Convergence des suites

1. Généralités

1.1. Définitions

a) **Suites convergentes :** on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$, i.e.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

qui s'écrit aussi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon}$$

Toute suite non convergente est dite **divergente**.

Exemple : la suite (u_n) de terme général $1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 1

Remarque1 : "$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0$" signifie "à partir d'un certain rang" ou "pour n au voisinage de ∞"

Remarque2 : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ s'écrit donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$

Remarque3 : (u_n) converge vers $\ell \Leftrightarrow (u_n - \ell)$ converge vers $0 \Leftrightarrow |u_n - \ell|$ converge vers 0

b) **Suites divergentes vers $+\infty$:** on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, i.e.

$$\boxed{\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M}$$

Exemple : suites géométriques : $\boxed{\text{soit } a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{Si } |a| < 1, \text{ alors } (a^n) \text{ converge vers } 0. \\ \text{Si } a > 1, \text{ alors } (a^n) \text{ diverge vers } +\infty. \end{cases}}$

1.2. Quelques propriétés

a) **Unicité de la limite :** $\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge vers } \ell \text{ et } \ell', \text{ alors } \ell = \ell'}$

b) **Propriété importante :** $\boxed{\text{Toute suite convergente est bornée}}$

c) **Suites extraites :** $\boxed{\text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell, \text{ alors les suites } (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ aussi}}$.

Plus généralement, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, la suite de terme général $u_{\varphi(n)}$ est dite **extraite** de la suite (u_n) et converge vers ℓ.

Exemple : suites géométriques : si $a \leqslant -1$, alors (a^n) diverge.

En particulier la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Réciproquement, $\boxed{\text{si } (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ convergent vers le même réel } \ell, \text{ alors } (u_n) \text{ converge vers } \ell}$

1.3. Opérations

a) Sommes, produits, quotients :

(i) On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes, où $a \in \mathbb{R}$

$a + (+\infty) = +\infty$	$a \times (+\infty) = \text{signe}\,(a)\ \infty$ pour $a \neq 0$
$a + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies.

(ii) Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0

(iii) Règles élémentaires

- Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\left\{ \begin{array}{l} \lim u_n = \ell \\ \lim v_n = \ell \end{array} \right. \Rightarrow \lim (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- Si $\ell.\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\left\{ \begin{array}{l} \lim u_n = \ell \\ \lim v_n = \ell \end{array} \right. \Rightarrow \lim (u_n.v_n) = \ell.\ell'$
- Si $\lim u_n = \ell \neq 0$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{u_n} = 0 \\ \lim u_n = 0 \Rightarrow \lim \left| \dfrac{1}{u_n} \right| = +\infty \end{array} \right.$.

b) "Composée" : soient $f : I \to \mathbb{R}$, (u_n) une suite à valeurs dans I, $a \in \overline{I}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_a f = \ell \text{ et } \lim u_n = a, \text{ alors } \lim f(u_n) = \ell}$$

Cas particulier 1 : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite (u_n) de terme général $f(n)$ converge vers ℓ

Cas particulier 2 : si f est continue en a et $\lim u_n = a$, alors $f(u_n)$ converge vers $f(a)$

c) Cas des suites récurrentes : soit (u_n) la suite définie la donnée de u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (f \text{ continue sur } \mathbb{R})$$

Alors

si (u_n) converge vers ℓ, **alors** nécessairement, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$

En effet, le passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, par continuité de f : $\ell = f(\ell)$

Exemple : (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right)$.

Si (u_n) converge, sa limite sera nécessairement 1.

1.4. Limites et inégalités

a) Caractérisation séquentielle des bornes : soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, M un majorant de A. Alors

$$\boxed{M = \sup A \Longleftrightarrow \exists \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ / \ \left(a_n\right) \text{ converge vers } M}$$

Exemple : bornes de $A = \left\{ \dfrac{n}{mn+1},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$

Remarque : pour une fonction f : $\boxed{M = \sup\limits_{I} f \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \text{ est majorant de } f \text{ sur } I \\ \exists \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \ / \ f\left(x_n\right) \text{ converge vers } M \end{array} \right.}$

Exemple : bornes sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \arctan(x)\cos(x)$

b) Passage à la limite dans une inégalité :

$$\boxed{\text{On suppose que } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers } \ell \text{ et } \ell', \text{ et qu'} \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n. \text{ Alors } \ell \leqslant \ell'.}$$

c) Théorème des gendarmes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{On suppose qu'} \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n. \\ \text{Si } (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers } \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } (u_n) \text{ converge vers } \ell \end{array}}$$

Exemple : convergence et limite de $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \quad (x \in \mathbb{R} \text{ fixé})$.

Remarque : pour montrer la convergence d'une suite (u_n) vers ℓ il suffit de trouver une suite (v_n) de limite nulle telle que

$$\boxed{\exists n_0 \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant v_n}$$

Exemple : $\lim \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = 1 \quad \left(\text{ou } \sum_{k=1}^{n} k! \sim n!\right)$

d) "Comparaison à $+\infty$" :

$$\boxed{\text{On suppose qu'} \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant v_n. \text{ Si } \lim v_n = +\infty, \text{ alors } \lim u_n = +\infty}$$

1.5. Suites monotones

a) Théorème :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Toute suite } (u_n) \text{ croissante et majorée converge. De plus } \lim u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \\ \text{Toute suite } (u_n) \text{ décroissante et minorée converge. De plus } \lim u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \\ \text{Toute suite } (u_n) \text{ croissante non majorée diverge vers } +\infty. \end{array}}$$

Remarque : ce théorème sert en général à montrer **l'existence d'une limite** (et non sa valeur).

