Notion de fonctions bijectives

1. Généralités

a) **Antécédents :** soient $f : I \to J$ une fonction, et y un élément de J.
Un élément x de I est appelé **antécédent de** y **par** f si son image par f est y $(f(x) = y)$, autrement dit si x est une solution dans I de l'équation $f(x) = y$.

Exemple : 2 et -2 sont des antécédents de 4 par $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$. -4 n'a pas d'antécédents par f.

b) **Ensemble image :** soit $f : I \to J$ une fonction. On appelle ensemble image de f l'ensemble noté $f\langle I\rangle$ de toutes les images par f des éléments de I. C'est un sous ensemble de J et on peut noter

$$f\langle I\rangle = \{f(x)\,,\ x \in I\}$$

Exemples : calculer $\sin\langle\mathbb{R}\rangle$ et $f\langle[-3, 2]\rangle$ lorsque $f : x \mapsto x^2$.

2. Bijections

a) **Définition :** soient I et J deux intervalles, et f une fonction définie sur I à valeurs dans J.

> On dit que f réalise une **bijection** de I sur J si tout élément de J admet un **unique antécédent** dans I par f

En d'autres termes si

$$\boxed{\forall y \in J, \quad \exists! x \in I \ / \ f(x) = y}$$

ou encore si

pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet une unique solution dans I

b) **Fonction réciproque :** soit $f : I \to J$ une bijection.
Si y est un élément de J, son unique antécédent dans I par f est noté $f^{-1}(y)$.
Cela définit une fonction f^{-1} dite **réciproque de** f :

$$f^{-1} : \begin{array}{l} J \to I \\ x \mapsto f^{-1}(x) \text{ , unique antécédent de } x \text{ par } f \text{ dans } I \end{array}$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall x \in I\ ,\ \forall y \in J\ ,\ f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

et

$$\boxed{\begin{array}{r} \forall x \in I\ ,\ f^{-1}(f(x)) = x \\ \text{et } \forall y \in J\ ,\ f(f^{-1}(y)) = y \end{array}}$$

Attention : la notation f^{-1} n'A AUCUN SENS lorsque f n'est pas bijective!
On le vérifiera toujours au préalable (ou du moins on le mentionnera).

Exemple : montrer que $f : x \to x^2 - 2x - 1$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-2, +\infty[$ et calculer f^{-1}

c) Propriété de la courbe de f^{-1} :

> Si f est une bijection de I sur J, alors la courbe de f^{-1} est symétrique de la courbe de f par rapport à la droite Δ d'équation : $y = x$.

Exemple : tracer les courbes de f et f^{-1} définies dans l'exemple précédent.

d) Continuité de la réciproque :

> si f continue réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, alors f^{-1} est continue sur J

Exemple : sachant que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit que $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

e) Théorème de la bijection :

> Toute fonction f **continue strictement monotone** sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $J = f\langle I\rangle$

L'ensemble image $f\langle I\rangle$ est alors un **intervalle**, déterminé par les limites de f aux bornes :

- Si f est strictement croissante : $f\langle[a,b]\rangle = [f(a), f(b)]$ et $f\langle]a,b[\rangle =]\lim\limits_{a+} f, \lim\limits_{b-} f[$
- Si f est strictement décroissante : $f\langle[a,b]\rangle = [f(b), f(a)]$ et $f\langle]a,b[\rangle =]\lim\limits_{b-} f, \lim\limits_{a+} f[$

Ce théorème est très utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions d'une équation (sans l'expliciter)

Exemple 1 : montrer que l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$ admet une unique solution réelle.

