Ex 1 Soient n, p des entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Exprimons à l'aide de factorielles en multipliant et divisant par les facteurs manquants :

$$\prod_{k=p}^{n} k = p \times (n+1) \times \cdots \times n = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times p \times (p+1) \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)} = \boxed{\frac{n!}{(p-1)!}}$$

De même :

$$\prod_{k=1}^{p} (n+k) = (n+1) \times \cdots \times (n+p) = \frac{1 \times \cdots \times n \times (n+1) \times \cdots \times (n+p)}{1 \times \cdots \times n} = \boxed{\frac{(n+p)!}{n!}}$$

$$\prod_{k=1}^{p} (n-p+k) = (n-p+1) \times \cdots \times n = \boxed{\frac{n!}{(n-p)!}}$$

Enfin

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} (n-p+k)}{\prod\limits_{k=1}^{p} k} = \boxed{\frac{n!}{(n-p)!n!} = \binom{n}{p}}$$

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Exploitons les propriétés algébriques du logarithme :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}\right) = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} k}{\prod\limits_{k=1}^{n} n} = \boxed{\frac{n!}{n^n}}$$

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour écrire $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de factorielles, on remarque que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

On introduit alors les nombres pairs au numérateur et au dénominateur

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{[2 \times 4 \times \cdots \times (2n)]^2} = \frac{(2n)!}{[2 \times 4 \times \cdots \times (2n)]^2}$$

On exploite enfin tous les facteurs 2 du produit des nombres pairs :

$$2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$$

Cet exercice est important, et ces manipulations doivent être maîtrisées.

Ex 4 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite et $n \in \mathbb{N}^*$. On translate les indices :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k+2} + a_{k+1} - 2a_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k+2} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=3}^{n+2} a_k + \sum_{k=2}^{n+1} a_k - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \left(\sum_{k=3}^{n} a_k + a_{n+1} + a_{n+2}\right) + \left(a_2 + \sum_{k=3}^{n} a_k + a_{n+1}\right) - 2\left(a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{n} a_k\right) \\
&= \boxed{a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_2 - 2a_1}
\end{aligned}$$

Ex 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on calcule par "télescopage :

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \ln(n+1) - \ln 1 \\
&= \boxed{\ln(n+1)}
\end{aligned}$$

b) Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(x^k - x^{k+1}\right) \\
&= x^0 - x^{n+1} \\
&= \boxed{1 - x^{n+1}}
\end{aligned}$$

c) La ruse "$+1-1$", puisque $(k+1)! = (k+1)\,k!$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}
\end{aligned}$$

d) Même ruse (méthode?) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \times k! &= \sum_{k=1}^{n} ((k+1) - 1) \times k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) \\
&= (n+1)! - 1! \\
&= \boxed{(n+1)! - 1}
\end{aligned}$$

e) Pour les produits, la technique est analogue :

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\\ &= \boxed{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

f) Un peu plus technique :

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\\ &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)/k}{k/(k+1)}\end{aligned}$$

En posant $a_k=\dfrac{k}{k+1}$, on remarque donc le produit télescopique $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{a_{k-1}}{a_k}=\frac{a_1}{a_n}$, d'où

$$\boxed{\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}}$$

Autre méthode :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}\left(k^2-1\right)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k^2}=\frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k^2}$$

On translate les indices :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k\prod\limits_{k=3}^{n+1}k}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}k\right)^2}=\frac{1.2.\left(\prod\limits_{k=3}^{n-1}k\right)\left(\prod\limits_{k=3}^{n-1}k\right)(n+1)\,n}{2^2\left(\prod\limits_{k=3}^{n-1}k\right)^2n^2}=\frac{\left(\prod\limits_{k=3}^{n-1}k\right)^2(n+1)}{2\left(\prod\limits_{k=3}^{n-1}k\right)^2n}$$

Après simplification, on retrouve

$$\boxed{\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}}$$

Ex 6 Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour montrer l'identité : $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k}}{k}-\dfrac{\sqrt{k+1}}{k+1}$ on utilise la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2\,(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}}{(k+1)\,k\,(k+1-k)}-\frac{k\sqrt{k+1}}{(k+1)\,k\,(k+1-k)}$$

D'où

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}\quad\text{CQFD.}$$

Bien sûr, on pouvait aussi partir du membre de droite, mais c'est plus maladroit, étant donné que le but de ce calcul est d'écrire le membre de gauche (difficilement sommable) comme terme télescopique (facilement sommable).
En posant

$$S=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

on en déduit alors :

$$S=\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}\right)=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{100}}{100}=1-\frac{1}{10}$$

Finalement

$$\boxed{S=\frac{9}{10}}$$

Ex 7 Trouvons deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}\,,\ \dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$.

