Ex 1 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. On encadre $x + y$:

$$\begin{array}{rcl} \lfloor x \rfloor & \leqslant & x < \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lfloor y \rfloor & \leqslant & y < \lfloor y \rfloor + 1 \end{array}$$

Il vient par somme

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

L'inégalité de gauche donne facilement $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$ par passage à la partie entière, croissante sur $\mathbb{R}$.

Celle de droite entraîne : $\lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.

Mais les deux membres étant entiers, on peut conclure à $\lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ CQFD.

Ex 2 Soit $x \notin \mathbb{Z}$. Montrons que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$:

On veut encadrer $-x$ entre deux entiers consécutifs : on part de la définition de $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow -\lfloor x \rfloor - 1 < -x \leqslant -\lfloor x \rfloor$$

En particulier

$$-\lfloor x \rfloor - 1 \leqslant -x \leqslant -\lfloor x \rfloor$$

Mais on ne peut conclure qu'en remarquant que si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $x \neq \lfloor x \rfloor$ et donc $-x \neq -\lfloor x \rfloor$. On a ainsi

$$-\lfloor x \rfloor - 1 \leqslant -x < -\lfloor x \rfloor \quad \text{avec} \quad -\lfloor x \rfloor - 1 \text{ et } -\lfloor x \rfloor \text{ entiers consécutifs.}$$

Les conditions sont réunies pour affirmer que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ CQFD.

Ex 3 Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrons que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$. On écrit les définitions :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Donc

$$-2x \leqslant -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2$$

Par ailleurs, toujours par définition :

$$2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$$

En sommant

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$$

Mais comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, on peut préciser

$$0 \leqslant \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1$$

Ce qui équivaut à $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$ CQFD.

b) Déduisons-en que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$: On peut appliquer le résultat précédent à x puis à $x + \frac{1}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \lfloor 2x + 1 \rfloor - 2\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant 1 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \lfloor 2x \rfloor + 1 - 2\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant 1 \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \lfloor 2x \rfloor - 2\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant 0 \end{array} \right.$$

En sommant et en divisant par 2, il vient

$$-\frac{1}{2} \leqslant \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{2}$$

La encore, comme l'expression du milieu est un entier, on peut conclure

$$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$$

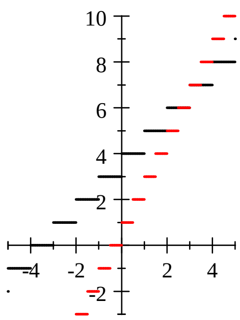
Ce qui prouve bien notre résultat.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\left\lfloor \sqrt{n^4+2n^3+3n^2+1} \right\rfloor = n^2+n$.

Cela revient à montrer que
$$n^2+n \leqslant \sqrt{n^4+2n^3+3n^2+1} < n^2+n+1$$
ou encore, puisque les trois membres de cet encadrement sont positifs, que
$$\left(n^2+n\right)^2 \leqslant n^4+2n^3+3n^2+1 < \left(n^2+n+1\right)^2$$
On forme les différences :
$$n^4+2n^3+3n^2+1-\left(n^2+n\right)^2 = 2n^2+1 > 0$$
et
$$\left(n^2+n+1\right)^2 - \left(n^4+2n^3+3n^2+1\right) = 2n > 0$$
Le résultat est donc démontré.

Ex 5 Résolution de l'équation $\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor \quad (E)$:

Le fait que 3 soit la solution de l'équation $2x+1 = x+4$ (donc de (E)) et le dessin suivant :



nous incitent à poser $x = 3+h$. Alors (E) devient
$$\lfloor 2h+7 \rfloor = \lfloor h+7 \rfloor \Longleftrightarrow \lfloor 2h \rfloor + 7 = \lfloor h \rfloor + 7 \Longleftrightarrow \lfloor 2h \rfloor = \lfloor h \rfloor \ \ (E')$$
<u>Analyse</u> : supposons que h soit solution de (E'). Alors encadrons :
$$h-1 < \lfloor h \rfloor \leqslant h$$
Donc
$$2h-2 < 2\lfloor h \rfloor \leqslant 2h$$
Et comme $\lfloor h \rfloor = \lfloor 2h \rfloor$:
$$2h-2 < 2\lfloor 2h \rfloor \leqslant 2h$$
Par ailleurs, toujours par définition :
$$2h-1 < \lfloor 2h \rfloor \leqslant 2h$$
Par différence il vient
$$-2 < \lfloor 2h \rfloor < 1 \quad \text{soit} \quad -1 \leqslant \lfloor 2h \rfloor \leqslant 0 \quad \text{puisque} \quad \lfloor 2h \rfloor \in \mathbb{Z}$$
Cela équivaut alors à $\lfloor 2h \rfloor \in \{-1, 0\}$, soit
$$-1 \leqslant 2h < 1$$
Ou enfin
$$\boxed{-\tfrac{1}{2} \leqslant h < \tfrac{1}{2}}$$
<u>Synthèse</u> : soit $x = 3+h$ avec $h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Alors