Exemple 2 : montrer que $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection. On note argth sa réciproque.

f) Dérivabilité de la réciproque : soit $f : I \to J$ une **bijection dérivable sur** I.
On **ne peut pas** dire dans le cas général que f^{-1} est dérivable sur J, mais on peut énoncer :

> Soit f une bijection dérivable de I sur J (**intervalles**). On suppose que $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$
>
> Alors f^{-1} est dérivable sur J et $\forall x \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Remarque 1 : si $\begin{cases} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$ on a donc $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}}$, ou plus généralement la formule

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Remarque 2 : on retrouve cette formule en dérivant l'égalité $\forall x \in J,\ f\left(f^{-1}(x)\right) = x$:

$$\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) \times f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1$$

3. Racines n-ièmes (dans $\mathbb{R}$)

a) Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Cas où n est pair. La fonction $x \to x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Sa réciproque se note

$$\sqrt[n]{\ } : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \to \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}^+$, et donc

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ x^n = y \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{x}}$$

Exemple : $\sqrt[4]{81} = 3,\ \sqrt[6]{-2}$ n'existe pas

(ii) Cas où n est impair. La fonction $x \to x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque se note

$$\sqrt[n]{\ } : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$, et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^n = y \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{x}}$$

Exemple : $\sqrt[5]{32} = 2,\ \sqrt[3]{-27} = -3$

b) Exposants rationnels : si $\boxed{x > 0}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{1/n}}$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, x > 0$,

$$\boxed{x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}}$$

Attention : la notation $x^{1/n}$ n'a de sens **que si** $x > 0$. On a donc $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$, mais $\sqrt[3]{-27} \neq (-27)^{1/3}$

c) Propriétés : soient $x > 0$ et $y > 0$. On a :

(i) $\boxed{\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}}$ et $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}}$

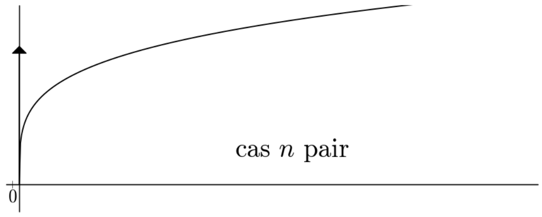
Remarque 1 : quantité conjuguée : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$: **très utilisé**.

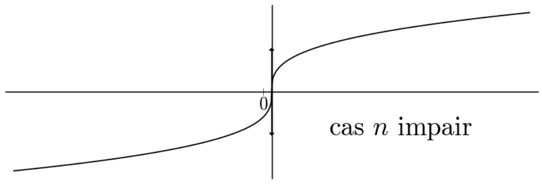
Remarque 2 : $x^{3/2} = x\sqrt{x},\quad x^{5/2} = x^2\sqrt{x},\quad x^{7/3} =$

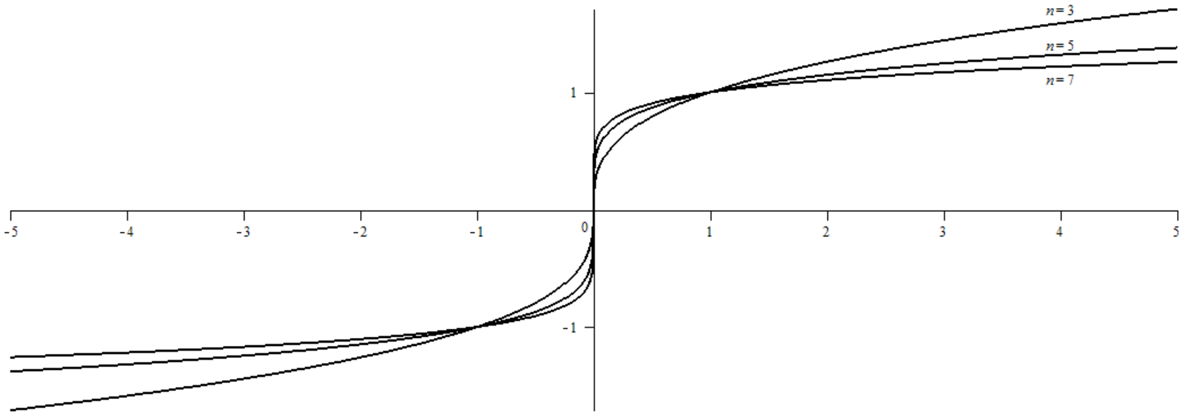
(ii) Dérivée : la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n\,(\sqrt[n]{x})^{n-1}}}$

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$. Formule valable sur $\mathbb{R}^*$ par parité.

