A rendre par trinôme

EXERCICE

Soient E et F deux ensembles non vides, quelconques et $f \in F^E$. On pose

$$\mathcal{S} = \left\{X \in \mathcal{P}(E) \ / \ f^{-1}(f(X)) = X\right\}$$

1. Montrer que :
a) $\forall X \in \mathcal{P}(E), \ X \subset f^{-1}(f(X))$
b) $\forall Y \in \mathcal{P}(F), \ f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$.

2. Montrer que : $\forall (X, X') \in \mathcal{S}^2, \ X \cup X' \in \mathcal{S}$ et $X \cap X' \in \mathcal{S}$.

3. a) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{S}, \forall A \in \mathcal{P}(E), \ \left(X \cap A = \varnothing \Rightarrow X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing\right)$
b) Montrer que si $X \in \mathcal{S}$ alors $\overline{X} \in \mathcal{S}$ ($\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E).
c) Montrer que si $Y \in \mathcal{S}$ et $X \in \mathcal{S}$ alors $Y \setminus X \in \mathcal{S}$.

4. Montrer que : $\forall X \subset E, \ f^{-1}(f(X)) \in \mathcal{S}$.

5. Montrer que $\mathcal{S} = \mathcal{P}(E)$ si et seulement si f est injective.

PROBLEME

On admettra le théorème suivant :
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur $[a, b]$ y est bornée et atteint ses bornes.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier naturel n, on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) \, \mathrm{d}t$$

Partie I :

1. Justifier l'existence d'un majorant M de $|f|$ sur $[0, 1]$, puis montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t) \mathrm{d}t$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |J_n| \leqslant \dfrac{M}{n+1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}$ et en déduire que $J_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $K_n = \displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n f(t) \mathrm{d}t$ et on introduit $g : t \mapsto f(t) - f(1)$.
a) Justifier l'existence d'un maximum noté M_n de la fonction $|g|$ sur le segment $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$ et d'un réel α_n de $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$ tel que $M_n = |g(\alpha_n)|$, puis montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\displaystyle\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n g(t) \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M_n}{n+1}$ et en déduire : $\lim nK_n = f(1)$.

4. Montrer que : $nI_n = f(1)$.

5. On suppose de plus dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, que $f(1) = 0$ et que $f'(1) \neq 0$.
Montrer que : $\lim I_n \sim -\dfrac{f'(1)}{n^2}$.
On pourra utiliser une intégration par parties.

Partie II : applications

1. Dans cette question, on pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

On définit la fonction h_n sur $[0,1]$ par $h_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i t^i$.

a) Donner la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer un équivalent de I_n (à l'aide de la partie 1)

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on précisera et déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

2. Dans cette question, on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!}$

(avec la convention $u_0 = 0$).

a) Donner la limite et un équivalent de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, relier I_{n+2} et I_n (on pourra intégrer par parties)

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $a_n = (-1)^n \dfrac{\pi^{2n}}{(2n)!}$ et $v_n = a_n I_{2n}$. Relier v_{n+1} et v_n.

d) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = I_0 - u_n$.

e) Établir que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \dfrac{\pi^2}{12}$, et en déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

f) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on précisera , et donner un équivalent de $u_n - \ell$.