Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Un **sous-espace vectoriel** F de E est un sous ensemble de E contenant 0_E et stable par combinaisons linéaires

$$\boxed{0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F}$$

2. a) Une **application linéaire** f de E dans F (où F est un $\mathbb{K}$-ev) est une application vérifiant

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)}$$

- Le **noyau** de f est le sous ensemble de E des antécédents de 0_F par f :

$$\boxed{\ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}}$$

C'est un sous espace vectoriel de E.

- L'**image** de f est le sous ensemble de F des images par f de tous les éléments de E :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in E\}}$$

C'est un sous espace vectoriel de F, et on a

$$\boxed{y \in \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \exists x \in E \ / \ y = f(x)}$$

b)
- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E.
- Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire bijective.
- Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (à valeurs numériques).

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E :

a) $(e_1, \dots, e_n)$ est dite **génératrice** si tout vecteur de E peut se décomposer en combinaison linéaire des e_i :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}$$

b) $(e_1, \dots, e_n)$ est dite **liée** lorsqu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les e_i :

$$\boxed{\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \ / \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E}$$

c) $(e_1, \dots, e_n)$ est dite **libre** si elle n'est pas liée, ce qui revient à l'implication

$$\boxed{\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\right)}$$

d) $(e_1, \dots, e_n)$ est appelée **base** de E lorsque tout vecteur de E peut se décomposer de manière unique en combinaison linéaire des e_i :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}$$

$\mathcal{B}$ est une base de E revient à dire que $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E.

4. L'**espace engendré** par $x_1, \ldots, x_n$ (éléments de E) est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$:

$$\boxed{\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}}$$

C'est un sous espace vectoriel de E, le plus petit contenant $x_1, \ldots, x_n$

5. La **somme** de deux sous espaces vectoriels F et G de E est l'ensemble des sommes d'éléments de F et G :

$$\boxed{F + G = \{x_F + x_G,\ x_F \in F,\ x_G \in G\}}$$

C'est un sous espace vectoriel de E, le plus petit contenant Fet G.

6. $E = F \oplus G$ (F et G sont **supplémentaires** dans E) signifie que tout vecteur de E se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G\ /\ x = x_F + x_G}$$

7. On suppose $E = F \oplus G$

a) Le **projecteur** p **sur** F **parallèlement à** G associe à tout vecteur de E sa composante sur F dans la décomposition sur F et G :

$$\boxed{\text{si } x = x_F + x_G,\ x_F \in F,\ x_G \in G, \text{ alors } p(x) = x_F}$$

C'est un endomorphisme de E, non injectif et non surjectif si $F \neq E$.

b) La **symétrie** s **par rapport à** F **parallèlement à** G associe au vecteur $x = x_F + x_G,\ (x_F, x_G) \in F \times G$ le vecteur

$$\boxed{s(x) = x_F - x_G}$$

Autrement dit, si p et q sont les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$, alors

$$\boxed{s = p - q = 2p - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2q}$$

8. Un endomorphisme f est **inversible** dans $\mathcal{L}(E)$ si

$$\boxed{\exists g \in \mathcal{L}(E)\ /\ f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E}$$

Cela revient à dire que f est bijective, c'est-à-dire un **automorphisme** de E de réciproque g.