Pour cela, on peut utiliser une technique *a priori* non rigoureuse mais efficace : on remarque que pour tout réel x,

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

On cherche donc a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}\,,$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$$

- En multipliant par $x+1$ et en remplaçant x par -1, il vient $\dfrac{1}{x+2}=a+\dfrac{b(x+1)}{x+2}$ d'où $a=1$.
- En multipliant par $x+2$ et en remplaçant x par -2, il vient $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a(x+2)}{x+1}+b$ d'où $b=-1$.

Evidemment, d'un point de vue logique, on a non seulement remplacé par les deux valeurs interdites -1 et -2, mais on n'a fait que raisonner par analyse : si a et b conviennent, alors ils valent 1 et -1.
Cette technique (dite de décomposition des fractions rationnelles) est néanmoins correcte mais les outils pour la justifier ne sont plus au programme. Elle est très employée, et très rapide : on peut la faire mentalement, et simplement conclure par

$$\boxed{\text{Il est aisé de vérifier que } \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}\,,\ \frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}}$$

La méthode consistant à mettre la fraction de gauche au même dénominateur et à identifier les coefficients est lourdingue, et pas plus rigoureuse!.. On l'évitera dans la mesure du possible, la technique proposée étant beaucoup mieux adaptée aux fractions rationnelles plus compliquées.
Revenons à notre problème : on ramène grâce à notre décomposition la somme

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}$$

à une somme télescopique : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+2}$$

Soit

$$\boxed{S_n=1-\frac{1}{n+2}}$$

On a alors très facilement

$$\boxed{\lim S_n=1}$$

Remarquer au passage que la substitution de $\frac{1}{k^2+3k+2}$ par $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$ dans la somme était légitime, le compteur k ne prenant pas les valeurs -1 et -2.

Ex 8 Soit $x \in \left]0, \pi\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Si a est un réel tel que $\sin a \neq 0$, on peut écrire $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, donc $\cos a = \dfrac{\sin(2a)}{2\sin a}$.
On va exploiter, pour cet exercice très classique, la relation $2\frac{x}{2^k} = \frac{x}{2^{k-1}}$:
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{x}{2^k} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin\frac{x}{2^k} \neq 0$. On peut ainsi écrire :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(2\frac{x}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\sin\frac{x}{2^k}}$$

Ce produit est télescopique, et :

$$P_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{x}{2^0}}{\sin\frac{x}{2^1}}\frac{\sin\frac{x}{2^1}}{\sin\frac{x}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{x}{2^0}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

Finalement

$$\boxed{P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}}$$

Ex 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{2n}$. On indexe "à l'envers", à l'aide du changement d'indice $j = n - k$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \cos^2\frac{(n-j)\pi}{2n} = \sum_{j=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n}\right) \overset{\text{lettre muette}}{=} \sum_{k=0}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

On utilise alors une **astuce** :

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{2n} + \sum_{k=0}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{2n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n} + \sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

Ainsi

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}}$$

Ex 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calcul de $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

a) <u>Première méthode</u> :

i. Trouvons un polynôme P du troisième degré tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^2\ (*)$.
Cherchons ce polynôme sous la forme $p : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d réels. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{et} \\ p(x+1) & = & a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d \\ & = & ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c+d) \end{array}$$

$(*)$ s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c) = x^2$$

On peut donc identifier les coefficients :

$$(*) \iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/2 \\ c = 1/6 \end{cases}$$

Il n'y a aucune condition sur le coefficient constant d. Cela signifie que toute valeur de d convient. On peut donc choisir $d = 0$ pour les facilités de factorisation que cela entraine, et on peut énoncer

$$\boxed{\text{Le polynôme } p : x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{6} = \frac{x\left(2x^2 - 3x + 1\right)}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} \text{ convient}}$$

ii. L'intéret de cette écriture est d'introduire une forme télescopique dans la somme :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(P(k+1) - P(k)\right) = P(n+1) - P(0)$$

Comme $P(0) = 0$, il vient :

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

b) <u>Deuxième méthode</u>. on développe :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3T_n + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

On connait les deux dernières sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3T_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

soit

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3T_n + (n+1)\left(\frac{3n}{2} + 1\right)$$

