Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ensemble des "scalaires").

1. La structure d'espace vectoriel

1.1. Définition

a) **Intoduction :** en géométrie plane (et de l'espace), il est d'usage d'introduire la notion de vecteur. L'ensemble de ces vecteurs du plan est muni –contrairement à l'ensemble des points– de deux opérations de base : l'addition et la multiplication par un réel.

Mais bien d'autres ensembles sont munis de lois possédant des propriétés similaires, comme les polynômes, les fonctions, les suites, les matrices, etc.

C'est cette structure commune, appelée structure d'espace vectoriel, que nous allons étudier. Compte tenu de l'origine géométrique que nous avons indiquée, le vocabulaire sera orienté vers ce langage, et il sera bon de s'appuyer dans une certaine mesure sur cette analogie pour nourrir son intuition concernant des résultats plus généraux, ou faisant référence à des objets non géométriques.

b) **Définition :** l'ensemble E est appelé **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**) s'il possède deux lois :

- Une loi **interne** $+$ qui à deux éléments x et y de E associe l'élément $x+y$ de E, vérifiant les propriétés :

1. $+$ est associative : $\forall\,(x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$
2. $+$ est commutative : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ x+y=y+x$
3. $+$ possède un élément neutre $0_E\in E$ appelé **vecteur nul** vérifiant : $\forall x\in E,\ x+0_E=x$
4. Tout élément $x\in E$ possède un opposé noté $(-x)\in E$ vérifiant $x+(-x)=0_E$

- Une loi **externe** $\cdot$ qui à un élément x de E et un scalaire λ de $\mathbb{K}$ associe l'élément $\lambda.x$ de E, vérifiant :

5. $\forall\,(x,y)\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda\,(x+y)=\lambda x+\lambda y$
6. $\forall x\in E,\ \forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ (\lambda+\mu)\,x=\lambda x+\mu x$
7. $\forall x\in E,\ \forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda\,(\mu x)=(\lambda\mu)\,x$
8. $\forall x\in E,\ 1.x=x$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**

c) **Calculs dans un espace vectoriel :** on note $\boxed{x-y=x+(-y)}$. Si $(x,y)\in E^2$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, alors :

(i) $\lambda.0_E=0_E$	(ii) $0.x=0_E$
(iii) $(-1)\,.x=-x$	(iv) $\lambda\,(-x)=(-\lambda)\,.x=-(\lambda x)$
(v) $\lambda\,(x-y)=\lambda x-\lambda y$	(vi) $(\lambda-\mu)\,x=\lambda x-\mu x$
(vii) $\lambda.x=0_E\iff\lambda=0$ ou $x=0_E$	

d) **Combinaison linéaires :** si $x_1,\dots x_n$ sont éléments de E, et $\lambda_1,\dots\lambda_n$ sont éléments de $\mathbb{K}$, alors l'élément

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$$

est appelé **combinaison linéaire** (C.L) **des** (x_k) . Par exemple, si x,y,z sont des vecteurs λ,μ,ν des scalaires, $\lambda x,\ \lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y+\nu z$ sont des combinaisons linéaires de x,y,z.

1.2. Exemples fondamentaux

a) **Les n-uplets** et l'"hypergéométrie" :

$\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-ev.

En particulier, pour n valant $1, 2, 3$:

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles (identifié à une droite)
- $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (identifié au plan des vecteurs)
- $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (identifié à l'espace des vecteurs)

Remarque 1 : on note plus volontier les vecteurs en colonnes.

Remarque 2 : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel **et** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

b) **Les applications** et l'analyse : si A est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$\mathcal{F}(A, E) = E^A$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

En particulier, lorsque $E = \mathbb{K}$, et A est soit un intervalle de $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{N}$, on obtient

- L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$ des **fonctions à valeurs réelles** sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des **suites réelles** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Remarque 1 : cos est un vecteur de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un vecteur de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$!

