Ex 1 Parmi les matrices suivantes, effectuer tous les produits possibles de deux matrices (il y en a 9):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} ;\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 2 Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

En déduire que ni A ni B n'est inversible.

Ex 3 Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Montrer que AB et $A+B$ sont nilpotentes.

Ex 4 Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A} = \left\{ M(a,b,c),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

a) Montrer que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

b) Montrer que tout produit d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

Ex 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a) Calculer $A^k,\ k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que M commute avec A si et seulement si M est combinaison linéaire de I, A et A^2.

Ex 6 A l'aide d'une matrice nilpotente, calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C}$.

Ex 7 Soient $(x_n), (y_n)$ et (z_n) les suites définies par récurrence par $x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 3y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 2y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 3y_n - 2z_n \end{cases}$$

a) Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ à l'aide et d'un polynôme annulateur et de suites récurrentes.

b) En déduire les expressions de (x_n) (y_n) et (z_n) en fonction de n.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$

Calculer (a_n) et (b_n) et en déduire la forme générale de $A^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Ex 9 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On note $\operatorname{tr} A = a + d$ et $\det A = ad - bc$.

a) Montrer que : $A^2 - (\operatorname{tr} A)\ A + (\det A)\ I_2 = 0$. (théorème de Cayley-Hamilton pour la dimension 2)

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A l'aide du a), calculer B^n, $n \in \mathbb{N}$, avec $B = \begin{pmatrix} 1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda \\ \lambda-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$

Ex 10 Calculer les inverse des matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \\ 2-i & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 11 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (**trace** de A)

a) Montrer que pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr} A + \mu \operatorname{Tr} B$

b) Montrer que pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$

c) Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}\left(PAP^{-1}\right) = \operatorname{Tr} A$

Ex 12 a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, et $B = PAP^{-1}$. Calculer A^k $(k \in \mathbb{N})$ à l'aide de A et P

b) Application : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $D = P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de A

Ex 13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$, et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

On note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_{ij}}$. Calculer $A\overline{A}$, et en déduire que A est inversible, en donnant A^{-1}.

Ex 14 Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, $D = \operatorname{Diag}(a_1,\dots,a_n)$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes valent 1.

On pose $A = J + D$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$, calculer ${}^tXX$ puis ${}^tXAX$, et en déduire que A est inversible.

Ex 15 On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes valent 1.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et σ la somme de tous les coefficients de A. Montrer que $JAJ = \sigma J$. Que vaut J^2 ?

b) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ définie par : $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}.

Ex 16 Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$. Montrer que N est nilpotente.

Ex 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre $p \geqslant 1$. On pose $B = I_n - A$.

Montrer que B est inversible et exprimer son inverse à l'aide de A (penser à la factorisation de $I - A^p$)

Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in GL_4$ et calculer A^{-1}

Ex 18 Lemme d'Hadamard : soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire vérifiant $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en supposant l'existence d'un élément $X = (x_1,\dots,x_n)$ non nul tel que $AX = 0$ et en considérant $\max(|x_1|,\dots,|x_n|)$.

Ex 19 Matrices élémentaires : si $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on considère la matrice $E_{k\ell}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls hormis le terme d'indice (k,ℓ) qui vaut 1. On rappelle que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Exprimer le terme général de $E_{k\ell}$ à l'aide du symbole de Kronecker δ.

b) Exprimer une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide des matrices $E_{k\ell}$

c) Pour $(k,\ell,p,q) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $E_{k\ell}E_{pq}$

d) Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $AE_{k\ell}$ et $E_{k\ell}A$.

e) En déduire que la multiplication à gauche de A par $I_n + \lambda E_{pq}$ opère $L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q$

Ex 20 En utilisant les matrices élémentaires E_{ij} (exercice 19), déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA$$

Ex 21 a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{rg} M = 1 \Longleftrightarrow \exists L \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, \ \exists C \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \ / \ M = LC$.

Calculer dans ce cas M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^n = A$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

On pourra raisonner sur le rang d'une telle matrice M.

Ex 22 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = \dfrac{1}{(i+j-1)!}$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $AY = 0$. On définit le polynôme. $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-1)!} X^{n+k-1}$

a) Calculer $P^{(k)}(1)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b) En déduire que $P = 0$, et conclure sur la matrice A.

Ex 23 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Montrer que sur chaque colonne de A, il y a un unique terme non nul.

Ex 24 Une méthode hors programme de calcul de puissances : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2, et en déduire un polynôme P du second degré qui annule A.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.

c) En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Même question avec $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.