Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Généralités

1.1. Définitions

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

a) **Linéarité :** l'application $f : E \to F$ est dite **linéaire** lorsque

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in E,\ \in \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{array}}$$

Ces conditions sont équivalentes à la condition suivante :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)}$$

b) **Terminologie :**

- On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
- Si $f \in \mathcal{L}(E,E)$, on dit que f est un **endomorphisme** de E. On note $\boxed{\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)}$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est **bijective**, on dit que c'est un **isomorphisme** de E sur F.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme bijectif, on dit que c'est un **automorphisme** de E. On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire** sur E (AL à valeurs numériques).

c) **Propriétés :** soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

(i) $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

(ii) $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

(iii) Si $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

1.2. Exemples

a) **Exemples élémentaires :**

- L'application nulle. $0_{\mathcal{L}(E,F)} : E \to F$ est linéaire. $(x \mapsto 0_F)$
- L'identité. id_E est un endomorphisme de E.
- La dérivation. $D : C^1(I) \to C^0(I)$ est une application linéaire. (I est un intervalle).

  Remarque : $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- $I : C^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $I(f) = \displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$.

b) **Applications coordonnées :**

- L'application $\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & X=(x,y,z) & \mapsto & \varphi_1(X)=x \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ ("application abscisse").

- Plus généralement, si $k \in [\![1,n]\!]$, $\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ & X=(x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \varphi_k(X)=x_k \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

c) **Homothéties vectorielles :** si E est un $\mathbb{K}$-ev, on appelle **homothétie** de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application

$$\boxed{h_\lambda = \lambda\,\mathrm{id}_E}$$

Autrement dit h_λ est l'endomorphisme de E défini par

$$\boxed{\forall x \in E,\ h_\lambda(x) = \lambda x}$$

Remarque : si $\lambda \neq 0$, alors h_λ est un automorphisme de E, de réciproque $h_\lambda^{-1} =$

d) **Application linéaire canoniquement associée à une matrice :**

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. L'application

$$\boxed{\begin{array}{rl} f_A : & \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ & X \to f_A(X) = AX \end{array}}$$

est une application linéaire dite **canoniquement associée** à A.

Si $C_1,\dots,C_p$ sont les colonnes de A et $X=(x_1,\dots,x_n)$, on a :

$$\boxed{f_A(X) = x_1C_1 + \cdots + x_pC_p}$$

Cas particuliers :
★ si A est **carrée** $(A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, alors f_A est un **endomorphisme** de $\mathbb{K}^n$
★ si A est une **ligne** $(A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$, alors f_A est une **forme linéaire** sur $\mathbb{K}^n$

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Expressions de l'application linéaire associée.

Exemple 2 : la matrice nulle est associée à l'application nulle, I_n est associée à $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ et

La **matrice scalaire** $\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ est associée à l'homothétie $h = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$

Exemple 3 : quel est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

(ii) Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, alors il existe une unique matrice $A = \mathrm{Mat}(f)$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{K}^p,\ f(X) = AX$$

On dit que A est **la matrice canoniquement associée à** f.

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, alors

$$\boxed{\text{la } j\text{-ème colonne de } A \text{ est } f(e_j)}$$

Exemple : montrer que $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & f(X) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+5y \\ 4x-3y \end{pmatrix} \end{array}$ est linéaire.

1.3. Noyau, image

a) <u>Définitions</u> : soit $f : E \to F$ une application linéaire. On note

$$\boxed{\ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\} \subset E}$$

ensemble des antécédents de 0_F par f, et appelé **noyau** de f (kernel). Ainsi, si $x \in E$,

$$\boxed{x \in \ker f \iff f(x) = 0_F}$$

et

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{f(x)\,,\ x \in E\} \subset F}$$

ensemble des images des éléments de E par f, et appelé **image** de f (c'est en fait $f(E)$). Ainsi, si $y \in F$,

$$\boxed{y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in E \ / \ f(x) = y}$$

Remarque : si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on note

$$\boxed{\ker A = \ker f_A = \{X \in \mathbb{K}^p \ / \ AX = 0_{\mathbb{K}^n}\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} f_A = \{AX,\ X \in \mathbb{K}^p\}}$$

b) <u>Propriétés fondamentales</u> : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) $\boxed{\begin{array}{l} \ker f \text{ est un sous espace vectoriel de } E \\ \operatorname{Im} f \text{ est un sous espace vectoriel de } F \end{array}}$

(ii) $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est injective} \iff \ker f = \{0_E\} \\ f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im} f = F \end{array}}$

Exemple1 : noyau et image de $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$. Est-elle injective? surjective?