Le membre de gauche se télescope, d'où

$$(n+1)^3 = 3T_n + (n+1)\left(\frac{3n}{2} + 1\right) \iff 3T_n = (n+1)\left((n+1)^2 - \left(\frac{3n}{2} + 1\right)\right) = (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)$$

Il vient alors facilement :

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Ex 11 Inspirons nous des méthodes de l'exercice précédent pour le calcul de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$: soit $n \in \mathbb{N}$.

a) <u>Première méthode</u>

i. Trouvons un polynôme P de degré 4 tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^3\ (*)$.
Cherchons ce polynôme sous la forme $p : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ avec a, b, c, d, e réels.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule (du binôme) : $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, on a :

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{et} \\ p(x+1) &= a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e \\ &= ax^4 + (4a+b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 + (4a+3b+2c+d)x + (a+b+c+d+e) \end{aligned}$$

$(*)$ s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4ax^3 + (6a+3b)x^2 + (4a+3b+2c)x + (a+b+c+d) = x^3$$

On peut donc identifier les coefficients :

$$(*) \iff \begin{cases} 4a = 1 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il n'y a aucune condition sur le coefficient constant e. On peut donc le choisir nul. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le polynôme } p : x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2\left(x^2 - 2x + 1\right)}{4} = \frac{x^2(x-1)^2}{4} \text{ convient}}$$

ii. On est donc ramenés à la somme télescopique :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} \left(P(k+1) - P(k)\right) = P(n+1) - P(0)$$

Comme $P(0) = 0$, il vient :

$$\boxed{U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

b) <u>Deuxième méthode</u> : on utilise les calculs antérieurs de $\sum k$ et $\sum k^2$, ainsi que la formule du binôme

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

On part du développement de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 &= \sum_{k=0}^{n} k^4 + 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^4 + 4U_n + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + (n+1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
4U_n &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4 - (n+1)\left(2n^2+3n+1\right) \quad \text{\#factorisation} \\
&= (n+1)^4 - (n+1)\left(2n^2+3n+1\right) \quad \text{\#télescopage} \\
&= (n+1)\left((n+1)^3 - \left(2n^2+3n+1\right)\right) \\
&= (n+1)\left(n^3+n^2\right) \\
&= n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

Finalement on retrouve :

$$\boxed{U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

Ex 12 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^k$

a) <u>On suppose que $a = 1$</u>. Alors $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

b) <u>On suppose $a \neq 1$</u>. Alors

$$aS_n - S_n = a\sum_{k=1}^{n} ka^k - \sum_{k=1}^{n} ka^k = \sum_{k=1}^{n} ka^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} ka^k$$

On réindexe la première somme :

$$aS_n - S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a^k - \sum_{k=1}^{n} ka^k = \sum_{k=2}^{n+1} ka^k - \sum_{k=2}^{n+1} a^k - \sum_{k=1}^{n} ka^k$$

Les premier et troisième termes se télescopent, le deuxième est connu :

$$\begin{aligned}
aS_n - S_n &= (n+1)a^{n+1} - a - a^2\frac{1-a^n}{1-a} \quad \text{\#car } a \neq 1 \\
&= \frac{\left((n+1)a^{n+1} - a\right)(1-a) - a^2(1-a^n)}{1-a} \\
&= \frac{(n+1)a^{n+1} - (n+1)a^{n+2} - a + a^{n+2}}{1-a}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$(a-1)S_n = \frac{(n+1)a^{n+1} - na^{n+2} - a}{1-a}$$

Et en divisant par $a - 1 = -(1-a) \neq 0$:

$$\boxed{S_n = \frac{na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a}{(1-a)^2}}$$

c) Autre méthode : on considère la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$: ce polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \quad \text{\#dérivation terme à terme, le premier s'annule}$$

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$$

Cela s'éxrit donc, pour $x = a \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \frac{-(n+1)a^n(1-a)+\left(1-a^{n+1}\right)}{(1-a)^2} = \frac{na^{n+1}-(n+1)a^n+1}{(1-a)^2}$$

En multipliant par a, on retrouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(1-a)^2}}$$

Ex 13 Sommes doubles :soit $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i+j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} i + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} j = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} i + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} j.$

Les variables i et j sont muettes, donc les deux sommes sont égales. Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i = 2\sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n}1\right) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}1\right) = 2\times\frac{n(n+1)}{2}\times n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = n^2(n+1)}$$

b) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} ij = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(i\sum\limits_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} j\right) \overset{\text{lettres muettes}}{=} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

c) $\sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x^i x^j = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x^i\sum\limits_{j=1}^{n} x^j\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x^i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x^j\right) \overset{\text{lettres muettes}}{=} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x^i\right)^2$

