Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer à l'aide du binôme de Newton que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Ex 2 Linéariser $\sin^7 x$, $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^6 x$

Ex 3 a) Quel est le coefficient de $x^2y^2z^2$ dans le développement de $(x+y+z)^7$?

b) Quel est le coefficient de $x^2y^3z^2$ dans le développement de $(x+y+z)^7$?

c) Plus généralement, si $i+j \leqslant n$, quel est le coefficient de $x^iy^jz^{n-i-j}$ dans le développement de $(x+y+z)^n$?

Ex 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^{n-k}}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{n-k}}$

Ex 5 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$.

Ex 6 Soient $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$. Montrer que que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$ et en déduire une simplification de

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

Ex 7 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $x \mapsto (1+x)^n$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

b) A l'aide de la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et retrouver le résultat précédent.

c) A l'aide de $\int_0^1 (1+x)^n \, dx$ calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Ex 8 Soient p et q des réels positifs tels que $p+q=1$. A l'aide de la question b) de l'exercice précédent calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ex 9 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1}$.

Calculer S_n et T_n, et en déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$

Ex 10 On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$

a) Soit p un entier fixé. Montrer que : $\forall n \geqslant p$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. Interpréter sur le triangle de Pascal.

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \frac{1}{2}(T_n - S_n)$.

c) En déduire l'expression (factorisée) de T_n.

Ex 11 Calculer la somme double $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j}$

Ex 12 Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Ex 13 Soit $n \geqslant 2$. Montrer que si $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$, et en déduire la limite de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$.

Ex 14 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$.

Ex 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall k \in [[0,n]]\ ,\ \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right)$.

En déduire une simplification de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$

Ex 16 Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Montrer (par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_{n+k} = f_{n+2p}$

Ex 17 Formule d'inversion de Pascal

a) Vérifier que pour tout triplet d'entiers naturels (j,k,n) on a $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

b) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

Indication : on pourra réindexer les sommes triangulaires qui interviennent dans le membre de droite.

Ex 18 Pour $p \in \mathbb{N}$, et pour tout entier $n \geqslant p$ on pose $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$.

a) Cas où $p = 0$. Calculer $S_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en distinguant le cas $n = 0$.

b) Cas où $p = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction polynomiale $f : x \to \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.

i. Simplifier $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, et en déduire deux expressions de la dérivée $f'(x)$.

ii. En déduire $S_n(1)$, en distinguant le cas $n = 1$

c) Cas où $p = 2$. Soit $n \geqslant 2$. On considère la fonction $g : x \to \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{kx}$.

i. Simplifier $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et en déduire deux expressions de la dérivée seconde $g''(x)$.

ii. En déduire $S_n(2)$, en distinguant le cas $n = 2$

d) Cas général.

i. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p+1$. Montrer que $S_n(p+1) = n(S_n(p) - S_{n-1}(p))$

ii. Montrer par récurrence sur p que $\forall p \in \mathbb{N},\ [S_p(p) = (-1)^p p! \quad \text{et} \quad \forall n > p,\ S_n(p) = 0]$