Exemple2 : même question avec $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple : même question avec $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Une méthode : **pour montrer qu'un ensemble F est un SEV de E, il est commode de l'interpréter comme le noyau d'une application linéaire.**
Par exemple montrer que $F = \{X = (x, y, z) \ / \ x - 2y + 3z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

c) <u>Une méthode de calcul de l'image</u> :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soit } f \in \mathcal{L}(E, F)\text{. On suppose que } (e_1, \dots, e_n) \text{ est génératrice de } E. \\ \text{Alors } (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est génératrice de } \operatorname{Im} f. \end{array}}$$

Autrement dit

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))}$$

Ceci est très utilisé lorsque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, particulièrement pour les bases canoniques ...

Exemple 1 : soit $E = \mathbb{K}^p$, et $(e_1, \dots e_p)$ sa base canonique.

Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $f_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est son application linéaire associée, alors

$$\boxed{\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Vect}(f_A(e_1), \dots, f_A(e_p)) = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)}$$

où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A. (car $f(e_j) = C_j$). Autrement dit

$$\boxed{\text{L'image d'une matrice est l'espace engendré par ses colonnes}}$$

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, calculer $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Im} B$.

Exemple 2 : de même si $f : \mathbb{K}_n[X] \to F$ alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n))$

Par exemple, soit $\Delta : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Montrer que Δ est un endomorphisme de $E = \mathbb{K}_n[X]$ et calculer son image $\operatorname{Im} \Delta$.

d) **Propriétés courantes :** si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors, en notant $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$

(i) $\ker f \subset \ker(g \circ f)$

(ii) $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$

(iii) $g \circ f = \mathbb{O} \iff \operatorname{Im} f \subset \ker g$

(iv) si $\lambda \neq 0$, on a $\ker(\lambda f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f$

(v) si $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, alors $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$

Attention : on n'a pas $f \circ g = \mathbb{O} \Rightarrow (f = \mathbb{O} \text{ ou } g = \mathbb{O})$. Contre exemple?

1.4. Opérations sur les applications linéaires

a) <u>Combinaisons linéaires</u> : $\boxed{\mathcal{L}(E,F) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}}$

Autrement <u>toute combinaison d'applications linéaires est linéaire</u>

Exemple 1 : si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda \,\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$

Exemple 2 : si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors l'application $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ qui à $X = (x_1, \ldots, x_n)$ associe

$$\varphi(X) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

est une forme linéaire. Par exemple $\varphi : (x,y,z,t) \to 2x - 3y + z - t$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^4$.

Exemple 3 : $\boxed{\text{si } (A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \text{ et } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \text{ alors } \lambda A + \mu B \text{ a pour application linéaire associée } \lambda f_A + \mu f_B}$

b) <u>Composée</u> : soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$$\boxed{\text{si } f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F,G), \text{ alors } g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)}$$

Autrement dit, <u>la composée de deux applications linéaires est une application linéaire</u>.
En particulier si $E = F = G$, on obtient <u>la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E</u>

$$\boxed{(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2 \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{L}(E) \text{ et } g \circ f \in \mathcal{L}(E)}$$

Exemple : $\boxed{\text{si } A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), \text{ alors } AB \text{ a pour application linéaire associée } f_A \circ f_B}$

Notation : on notera $f \circ f = f^2 \in \mathcal{L}(E),\ f \circ f \circ f = f^3 \in \mathcal{L}(E)$, et plus généralement

$$\boxed{f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}}$$

Exemple : soit $\Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(y) = y'' - 3y' + 2y$. Montrer que Φ est linéaire

Montrer que $\Phi = (D - \mathrm{id}_E) \circ (D - 2\,\mathrm{id}_E)$ où D est la dérivation de $E = C^\infty(\mathbb{R})$.