Remarque 2 : $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont de même des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

c) **Les polynômes :**

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Remarque : ici encore, $X^3 - 2X + 3$ sera considéré comme "vecteur de $\mathbb{K}[X]$".

d) **Les matrices :** si n et p sont des entiers non nuls, alors

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

En particulier :

- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des **matrices carrées** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ des **matrices colonnes** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Remarque : on identifiera $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (d'où la notation en colonne des n-uplets).

1.3. Sous-espaces vectoriels

a) **<u>Définition</u> :** soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F un sous-ensemble de E.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E lorsque :

$$\boxed{\begin{cases} F \text{ est non vide} \\ \forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F \quad \text{(stabilité de } F \text{ par somme)} \\ \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F \quad \text{(stabilité de } F \text{ par multiplication externe)} \end{cases}}$$

Ou ce qui est équivalent lorsque :

$$\boxed{\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F \quad \text{(stabilité de } F \text{ par combinaisons linéaires)} \end{cases}}$$

Ou encore plus simplement :

$$\boxed{\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F \end{cases}}$$

Sous ces conditions, F est alors **un $\mathbb{K}$-espace vectoriel** pour les lois $+$ et .

F est alors <u>stable par toute combinaison linéaire</u> : si $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F$$

Cas particuliers : $\boxed{\{0_E\} \text{ et } E \text{ sont des sous-espaces vectoriels (triviaux) de } E}$

Exemple 1 : soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{X = (x,y,z) \in E \ / \ z = 0\}$ et $G = \{X = (x,y,z) \in E \ / \ z = 1\}$

Alors F est un sous espace vectoriel de E, mais G ne l'est pas.

Exemple 2 : $\boxed{\mathbb{K}_n[X] \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{K}[X]}$

Exemple 3 : $\boxed{C^1(I,\mathbb{K}) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{F}(I,\mathbb{K})}$

Exemple 4 : si $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & 0 & b+c \\ 0 & a+b & 0 \\ b+c & 0 & a+c \end{pmatrix}$

Alors $\mathcal{E} = \left\{M(a,b,c),\ (a,b,c) \in K^3\right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

b) **<u>Droites vectorielles</u> :** soit x_0 un vecteur **non nul** de E. L'ensemble

$$\boxed{\mathbb{K}x_0 = \{\lambda x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}}$$

des multiples de x, est appelé **droite vectorielle engendrée par** x. <u>C'est un sous espace vectoriel de E.</u>

Exemple : soit $F = \left\{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\right\}$.

Montrer de deux manières différentes que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

c) **<u>Intersection</u> :**

$$\boxed{\text{si } F \text{ et } G \text{ sont des sous espaces vectoriels de } E, \text{ alors } F \cap G \text{ est un sous espace vectoriel de } E}$$

1.4. Espaces vectoriels engendrés par des vecteurs

a) **<u>Définition</u> :** soit E un $\mathbb{K}$-ev, $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $x_1, \ldots, x_n$ l'ensemble noté $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ de toutes les combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\} \subset E}$$

$\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ est effectivement un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 1 : <u>droites vectorielles</u>. Si $x \in E,\ x \neq 0_E$, alors $\mathrm{Vect}\,(x) = \mathbb{K}x$ est une droite vectorielle.

Exemple 2 : <u>plans vectoriels</u>. Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors

$$\mathrm{Vect}\,(x, y) = \left\{\lambda x + \mu y,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\} \text{ est un plan vectoriel.}$$

b) **<u>Propriétés</u> :**

(i) $\boxed{\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots x_n) \text{ est le plus petit sous-espace vectoriel de } E \text{ contenant } x_1, \ldots, x_n}$

Application : soit F est un sous-espace vectoriel de E. Pour montrer une inclusion du type

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) \subset F$$

il suffit de montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ x_k \in F$$

Exemple : soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $e_1' = (1, 0, 1)\,,\ e_2' = (-1, 0, 2)$.

On pose $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_3)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(e_1', e_2')$. Montrer que $F = G$.

(ii) $\boxed{\text{si } x_n \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_{n-1})\,, \text{ alors } \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_{n-1})}$

Autrement dit on ne change pas $\mathrm{Vect}\,(x_1 \ldots x_n)$ en supprimant un vecteur combinaison linéaire des autres.

