PROBLEME

Matrices stochastiques

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des matrices $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ à coefficients tous positifs vérifiant

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \ \sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1$$

- On dira qu'une suite de matrice $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque chacun de ses coefficients converge.
- On dira qu'une matrice A est idempotente lorsque $A^2 = A$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $(M, M') \in \mathcal{S}_p^2$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} [MM']_{ij} &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} [M]_{ik} [M']_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} [M]_{ik} [M']_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left([M]_{ik} \sum_{j=1}^{p} [M']_{kj} \right) \end{aligned}$$

Comme $M' \in \mathcal{S}_p$, on a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} [M']_{kj} = 1$, donc

$$\sum_{j=1}^{p} [MM']_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [M]_{ik} = 1 \quad (\text{car } M \in \mathcal{S}_p)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{S}_p \text{ est dans } \mathcal{S}_p}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_p$.

a) En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M, et $\underline{X_0 \text{ le vecteur colonne } X_0 = (1, \ldots, 1)}$, on a par hypothèse

$$C_1 + \cdots + C_n = X_0$$

donc

$$\boxed{MX_0 = X_0}$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $X \in \mathbb{R}^p - \{0\}\ /\ MX = \lambda X$.
Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$, on a donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_{11}x_1 + \cdots + m_{1p}x_p &=& \lambda x_1 \\ \quad\vdots & & \ \vdots \\ m_{p1}x_1 + \cdots + m_{pp}x_p &=& \lambda x_p \end{array} \right.$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]\ /\ |x_k| = \max(|x_1|, \ldots, |x_p|)$. Considérons la ligne k de ce système :

$$\sum_{n=1}^{p} m_{kn}x_n = \lambda x_k$$

Avec l'inégalité triangulaire et le fait que les m_{kn} sont positifs, on obtient

$$|\lambda|\,|x_k| \leqslant \sum_{n=1}^{p} m_{kn}\,|x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{p} m_{kn}\,|x_k| \quad (\text{car } \forall n,\ |x_n| \leqslant |x_k|)$$

Ainsi

$$|\lambda|\,|x_k| \leqslant |x_k| \sum_{n=1}^{p} m_{kn} = |x_k| \quad \text{(par hypothèse)}$$

Comme $|x_k| \neq 0$, puisque $X \neq 0$ et $|x_k|$ maximal, on en déduit

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$

a) On vérifie, avec un peu d'imagination :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14/25 & 11/25 \\ 11/20 & 9/20 \end{pmatrix} = \frac{11}{10}A - \frac{1}{10}I_2$$

Le polynôme $P\,(X) = X^2 - \frac{11}{10}X + \frac{1}{10}$ est annulateur de A

b) Montrons par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_2$:

* On peut écrire $A^0 = a_0A + b_0I_2$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ (et $A^1 = a_1A + b_1I_2$ avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$)

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir l'écriture $A^n = a_nA + b_nI_2$. Alors

$$A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA = a_n\left(\frac{11}{10}A - \frac{1}{10}I_2\right) + b_nA = \left(\frac{11}{10}a_n + b_n\right)A - \frac{a_n}{10}I_2$$

En posant

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{11}{10}a_n + b_n \\ b_{n+1} = -\dfrac{a_n}{10} \end{cases}}$$

On a bien $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_2$, CQFD.

Mais alors pour tout entier n on a

$$a_{n+2} = \frac{11}{10}a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{11}{10}a_{n+1} - \frac{a_n}{10}$$

et

$$b_{n+2} = -\frac{a_{n+1}}{10} = -\frac{1}{10}\left(\frac{11}{10}a_n + b_n\right) = -\frac{1}{10}\left(-11b_{n+1} + b_n\right) = \frac{11}{10}b_{n+1} - \frac{b_n}{10}$$

Les suites (a_n) et (b_n) vérifient donc la même récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} - \frac{11}{10}u_{n+1} + \frac{1}{10}u_n = 0$$

dont le polynôme caractéristique est précisément P, dont les racines sont clairement 1 et $1/10$.
Ainsi il existe quatre constantes $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ telles que pour tout entier n

$$a_n = \alpha + \frac{\beta}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \alpha' + \frac{\beta'}{10^n}$$

Les valeurs initiales $(0,1)$ et $(1,0)$ des suites (a_n) et (b_n) fournissent les systèmes

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta/10 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 10/9 \\ \beta = -10/9 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha' + \beta' = 1 \\ \alpha' + \beta'/10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = -1/9 \\ \beta' = 10/9 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{9}\left(\left(10 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)A + \left(\frac{1}{10^{n-1}} - 1\right)I_2\right) \\ &= \frac{1}{9}\left((10A - I_2) + \frac{1}{10^{n-1}}\,(I_2 - A)\right) \end{aligned}$$

Explicitement

$$\boxed{A^n = \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{10^{n-1}}\begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5+\frac{4}{10^n} & 4-\frac{4}{10^n} \\ 5-\frac{5}{10^n} & 4+\frac{5}{10^n} \end{pmatrix}}$$

c) Il est donc clair que (A^n) converge, et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = A_0}$$

Une vérification immédiate donne $A_0^2 = A_0$, donc $\underline{A_0 \text{ est idempotente}}$.

