Applications

1. Généralités

1.1. Terminologie

a) <u>**Définition**</u> **:** soient E et F deux ensembles. Une **application de** E **dans** F est un procédé qui à tout élément x de E associe un unique élément $f(x)$ de F appelé **image de** x **par** f.
E est appelé **ensemble de départ**, F **ensemble d'arrivée**. On écrit

$$f:\ \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Notations : l'ensemble des applications de E dans F se note $\boxed{\mathcal{F}(E,F) \text{ ou } F^E}$

Remarque : égalité de deux applications f et g de $\mathcal{F}(E,F)$: $\boxed{f=g \Longleftrightarrow \forall x\in E,\ f(x)=g(x)}$

b) <u>**Exemples**</u> **:**

Exemple 1 : une fonction numérique définie sur l'intervalle I est une application de I dans $\mathbb{R}$:

$$f:\ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

L'ensemble des fonctions numériques définies sur I se note donc $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})=\mathbb{R}^I$.

De même, une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $u:\ \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u(n)=u_n \end{array}$

L'ensemble des suites réelles se note donc $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 2 : si E est un ensemble, on note $\mathrm{id}_E:\ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \mathrm{id}_E(x)=x \end{array}$, appelée **identité de** E, ou **application identique de** E.

c) <u>**Antécédents**</u> **:** soit $f:E\to F$ une application, et y un élément de F.
On appelle **antécédent de** y **par** f tout élément de E d'image y. L'ensemble des antécédents de y est donc

$$\boxed{\{x\in E\ /\ f(x)=y\}}$$

autrement dit l'ensemble des solutions de "l'équation" $f(x)=y$ d'inconnue $x\in E$.

Exemple 1 : antécédents de la fonction $f:x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ par $D:\ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & D(f)=f' \end{array}$

Exemple 2 : antécédents de $Y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ par l'application $f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \longmapsto & f(X)=\begin{pmatrix}x+y-z\\x-2y+z\end{pmatrix} \end{array}$

1.2. Composée

a) <u>Définition</u> : soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La **composée** $g \circ f$ est l'application :

$$\boxed{\begin{array}{rl} g \circ f : & E \longrightarrow G \\ & x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}}$$

Remarque : $f \circ g$ n'a ici AUCUN SENS.

Exemple : soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ X = \binom{x}{y} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X = \binom{x}{y} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x-y \\ x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} \end{array}$

Calculer $g \circ f$.

b) <u>Propriétés</u> :

- <u>La composition est associative</u> : $\boxed{\text{si } f : E \to F\ ,\ g : F \to G\ ,\ h : G \to H\ , \text{ alors } (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$
- <u>Eléments neutres</u> : $\boxed{\text{si } f : E \to F\ , \text{ alors } \quad f \circ \mathrm{id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_F \circ f = f}$

1.3. Applications et sous-ensembles

a) <u>Fonction caractéristique d'un sous-ensemble</u> : soit E un ensemble et A un sous ensemble de E.

On appelle fonction caractéristique de A l'application :

$$\begin{array}{rl} \mathbb{1}_A : & E \longrightarrow \{0,1\} \\ & x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

On a alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(i) } \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \\ \text{(ii) } \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \\ \text{(iii) } \mathbb{1}_{\complement A} = 1 - \mathbb{1}_A \end{array}}$$

b) <u>Image directe d'un sous ensemble de E</u> : soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On note

$$\boxed{f\langle A\rangle = \{f(x)\ ,\ x \in A\} \subset F}$$

le sous-ensemble de F formé des images de tous les élément de A, et appelé **ensemble image de A par f**. Ainsi

$$\boxed{y \in f\langle A\rangle \Longleftrightarrow \exists a \in A \ / \ y = f(a)}$$

Cas particulier : $f\langle E\rangle$, ensemble de toutes les valeurs prises par f sur E, est appelé **image de** f.

Exemple 1 : image de l'intervalle $[-2, 1]$ par l'application $f : x \to x^2$

Exemple 2 : image de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$

Propriétés :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(i) } A \subset A' \Rightarrow f\langle A\rangle \subset f\langle A'\rangle \\ \text{(ii) } f\langle A \cup A'\rangle = f\langle A\rangle \cup f\langle A'\rangle \\ \text{(iii) } f\langle A \cap A'\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle A'\rangle \end{array}}$$

c) **Parties stables :** soit $f : E \longrightarrow \boxed{E}$ et A un sous ensemble de E.

On dit que A est **stable par** f lorsque $f\langle A\rangle \subset A$. Autrement dit

$$\boxed{A \text{ est stable par } f \Longleftrightarrow \forall a \in A\ ,\ f(a) \in A}$$

Exemple : on considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\forall X = (x, y, z)\ ,\ f(x, y, z) = (x, y, -z)$.
Si $P = \left\{(x, y, 0)\ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $D = \{(0, 0, z)\ ,\ z \in \mathbb{R}\}$, montrer que P et D sont stables par f

d) **Image réciproque d'un sous ensemble de F :** soit B une partie de F. On note

$$\boxed{f^{-1}\langle B\rangle = \{x \ /\ f(x) \in B\}}$$

le sous ensemble de E formé des antécédents de tous les élément de B, et appelé **image réciproque de** B **par** f. Ainsi

$$\boxed{x \in f^{-1}\langle B\rangle \Longleftrightarrow f(x) \in B}$$

Attention : cette notation n'a rien à voir avec la réciproque d'une bijection (f est ici quelconque).

Exemple : soit $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\rho(z) = |z|$, et $0 < r < r'$: représenter $\rho^{-1}\langle [r, r']\rangle$

Cas particulier : si $y \in F$, alors $f^{-1}\langle \{y\}\rangle$ est l'ensemble des antécédents de y par f.