– si $h \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, on a $\begin{cases} 2x+1 = 7+2h \text{ avec } 2h \in [0,1[\,,\ \text{donc } \lfloor 2x+1 \rfloor = 7 \\ x+4 = 7+h \text{ avec } h \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\,,\ \text{donc } \lfloor x+4 \rfloor = 7 \end{cases}$. Ainsi
$$\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$$
– si $h \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$, on a $\begin{cases} 2x+1 = 7+2h \text{ avec } 2h \in [-1,0[\,,\ \text{donc } \lfloor 2x+1 \rfloor = 6 \\ x+4 = 7+h \text{ avec } h \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\,,\ \text{donc } \lfloor x+4 \rfloor = 6 \end{cases}$. Ainsi
$$\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$$
Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est l'intervalle $\boxed{\left[3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}\right[= \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[}$

Remarque : une autre solution proposée par un PCSI 1 : on utilise le résultat établi à l'exercice 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

Alors

$$\begin{aligned}(E) \quad &\iff \quad \lfloor 2x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 4 \\ &\iff \quad \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 3 \\ &\iff \quad \left\lfloor x - \frac{5}{2} \right\rfloor = 0 \\ &\iff \quad 0 \leqslant x - \frac{5}{2} < 1\end{aligned}$$

On trouve immédiatement l'intervalle $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[$ pour ensemble des solutions.

Ex 6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrons que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_k}{a} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{1}{a} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor$. Il suffit de majorer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \left\lfloor \tfrac{x_k}{a} \right\rfloor \leqslant \tfrac{x_k}{a}$$

Par sommation

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_k}{a} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Le membre de gauche est un entier (somme d'entiers) et minore $\frac{1}{a} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Il est donc inférieur à sa partie entière :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \tfrac{x_k}{a} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \tfrac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor \qquad \text{CQFD.}$$

Remarque : on peut aussi appliquer la partie entière, croissante sur $\mathbb{R}$, à l'inégalité.

Ex 7 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\,, n \in \mathbb{N}^*$ et $M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lfloor x^k \rfloor}{n}$. On encadre M :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ x^k - 1 < \lfloor x^k \rfloor \leqslant x^k$$

Par sommation, et puisque $x \neq 1$:

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} - n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - n < \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x^k \rfloor \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

En divisant par $n > 0$ on obtient :

$$\frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x} - 1 < M \leqslant \frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

On applique la partie entière, croissante sur $\mathbb{R}$ (mais pas strictement croissante) :

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x} - 1 \right\rfloor \leqslant \lfloor M \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x} \right\rfloor$$

ou

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x} \right\rfloor - 1 \leqslant \lfloor M \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x} \right\rfloor$$

Il vient facilement :

$$\boxed{0 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{n} \frac{1 - x^n}{1 - x} \right\rfloor - \lfloor M \rfloor \leqslant 1}$$

Ex 8 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$:

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{\text{CQFD}}{2}$$

et

$$2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{CQFD}$$

b) Soit $A = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$. En sommant l'ecadrement précédent, on a

$$2\sum_{k=1}^{10000}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < A < 2\sum_{k=1}^{10000}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

Après télescopages :

$$198 < 2\left(\sqrt{10001}-1\right) < A < 2\left(\sqrt{10000}-0\right) = 200$$

Cet encadrement a donc une amplitude trop grande pour pouvoir conclure sur $\lfloor A \rfloor$.
Faisons plus fin, en sommant seulement la deuxième inégalité à partir de 2 (car pour $k = 1$ elle donne $0 < 1$, qui nous a fait perdre une unité dans la sommation) :

$$A = 1 + \sum_{k=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + 2\sum_{k=2}^{10000}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = 1 + 2\left(\sqrt{10000}-1\right) = 199$$

On a ainsi

$$198 < A < 199$$

ce qui permet d'affirmer

$$\boxed{\lfloor A \rfloor = 198}$$

Ex 9 Pour calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ on utilise évidemment le théorème des gendarmes :

$$\forall x > 0,\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \text{ donc } 1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$$

$$\boxed{\text{La limite cherchée existe et vaut } 1}$$

De même pour $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$:

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

La minoration donne alors

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = +\infty}$$

Ex 10 Soit $x \in \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. On encadre u_n :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$$

Par sommation

$$x\frac{n(n+1)}{2} - n = x\sum_{k=1}^{n} k - n < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant x\sum_{k=1}^{n} k = x\frac{n(n+1)}{2}$$

En divisant par $n^2 > 0$:

$$\frac{n+1}{n}\frac{x}{2} - \frac{1}{n} < u_n \leqslant \frac{n+1}{n}\frac{x}{2}$$

Le théorème es gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n \text{ existe et vaut } \frac{x}{2}}$$