Si $x=1$ alors $\boxed{\sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = n^2}$ et si $x \neq 1$ alors $\boxed{\sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^2}$

d)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(1-2^i\right)2^{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-2^i\right)\sum_{j=0}^{n}\left(2^i\right)^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-2^i\right)\frac{1-\left(2^i\right)^{n+1}}{1-2^i}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(2^i\right)^{n+1}\right)$$

On écrit alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(1-2^i\right)2^{ij} = \sum_{i=1}^{n}1 - \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1}\right)^i = n - 2^{n+1}\frac{1-\left(2^{n+1}\right)^n}{1-2^{n+1}}$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(1-2^i\right)2^{ij} = n - \frac{2^{n+1}-2^{(n+1)^2}}{1-2^{n+1}}}$$

e) Ce produit n'est pas "symétrique". Il y a donc deux approches :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} i^j\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^j\right) = \prod_{j=1}^{n}(n!)^j = (n!)^{\sum\limits_{j=1}^{n} j} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ou

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} i^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^{\sum\limits_{j=1}^{n} j}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

On trouve ainsi dans les deux cas

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

f) Attention avec les produits! on sort les constantes élevées à la puissance du nombre de facteurs :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} x^i x^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\left(x^i\right)^n \prod_{j=1}^{n} x^j\right) = \left(\prod_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^n\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x^j\right)^n = \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^n\left(\prod_{j=1}^{n} x^j\right)^n$$

Là encore, les variables étant muettes :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^{2n} = \left(x^{\sum\limits_{i=1}^{n} i}\right)^{2n} = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{2n}$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = x^{n^2(n+1)}}$$

Ex 14 Sommes triangulaires : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) \overset{\text{translation}}{=} \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1} j$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \frac{n(n+3)}{4}}$$

Remarque : l'autre écriture $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}\right)$ mène à une impasse (série harmonique $\displaystyle\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$ inconnue)

b) $$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$$

On connait ces sommes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}(2n+1+1)$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) = \frac{n(n+1)^2}{2}}$$

Remarque : une méthode plus rapide :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\,i + \sum_{j=1}^{n} j^2$$

Comme les lettres i et j sont muettes, on peut écrire

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left((n-i+1)\,i + i^2\right) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} i$$

Le résultat tombe immédiatement.

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 2^j\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i - 2^{n+1}}{1-2} = \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1} - 2^i\right) = n2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i = n2^{n+1} - 2\frac{1-2^n}{1-2}$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = (n-1)\,2^{n+1} + 2}$$

Remarque : une autre méthode : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 2^j\right) = \sum_{j=1}^{n} j2^j$. En utilisant l'exercice 18 :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = \frac{n2^{n+2} - (n+1)\,2^{n+1} + 2}{(1-2)^2} = (n-1)\,2^{n+1} + 2$$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$ est tout simplement une des deux écritures de $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i}$. On l'indexe différemment :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} 1$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} = n}$$

Ex 15 Pour tout entier naturel i et j, on pose : $\max(i,j) = \begin{cases} i \text{ si } i \geqslant j \\ j \text{ si } j \geqslant i \end{cases}$ et $\min(i,j) = \begin{cases} i \text{ si } i \leqslant j \\ j \text{ si } j \leqslant i \end{cases}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

* On peut utiliser une méthode peu élégante mais efficace. Appelons S_n notre somme. Alors

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\,(i+1)}{2} + (n-i)\,i\right) = \frac{(2n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Ces dernières sommes sont connues :

$$S_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{4} - \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{12} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad \text{CQFD.}$$

* Autre méthode, pour mieux comprendre pourquoi le résultat est la somme des carrés :
comme plus haut, on a, en sortant un terme de la somme intérieure :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i$$

Or on reconnait des sommes triangulaires, et en particulier :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j \quad \text{\#les lettres étant } \textbf{muettes}$$

Il s'ensuit

$$S_n = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j - \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} j\,(j+1) - \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} j^2 \quad \text{CQFD.}$$

b) Si $i \geqslant j$ alors $\max(i,j) + \min(i,j) = i + j$ et si $i \leqslant j$ alors $\max(i,j) + \min(i,j) = j + i$. Ainsi

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \max(i,j) + \min(i,j) = i + j}$$

c) On a alors

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j-\min(i,j)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j) - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$$

D'après a) et l'exercice 20.b), cela donne

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}\left(n+1-\frac{2n+1}{3}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$