Remarque : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'endomorphisme associé à A^n est f_A^n.

c) <u>Distributivité</u> : si $(f,f') \in \mathcal{L}(E,F)^2, (g,g') \in \mathcal{L}(F,G)^2$, alors

$$\boxed{\begin{cases} f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g' \\ (f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g \end{cases}}$$

d) <u>Réciproque d'un isomorphisme</u> : $\boxed{\text{si } f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ est un isomorphisme, alors } f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)}$

Autrement dit, la réciproque d'un isomorphisme est linéaire (et c'est aussi un isomorphisme).
En particulier, <u>la réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E</u>.

Exemple 1 : montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ f(X) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exemple 2 : $\boxed{\text{si } A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ alors } f_A \text{ est un isomorphisme, et } f_A^{-1} \text{ est l'endomorphisme associé à } A^{-1}}$

1.5. Equations linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

a) **Définition :** on appelle **équation linéaire** une équation du type

$$f(x) = y \quad (*)$$

avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $y \in F$ (second membre), et $x \in E$ (inconnue).

b) **Compatibilité :** par définition :

- Si $y \notin \operatorname{Im} f$, alors $(*)$ n'admet aucune solution.
- Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $(*)$ admet au moins une solution $x_0 \in E$

c) **Structure des solutions :** on suppose que $y \in \operatorname{Im} f$, donc que $(*)$ est compatible.
Soit x_0 est solution ("particulière") de $(*)$ (c'est-à-dire un antécédent de y par f).
Alors l'ensemble des solutions de $(*)$ est de la forme

$$\boxed{f^{-1}\langle\{y\}\rangle = \{x_0 + h,\ h \in \ker f\}}$$

On obtient toutes les solutions de $(*)$ en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles les éléments du noyau de f

L'ensemble $\{x_0 + h,\ h \in \ker f\}$ est noté symboliquement $x_0 + \ker f$ et appelé **sous espace affine** de E **de direction** $\ker f$ **passant par** x_0.

Remarque : cela signifie que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors un élément $y \in F$ admet :

– Soit aucun antécédent si $y \notin \operatorname{Im} f$.
– Soit un unique antécédent si $y \notin \operatorname{Im} f$ et si $\ker f = \{0_E\}$, (i.e. f injective.)
– Soit une infinité d'antécédents formant un espace affine si $y \notin \operatorname{Im} f$ et si $\ker f \neq \{0_E\}$

Exemple 1 : soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par $p(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Discuter sur $y \in \mathbb{R}^3$ les solutions de $(*)$: $p(x) = y$

Exemple 2 : on considère $\Phi : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(y) = y'' - 3y' + 2y$.

Calculer $\ker \Phi$. Si $u : x \mapsto e^{-x}$, résoudre l'équation $\phi(y) = u$

Exemple 3 : soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\ker f_A$. Si $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, trouver une solution particulière de l'équation $f(X) = Y$, et en déduire l'ensemble de ses solutions

2. Endomorphismes et composition.

2.1. Calculs dans $\mathcal{L}(E)$

a) **Structure :** soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathcal{L}(E)$ est alors muni de deux lois internes $+$ et $\circ$.
Elles sont associatives, admettent chacune un élément neutre ($\mathbb{O}$ et id_E), et $\circ$ est distributive sur $+$.
Seule $+$ est commutative.

Morale : on peut effectuer les mêmes routines algébriques avec les lois $+$ et $\circ$ sur $\mathcal{L}(E)$ qu'avec les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$, **pourvu qu'elles ne fassent pas intervenir la commutativité et l'inversion**. id_E joue le rôle de 1 (et on ne l'écrit donc pas dans un produit)

Remarque 1 : ces règles de calcul sont rigoureusement les mêmes que celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque 2 : on a aussi $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2,\ (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g)$

Exemple : avec $E = \mathbb{R}^2$ et f et g définies, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, par

$$f(X) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(X) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x-y \end{pmatrix}$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$