Ex 11 Approximations décimales d'un réel à l'ordre n : soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad x'_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} = x_n + 10^{-n}$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = 10^n \left(x_n - x_{n-1} \right) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$$

a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < x_n \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, donc en divisant par 10^n :

$$\boxed{x_n \leqslant x < x'_n}$$

Pour $x = \frac{22}{7}$, on a

$$\begin{array}{lll} x_0 = \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor = 3 & \text{et} & x'_0 = 4 \\ x_1 = \frac{1}{10} \left\lfloor \frac{220}{7} \right\rfloor = 3.1 & \text{et} & x'_1 = 3.2 \\ x_2 = \frac{1}{100} \left\lfloor \frac{2200}{7} \right\rfloor = 3.14 & \text{et} & x'_2 = 3.15 \\ x_3 = \frac{1}{1000} \left\lfloor \frac{22000}{7} \right\rfloor = 3.142 & \text{et} & x'_3 = 3.143 \end{array}$$

Par différences

$$\boxed{a_1 = 1,\ a_2 = 4 \text{ et } a_3 = 2}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $a_n \in [\![0, 9]\!]$. on encadre :

$$10^{n-1} x - 1 < \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor \leqslant 10^{n-1} x$$

Donc

$$-10^n x \leqslant -10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor < -10^n x + 10$$

Par ailleurs, toujours par définition :

$$10^n - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$$

En sommant

$$-1 < \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor < 10$$

Mais comme $\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{-n-1} x \right\rfloor$ est un entier, on peut préciser

$$0 \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor \leqslant 9 \quad \text{CQFD.}$$

a_n est un **chiffre**, appelé n-ième décimale de x.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire la somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = x_n - \lfloor x \rfloor$$

qui donne la formule assez intuitive :

$$\boxed{x_n = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}}$$

d) Montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x : elle est croissante puisque d'après b) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \frac{a_n}{10^n} \geqslant 0$$

Comme elle est majorée par x (question a)), on peut affirmer qu'elle est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Mais $x'_n = x_n + 10^{-n}$ converge alors aussi vers ℓ, et le passage à la limite dans l'inégalité $x_n \leqslant x < x'_n$ donne

$$\ell \leqslant x \leqslant \ell \quad \text{soit} \quad \ell = x$$

Ainsi

$$\boxed{\lim x_n = x}$$

Ex 12 Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\left|x - 2\left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor\right|$

a) Montrons que f est 2-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2) &= 2\left|x + 2 - 2\left\lfloor \frac{x+2+1}{2} \right\rfloor\right| \\ &= 2\left|x + 2 - 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} + 1 \right\rfloor\right| \\ &= 2\left|x + 2 - 2\left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right| \quad (\text{car } \forall a \in \mathbb{R},\ \lfloor a+1 \rfloor = \lfloor a \rfloor + 1) \\ &= 2\left|x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right| = f(x) \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $*$ Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\boxed{\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor = -x}$.
- $*$ Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors on a par définition $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$.
  $-\lfloor x \rfloor - 1$ et $-\lfloor x \rfloor$ sont deux entiers consécutifs encadrant $-x$, donc $\boxed{\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1 = -\lfloor x + 1 \rfloor}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{x+1}{2} = k \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2k - 1$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } x \text{ est un entier impair}}$$

d) <u>Etude de la parité de f</u> : soit $x \in \mathbb{R}$.

- $*$ Si x est un entier impair, alors $-x$ aussi, et alors $\dfrac{x+1}{2}$ **et** $\dfrac{-x+1}{2}$ sont entiers. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left|x - 2\frac{x+1}{2}\right| = 2\left|x - (x+1)\right| = 2 \\ f(-x) &= 2\left|-x - 2\frac{-x+1}{2}\right| = 2\left|-x - (-x+1)\right| = 2 \end{aligned}$$

- $*$ Sinon, on a d'après la relation établie au b) :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\left|-x - 2\left\lfloor \frac{-x+1}{2} \right\rfloor\right| \\ &= 2\left|x + 2\left\lfloor -\frac{x-1}{2} \right\rfloor\right| \\ &= 2\left|x + 2\left(-\left\lfloor \frac{x-1}{2} + 1 \right\rfloor\right)\right| \\ &= 2\left|x - 2\left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right)\right| = f(x) \end{aligned}$$

Dans tous les cas on a bien $f(-x) = f(x)$, et

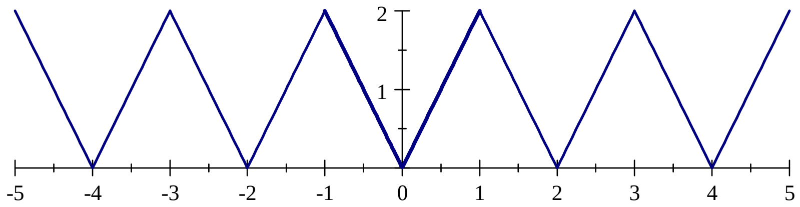
$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

e) Si $x \in [0, 1[$, on a $\dfrac{x+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ donc $\left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$. Il s'ensuit que

$$\boxed{f(x) = 2|x| = 2x}$$

Cette dernière expression est valable pour $x \in [0, 1]$ puisque $f(1) = 2$ (1 est un entier impair!)

f) On trace la courbe sur $[0, 1]$, puis par symétrie d'axe (Ox) sur $[-1, 0]$, et sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité.


2
1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5