Ex 1 Démontrer les propriétés suivantes à partir de la définition

a) Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim (u_n + v_n) = +\infty$

b) Si $\lim u_n = -\infty$ et $\lim v_n = \ell \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\lim (u_n v_n) = +\infty$

c) Si $\lim u_n = \ell \neq 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$

Ex 2 A l'aide de la définition, montrer que $\lim \arctan (n) = \dfrac{\pi}{2}$

Ex 3 Soit $u_n = \cos n$: montrer que (u_n) diverge. On pourra considérer les sous suites $(u_{n+1})\,,\ (u_{n-1})\,,\ (u_{2n})\,.$

Ex 4 Soit $n \geqslant 2$. Montrer que si $2 \leqslant k \leqslant n-2,\quad \dbinom{n}{k} \geqslant \dbinom{n}{2}$, et en déduire la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$.

Ex 5 Montrer que la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-nx} dx$ converge vers 0.

Ex 6 En remarquant que $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Ex 7 Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n}$, et en déduire un équivalent de S_n.

On pourra raisonner par récurrence ou utiliser l'inégalité $2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$

b) Montrer que la suite $S_n - 2\sqrt{n}$ converge.

Ex 8 **Constante d'Euler**. Soient $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln (k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b) En déduire que (v_n) est convergente (sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler).

c) Donner un équivalent simple de $(u_n)\,.$

Ex 9 Soient $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, et pour $n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

Montrer que $\forall x \geqslant 0,\quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$, et en déduire la convergence et la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$

Ex 10 Soit $u_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}$ (il y a n radicaux).

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \\ \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \end{cases}$

b) En déduire la convergence de (u_n) et sa limite.

Ex 11 Soit (u_n) une suite strictement positive, telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, 1[\,.$: montrer (u_n) converge vers 0.

Application : utiliser ce résultat pour redémontrer $a^n \ll n! \ll n^n\ (a > 1)$

Ex 12 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in \left]0, 1\right[\,.$

b) A l'aide de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln (1-x)}{\ln x}$, calculer $\lim x_n$.

Ex 13 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution $x_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[\,.$

Calculer $\lim x_n$, et donner un équivalent de x_n.

b) Calculer $\lim (x_n - n\pi)$ puis trouver un équivalent de $u_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$ (utiliser $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$).

Ex 14 Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $v_n = u_{2n}$, et $w_n = u_{2n+1}$.

a) Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes, et en déduire que (u_n) converge.

b) En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1} dx$, calculer la limite de (u_n).

Ex 15 Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}$ $(p \geqslant 2)$.

b) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$.

Ex 16 Soient $0 < p < q$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = p, \quad v_0 = q$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}, \quad v_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Ex 17 Critère de Cauchy : on suppose que $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{\min(p,q)\to\infty} |x_q - x_p| = 0$.

On considère $M_n = \sup_{p \geqslant n} (x_p)$ et $m_n = \inf_{p \geqslant n} (x_p)$. Montrer que (M_n) et (m_n) sont adjacentes et en déduire que (x_n) converge.

Ex 18 Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $\begin{cases} 0 < u_0 < \frac{\pi}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$, puis que (u_n) est décroissante.

b) En déduire la convergence de (u_n), sa limite, et montrer que $u_{n+1} \sim u_n$.

Ex 19 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. On pose $f(x) = \sqrt{6+x}$.

a) Montrer que $[3, +\infty[$ est stable par f. Qu'en déduit-on. Quelles sont les limites possibles de (u_n) .

b) Montrer que (u_n) est décroissante et conclure sur la convergence de (u_n) .

c) Calculer $\sup_{[3,+\infty[} f'$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n - 3 < \frac{1}{6^{n-1}}$.

Ex 20 Soit $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x}$. On donne $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

a) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, et montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Montrer que $\forall x > 0,\ g(x) < 0$.

c) Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Ex 21 Soit $a > 0$ et (u_n) la suit définie par $u_1 = \ln a$, et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - u_k)$.

Trouver une relation de récurrence vérifiée par (u_n) , et en déduire l'étude de (u_n) .

Ex 22 Etudier la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Aide : montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f : x \to 1 - x^2$. Considérer $g = f \circ f$, et factoriser $g(x) - x$.

Ex 23 Méthode de Césarò : si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite, on pose $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$

a) On suppose que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,$ $\left|\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$

En déduire que (v_n) converge vers 0

b) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors (v_n) aussi.

c) Montrer que si $\lim (u_{n+1} - u_n) = \ell \neq 0$, alors $u_n \sim n\ell$