2. Familles génératrices-liées-libres, bases

2.1. Familles génératrices

a) **Définitions :** soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E.

(i) On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une **famille génératrice de** E (ou que $e_1, \ldots, e_n$ **engendrent** E) lorsque tout vecteur de E peut se décomposer en combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$, autrement dit

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n}$$

Ce qui s'exprime aussi par :

$$\boxed{E = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)}$$

(ii) On dit que E est **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$ s'il admet une famille génératrice finie.

Remarque 1 : toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Remarque 2 : si $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\boxed{(x_1, \ldots, x_n) \text{ est une famille génératrice de Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)}$.

b) **Exemples fondamentaux :**

(i) Base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si $j \in [\![1, n]\!]$, on considère le vecteurs e_j de $\mathbb{K}^n$ de terme général $(\delta_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ appelé **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
$\mathbb{K}^n$ est donc de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Par exemple :

– $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$

– $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. La famille $\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ (c'est sa base canonique).
Tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit en effet $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_0, \ldots a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
$\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

(iii) $\boxed{\mathbb{R}[X],\ C^0(\mathbb{R}),\ C^\infty(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \text{ ne sont pas de dimension finie sur } \mathbb{R}}$.

Exercice type : trouver une famille génératrice finie de $F = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - 3y - z + t = 0\right\}$

2.2. Familles liées-libres

a) **Définition :** on dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille **liée** lorsqu'il existe une relation de **dépendance linéaire**

$$\boxed{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E, \text{ où } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)}$$

autrement dit une combinaison linéaire non triviale annulant les (e_i).

Une famille non liée est dite **libre** (ou **linéairement indépendante**)

Remarque 1 : toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Remarque 2 : toute famille contenant le vecteur nul ou deux vecteurs égaux est liée.

b) **Propriété :** $\boxed{(e_1, \ldots, e_n) \text{ est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres}}$

c) Caractérisation des familles libres : $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si seule la combinaison linéaire triviale annule les (e_i) . Autrement dit si et seulement si

$$\boxed{\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)}$$

Remarque : toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Cas particuliers :
- (e_1) est libre signifie $e_1 \neq 0_E$
- (e_1, e_2) est libre signifie e_1 et e_2 ne sont pas **colinéaires**.
- (e_1, e_2, e_3) est libre signifie e_1, e_2 et e_3 ne sont pas **coplanaires**.

Exemple 1 : soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'ils sont libres dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2 : $E = C^\infty (]0, +\infty[)$, $f_1 = \ln$, $f_2 = \mathrm{id}$, $f_3 = \exp$. Montrer (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exemple 3 : soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes **étagée en degrés**, i.e.vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] , \ \deg P_k > \deg P_{k-1} \geqslant 0$$

Alors la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

d) Principe d'identification : on suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est **libre**. Alors

$$\boxed{\text{si} \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k, \text{ alors } \forall k \in [\![1, p]\!] , \ \lambda_k = \mu_k}$$

Contre exemple : $2u + 3v = 4u + 2v$ si $v = 2u$!!!

2.3. Bases

a) Définition : on dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une **base** de E lorsque

$$\boxed{\forall x \in E, \ \exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n}$$

Autrement dit lorsque tout vecteur se décompose de manière unique sur les (e_i).
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appellés **coordonnées de v dans la base** $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

b) Caractérisation : $\boxed{\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si elle est libre et génératrice.}}$

A retenir : l'existence correspond au caractère générateur, l'unicité à l'indépendance linéaire

c) Exemples :

(i) Les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n [X]$ en sont des bases!

(ii) Base canonique de $\mathcal{M}_{np} (\mathbb{K})$: si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant \ell \leqslant p$, on considère la matrice $E_{k\ell}$ de terme général $\delta_{ik}\delta_{j\ell}$, c'est-à-dire ne contenant qu'un 1 en place (k, ℓ) . Alors la famille$(E_{k\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{np} (\mathbb{K})$ dite **base canonique**.

