Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall\,(\alpha,\beta)\in I^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\alpha\leqslant x\leqslant\beta\Rightarrow x\in I)$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que I est un intervalle, soit un ensemble de la forme

$$\varnothing,\ [a,b]\,,\ ]a,b[\,,\ [a,b[\,,\ ]a,b]\,,\ [a,+\infty[\,,\ ]a,+\infty[\,,\ ]-\infty,a]\,,\ ]-\infty,a[\,,\ \mathbb{R}$$

On a 10 cas à traiter... Le cas $I=\varnothing$ est trivial, comme le cas $I=\mathbb{R}$.

- Cas $I=[a,b]$: si $(\alpha,\beta)\in I^2$ et $\alpha\leqslant\beta$, alors $\forall x\in[\alpha,\beta]$, on a

$$a\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant b,\ \text{donc } x\in[a,b]=I\ \text{CQFD}.$$

- Cas $I=]a,+\infty[$: si $(\alpha,\beta)\in I^2$ et $\alpha\leqslant\beta$, alors $\forall x\in[\alpha,\beta]$, on a

$$a<\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ \text{donc } x\in]a,+\infty[=I\ \text{CQFD}.$$

Les 6 autres cas se traitent de la même manière.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que I non vide vérifie : $\forall\,(\alpha,\beta)\in I^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\alpha\leqslant x\leqslant\beta\Rightarrow x\in I)$

- 1er cas : I est borné. On pose $a=\inf I$ et $b=\sup I$.
  - $*$ Il est clair que $I\subset[a,b]$
  - $*$ Inversement si $x\in]a,b[$, alors x n'est pas majorant de I et n'est pas minorant de I, donc

  $$\exists x_1\in I\ /\ x_1<x\quad\text{et}\quad\exists x_2\in I\ /\ x<x_2$$

  Mais alors $x\in[x_1,x_2]$ donc par hypothèse $x\in I$, ce qui montre que $]a,b[\subset I$.

  Par conséquent,

  si $a\in I$ et $b\in I$, on a $I=[a,b]$
  si $a\in I$ et $b\notin I$, on a $I=[a,b[$
  si $a\notin I$ et $b\in I$, on a $I=]a,b]$
  si $a\notin I$ et $b\notin I$, on a $I=]a,b[$

- 2ème cas : I est minoré et non majoré. On pose $a=\inf I$
  - $*$ Il est clair que $I\subset[a,+\infty[$
  - $*$ Inversement si $x\in]a,+\infty[$, alors x n'est pas minorant de I, et n'est pas majorant de I donc

  $$\exists x_1\in I\ /\ x_1<x\quad\text{et}\quad\exists x_2\in I\ /\ x<x_2$$

  Mais alors $x\in[x_1,x_2]$ donc par hypothèse $x\in I$, ce qui montre que $]a,+\infty[\subset I$.

  Par conséquent,

  si $a\in I$ on a $I=[a,+\infty[$
  si $a\notin I$ on a $I=]a,+\infty]$

- 3ème cas : I est majoré et non minoré : on montre de même que $I=]-\infty,a]$ ou $I=]-\infty,a[$
- 4ème cas : I n'est ni majoré ni minoré : on montre de même que $I=\mathbb{R}$.

Au total I est bien un intervalle.