Exemple : on peut écrire

$$(f - 2\,\mathrm{id}) \circ (g + 3\,\mathrm{id}) = f \circ g \Leftrightarrow f \circ g + 3f - 2g - 6\,\mathrm{id} = f \circ g \Leftrightarrow f = \frac{2}{3} g + 2\,\mathrm{id}$$

b) **Généralisation des formules d'algèbre :** $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ commutent}}$ alors

$$(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$$

$$\boxed{f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}}$$

et

$$\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$$

Formules **fausses** lorsque $f \circ g \neq g \circ f$. En général, si $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$,

$$(f \circ g)^2 = (f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g \circ f \circ g$$

et

$$(f+g)^2 = (f+g) \circ (f+g) = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$$

Cas particulier : id_E commute avec tout endomorphisme ($f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$), on a donc on peut toujours écrire

$$\boxed{f^n - \mathrm{id} = (f - \mathrm{id}) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ (f - \mathrm{id})}$$

et

$$\boxed{(f + \mathrm{id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k}$$

2.2. Elements inversibles de $\mathcal{L}(E)$

a) **Elements inversibles :** soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **inversible** lorsque il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\boxed{f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E} \quad (*)$$

On sait que $(*)$ revient à : f est bijective de réciproque $f^{-1} = g$, qui est alors linéaire.
Ainsi,

$$\boxed{\text{les éléments inversibles de } \mathcal{L}(E) \text{ sont les automorphismes}}$$

L'inverse d'un tel élément f est sa réciproque f^{-1}.

Moralité : si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$\boxed{f \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E) \ / \ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E \Longleftrightarrow f \text{ est bijective de réciproque } f^{-1} = g}$$

Exemple1 : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + 3f - 5\,\mathrm{id}_E = \mathbb{O}$: montrer que $f \in GL(E)$ et calculer f^{-1}

Exemple2 : "pseudo-divisions" dans $\mathcal{L}(E)$: si $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$ et f inversible, alors

$$f \circ g = h \Longleftrightarrow g = f^{-1} \circ h$$

et

$$g \circ f = h \Longleftrightarrow g = h \circ f^{-1}$$

b) **Groupe linéaire :** on note $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$. On a

$$\boxed{\text{La composée de deux automorphismes de } E \text{ est un automorphisme de } E}$$

De plus

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$$

Remarque : en particulier, si $f \in GL(E)$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \in GL_n(E)$, et

$$\boxed{(f^n)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^n}$$

On note alors $\boxed{f^{-n} = (f^n)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^n}$

3. Projecteurs-symétries

On se donne E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non trivial.

3.1. Projecteurs

a) Définitions : soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\boxed{E = F \oplus G}$.
Si $x \in E$, x se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On note

$$\boxed{p(x) = x_F \in F}$$

L'application $p : E \to E$ ainsi construite est appelée **projecteur sur F parallèlement à G**.
p associe donc à un vecteur sa composante sur F dans la décomposition suivant F et G.

Remarque : $\begin{cases} \text{si } x \in F, \text{ alors } p(x) = x \\ \text{si } x \in G, \text{ alors } p(x) = 0_E \end{cases}$, soit $\underline{p_{|F} = \mathrm{id}_F}$ et $\underline{p_{|G} = \mathbb{O}_G}$.

b) Projecteurs associés : le projecteur q sur G parallèlement à F, est appelé **projecteur associé à** p (et on dit que p et q sont les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$).
Avec les notations précédentes, si $x = x_F + x_G$, on a $q(x) = x_G$, et pour tout vecteur x de E :

$$x = p(x) + q(x)$$

de sorte que

$$\boxed{p + q = \mathrm{id}_E}$$

Remarque : $\boxed{q = \mathrm{id} - p \text{ et } p = \mathrm{id} - q}$

Exemple 1 : soient $E = \mathbb{R}^3,\ X_0 = (1, 2, -1),\ F = \mathbb{R}X_0,\ G = \{X = (x, y, z)\ /\ x - y + z = 0\}$
Calculer la matrice des projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$

Exemple 2 : quels sont les projecteurs associés à la décomposition $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3 \oplus \mathcal{A}_3$?

c) Propriétés : soit p le projecteur sur F parallèlement à G, q son projecteur associé.

