EXERCICE

Soient E et F deux ensembles non vides, quelconques et $f \in F^E$. On pose

$$\mathcal{S} = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) \ / \ f^{-1}(f(X)) = X \right\}$$

1. a) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. si $x \in X$ alors $f(x) \in f(X)$ donc $x \in f^{-1}(f(X))$. Ainsi

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{P}(E)\,,\ X \subset f^{-1}(f(X))}$$

b) Soit $Y \in \mathcal{P}(F)$. Si $y \in f\left(f^{-1}(Y)\right)$, alors $\exists x \in f^{-1}(Y) \ / \ y = f(x)$. Mais un tel x vérifie par définition $f(x) \in Y$, donc $x \in Y$. Ainsi

$$\boxed{\forall Y \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y}$$

2. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}^2$.

a) Montrons que $A \cup B \in \mathcal{S}$. On sait que :

$$\begin{cases} \forall (X, X') \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X \cup X') = f(X) \cup f(X') \\ \forall (Y, Y') \in \mathcal{P}(F)^2,\ f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y') \end{cases} \quad . \quad \text{On en déduit :}$$

$$f^{-1}(f(A \cup B)) = f^{-1}(f(A) \cup f(B)) = f^{-1}(f(A)) \cup f^{-1}(f(B)) = A \cup B$$

donc

$$\boxed{A \cup B \in \mathcal{S}}$$

b) Montrons que $A \cap B \in \mathcal{S}$. On procède par double inclusion :

* On a déjà : $A \cap B \subset f^{-1}(f(A \cap B))$ (question 1.a)).
* Par ailleurs on sait que

$$\begin{cases} \forall (X, X') \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X') \\ \forall (Y, Y') \in \mathcal{P}(F)^2,\ f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y') \end{cases} \quad . \text{ Alors}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \Rightarrow f^{-1}(f(A \cap B)) \subset f^{-1}(f(A) \cap f(B)) = A \cap B$$

Par double inclusion, on a alors $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B))$, c'est-à-dire

$$\boxed{A \cap B \in \mathcal{S}}$$

3. a) Soit $(X, A) \in \mathcal{S} \times \mathcal{P}(E) \,/\, X \cap A = \varnothing$. Montrons que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
Par l'absurde soit $x \in X \cap f^{-1}(f(A))$.
En particulier $x \in f^{-1}(f(A))$ soit $f(x) \in f(A)$ donc $\exists a \in A \,/\, f(x) = f(a) \in f(X)$.
Soit a un tel élément. On a $a \in f^{-1}(f(X)) = X$ car $X \in \mathcal{S}$. On a donc trouvé un élément $a \in X \cap A$ d'où une contradiction. donc

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{S}, \forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ \left(X \cap A = \varnothing \Rightarrow X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing\right)}$$

b) Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrons que $\overline{X} \in \mathcal{S}$, à nouveau par double inclusion :

* On sait que $\overline{X} \subset f^{-1}\left(f\left(\overline{X}\right)\right)$.
* Comme $X \cap \overline{X} = \varnothing$, d'après a) $X \cap f^{-1}\left(f\left(\overline{X}\right)\right) = \varnothing$, donc $f^{-1}\left(f\left(\overline{X}\right)\right) \subset \overline{X}$. Ainsi

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{S}\,,\ \overline{X} \in \mathcal{S}}$$

c) Soit $(X, Y) \in \mathcal{S}^2$. Montrons que $Y \setminus X \in \mathcal{S}$: on a : $Y \setminus X = Y \cap \overline{X}$, donc par b) $\overline{X} \in \mathcal{S}$ et par 2.b)

$$\boxed{Y \setminus X \in \mathcal{S}} \quad \text{CQFD.}$$

4. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que $f^{-1}(f(X)) \in \mathcal{S}$ i.e. $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(f(X))\right)\right) = f^{-1}(f(X))$.

- On a vu au 1.a) (appliqué à $f^{-1}(f(X))$) : $f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\left(f^{-1}(f(X))\right)$.
- Le 1.b) à $f(X)$ donne $f\left(f^{-1}(f(X))\right) \subset f(X)$, et par croissance : $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(f(X))\right)\right) \subset f^{-1}(f(X))$.

Ainsi par double inclusion $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(f(X))\right)\right) = f^{-1}(f(X))$, c'est-à-dire $\boxed{f^{-1}(f(X)) \in \mathcal{S}}$

5. Montrons que $\mathcal{S} = \mathcal{P}(E)$ si et seulement si f est injective.

- Supposons f injective, et soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que $X \in \mathcal{S}$, i.e.$X = f^{-1}(f(X))$.
  - On sait déja que $X \subset f^{-1}(f(X))$ (1.a)).
  - Inversement si $x \in f^{-1}(f(X))$, alors $f(x) \in f(X)$, ce qui signifie : $\exists x' \in X \ / \ f(x) = f(x')$.

    L'injectivité de f assure alors $x = x' \in X$, d'où $f^{-1}(f(X)) \subset X$.