4. Soit $B = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 4/10 & 3/10 & 3/10 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3$

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. alors

$$\begin{aligned} \exists X \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\} \ / \ BX = \lambda X &\iff \exists X \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\} \ / \ BX - \lambda X = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \exists X \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\} \ / \ (B - \lambda I_3)\, X = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff B - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

b) Cherchons les valeurs de λ pour lesquelles $B - \lambda I_3$ est non inversible.

Pour cela, on transforme $B - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 5/6-\lambda & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 2/3-\lambda & 0 \\ 4/10 & 3/10 & 3/10-\lambda \end{pmatrix}$ à l'aide des opérations élémentaires

$$\begin{aligned} B - \lambda I_3 &\sim \begin{pmatrix} 5-6\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 4 & 3 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 10L_3 \end{array}\right. \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 5-6\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & -9\left(2\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) & 0 \\ 0 & 12\lambda - 5 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (5-6\lambda)\, L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right. \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & -9\,(2\lambda-1)\,(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 12\lambda - 5 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$*$ Si $\lambda \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, alors

$$B - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\lambda-5 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 12\lambda-5 & 3-10\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice n'est pas inversible (triangulaire, la diagonale s'annulant), d'où $B - \lambda I_3$ non plus.

$*$ Si $\lambda \notin \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, alors la division de L_2 par $-9\,(2\lambda-1)\,(\lambda-1)$ donne

$$B - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12\lambda-5 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-10\lambda \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - (12\lambda-5)\, L_2)$$

Cette dernière matrice est non inversible pour l'unique valeur $\lambda = \frac{3}{10}$.

Au total $B-\lambda I_3$ est non inversible pour les seules valeurs

$$\boxed{\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\frac{1}{2},\quad \lambda_3=\frac{3}{10}}$$

c) Résolution des systèmes non inversibles :

* On résout (S_1) $AX=\lambda_1 X$, avec $X=(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} S_1 &\iff \begin{pmatrix} -1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 4/10 & 3/10 & -7/10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ 4x+3y-7z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=x \\ x=z \end{cases} \iff x=y=z \iff X=z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au total $\boxed{X_1=(1,1,1) \text{ est la seule solution dont la troisième composante vaut } 1}$

* On résout (S_2) $AX=\lambda_2 X$, avec $X=(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} (S_2) &\iff \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 4/10 & 3/10 & -2/10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=-2x \\ x=-z \end{cases} \iff X=z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au total $\boxed{X_2=(-1,2,1) \text{ est la seule solution dont la troisième composante vaut } 1}$

* On résout (S_3) $AX=\lambda_3 X$, avec $X=(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} (S_3) &\iff \begin{pmatrix} 8/15 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 11/30 & 0 \\ 4/10 & 3/10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 16x+5y=0 \\ 10x+11y=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases} \\ &\iff x=y=0 \iff X=z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Au total $\boxed{X_3=(0,0,1) \text{ est la seule solution dont la troisième composante vaut } 1}$

d) On pose $P=\mathrm{Mat}\,(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résolvons $PX=Y$, avec $X=(x,y,z)$ et $Y=$

(x', y', z') :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x - y = x' \\ x + 2y = y' \\ x + y + z = z' \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y = x' & \\ -3y = -x' + y' & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 2y + z = -x' + z' & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{3}(-x' + y') \\ z = \frac{1}{3}(-x' - 2y' + 3z') \end{cases}$$

Ainsi P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Un calcul donne alors

$$\Delta = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 \end{pmatrix}$$

e) Remarquons en premier lieu que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n = P^{-1}BP \cdots P^{-1}BP = P^{-1}B^nP$$

et qu'alors

$$P\Delta^nP^{-1} = PP^{-1}B^nPP^{-1} = B^n$$

Or

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & (3/10)^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (3/10)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -(1/2)^n & 0 \\ 1 & (1/2)^{n-1} & 0 \\ 1 & (1/2)^n & (3/10)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + (1/2)^n & 1 - (1/2)^n & 0 \\ 2 - (1/2)^{n-1} & 1 + (1/2)^{n-1} & 0 \\ 2 - (1/2)^n - (3/10)^n & 1 + (1/2)^n - 2(3/10)^n & 3(3/10)^n \end{pmatrix}}$$

f) Puisque $\frac{1}{2} < 1$ et $\frac{3}{10} < 1$, on voit tout de suite que (B^n) converge vers

$$B_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul très simple donne $B_0^2 = B_0$, donc B_0 est idempotente.