(i) $\boxed{p \in \mathcal{L}(E)}$ (et $q \in \mathcal{L}(E)$)

(ii) $\boxed{\begin{cases} \mathrm{Im}\, p = F = \ker q \\ \ker p = G = \mathrm{Im}\, q \end{cases}}$

(iii) $\boxed{p \circ p = p}$ (ou $p^2 = p$)

Remarque : le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ est annulateur de p.

(iv) $\boxed{q \circ p = p \circ q = \mathbb{O}}$

(v) $\boxed{F = \mathrm{Im}\, p = \ker(p - \mathrm{id}_E)}$

En d'autres termes, F est l'ensemble des points fixes de p : $\boxed{x \in \mathrm{Im}\, p \Longleftrightarrow p(x) = x}$

Remarque 1 : décompositions : de $E = F \oplus G$ on déduit donc

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \ker p \oplus \ker q \\ E &= \ker p \oplus \ker q \\ E &= \ker p \oplus \ker(p - \mathrm{id}) \end{aligned}}$$

Remarque 2 : $p \notin GL(E)$ sauf si $\ker p = \{0_E\} = F$. Mais alors $G = E$ et $p = \mathrm{id}_E$

d) Caractérisation des projecteurs : soit $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p \quad (*)$: alors

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(i) } E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p \\ \text{(ii) } p \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Im} p \text{ parallèlement à } \ker p\end{array}}$$

Moralité : $\boxed{\text{un endomorphisme } p \text{ de } E \text{ est un projecteur si et seulement s'il vérifie } p^2 = p.}$

Ses éléments caractéristiques sont alors : $\boxed{\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{Espace de projection}} : \operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{id}_E) \\ \underline{\text{Direction}} : \ker p\end{array}\right.}$

Exemple : soit $E = \mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de E de matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

3.2. Symétries

a) Définition : soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

Si $x \in E$, on peut écrire de manière unique $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On note

$$\boxed{s(x) = x_F - x_G}$$

L'application $s : E \to E$ ainsi construite est appelée **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G.

b) Lien avec les projecteurs : soient p et q les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$. Alors

$$\boxed{s = p - q \in \mathcal{L}(E)}$$

C'est-à-dire $(p + q = \mathrm{id}_E)$:

$$\boxed{s = 2p - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2q}$$

c) Propriétés : avec les mêmes notations :

(i) $\boxed{s^2 = \mathrm{id}_E, \text{ et donc } s \in GL(E) \text{ et } s^{-1} = s}$

Remarque 1 : $\ker s = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} s = E$.

Remarque 2 : $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de s.

(ii) $\boxed{x \in F \Leftrightarrow s(x) = x \text{ et } x \in G \Longleftrightarrow s(x) = -x}$. En d'autres termes :

$\boxed{F = \ker(s - \mathrm{id}), \text{ et } G = \ker(s + \mathrm{id})}$

d) Caractérisation :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } s \in \mathcal{L}(E) \text{ vérifie } s^2 \overset{(*)}{=} \mathrm{id}_E, \text{ alors } s \text{ est une symétrie vectorielle d'éléments :} \\ \bullet\ \underline{\text{Espace de symétrie}} : \ker(s - \mathrm{id}_E) \quad \text{(points fixes)} \\ \bullet\ \underline{\text{Direction}} : \ker(s + \mathrm{id}_E)\end{array}}$$

On a en particulier

$$\boxed{E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_E)}$$

Exemple 1 : soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ de matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une symétrie et donner ses éléments caractéristiques.

Exemple 2 : montrer que la transposition T dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une symétrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et calculer ses éléments caractéristiques. Retrouver un résultat connu.