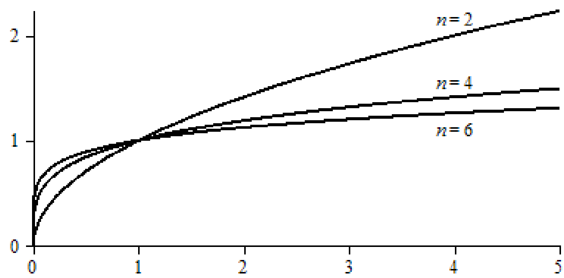
(iii) Courbes : noter les tangentes **verticales** en O







Valeurs impaires de n



Valeurs paires de n

4. Fonctions trigonométriques réciproques

a) <u>Fonction arcsinus</u> : $\widetilde{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est une bijection.

Sa réciproque est appelée **arcsinus** et notée $\arcsin$. Elle est **continue sur** $[-1,1]$

Ainsi, si $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x :

$$\boxed{\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \textbf{et} \quad \sin(\arcsin(x)) = x}$$

De plus, on a l'équivalence, pour $x \in [-1,1]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{\sin\theta = x \iff \theta = \arcsin x}$$

Mises en garde : 1. $\arcsin x$ n'a AUCUN SENS si $x \notin [-1,1]$

2. On n'a la simplification $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ **QUE** lorsque $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3. On n'a l'équivalence $\sin\theta = x \iff \theta = \arcsin x$ **QUE** pour $x \in [-1,1]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Valeurs remarquables : $\boxed{\arcsin 0 = 0}$ $\boxed{\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}$

Dérivabilité : on montre que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[\text{ , } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

De plus, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $]-1,1[$, alors $\arcsin(u)$ est dérivable sur I de dérivée

$$\boxed{[\arcsin(u)]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

Propriété : $\boxed{\arcsin \text{ est impaire}}$

b) <u>Fonction arccosinus</u> : $\widetilde{\cos} : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection.

Sa réciproque est appelée **arccosinus** et notée $\arccos$. Elle est **continue sur** $[-1,1]$

Ainsi, si $x \in [-1,1]$, $\arccos(x)$ est l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x :

$$\boxed{\arccos(x) \in [0,\pi] \quad \textbf{et} \quad \cos(\arccos(x)) = x}$$

De plus, on a l'équivalence, pour $x \in [-1,1]$ et $\theta \in [0,\pi]$:

$$\boxed{\cos\theta = x \iff \theta = \arccos x}$$

Mises en garde : 1. $\arccos x$ n'a AUCUN SENS si $x \notin [-1,1]$

2. On n'a la simplification $\arccos(\cos\theta) = \theta$ **QUE** lorsque $\theta \in [0,\pi]$

3. On n'a l'équivalence $\cos\theta = x \iff \theta = \arccos x$ **QUE** pour $x \in [-1,1]$ et $\theta \in [0,\pi]$

Valeurs remarquables : $\boxed{\arccos 0 = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\arccos 1 = 0}$ $\boxed{\arccos(-1) = \pi}$ $\boxed{\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}}$

Dérivabilité : on montre que $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[\text{ , } \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) <u>**Fonction arctangente**</u> **:** $\widetilde{\tan}:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ est une bijection.

Sa réciproque est appelée **arctangente** et notée $\arctan$. Elle est **continue sur** $\mathbb{R}$

Ainsi, si $x\in\mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x :

$$\boxed{\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad\textbf{et}\quad\tan(\arctan(x))=x}$$

De plus, on a l'équivalence, pour $x\in\mathbb{R}$ et $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\boxed{\tan\theta=x\iff\theta=\arctan x}$$

Mises en garde : 1. $\arctan x$ est défini POUR TOUT REEL

2. On n'a la simplification $\arctan(\tan\theta)=\theta$ **QUE** lorsque $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. On n'a l'équivalence $\tan\theta=x\iff\theta=\arctan x$ **QUE** pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Valeurs remarquables : $\boxed{\arctan 0=0}$ $\boxed{\arctan 1=\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}}$