(iii) Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Soient $P_0 = 2, \ P_1 = X + 1, \ P_2 = X^2 - X + 1, \ P_3 = X^3$: (P_3, P_2, P_1, P_0) est une base de $\mathbb{R}_3 [X]$

3. Dimension d'un espace vectoriel

d) <u>Théorème de la dimension</u> :

> On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non trivial.
>
> Alors toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.
>
> Ce nombre est appelé **dimension de** E et noté $\dim E$.
>
> Par convention, $\dim\{0\} = 0$.

Lemme : soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, et $\varepsilon = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda_1 \neq 0, \text{ alors } \operatorname{Vect}(\varepsilon, e_2, \ldots, e_n) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)}$$

Exemple 1 : Calculer la dimension de $\mathcal{E} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & 0 & b+c \\ 0 & a+b & 0 \\ b+c & 0 & a+c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$

Exemple 2 : Calculer la dimension de $F = \left\{ X = (x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 \ / \ x - 2y + z - 3t = 0 \right\}$

e) <u>Exemples fondamentaux</u> :

- $\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$
- $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}$
- $\boxed{\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = n \times p}$
- $\boxed{\text{Si } D \text{ est une droite vectorielle, alors } \dim D = 1}$
- $\boxed{\text{On appelle plan vectoriel, tout espace de dimension } 2}$

3.1. Existence de bases

On se donne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (i.e. qui admet une famille génératrice finie) non trivial E.

a) <u>Théorème de la base incomplète</u> : soient $p \leqslant m$ deux entiers non nuls.

> Soit $G = (e_1, \ldots, e_m)$ une famille **génératrice** de E telle que $L = (e_1, \ldots, e_p)$ soit **libre**. Alors il existe $n \in [\![p, m]\!]$ et des éléments $e'_{p+1}, \ldots, e'_n$ de G tels que $\left(e_1, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_n\right)$ soit une base de E

Autrement dit <u>L peut être complétée en une base de E</u> à l'aide d'éléments de G.

Ou encore, <u>on peut extraire de G une base</u> contenant L.

b) <u>Conséquences</u> :

(i) $\boxed{\text{Si } E \text{ est non trivial, de toute famille génératrice finie de } E \text{ on peut extraire une base de } E}$

(ii) $\boxed{\text{Si } E \text{ est de dimension finie, on peut compléter toute famille libre en une base de } E}$

(iii) $\boxed{\textbf{Tout espace de dimension finie non trivial admet au moins une base}}$

3.2. Conséquences sur la dimension

a) Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice : on suppose que $\dim E = n$.

(i) $\boxed{\text{Toute famille génératrice de } E \text{ admet au moins } n \text{ éléments}}$

(ii) $\boxed{\text{Toute famille libre de } E \text{ admet au plus } n \text{ éléments}}$

(iii) En particulier, $\boxed{\text{toute famille de plus de } n+1 \text{ éléments est liée}}$

b) Caractérisation des bases : si $\dim E = n$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E, alors

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E \iff \mathcal{B} \text{ est libre} \iff \mathcal{B} \text{ est génératrice}}$$

Exemple : polynômes étagés : si $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$ alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3.3. Sous-espaces vectoriels

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

a) Dimension d'un sous-espace :

$$\boxed{\text{si } F \text{ est un sous espace vectoriel de } E\text{, alors } F \text{ est de dimension finie, et } \dim F \leqslant \dim E}$$

b) Egalité :

$$\boxed{\text{si } F \text{ est un sous espace vectoriel de } E \text{ on a } \dim F = \dim E \iff F = E}$$

Conséquence : pour montrer l'égalité de deux sous espaces F et G de E, il suffit de montrer

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array} \right.}$$

Exemple : soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $e_1' = (1, 0, 1)$, $e_2' = (-1, 0, 2)$.

On pose $F = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_1', e_2')$. Montrer que $F = G$.

