Ex 1 Résolutions d'équations :

a) $(E_1) : (\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ est définie pour $x > 0$. Alors

$$(E_1) \Longleftrightarrow x \ln \sqrt{x} = \sqrt{x} \ln x \overset{\sqrt{x} \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}\sqrt{x} \ln x = \ln x \Longleftrightarrow \left(\sqrt{x} - 2\right) \ln x = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \text{ ou} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{(E_1) \text{ admet les deux solutions } 1 \text{ et } 4}$$

b) $(E_2) : 2^{x^3} = 3^{x^2}$ est définie pour x réel. Alors

$$(E_2) \Longleftrightarrow x^3 \ln 2 = x^2 \ln 3 \Longleftrightarrow x^2 (x \ln 2 - \ln 3) = 0$$

$$\boxed{(E_2) \text{ admet les deux solutions } 0 \text{ et } \frac{\ln 3}{\ln 2}}$$

c) $(E_3) : 3^{2x} - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$ est définie pour x réel. Alors

$$(E_3) \Longleftrightarrow 3^{2x-1}(3+1) = 2^{x+1/2}\left(2^3 + 1\right) \Longleftrightarrow 4 \times 3^{2x-1} = 9 \times 2^{x+1/2} \Longleftrightarrow 2^2 \times 3^{2x-1} = 3^2 \times 2^{x+1/2}$$

Il vient donc

$$(E_3) \Longleftrightarrow 3^{2x-3} = 2^{x-3/2}$$

En passant aux logarithmes :

$$(E_3) \Longleftrightarrow (2x-3)\ln 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 2 \Longleftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 2$$

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E_3) \text{ est } \frac{3}{2}}$$

d) $(E_4) : 7^{x+4/3} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+1/3} + 5^{3x-1}\right)$ est définie pour x réel. Alors

$$(E_4) \Longleftrightarrow 7^{x+1/3}(7-2) = 5^{3x-1}(5+2) \Longleftrightarrow 5 \times 7^{x+1/3} = 7 \times 5^{3x-1} \Longleftrightarrow 7^{x-2/3} = 5^{3x-2}$$

En passant aux logarithmes :

$$(E_4) \Longleftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)\ln 7 = (3x-2)\ln 5 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)\ln 7 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)\ln 5$$

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E_4) \text{ est } \frac{2}{3}}$$

e) $(E_5) : 3^{x-1} - 2 + 3^{-x-1} = 0$ est définie pour x réel. Alors

$$(E_5) \Longleftrightarrow \frac{3^x}{3} - 2 + \frac{1}{3 \times 3^x} = 0 \Longleftrightarrow 3^{2x} - 6 \times 3^x + 1 = 0$$

On pose $y = 3^x > 0$. (E_5) devient :

$$y^2 - 6y + 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 3 + 2\sqrt{2} > 0 \text{ ou} \\ y = 3 - 2\sqrt{2} > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ ou} \\ 3^x = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

En passant aux logarithmes, il vien

$$(E_5) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \ln 3 = \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \text{ ou} \\ x \ln 3 = \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{(E_5) \text{ admet les deux solutions } 0 \text{ et } \frac{\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{3} \text{ et } \frac{\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}{3}}$$

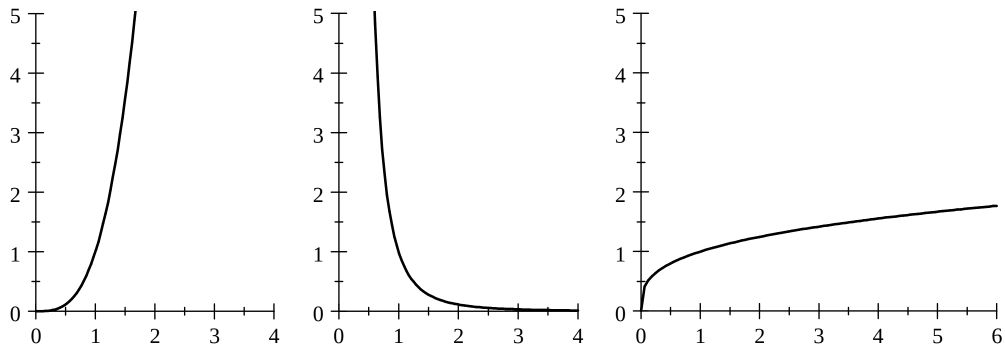
Ex 2 L'expression $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$ est définie pour $x > 0$ et $\ln x > 0$, c'est-à-dire pour $\boxed{x > 1}$ et alors

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ln x} = e^{\ln(\ln x)} = \boxed{\ln x}$$

Ex 3 Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $a = e^{x^2}$ et $b = \dfrac{\ln\left(x^{1/x}\right)}{x} = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Alors

$$a^b = e^{b\ln a} = e^{x^2\frac{\ln x}{x^2}} = e^{\ln x} = \boxed{x}$$

Ex 4 Allure des courbes de $f : x \mapsto x^{\pi},\ g : x \mapsto x^{-\pi}$ et $h : x \mapsto x^{1/\pi}$:
Les trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, les deux premières se prolongent par continuité par $f(0) = g(0) = 0$.
Les deux premières sont croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, la troisième décroissante.