5. Soit $p > 2$. On note $I = I_p$ et J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On étudie l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{aI + bJ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Notons que $aI + bJ = \begin{pmatrix} a+b & & b \\ & \ddots & \\ b & & a+b \end{pmatrix}$

a) $\mathcal{E}$ est assez clairement stable par combinaisons linéaires, puisque si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda(aI + bJ) + \mu(cI + dJ) = (\lambda a + \mu c)J + (\lambda b + \mu d)I \in \mathcal{E}$$

Montrons que $\mathcal{E}$ est stable par produit. Or le terme général de J^2 est .

$$J^2_{ij} = \sum_{k=1}^{p} J_{ik}J_{kj} = \sum_{k=1}^{p} 1 = p, \quad \text{donc} \quad \boxed{J^2 = pJ}$$

On en déduit que

$$(aI + bJ)(cI + dJ) = acI + (bc + ad) J + bdJ^2 = acI + (ad + bc + nbd) J \in \mathcal{E}$$

$\mathcal{E}$ est donc bien stable par produit

b) Soit $A = aI + bJ$: cherchons un polynôme annulateur de A :
Partons de $J^2 = pJ$, et de $bJ = A - aI$: alors, en élevant au carré, on obtient

$$b^2J^2 = A^2 - 2aA + a^2I \quad \text{soit} \quad pb^2J = A^2 - 2aA + a^2I$$

d'où

$$pb(A - aI) = A^2 - 2aA + a^2I$$

et enfin

$$\boxed{A^2 - (2a + pb) A + a(a + bp) I = 0}$$

On a donc

$$A(A - (2a + pb) I) = -a(a + bp) I \quad (1)$$

$*$ Si $a(a + bp) \neq 0$, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{a(a + pb)}(A - (2a + pb) I) = \frac{-1}{a(a + pb)}(aI + bJ - (2a + pb) I) = \frac{1}{a(a + pb)}((a + pb) I - bJ)$$

A^{-1} est donc élément de $\mathcal{E}$.

$*$ Si $a(a + bp) = 0$, montrons que A n'est pas inversible : si c'était le cas, on aurait, en multipliant (1) à gauche par A^{-1} :

$$A - (2a + pb) I = 0, \quad \text{donc} \quad A = (2a + pb) I$$

On aurait alors $\begin{cases} 2a + pb = a \\ 0 = b \end{cases}$ par identification à $A = aI + bJ$ d'où $a = b = 0$ contradiction (la matrice nulle n'est pas inversible).

Au total, $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } a \neq 0 \text{ et } (a + bp) \neq 0}$

c) On constate que

$$(\gamma J)^2 = \gamma^2 J^2 = \gamma^2 pJ = \gamma p(\gamma J)$$

Posons $\gamma = \dfrac{1}{p}$, et $\boxed{P = \dfrac{1}{p}J}$: on a donc $P^2 = P$, ce qui assure que P est idempotente

d) On pose $Q = I - P$. Alors

$$A = aI + bJ = a(P + Q) + bpJ$$

$$\boxed{A = (a + bp) P + aQ}$$

e) On a

$$\begin{aligned} PQ &= P(I - P) = P - P^2 = 0 \\ QP &= (I - P) P = P - P^2 = 0 \end{aligned}$$

et par récurrence immédiate

$$\forall k \geq 1,\ P^k = P \quad \text{et} \quad Q^k = Q$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \text{si } k \geq 1 \text{ et } \ell \geq 1, & P^kQ^\ell = PQ = 0 \\ \text{si } k = 0 \text{ et } \ell \geq 1, & P^kQ^\ell = Q \\ \text{si } k \geq 1 \text{ et } \ell = 0, & P^kQ^\ell = P \\ \text{si } k = \ell = 0, & P^kQ^\ell = I \end{cases}$$

On applique alors la formule du binôme (P et Q commutent), de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= ((a+pb)\,P + aQ)^n \\
&= (a+pb)^n\,P^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}P^kQ^{n-k} + a^nQ^n \\
&= (a+pb)^n\,P + 0 + a^nQ
\end{aligned}$$

Au total

$$\boxed{A^n = (a+pb)^n\,P + a^nQ}$$

f) Soit $n \in \mathbb{N}$: alors si A est inversible (c'est-à-dire si $a\,(a+pb) \neq 0$), on peut écrire

$$\left(\frac{1}{(a+pb)^n}P + \frac{1}{a^n}Q\right)((a+pb)^n\,P + a^nQ) = P^2 + \frac{a^n}{(a+pb)^n}QP + \frac{(a+pb)^p}{a^n}PQ + Q^2 = P + Q = I$$

De sorte que

$$\left(\frac{1}{(a+pb)^n}P + \frac{1}{a^n}Q\right) = ((a+pb)^n\,P + a^nQ)^{-1} = (A^n)^{-1} = A^{-n}$$

La formule du e) est donc valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

g) On suppose que $b \neq 0$ et que $A = aI + bJ = \begin{pmatrix} a+b & & b \\ & \ddots & \\ b & & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_p$.

La somme des coefficients de chaque ligne de A est donc

$$(p-1)\,b + (a+b) = a + pb$$

On en déduit (les coefficients doivent être positifs) :

$$A \in S_p \iff \begin{cases} a+b \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a+pb = 1 \end{cases}$$

Multiplions la première inégalité par p et retranchons lui la troisième égalité :

$$\begin{cases} a = 1 - pb < 1 \quad (\text{car } b > 0) \\ (p-1)\,a \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a \geq -\dfrac{1}{p-1} > -1 \quad (\text{car } p > 2) \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{-1 < a < 1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. Or

$$A^n = (a+pb)^n\,P + a^nQ = P + a^nQ$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n = P}$$