Ex 1 Soit $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & \frac{p}{q} \end{array}$. F est elle injective, surjective?
Quels sont les antécédents de 0 et de 1? Que vaut $F(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)$?

Ex 2 Discuter de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

Ex 3 Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-y^2 \end{array}$. Représenter graphiquement les ensembles $\varphi^{-1}(\{0\})$ et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$

Ex 4 On considère les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=2n \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(n)=\frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ g(n)=\frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g, puis déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$.

Ex 5 Montrer que l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $\begin{cases} f(n)=\frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ f(n)=-\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est bijective.

Ex 6 a) Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+y) \end{array}$ est injective.

Quelle est l'image $f\langle D\rangle$ de la droite D d'équation $x+y=1$?

b) Montrer que $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z, 3x+2y+5z) \end{array}$ est surjective.

Quelle est l'image $f\langle P\rangle$ du plan P d'équation $x+y+6z=1$?

c) Montrer que $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+3y) \end{array}$ est bijective et déterminer h^{-1}.

Ex 7 On note $U=]0,+\infty[^2$, et $f: \begin{array}{ccc} U & \to & U \\ (x,y) & \mapsto & \left(xy, \frac{y}{x}\right) \end{array}$. Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.

Ex 8 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1+ix}{1-ix}$.

a) f est-elle injective? surjective?

b) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$.

Ex 9 Soit $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ l'application définie par $\forall z\in\mathbb{C}^*,\ f(z)=z+\dfrac{1}{z}$

a) Montrer que f est surjective, non injective.

b) Déterminer l'image de $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1, par f.

c) Déterminer l'image réciproque (= pré-image) par f de l'ensemble $\mathbb{J}=i\mathbb{R}$ des imaginaires purs.

Ex 10 Soit f l'application définie sur $\mathcal{D}=\mathbb{C}\setminus\{2i\}$ par $f(z)=\dfrac{z^2}{z-2i}$.

a) Soit $h\in\mathbb{C}$. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.

b) $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ est-elle surjective ? est-elle surjective?

Ex 11 Soient $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications..

a) Montrer que si $g\circ f$ est injective et f surjective , alors g est injective.

b) Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Ex 12 Soit $f:E\to E$ vérifiant $f\circ f\circ f=f$. Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Ex 13 Soit E un ensemble, et $f:E\to E$ une application vérifiant $f\circ f=f\ \ (*)$

a) Montrer que si f est injective, alors $f=\mathrm{id}_E$.

b) Montrer que si f est surjective, alors $f=\mathrm{id}_E$.

c) Montrer que $f:E\to E$ vérifie $(*)$ si, et seulement si $\forall x\in f(E),\ f(x)=x$.

Ex 14 Soit $f : E \to F$ une application.

a) Soit $A \subset E$. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$, puis montrer que si f est injective, alors $A = f^{-1}(f(A))$.

b) Inversement, montrer que si $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A = f^{-1}(f(A))$, alors f est injective.

c) Soit $B \subset F$. Comparer B et $f\left(f^{-1}(B)\right)$, puis montrer que si f est surjective, alors $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

d) Inversement, montrer que si $\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ B = f\left(f^{-1}(B)\right)$., alors f est surjective.

e) Si $B \subset F$, montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$ et redémontrer le résultat précédent (c) et d))

Ex 15 Soit $f : E \to F$ une application.
Montrer que f est injective si et seulement si $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2\,,\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Ex 16 Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.
On considère les applications f et g de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{array}$$

a) Montrer que f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow A = E$.

b) Montrer que g injective $\Longleftrightarrow$ g surjective $\Longleftrightarrow A = \varnothing$.

Ex 17 Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

a) On suppose que f est injective et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$

b) On suppose que f est surjective et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$

Ex 18 Soit f une application de F dans G.

a) Soit E un ensemble.
Montrer que f injective si et seulement si $\forall (g, h) \in \left(F^E\right)^2,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

b) Soit H un ensemble contenant au moins deux points.
Montrer que f surjective si et seulement si $\forall (g, h) \in \left(H^G\right)^2,\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.