Ex 1 Soit $M=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$, et f son endomorphisme canoniquement associé.

Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques. Résoudre le système $MX=Y_0$, $Y_0=(1,2,3,4)$.

Ex 2 soient F et G deux espaces supplémentaires de E, de dimension r et $n-r$ et on considère les projecteurs associés p et q ainsi que la symétrie $s=p-q$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base telle que $\begin{cases}(e_1,\ldots,e_r) \text{ soit une base de } F\\(e_{r+1},\ldots,e_n) \text{ soit une base de } G\end{cases}$.

Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$

Ex 3 Soit $N=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&0&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n$. A l'aide de son endomorphisme associé, montrer que N est nilpotente.

Ex 4 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et $\mathcal{B}'=(X_1,X_2,X_3,X_4)$, avec

$$X_1=(0,1,1,0),\quad X_2=(1,1,0,0),\quad X_3=(1,1,-1,0),\quad X_4=(-1,1,1,1)$$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et y exprimer le vecteur $X=(2,3,-1,4)$.

b) Quelle est l'équation dans $\mathcal{B}'$ de l'hyperplan d'équation $x-y+z+3t=0$ dans $\mathcal{B}$?

Ex 5 a) Calculer la matrice S en base canonique de la symétrie s par rapport au plan F de $\mathbb{R}^3$d'équation $x+y+2z=0$ parallèlement à la droite G engendrée par $X_0=(1,-1,1)$?

b) Calculer la matrice S' de s dans une base $\mathcal{B}=(X_0,X_1,X_2)$ où (X_1,X_2) est une base de F. Relier S et S'.

Ex 6 Soit $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}'=(e_2,e_1,e_3)$ et $\mathcal{B}''=(e_2,e_3,e_1)$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a) Ecrire les matrices A' et A'' de f dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, puis les liens entre A et A', A et A''.
Donner les matrices de passage $P=P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $Q=P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$ ainsi que leurs inverses.

b) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices A vérifiant $A''=A$. Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en donner la dimension et une base.

Ex 7 Soit $A=\begin{pmatrix}\binom{0}{0}&\binom{1}{0}&\ldots&\binom{n}{0}\\0&\binom{1}{1}&\ldots&\binom{n}{1}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ldots&0&\binom{n}{n}\end{pmatrix}$, et $f:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P)=P(X+1)$.

a) A l'aide de f, déterminer l'inverse de la matrice A.

b) En déduire la formule d'inversion de Pascal : si $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$ alors $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k$

Ex 8 Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ /\ a^2+b^2+c^2=k\neq0$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\begin{pmatrix}a^2&ba&ca\\ab&b^2&cb\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$

a) Déterminer $\mathrm{Im}\,f$, $\ker f$. Montrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}\,f\oplus\ker f$.

b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f s'écrit $\begin{pmatrix}k&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Quelle est la nature de $\dfrac{1}{k}f$?

Ex 9 Soit $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$, d'endomorphisme associé f dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$

On pose $e'_1=e_2+e_3,\ e'_2=e_1+e_3,\ e'_3=e_1+e_2$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $A'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Donner un lien entre A et A'.

b) En déduire les puissances de A.

Ex 10 Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(a,m) \in \mathbb{R}^2$ et f l'application de E dans E définie par

$$\forall P \in E,\ f(P) = m(P(X) - P(a)) - (X-a)(P'(X) - P'(a))$$

a) Pour $k \in [[0,n]]$, on pose $T_k(X) = \dfrac{1}{k!}(X-a)^k$.

Justifier que $\mathcal{B} = (T_0, \dots, T_n)$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ dans $\mathcal{B}$.

b) Justifier que f est un endomorphisme de E et calculer $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (attention aux deux premières colonnes).

c) En déduire $\mathrm{Im}\, f$, $\ker f$ et $\mathrm{rg}\, f$ en discutant suivant les valeurs de m

Ex 11 Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, d'endomorphisme associé f dans la base canonique.

a) Trouver une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle$f$ a pour matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner le lien entre A et T

b) Calculer T^n puis A pour $n \in \mathbb{N}$, et en déduire l'expression des suites (x_n) et (y_n) vérifiant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{5}{2}y_n \end{cases}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0$$

Ex 12 Calculer le rang, une base l'espace engendré et une relation de dépendance linéaire non triviale des familles :

a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ -2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $P = X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 2X + 1$, $Q = 8X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 5X + 2$, $R = 22X^4 + 10X^3 - 7X^2 + 17X + 6$, $S = 2X^3 - 3X^2 + 3X + 1$ (dans $E = \mathbb{R}_4[X]$).

Ex 13 Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12,}E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall M \in E,\ f(M) = AM - MA$.

a) Calculer la matrice Φ de f dans B, et montrer que $f = 0 \Longleftrightarrow A$ est scalaire. Interpréter

b) On suppose que A n'est pas scalaire : montrer que $\mathrm{rg}\, f = 2$.

En déduire la dimension de l'espace vectoriel $C(A)$ des matrices qui commutent avec A

c) Calculer $C(A)$ dans le cas où A est une matrice diagonale (non scalaire), puis triangulaire (non diagonale).

Ex 14 Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = f^2$ et $\dim \ker(f - \mathrm{id}_E) = 1$

a) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker f^2$. Encadrer $\mathrm{rg}\, f$.

b) On suppose $\mathrm{rg}\, f = 1$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) On suppose $\mathrm{rg}\, f = 2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 15 a) Soit E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = \mathbb{O}$ et $f^{n-1} \neq \mathbb{O}$.

Soit $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. Montrer que $\left(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\right)$ est une base de E.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.

Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = PA'P^{-1}$, où $A' = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{O} & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & 1 & 0 \end{pmatrix}$