Ex 5 On donne $a > 0$ et p, q deux réels non nuls, $(E) : \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^q = a^p$.

(E) est définie lorsque $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, i.e. $(1-x)(1+x) > 0$, soit $]-1, 1[$. Alors

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = a^{p/q}$$

En effet, pour $a > 0$ et $b > 0$, on a $a = b \Rightarrow a^q = b^q$, mais inversement $a^q = b^q \Rightarrow (a^q)^{1/q} = (b^q)^{1/q} \Rightarrow a = b$.
Ainsi :

$$(E) \Longleftrightarrow \left(a^{p/q} + 1\right)x = a^{p/q} - 1 \overset{1+a^{p/q}\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{a^{p/q}-1}{a^{p/q}+1}$$

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ est } \frac{a^{p/q}-1}{a^{p/q}+1}}$$

Cette solution est bien dans $]-1, 1[$ puisque $-a^{p/q} - 1 < a^{p/q} - 1 < a^{p/q} + 1 \Rightarrow -1 < \dfrac{a^{p/q}-1}{a^{p/q}+1} < 1$.

Ex 6 Montrons que : $\forall x \in]0; 1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}\ (*)$
Montrer $(*)$ revient à montrer

$$\ln\left(x^x(1-x)^{1-x}\right) \geqslant -\ln 2 \Longleftrightarrow x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln 2$$

Etudions donc sur $]0, 1[$ la fonction $f : x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$: on a pour tout $x \in]0, 1[$

$$\frac{d}{dx}(x\ln x) = \ln(x) + 1$$

Donc par composition avec $x \mapsto 1 - x$:

$$\frac{d}{dx}((1-x)\ln(1-x)) = -(\ln(1-x) + 1)$$

Ainsi $f' : x \mapsto \ln(x) - \ln(1-x)$. Or

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x > \ln(1-x) \Longleftrightarrow x > 1 - x \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

On a ainsi le tableau de variations de f :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\ln 2$	$\nearrow$	

La lecture du tableau donne immédiatement le résultat cherché, CQFD.

Ex 7 Etude la fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln x}$: elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)\, e^{x \ln x} = (\ln(x) + 1)\, x^x$$

qui a le signe de $\ln(x) + 1$, croissante et s'annulant en $\frac{1}{e}$. De plus $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$, d'où par composition

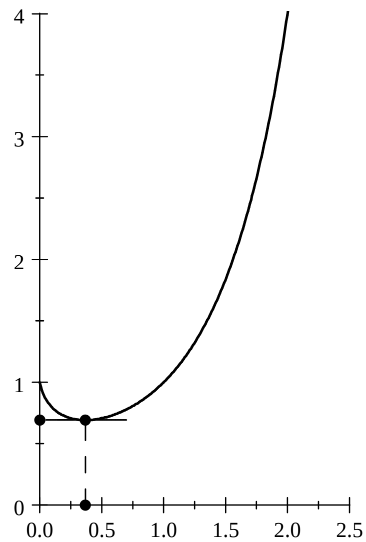
$$\lim_0 f = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Remarque : on peut ainsi prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Appelons encore f ce prolongement. On a ainsi le tableau de variations de f :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : on peut étudier la dérivabilité de f en 0 : $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \ln(x) \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}$. Or par composition $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ x \to 0}} \dfrac{e^y - 1}{y} = \exp'(0) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$: C_f admet une tangente verticale en O.

De plus $\dfrac{f(x)}{x} = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: C_f admet une direction asymptotique verticale :



Ex 8 Soit $f : x \mapsto (\operatorname{ch} x)^{1/x} = e^{\frac{\ln \operatorname{ch} x}{x}}$

a) Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geqslant 1$, $f(x)$ est défini lorsque $x \neq 0$. $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$.

b) Montrons que $\forall x > 0,\ 0 < \ln(\operatorname{ch} x) < x$: on étudie pour cela $\varphi : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - 1$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - 1 = \operatorname{th} x - 1 < 0$: φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) < \varphi(0) = 0 \quad \text{d'où} \quad \ln \operatorname{ch} x < x \text{ CQFD.}$$

On a alors pour tout réel $x > 0$

$$0 < \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x} < 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{1 < f(x) < e}$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\operatorname{th} x - \frac{1}{x^2}\ln \operatorname{ch} x\right) e^{\frac{\ln \operatorname{ch} x}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x\right) f(x)$$