    Par double inclusion, on a l'égalité ensembliste souhaitée.

- Inversement, supposons $\mathcal{S} = \mathcal{P}(E)$, i.e. $\forall X \in \mathcal{P}(E), \ X = f^{-1}(f(X)) \ (*)$, et montrons : f injective.

  Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On a donc
  $$f(\{x\}) = f(\{x'\}) = \{f(x)\}$$
  On en déduit
  $$f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\}))$$
  et par hypothèse (en substituant $\{x\}$ puis $\{x'\}$ à X dans $(*)$) :
  $$\{x\} = \{x'\}$$
  Cela prouve que $x = x'$, d'où l'injectivité de f.

Par double implication l'équivalence est démontrée.

$\boxed{\textbf{PROBLEME}}$

On admettra le théorème suivant :

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur $[a, b]$ y est bornée et atteint ses bornes.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier naturel n, on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) \, \mathrm{d}t$$

Partie I :

1. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc, par le théorème rappelé dans l'en-tête, $\boxed{f \text{ est bornée sur } [0,1]}$.
Il existe donc un réel M tel que $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant M$. Or on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |I_n| \leqslant \int_0^1 |t^n f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, |f(t)| \, \mathrm{d}t \quad (\text{car } t^n \geqslant 0 \text{ sur } [0,1]\,)$$

En majorant $|f|$ par M :

$$|I_n| \leqslant M \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}$$

Par le théorème des gendarmes on en déduit :

$$\boxed{\lim I_n = 0}$$

2. Par la même méthode qu'à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|J_n| = \left| \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n \, |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} M t^n \, \mathrm{d}t \leqslant M \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Ainsi :

$$\boxed{|J_n| \leqslant \tfrac{M}{n+1} \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}}$$

Or

$$\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \quad \text{et} \quad (n+1) \ln\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n \times \left(-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n}$$

donc

$$\lim\, (n+1) \ln\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\infty \quad \text{et par composée} \quad \lim \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} = 0$$

Mais alors, comme

$$|nJ_n| \leqslant M \frac{n}{n+1} \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}$$

Le théorème des gendarmes donne $nJ_n = 0$, soit

$$\boxed{J_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $K_n = \displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n f(t) \mathrm{d}t$ et on introduit $g : t \mapsto f(t) - f(1)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $|g|$ est continue sur $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$ par somme et composée, donc (théorème admis) elle admet un maximum M_n sur $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$, atteint en un point α_n par exemple. Soit

$$\exists \alpha_n \in \left[1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}, 1\right] \ / \ \forall x \in \left[1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}, 1\right], \ |g(x)| \leqslant |g(\alpha_n)| = M_n$$

Mais par continuité de g, $\lim\limits_{1} |g| = |f(1) - f(1)| = 0$. Comme la suite de réels (α_n) converge vers 1 (car $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, et en appliquant le théorème des gendarmes), on déduit

$$\lim |g(a_n)| = g(1) = 0$$

Il s'ensuit :

$$\boxed{(M_n) \text{ converge vers } 0}$$

b) On a comme plus haut, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\left|\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n \left|g(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant M_n \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n \mathrm{d}t = M_n \frac{1}{n+1}\left[1-\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]$$

D'où

$$\boxed{\left|\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M_n}{n+1}}$$

Or pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n g(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n f(t)\mathrm{d}t - \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n f(1)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|K_n - f(1)\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n \mathrm{d}t\right| \\
&= \left|K_n - f(1)\frac{1}{n+1}\left[1-\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]\right|
\end{aligned}$$

Donc d'après l'inégalité précédente, après multiplication par n :

$$\left|nK_n - f(1)\frac{n}{n+1}\left[1-\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]\right| \leqslant \frac{n}{n+1}M_n$$

Puisque $\lim M_n = 0$, le théorème des gendarmes assure

$$\lim nK_n - f(1)\frac{n}{n+1}\left[1-\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right] = 0$$

Or on a montré que $\lim \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} = 0$. Donc $\lim f(1)\frac{n}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right] = f(1)$. Il vient

$$\boxed{\lim nK_n = f(1)}$$

4. Mais alors par la relation de Chasles :

$$nI_n = n\left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t)\mathrm{d}t + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} t^n f(t)\mathrm{d}t\right) = nJ_n + nK_n$$

En se souvenant des résultats précédents, on peut conclure à

$$\boxed{nI_n = f(1)}$$

5. On suppose de plus dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, que $f(1) = 0$ et que $f'(1) \neq 0$.

Dans l'intégrale I_n, on effectue une intégration par parties, en posant :

$$\forall t \in [0,1], \begin{cases} u'(t) &= t^n \\ v(t) &= f(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) &= \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ v'(t) &= f'(t) \end{cases}$$

(les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[0,1]$), ce qui donne :

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \overset{f(1)=0}{=} -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

