Ex 1 Calculer les primitives suivantes (on indiquera les intervalles de validité) :

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}\,\mathrm{d}x$

Ex 2 Calculer $K=\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt[3]{1+\operatorname{ch} x}}\,\mathrm{d}x$

Ex 3 Calculer à l'aide des nombres complexes, pour tout réel x :

a) $\displaystyle\int \left(x^3-1\right)\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \left(x^2+1\right)e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

Ex 4 Calculer pour tout x réel : $F(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-j}$

Ex 5 Calculer les primitives suivantes sur des intervalles adéquats :

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$

Ex 6 En adaptant la méthode de l'exercice précédent, calculer sur des intervalles adéquats :

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

Ex 7 Calculer à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :

a) $\displaystyle\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ pour $x>-1$ b) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\sin x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{1/2}^2 \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\mathrm{d}x$

Ex 8 Même question sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\mathrm{d}x$ où $\alpha\in\mathbb{C}$ (distinguer le cas $\alpha=-1$).

Ex 9 a) Trouver $a,\ b,\ c$ réels tels que : $\forall x\neq -1,\ \dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.

b) En déduire $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ puis, à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^3\right)^2}$.

Ex 10 On pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
En déduire $I_1,\ I_2,\ I_3$.

b) Transformer I_n à l'aide du changement de variable $x=\tan\theta$, et retrouver $I_1,\ I_2,\ I_3$.

Ex 11 Soient $I=\displaystyle\int_0^2 \sqrt{-x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$, $J=\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ et $K=\displaystyle\int_0^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer J en s'inspirant d'une méthode du cours, et en déduire $K+I$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre K et I, et en déduire les valeurs de I et K.

Ex 12 Calculer les intégrales et primitives suivantes à l'aide des changements de variable indiqués (ou pas).
Pour les primitives, on indiquera les intervalles de validité.

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+\ln t)^3}$

b) $\displaystyle\int \left(x^2-1\right)^7 x\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x \quad \left(t=\sqrt{e^x-1}\right)$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \quad \left(x=t^6\right)$

e) $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{sh}\,x-4\,\mathrm{ch}\,x} \quad (t=e^x)$

f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{4+\sin x} \quad \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$

g) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x \quad \left(u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ ou } x=\cos\theta\right)$

h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}} \quad \left(x=2\sin^2 u\right)$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x\,\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x} \quad (\alpha>0) \quad \left(y=\frac{\pi}{2}-x\right)$

Ex 13 Soient $a>0$ et $b>0$. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, avec le changement de variable $t=\tan x$
Attention au piège.
Après avoir découpé l'intégrale, on pourra écrire I sous la forme $4\displaystyle\lim_{a\to\pi/2}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$