4. Théorème du rang

4.1. Effet d'une application linéaire sur une famille de vecteurs

On se donne deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F et une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) **Familles génératrices :**

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$

En particulier

L'image d'une famille génératrice par une application linéaire **surjective** est génératrice.

b) **Familles libres :** l'image d'une famille libre par une application linéaire **injective** est libre.

c) **Bases :** f est un **isomorphisme** si et seulement si l'image d'une **base** de E est une **base** de F

Remarque : si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $y_1, \ldots, y_n$ des vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in [[1, n]],\ f(e_k) = y_k$

4.2. Isomorphismes

On dit que les $\mathbb{K}$-ev F et G sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$.

a) Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ qui associe à un vecteur $x \in E$ sa colonne de coordonnées $X = \varphi(x)$ est un isomorphisme. Quelle est sa réciproque?

Exemple : $\mathbb{K}_n[X]$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n+1}$.

b) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$

Conséquence : si $m \neq n$, $\mathbb{K}^m$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{K}^n$

4.3. Théorème du rang

On se donne une application linéaire de l'espace E dans l'espace F.

a) Théorème de l'isomorphisme induit :

$$\boxed{\text{Si } G \text{ est un supplémentaire de } \ker f \text{ dans } E, \text{ alors } f \text{ induit un isomorphisme } \tilde{f} : G \to \operatorname{Im} f}$$

b) Conséquence : théorème du rang :

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est de dimension finie alors } \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E}$$

Autrement dit, en posant $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$, et $n = \dim E$,

$$\boxed{\operatorname{rg} f = n - \dim \ker f}$$

Exemple illustratif : calculer $\operatorname{Im} f$ puis $\ker f$, où $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ est définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Application : noyau d'une forme linéaire. $\boxed{\text{Si } \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \text{ est non nulle alors son noyau est un hyperplan}}$

Par exemple $H = \{X = (x, y, z)\ /\ 2x - y + z = 0\}$ est un hyperplan

c) Application à l'inversibilité :

(i) $\boxed{\text{Si } \dim E = \dim F, \text{ alors } f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}}$

(ii) Cas des endomorphismes : si $\dim E = n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}}$$

Autrement dit, en dimension finie, il suffit de vérifier l'injectivité **ou** la surjectivité d'un endomorphisme pour établir sa bijectivité.

4.4. Rang d'une famille de vecteurs

a) <u>Définition</u> : soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. On pose

$$\boxed{\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)}$$

On montre que $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p)$ est le cardinal maximal d'une famille libre extraite de $(e_1, \dots, e_p)$.

b) <u>Propriétés immédiates</u> :

(i) $\boxed{\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p) \leqslant p}$ et <u>il y a égalité si et seulement si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre</u>

(ii) $\boxed{\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant n}$ et <u>il y a égalité si et seulement si $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice</u>

Exemple 1 : $E = \mathbb{R}^3,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: calculer $\operatorname{rg}(X_1, X_2, X_3)$

Exemple 2 : $E=\mathbb{R}^2, X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 17 \end{pmatrix},\ X_5=\begin{pmatrix} \pi \\ \ln 3 \end{pmatrix}$

Calculer $\operatorname{rg}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Exemple 3 : $E = C^\infty(\mathbb{R}),\ f_1 = \cos,\ f_2 = \sin,\ f_3 : x \to \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ f_4 : x \to \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Calculer $\operatorname{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4.5. Lien avec le rang d'une application linéaire

a) <u>Définition</u> : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f}$$

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, on sait que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \subset F$. On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))}$$

b) <u>Propriétés immédiates</u> :

(i) $\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \min(p, n)}$

(ii) $\boxed{\operatorname{rg} f = n \Longleftrightarrow f \text{ est surjective}}$

(iii) $\boxed{\operatorname{rg} f = p \Longleftrightarrow f \text{ est injective}}$

Remarque : ainsi on a la caractérisation de l'inversibilité, si $\dim E = n$:

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(E) \text{ est inversible si et seulement si } \operatorname{rg} f = n}$$

c) <u>Composition par un isomorphisme</u> :

$$\boxed{\text{si } f \in \mathcal{L}(E, F),\ u \in GL(E) \text{ et } v \in GL(F), \text{ alors } \begin{cases} \operatorname{rg}(f \circ u) = \operatorname{rg} f \\ \operatorname{rg}(v \circ f) = \operatorname{rg} f \end{cases}}$$

Autrement dit on ne change pas le rang en composant à droite ou à gauche par des automorphismes.