Fonctions trigonométriques réciproques

a) **<u>Fonction arcsinus</u> :** $\widetilde{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est une bijection.

Sa réciproque est appelée **arcsinus** et notée $\arcsin$. Elle est **continue sur** $[-1, 1]$

Ainsi, si $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x :

$$\boxed{\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \textbf{et} \quad \sin(\arcsin(x)) = x}$$

De plus, on a l'équivalence, pour $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{\sin\theta = x \iff \theta = \arcsin x}$$

Mises en garde : 1. $\arcsin x$ n'a AUCUN SENS si $x \notin [-1, 1]$

2. On n'a la simplification $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ **QUE** lorsque $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3. On n'a l'équivalence $\sin\theta = x \iff \theta = \arcsin x$ **QUE** pour $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Valeurs remarquables : $\boxed{\arcsin 0 = 0}$ $\boxed{\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}$

Dérivabilité : on montre que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\ , \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

De plus, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $]-1, 1[$, alors $\arcsin(u)$ est dérivable sur I de dérivée

$$\boxed{[\arcsin(u)]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

Propriété : $\boxed{\arcsin \text{ est impaire}}$

b) **<u>Fonction arccosinus</u> :** $\widetilde{\cos} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection.

Sa réciproque est appelée **arccosinus** et notée $\arccos$. Elle est **continue sur** $[-1, 1]$

Ainsi, si $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x :

$$\boxed{\arccos(x) \in [0, \pi] \quad \textbf{et} \quad \cos(\arccos(x)) = x}$$

De plus, on a l'équivalence, pour $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in [0, \pi]$:

$$\boxed{\cos\theta = x \iff \theta = \arccos x}$$

Mises en garde : 1. $\arccos x$ n'a AUCUN SENS si $x \notin [-1, 1]$

2. On n'a la simplification $\arccos(\cos\theta) = \theta$ **QUE** lorsque $\theta \in [0, \pi]$

3. On n'a l'équivalence $\cos\theta = x \iff \theta = \arccos x$ **QUE** pour $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in [0, \pi]$

Valeurs remarquables : $\boxed{\arccos 0 = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\arccos 1 = 0}$ $\boxed{\arccos(-1) = \pi}$ $\boxed{\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}}$

Dérivabilité : on montre que $\arccos$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\ , \ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) <u>Fonction arctangente</u> : $\widetilde{\tan}:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ est une bijection.

Sa réciproque est appelée **arctangente** et notée $\arctan$. Elle est **continue sur** $\mathbb{R}$

Ainsi, si $x\in\mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x :

$$\boxed{\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad\textbf{et}\quad\tan(\arctan(x))=x}$$

De plus, on a l'équivalence, pour $x\in\mathbb{R}$ et $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\boxed{\tan\theta=x\iff\theta=\arctan x}$$

Mises en garde : 1. $\arctan x$ est défini POUR TOUT REEL

2. On n'a la simplification $\arctan(\tan\theta)=\theta$ **QUE** lorsque $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. On n'a l'équivalence $\tan\theta=x\iff\theta=\arctan x$ **QUE** pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Valeurs remarquables : $\boxed{\arctan 0=0}$ $\boxed{\arctan 1=\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}}$

Dérivabilité : on montre que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}}$$

De plus, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\arctan(u)$ est dérivable sur I de dérivée

$$\boxed{[\arctan(u)]'=\frac{u'}{1+u^2}}$$

Propriété : $\boxed{\arctan\text{ est impaire}}$

Limites : on montre que $\boxed{\lim_{+\infty}\arctan=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad\lim_{-\infty}\arctan=-\frac{\pi}{2}}$

d) <u>Formulaire</u> :

1. $\forall x\in[-1,1]$, $\boxed{\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}}$

2. $\forall x\in[-1,1]$, $\boxed{\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}}$

3. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ et $\boxed{\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

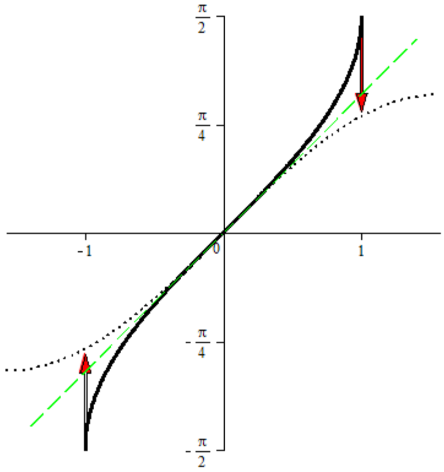
4. $\forall x\in[-1,1]$, $\boxed{\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}}$

5. $\forall x\in[-1,1]$, $\boxed{\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi}$

6. $\forall x\neq 0$, $\boxed{\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\text{signe}(x).\frac{\pi}{2}}$. On a posé $\text{signe}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$

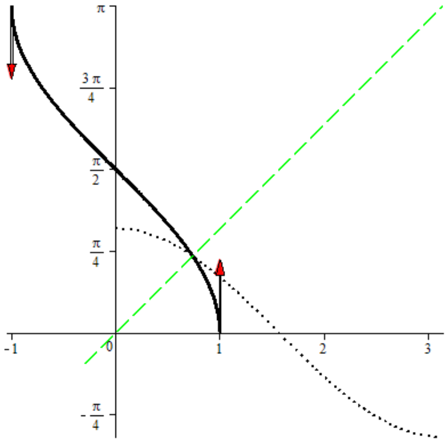
e) **<u>Courbes</u> :**

- Celle d'arcsinus admet pour tangente en O la droite d'équation $y=x$, et des tangentes verticales en -1 et 1



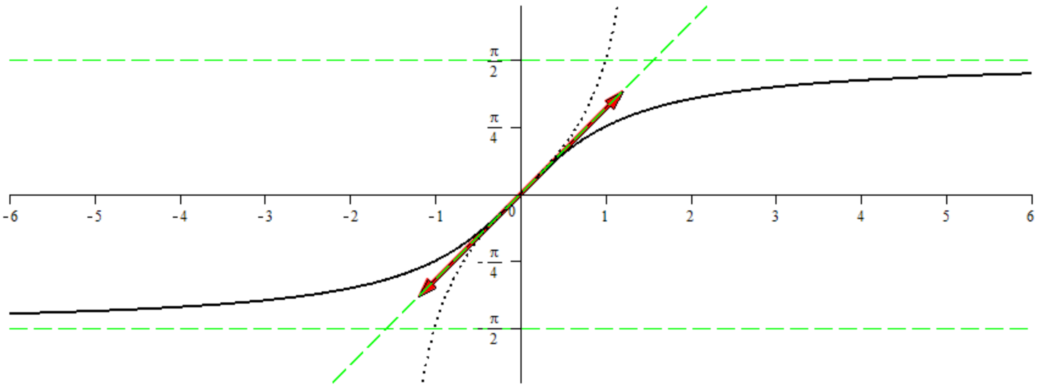
Courbe d'arcsinus

- Celle d'arccosinus admet des tangentes verticales en -1 et 1 et le point $\Omega\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pour centre de symétrie



Courbe d'arccosinus

- Celle d'arctangente admet pour tangente en O la droite d'équation $y=x$, et des asymptotes d'équations $y=\frac{\pi}{2}$ et $y=-\frac{\pi}{2}$



Courbe d'arctangente