Ex 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 5y = e^{2x} + 8x + \sin x,$ avec $y(0) = -1$

b) $y' + 3y = 6, \quad y(0) = 3$

c) $2y' - 3y = \sin^2 x$

d) $y' + 2y = \operatorname{ch}(2x)\,,\ y(0) = 0$

e) $y' - xy = 2x - x^3$

f) $(1-x)^2 y' - (2-x)\,y = 0$ sur $]-\infty, 1[$

g) $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0,1[$

h) $y' \cos^2 x + y = \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

i) $y' - y\tan x = \sin(2x)$ avec $y(0) = 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right[$

Ex 2 Résoudre le **système différentiel**

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) - z(t) \\ y'(t) = \quad -y(t) + z(t) \\ z'(t) = \quad 2z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 3 \end{cases}$$

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2xy' + y = x^n$

Ex 4 Existe-t-il une unique solution sur $\mathbb{R}$ de $xy' - 2y = 0$ vérifiant $y(1) = 2$?

Ex 5 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(x\ln x)\,y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln(x) + 1)$.

Ex 6 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(1-x)\,y' + y = \dfrac{x-1}{x}$

Ex 7 On considère l'équation différentielle $(E) \quad |x|\,y' - y = x^2$.

a) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

b) Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Ex 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' + 4y' + 4y = e^x$

b) $y'' - \omega^2 y = \lambda$ et $y(0) = y'(0) = 0,$ où $\omega > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $y'' + y = \cos^2 x,$ et $y(0) = y'(0) = 0$

d) $y'' + 2y' + 5y = 10, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 + 2\sqrt{3}$

e) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

f) $y'' + 4y' + 4y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{3}{2}$

g) $y'' + y' + y = 8e^x \cos^3 x$

h) $y'' + y' - 2y = \cos x + e^x$ et $y(0) = y'(0) = 0$

Ex 9 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 6y' + 9y = x^3 e^{-3x}$ en posant $y(x) = z(x)\,e^{-3x}$

Ex 10 Discuter suivant $a \in \mathbb{R}$ le solutions de l'équation différentielle $(E_a) : y'' - 2ay' + \left(1 + a^2\right) y = \sin x$

Ex 11 On considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$: $xy'' + 2(2x+1)\,y' + (5x+4)\,y = 8\sin x \quad (E)$

a) On pose $z(x) = xy(x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') à coefficients constants que l'on déterminera et que l'on résoudra sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $y : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{x}\left(1 - e^{-2x + \frac{\pi}{2}}\right) \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ est l'unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$ satisfaisant aux conditions $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ (raisonner sur z, qui est plus simple)

Ex 12 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = -2(x-1)\,e^x$$

(on se ramènera, après dérivation –en justifiant–, à une équation différentielle d'ordre 2).

Ex 13 Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \end{cases}$$

Ex 14 Deux substances **chimiques**[1] A et B entrent en réaction pour donner irréversiblement les produits C et D, toujours molécule par molécule selon la réaction $A + B \to C + D$. A l'instant $t = 0$, les concentrations de A et B sont respectivement égales à a et b. On note $c(t)$ la concentration de C à l'instant t. L'expérience montre que

$$c'(t) = k(a - c(t))(b - c(t)) \quad (k \text{ constante réelle})$$

On admet que $c(t)$ n'est jamais égal à a.

a) Trouver une équation différentielle satisfaite par la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{a - c(t)}$.

b) En déduire $f(t)$ puis $c(t)$ (on distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).
Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} c(t)$ et commenter le résultat obtenu.

Ex 15 Histoire du gastéropode mégalomane : après la construction en 2095 du TGV Marseille-Tokyo, un escargot décide en gare Saint-Charles de rattraper celui-ci avant son terminus : à cet effet un élastique indéfiniment extensible a été attaché au butoir du quai et relié à la queue du TGV se situant à $L = 100\,\mathrm{m}$ du butoir.
A l'instant $t = 0$, l'escargot, placé au niveau du butoir, s'élance à la vitesse constante et vertigineuse de $0,5\,\mathrm{km/\,h}$, pendant que le TGV s'ébranle à la vitesse (constante) de $500\,\mathrm{km/\,h}$.
A l'instant t, on note $d(t)$ la distance parcourue par l'escargot; celui-ci, en plus de sa vitesse propre, reçoit une vitesse d'entraînement proportionnelle à sa position sur l'élastique.

a) Montrer que $d(t)$ vérifie l'équation $d'(t) - \dfrac{V}{L + Vt} d(t) = v$ puis calculer $d(t)$.

b) Notre sympathique invertébré parviendra-t-il à réaliser sa quête mystique ?

Ex 16 Etude du système différentiel (Σ) : $\begin{cases} x'(t) = -kx(t) - \omega y(t) \\ y'(t) = \omega x(t) - ky(t) \end{cases}$, $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

On suppose que les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont solutions de ce système

a) On pose pour tout $t \in \mathbb{R},\ u(t) = x^2(t) + y^2(t)$.
Montrer que u vérifie une équation différentielle du premier ordre, et en déduire l'expression de u

b) Calculer x'' en fonction de x' et x, et en déduire une équation différentielle du second ordre dont x est solution. Que vaut $x'(0)$?

c) En déduire x puis y, et conclure.

Ex 17 Oscillateurs harmoniques : soit $(E)\quad y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = K\cos(\Omega t)$, où $0 < \lambda < \omega_0,\ K > 0$ et $\Omega > 0$.

a) Régime libre : résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E). On posera $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}$.

   i. Donner l'allure des courbes intégrales (courbes des solutions) et les zéros des solutions.

   ii. Que se passe-t-il lorsque $\lambda = 0$? $\lambda \geqslant \omega_0$?

b) Régime forcé : décrire l'ensemble des solutions de (E). Etudier leur comportement en $+\infty$.

   i. L'amplitude de la "solution particulière" (la fonction sinusoïdale) dépend de la pulsation Ω imposée.
   Pour quelle valeur de Ω cette amplitude est-elle maximale?

   ii. Etudier le cas $\lambda = 0$.

Ex 18 Complément : changements de variable :

a) Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + y = 0 \quad (E)$ en posant $\begin{cases} x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ z(t) = y(\sin t) = y(x) \end{cases}$

b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y'' - xy' + y = 0$ en posant $\begin{cases} x = e^t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) = y(e^t) = y(x) \end{cases}$

[1] Special dedicace I.B.