tracer les courbes de $x \to x^3,\ x \to x^4,\ x \to x^{-1} = \frac{1}{x},\ x \to x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

b) **Dérivée et variations :** soit $a \in \mathbb{R}$. alors $\forall x > 0$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = a x^{a-1}}$$

Exercice : en déduire le tableau de variations de f en distinguant $a > 0$ et $a < 0$.

c) **Courbes :** remarquer que toutes les courbes passent par $A(1,1)$. Tangente en A? Tangente en O?