Le signe de f' est donc celui de $g : x \mapsto x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x$. Or$\forall x \neq 0$

$$g'(x) = \operatorname{th} x + \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} - \operatorname{th} x = \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}$$

qui a le signe de x. on a donc les variations puis le signe de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	0

f' est ainsi strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*}$.

d) Calculons les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$:

* On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x} = \psi'(0)$ où $\psi : x \mapsto \ln \operatorname{ch} x$, donc $\psi' : x \mapsto \operatorname{th} x$ et $\psi'(0) = 0$. Par composée

$$\boxed{\lim_0 f = 1}$$

<u>f se prolonge par continuité en 0 en posant</u> $\boxed{f((0) = 1}$

* On isole le terme dominant en $+\infty$: pour tout $x > 0$:

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) - \ln 2 = \ln\left(e^x\left(1 + e^{-2x}\right)\right) - \ln 2 = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right) - \ln 2$$

Donc

$$\frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + e^{-2x}\right) - \ln 2}{x}$$

On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{+\infty} f = e}$$

* De même pour tout $x < 0$:

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \ln\left(e^{-x}\left(e^{2x}+\right)1\right) - \ln 2 = -x + \ln\left(e^{2x} + 1\right) - \ln 2$$

Donc

$$\frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{x} = -1 + \frac{\ln\left(e^{2x} + 1\right) - \ln 2}{x}$$

On en déduit

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{x} = -1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{+\infty} f = \frac{1}{e}}$$

On a finalement le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$1/e$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e

Remarque : finalement f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex 9 Soit $a > 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ le point de contact de la tangente T_0 issue de O à la courbe de $f : x \mapsto a^x$.
Comme $f' : x \mapsto \ln(a)\, a^x$, la tangente à C_f en un point d'abscisse x_0 a pour équation

$$y - a^{x_0} = \ln(a)\, a^{x_0}(x - x_0)$$

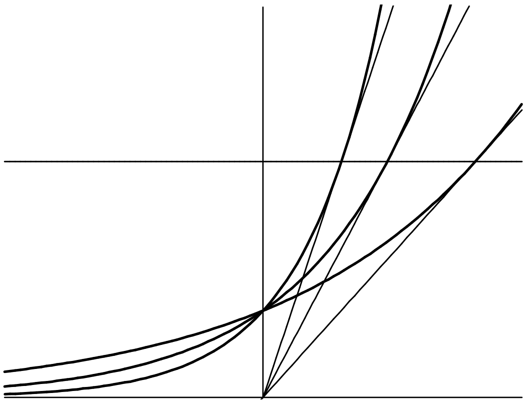
Cette tangente passe par O si et seulement si

$$a^{x_0} = \ln(a)\, a^{x_0} x_0 \Longleftrightarrow 1 = \ln(a)\, x_0$$

Si $a = 1$ c'est évidemment impossible (mais le cas est-il intéressant?), et sinon $x_0 = \frac{1}{\ln a}$. Mais alors

$$y_0 = f(x_0) = a^{\frac{1}{\ln a}} = e^1$$

L'ordonnée de M_0 est bien indépendante de a, CQFD.



Ex 10 Soient a un réel strictement positif **fixé** et l'équation $(E) \quad a^x = x^a$

a) Etude sur $]0;+\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$:

$$\forall x > 0\ ,\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

dont le signe dépend de $1 - \ln x$, qui s'annule en e et qui décroit.
De plus, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (limite classique), et $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ (car $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$). D'où le tableau

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

On a $f(e) = \frac{1}{e}$, et $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Ainsi, l'équation d'inconnue x : $f(x) = m$ admet

$$\boxed{\begin{cases} \text{aucune solution si } m > \frac{1}{e} \\ \text{une unique solution si } m = \frac{1}{e} \text{ ou si } m \leq 0 \\ \text{deux solutions si } 0 < m < \frac{1}{e}. \end{cases}}$$

b) On a de plus $(E) \Longleftrightarrow a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f(x) = f(a)$ (a et x sont non nuls).

c) On suppose que $a \in]0;1[$, et on pose $m = f(a)$ alors, d'après le tableau de variations, $m < 0$
D'après a)., l'équation $f(x) = f(a)$ admet une unique solution, qui est donc nécessairement a (qui est solution évidente).
L'équation (1) admet donc a pour unique solution.
Lorsque $a = e$, alors $m = \frac{1}{e}$, et le résultat est le même.

d) On suppose que $a \in]1;e[\cup]e;+\infty[$, et on pose encore $m = f(a)$ .Alors, d'après le tableau de variations, $0 < m < \dfrac{1}{e}$.
D'après 1., l'équation $f(x) = f(a)$ (i.e. l'équation (1)) admet deux solutions, dont a.
Le tableau de variations précédent montre que de plus, elles sont de part et d'autre de e.

* Si $1 < a < e$, alors l'autre solution b lui est supérieure ($1 < a < e < b$)
* Si $a > e$, c'est le contraire ($1 < b < e < a$).