Dérivabilité : on montre que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}}$$

De plus, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $\arctan(u)$ est dérivable sur I de dérivée

$$\boxed{[\arctan(u)]'=\frac{u'}{1+u^2}}$$

Propriété : $\boxed{\arctan\text{ est impaire}}$

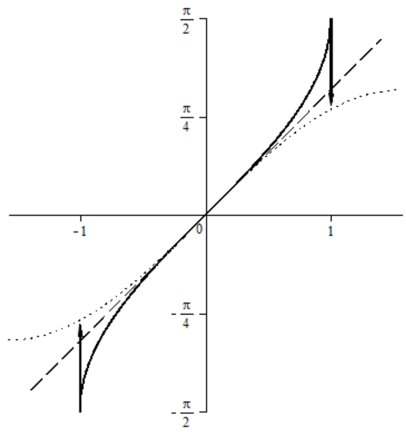
Limites : on montre que $\boxed{\lim_{+\infty}\arctan=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad\lim_{-\infty}\arctan=-\frac{\pi}{2}}$

d) <u>**Formulaire**</u> **:**

1. $\forall x\in[-1,1]\,,\ \boxed{\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}}$
2. $\forall x\in[-1,1]\,,\ \boxed{\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}}$
3. $\forall x\in\mathbb{R},\quad\boxed{\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ et $\boxed{\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$
4. $\forall x\in[-1,1]\,,\ \boxed{\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}}$
5. $\forall x\in[-1,1]\,,\ \boxed{\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi}$
6. $\forall x\neq 0,\quad\boxed{\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\operatorname{signe}(x)\,.\frac{\pi}{2}}$. On a posé $\operatorname{signe}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$

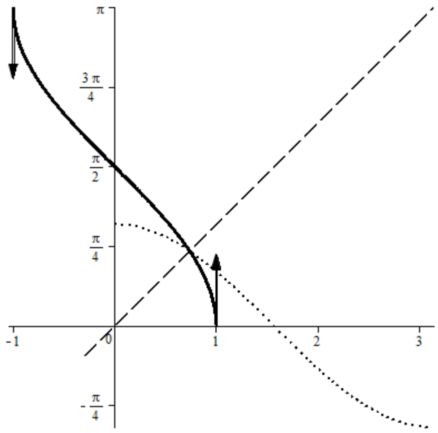
e) **<u>Courbes</u> :**

- Celle d'arcsinus admet pour tangente en O la droite d'équation $y = x$, et des tangentes verticales en -1 et 1



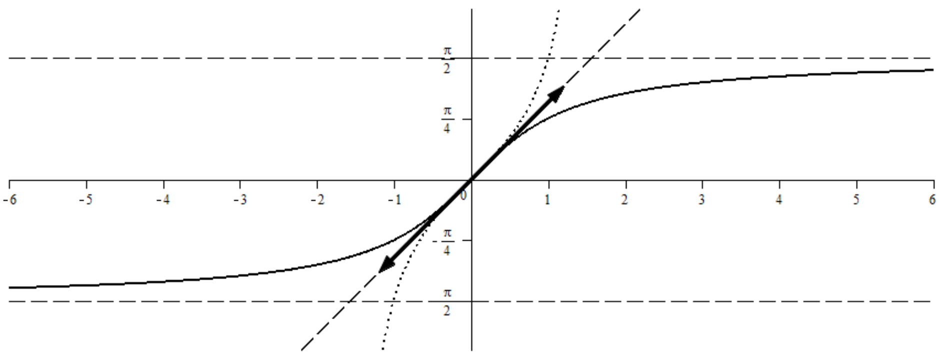
Courbe d'arcsinus

- Celle d'arccosinus admet des tangentes verticales en -1 et 1 et le point $\Omega\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pour centre de symétrie



Courbe d'arccosinus

- Celle d'arctangente admet pour tangente en O la droite d'équation $y = x$, et des asymptotes d'équations $y = \dfrac{\pi}{2}$ et $y = -\dfrac{\pi}{2}$



Courbe d'arctangente