Exemple : soit $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de $A \subset E$. Que valent $\mathbb{1}_A^{-1}\langle\{1\}\rangle$ et $\mathbb{1}_A^{-1}\langle\{0\}\rangle$?

Propriétés :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{(i) } B \subset B' \Rightarrow f^{-1}\langle B\rangle \subset f^{-1}\langle B'\rangle \\
\text{(ii) } f^{-1}\langle B \cup B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cup f^{-1}\langle B'\rangle \\
\text{(iii) } f^{-1}\langle B \cap B'\rangle = f^{-1}\langle B\rangle \cap f^{-1}\langle B'\rangle \\
\text{(iv) } f^{-1}\left\langle \overline{B}\right\rangle = \overline{f^{-1}\langle B\rangle}
\end{array}}$$

e) **Restrictions :** soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

(i) Si A est un sous-ensemble de E, on appelle **restriction de** f **à** A l'application

$$f_{|A} : \begin{array}{l} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Exemple1 : la restriction de $\rho : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ z \longmapsto \rho(z) = |z| \end{array}$ à $\mathbb{R}$ est l'application "valeur absolue".

Exemple2 : $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$, restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sin, est strictement croissante.

(ii) Application induite : si $f\langle A\rangle \subset B$, on peut considérer $\tilde{f} : A \to B$ telle que $\forall x \in A\ ,\ \tilde{f}(x) = f(x)$.

On dit que f **induit l'application** $\tilde{f} : A \to B$.

Exemple : comme $\sin\langle \mathbb{R}\rangle = [-1, 1]$, sin induit une bijection $\widetilde{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

(iii) $\boxed{\text{si } f : E \longrightarrow E \text{ et si } A \text{ est une partie de } E \text{ stable par } f\text{, alors } f \text{ induit une application } \tilde{f} : A \longrightarrow A}$

Exemple : soit $\sigma : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sigma(z) = \bar{z} \end{array}$. $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont stables par σ. Identifier les applications induites.

2. Injections, surjections, bijections

Trois cas de figure intéressants (patatoïdes)

2.1. Injections

a) Définition : $f : E \longrightarrow F$ est dite **injective** lorsque tout élément de F admet AU PLUS un antécédent.

Exemple 1 : l'application qui, à une voiture, associe son numéro d'immatriculation est injective

Exemple 2 : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective

b) Caractérisations de l'injectivité :

(i) $f : E \to F$ est injective $\Leftrightarrow$ deux éléments distincts de E ont des images distinctes

$$\boxed{f : E \to F \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall\,(x, x') \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$$

Exemple 1 : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas injective.

Exemple 2 : Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone sur I est injective.

(ii) Par contraposée :

$$\boxed{f : E \to F \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall\,(x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$$

Exemple : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \left(\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \dfrac{2t}{1 + t^2}\right)$ est injective.

c) Composée : la composée de deux injections est injective

2.2. Surjections

a) Définition : $f : E \to F$ est dite **surjective** lorsque tout élément de F admet AU MOINS un antécédent.

Exemple 1 : l'application qui à tout français mineur associe son âge de 0 à 17 ans est surjective.

Exemple 2 : soit E l'ensemble des polynômes non nuls. L'application degré $\deg : E \to \mathbb{N}$ est surjective

Exemple 3 : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective

Remarque : certaines applications ne sont ni injectives ni bijectives (c'est le cas des applications constantes).

b) Caractérisation : $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$

c) Composée : La composée de deux surjections est surjective

2.3. Bijections

a) <u>Définitions</u> : $\boxed{f : E \to F \text{ est dite } \textbf{bijective} \text{ lorsque tout élément de } F \text{ admet EXACTEMENT un antécédent.}}$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ bijective} \iff f \text{ est injective et surjective.}}$$

Alors si $y \in F$, son unique antécédent par f peut se noter sans ambiguité $f^{-1}(y)$, ce qui définit une application dite **réciproque de** f :

$$\begin{array}{ll} f^{-1}: & F \to E \\ & y \to f^{-1}(y) = x, \text{ unique élément de } E \text{ vérifiant } f(x) = y \end{array}$$

On a donc l'équivalence

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times F, \quad [y = f(x)] \iff \left[x = f^{-1}(y)\right]}$$

et

$$\begin{array}{llll} (1) & \forall y & \in & F, \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y \\ (2) & \forall x & \in & E, \quad f^{-1}(f(x)) = x \end{array}$$

(1) et (2) se traduisent par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right.}$$

Exemple 1 : $F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(z) = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ montrer que f est bijective et calculer F^{-1}

Exemple 2 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie, si $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(X) = (2x - 5y, x - 3y)$ est bijective et calculer f^{-1}

Remarque 1 : id_E est bijective de réciproque id_E .

Remarque 2 : f^{-1} est bijective, et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

b) <u>Propriété</u> : $\boxed{\text{si } f : E \to F \text{ est injective, alors } f \text{ induit une bijection } \tilde{f} : E \to f\langle E\rangle}$

Exemple : soit $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ix}$ induit une bijection $]-\pi, \pi] \to \mathbb{U}$

c) <u>Réciproque d'une composée</u> : $\boxed{\text{la composée de deux bijections est une bijection}}$

De plus, si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} : G \to E$

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

d) <u>Caractérisation des bijections</u> :

$$\boxed{\text{Si } \exists g : F \to E \ / \left\{\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right. \text{, alors } f : E \to F \text{ est bijective et } f^{-1} = g.}$$

Exemple : on dit que $f : E \to E$ est une **involution**.lorsque $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Alors, f est bijective et $f^{-1} = f$