4. Sommes d'espaces

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

4.1. Somme de deux sous espaces.

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E, comme le montre $F \cup G$, avec $F = \mathbb{R}e_1$ et $G = \mathbb{R}e_2$ dans $\mathbb{R}^2$.
On définit la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E par

$$\boxed{F + G = \{x_F + x_G,\ x_F \in F,\ x_G \in G\} \subset E}$$

Alors $\underline{F + G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$. On a même plus précisément

$$\boxed{F + G \text{ est le plus petit sous espace vectoriel de } E \text{ contenant } F \cup G}$$

Remarque : $E = F + G$ (i.e. $E \subset F + G$) signifie que tout élément de E peut se décomposer en somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\boxed{E = F + G \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \exists\,(x_F, x_G) \in F \times G \ /\ x = x_F + x_G}$$

Exemple 1 : soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. Alors, si $1 \leqslant p < n$

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_p) + \mathrm{Vect}\,(x_{p+1}, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_n)}$$

Exemple 2 : $E = \mathbb{R}^3,\ F = \{X = (x, y, z)\ /\ z = 0\}$ et $G = \{X = (x, y, z)\ /\ x = 0\}$. Calculer $F + G$.

Remarque : il n'y a pas unicité de la décomposition.

4.2. Supplémentaires, sommes directes

a) **<u>Définition</u> :** soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont **supplémentaires dans** E lorsque

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G \ /\ x = x_F + x_G}$$

(tout élément de E se décompose de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G).
On dit aussi que E est **somme directe de** F **et** G, et on note $\boxed{E = F \oplus G}$.

Exemple 1 : $E = \mathbb{R}^2,\ (e_1, e_2)$ base canonique : alors $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$.

Attention : si $X_0 = (1, 1)$, alors $\mathbb{R}X_0$ est aussi un supplémentaire de $\mathbb{R}e_1$ dans E.

Il n'y a pas unicité du supplémentaire. On dit UN **suppléméntaire de** F **dans** E.

Exemple 2 : soit $F = \{X = (x, y, z)\ / x + y = 0\}$, $G = \mathbb{R}X_0$, avec $X_0 = (1, 1, 0)$: alors $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exemple 3 : soit $E = \mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_3 = \{M \in E\ /\ {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_3 = \{M \in E\ /\ {}^tM = -M\}$.

Montrer que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

b) **<u>Caractérisation</u> :**

$$\boxed{E = F \oplus G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{array} \right.}$$

Plus généralement on dit que la somme $F + G$ est directe (et on note $F \oplus G$) lorsque $F \cap G = \{0_E\}$

4.3. Dimension et supplémentaires

On suppose ici que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

a) **Concaténation de bases :** soient F et G deux sous espaces de E en somme directe.

si $\mathcal{B}_1 = (f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F et $\mathcal{B}_2 = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G, alors

B= $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de $F \oplus G$

b) **Conséquence :** si $E = F \oplus G$, alors $\dim F + \dim G = \dim E$

c) **Existence :** si F est un sous espace vectoriel de E, alors F admet au moins un supplémentaire

d) **Hyperplans :** soit H un sous espace vectoriel de E.

On dit que H est un **hyperplan** de E s'il admet une droite pour supplémentaire.

Autrement dit, si $\dim E = n$:

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \Longleftrightarrow \dim H = n - 1}$$

Exemples : Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les **droites** vectorielles.
Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les **plans** vectoriels.

4.4. Relation de Grassman

a) **Théorème :** soient F et G sont deux sous espaces vectoriels de E. Alors

$$\boxed{\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)}$$

Remarque : on pose $r = \dim F \cap G = r, \ \dim F = p$ et $\dim G = q$.
Si $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est une base de $F \cap G$, on complète $\mathcal{B}_0$ en une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, f_{r+1}, \cdots, f_p)$ de F et en une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, g_{r+1}, \cdots, g_q)$ de G.
Alors $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, f_{r+1}, \ldots, f_p, g_{r+1}, \cdots, g_q)$ est une base de $F + G$

Corollaire : $\boxed{\dim (F + G) \leqslant \dim F + \dim G}$

b) **Application aux supplémentaires :**

$$\boxed{E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = n \end{cases}}$$

Exemple : si H est un hyperplan et $x_0 \notin H$, alors H et $\mathbb{K}x_0$ sont supplémentaires.