Exemple1 : montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ est convergente.

Exemple2 : (u_n) définie par $u_0 \in \left]0,1\right[$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right)$ converge vers 1.

b) Suites adjacentes :

(i) Définition : on dit que (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque

$$\boxed{\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim (v_n - u_n) = 0 \end{cases}}$$

(ii) Théorème :

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite } \ell \text{ vérifiant } \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n}$$

$$u_0 \quad u_n \, \ell \, v_n \quad v_0$$

Exemple 1 : soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad x'_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

les approximations décimales de x par défaut et par excès à l'ordre n.

Alors (x_n) et (x'_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.

Remarque : $x_n = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$, où $a_k = 10^k (x_k - x_{k-1})$ est la k-ième décimale de x. On notera

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

Exemple 2 : soient $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$: (u_n) et (v_n) sont adjacentes (strictement)

Application : irrationnalité de e. On suppose que e est un rationnel, soit $e = \frac{p}{q},\ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

a. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{1-x} dx$. Calculer I_0 et montrer que (I_n) converge vers 0.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k!}$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e - I_n$ puis $\lim u_n$

c. Justifier que $A = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est un entier et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < \frac{p}{q} < v_n$.

En déduire que $\quad qA < pq! < qA + 1 \quad$ et conclure.

2. Brève extension aux suites complexes

2.1. Définition

a) Si (u_n) est une suite à valeurs complexes ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C}$), on dit que qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ \underset{\text{(module)}}{|u_n - \ell|} \leqslant \varepsilon}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim u_n = \ell \Leftrightarrow \lim \overbrace{|u_n - \ell|}^{\text{suite réelle}} = 0}$$

Interprétation géométrique : à partir d'un certain rang, les points images des u_n sont dans le disque de centre $L(\ell)$ et de rayon ε. (DESSIN).

b) **Suites géométriques :** $\boxed{\text{si } |a| < 1, \text{ alors } (a^n) \text{ converge vers } 0. \text{ Si } |a| > 1, \text{ alors } (a^n) \text{ diverge.}}$

Exemple : $(1+i)^n$ diverge; $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\right)^n$ converge vers 0.

2.2. Propriétés

a) On pose $u_n = x_n + iy_n$, où (x_n) et (y_n) sont des suites réelles. Alors

$$\boxed{(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow (x_n) \text{ et } (y_n) \text{ convergent}}$$

et on a alors

$$\boxed{\lim u_n = \lim x_n + i \lim y_n}$$

b) **Conséquence :** $\boxed{\text{les théorèmes sur les sommes, produits, quotients restent vrais sur } \mathbb{C}.}$
(On étudie parties réelles et imaginaires). De plus, si (u_n) converge vers ℓ, alors

$$\boxed{|u_n| \to |\ell| \quad ; \quad \overline{u_n} \to \overline{\ell}}$$

Remarque : si ρ_n converge vers ρ et θ_n converge vers θ, alors $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ converge vers $z = \rho e^{i\theta}$.

3. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On suppose f continue sur l'intervalle I, et on considère la suite (u_n) définie par

$$\boxed{\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}}$$

Remarque : on a $u_1 = f(u_0)\,,\ u_2 = f(f(u_0)) = f \circ f(u_0)\,, \ldots, u_n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ fois}}(u_0)$

3.1. Généralités

a) **Intervalles stables :** l'intervalle I est stable par f lorsque $f\langle I\rangle \subset I$, c'est-à-dire $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

$$\boxed{\text{Si } I \text{ est stable par } f \text{ et } u_0 \in I, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I}$$

Exemple : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 4}$: ici $f : x \mapsto \dfrac{x-6}{x-4} = 1 - \dfrac{2}{x-4}$

Montrer que $[1, 2]$ est f-stable et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) **Seules limites possibles :** on suppose f **continue** sur l'intervalle I stable par f, et $u_0 \in I$.

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ converge vers } \ell, \text{ alors on a } f(\ell) = \ell \ (\ell \text{ est un point fixe de } f)}$$

Exemple : quelles sont les seules limites possibles pour (u_n) définie au a)?

Remarque : dans la pratique, faire un dessin, calculer les points fixes et repérer les intervalles stables

3.2. Monotonie

a) **Sens de variation :** on suppose que I est un intervalle stable par f et que $u_0 \in I$.

$$\boxed{\text{Le sens de variation de } (u_n) \text{ dépend du signe sur } I \text{ de la fonction } g : x \mapsto f(x) - x}$$

Exemple : étudier la suite (u_n) définie au 3.1.a)

b) **Utilisation de la croissance de f :** on suppose f **croissante** sur un intervalle I stable par f et $u_0 \in I$.

Alors (u_n) est monotone

Remarque : si f est décroissante sur I stable par f et $u_0 \in I$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones

Exemple 1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 4}$. Discuter la convergence de (u_n) sur la valeur de u_0

Exemple 2 : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n \end{cases}$. Etude de (u_{2n}) et (u_{2n+1})

3.3. Utilisation des fonctions contractantes

On suppose que I est f-stable, que α point fixe de f sur I, et que

$$\exists k \in \,]0, 1[\ /\ \forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x| \quad (f \text{ est } k\text{-contractante sur } I)$$

Alors la suite si $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant k^n\,|u_0 - \alpha|}$$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos u_n \end{cases}$. Trouver n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-10}$. Approximation de α?