En appliquant le résultat de la question 4. à la fonction f'qui est bien continue sur $[0,1]$ (puisque f est C^1) et vérifie $f'(1) \neq 0$, on obtient :

$$\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{f'(1)}{n}$$

Il s'ensuit

$$\boxed{I_n \sim -\frac{f'(1)}{n^2}}$$

Partie II : applications

1. Dans cette question, on pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

On définit la fonction h_n sur $[0,1]$ par $h_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i t^i$.

a) On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$, continue sur $[0,1]$. Donc par la question I.1,

$$\boxed{\lim I_n = 0}$$

De plus $f(1) = \dfrac{1}{2}$, donc en appliquant le résultat de la question I.4, il vient :

$$\boxed{I_n \sim \frac{1}{2n}}$$

b) On a, par linéarité de l'intégrale, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i t^i\Big)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \int_0^1 t^i\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \frac{1}{i+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

(après translation d'indice). Ainsi

$$\boxed{\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = u_n}$$

c) Or pour $t \in [0,1]$, on a $-t \neq 1$ donc

$$h_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1}(-t)^i = \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{1+t}.$$

On intègre entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 h_n(t)\,t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + (-1)^{n+1} I_n \\ &= \ln 2 + (-1)^{n+1} I_n\end{aligned}$$

Comme (I_n) converge vers 0 et $\big((-1)^{n+1}\big)$ est bornée, il vient :

$$\boxed{\lim u_n = \ln 2}$$

De plus

$$\boxed{u_n - \ln 2 = (-1)^{n+1} I_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}}$$

2. Dans cette question, on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!}$

(avec la convention $u_0 = 0$).

a) On pose $f : t \mapsto \sin(\pi t)$, continue sur $[0,1]$, donc par I.1,

$$\boxed{\lim I_n = 0}$$

De plus, f est de classe C^1 sur $[0,1]$, $f(1) = \sin\pi = 0$ et $f'(1) = \pi\cos\pi = -\pi$. Donc par I.5, il vient :

$$\boxed{I_n \sim \frac{\pi}{n^2}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on intègre par parties l'intégrale $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+2} \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$, en posant pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{cases} u(t) &= t^{n+2} \\ v'(t) &= \sin(\pi t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) &= (n+2)t^{n+1} \\ v(t) &= -\dfrac{\cos(\pi t)}{\pi} \end{cases}$$

(u et v sont bien de classe C^1 sur $[0,1]$) :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= -\frac{1}{\pi}\left[\cos(\pi t)t^{n+2}\right]_0^1 + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi t)t^{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\sin(\pi t)t^{n+1}\right]_0^1}_{0} - \frac{n+1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi t)t^n\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce qui donne la relation :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n}$$

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $a_n = (-1)^n \dfrac{\pi^{2n}}{(2n)!}$ et $v_n = a_n I_{2n}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} I_{2n+2} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+2}}{(2n+2)!} I_{2n+2} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+2}}{(2n+2)!}\left[\frac{1}{\pi} - \frac{(2n+1)(2n+2)}{\pi^2} I_{2n}\right] \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+2)!} + (-1)^n \frac{\pi^{2n}(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)!} I_{2n} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+2)!} + a_n I_{2n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+2)!}}$$

d) En décalant les indices, on a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout k de $[\![1, n]\!]$,

$$v_k - v_{k-1} = (-1)^k \frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!}$$

Et en sommant de 1 à n, après télescopage :

$$v_n - v_0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!} = -u_n$$

Or $v_0 = a_0 I_0 = I_0 = \dfrac{2}{\pi}$, d'où

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{2}{\pi} - u_n}$$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{\pi^{2n}} = \frac{\pi^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

Or $n \geqslant 1$, donc $2n+1 \geqslant 3$, $2n+2 \geqslant 4$, et $(2n+1)(2n+2) \geqslant 12$. Ainsi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{12}$$

En multipliant entre elles les inégalités, pour k dans $[\![1, n-1]\!]$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\pi^2}{12}$$

On obtient un produit telescopique à gauche de l'inégalité, qui conduit à :

$$\frac{|a_n|}{|a_1|} \leqslant \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{n-1} \quad \text{ou} \quad |a_n| \leqslant |a_1| \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{n-1}$$

La raison $\frac{\pi^2}{12}$ de la suite géométrique est positive et strictement inférieure à 1 (car $\pi^2 < 3.2^2 = 10.24 < 12$), donc le membre de droite converge vers 0. Le théorème des gendarmes permet finalement de conclure :

$$\boxed{(a_n) \text{ converge vers } 0}$$

f) Ainsi par produit, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $a_n I_{2n}$ converge vers 0. On en déduit, puisque

$$v_n = \frac{2}{\pi} - u_n$$

que

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \frac{2}{\pi}}$$

De plus

$$v_n - \frac{2}{\pi} = a_n I_{2n} \sim (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \times \frac{\pi}{4n^2}$$

$$\boxed{v_n - \frac{2}{\pi} \sim (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4n^2(2n)!}}$$