A rendre par trinôme

EXERCICE 1

1. On se propose l'étude des trois propositions suivantes : $(A_1) : \exists a_0 > 0 \ / \ \forall x > 0, \ (a \geqslant a_0 \Longrightarrow \ln x \leqslant x^a)$
$(A_2) : \forall a > 0, \ \exists x_0 > 0 \ / \ (x \geqslant x_0 \Longrightarrow \ln x \leqslant x^a)$
$(A_3) : \exists x_1 > 0 \ / \ \forall a > 0, \ (x \geqslant x_1 \Longrightarrow \ln x \leqslant x^a)$

a) A l'aide de l'étude de $f_a : x \mapsto x^a - \ln x$, discuter l'affirmation (A_1).

b) A l'aide de $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a$, discuter l'affirmation (A_2).

c) A l'aide de $\lim\limits_{a \to 0^+} f_a(x)$, $x > e$ fixé, discuter l'affirmation (A_3).

EXERCICE 2

1. Calculer les primitives sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x + \tan x}$ à l'aide du changement de variable : $t = \tan \dfrac{x}{2}$

2. Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \dfrac{1}{(1+u^2)^2}$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t, \ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x}$ à l'aide du changement de variable $u = \operatorname{sh} x$.

PROBLEME

A tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on associe $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt$

1. a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

b) Calculer $I(p+q, 0)$.

c) Démontrer que $\quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

2. a) Montrer que $\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$

b) En déduire à l'aide de $I(n,n)$ que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+1)! \geqslant 4^n (n!)^2$

3. On pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \, dt \leqslant \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

c) Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k = \dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1} - \dfrac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$

d) Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \dfrac{\pi}{2} - w_n \leqslant \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$?

4. On pose, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad J(p,q) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \cos^{2q+1} t \, dt$.

a) A l'aide du changement de variable $x = \sin^2 t$, montrer que $J(p,q) = \dfrac{1}{2} I(p,q)$.

b) A l'aide du changement de variable $y = \sin t$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \dfrac{(-1)^k}{p+k+1} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.