Ex 1 **Produit d'espaces vectoriels** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On pose

$$\forall \left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right) \in \left(E \times F\right)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \left\{ \begin{array}{l} (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \\ \lambda\left(x,y\right) = (\lambda x, \lambda y) \end{array} \right.$$

Montrons que ces lois définissent une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $E \times F$ (dite structure produit) :

- La loi d'addition est bien interne, et la loi de multiplication est bien externe.
- Vérifions les axiomes de définition :
  - La loi $+$ est commutative : si $\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right) \in \left(E \times F\right)^2$,
  $$\begin{array}{rcl} (x,y) + (x',y') & = & (x+x', y+y') \\ & = & (x'+x, y'+y) \\ & = & (x'y') + (x,y) \end{array}$$
  - La loi $+$ est associative : si $\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right),\left(x'',y''\right)\right) \in \left(E \times F\right)^3$,
  $$\begin{array}{rcl} \left((x,y) + (x',y')\right) + (x'',y'') & = & (x+x', y+y') + (x'',y'') \\ & = & (x+x'+x'', y+y'+y'') \\ & = & (x,y) + (x'+x'', y'+y'') \\ & = & (x,y) + \left((x',y') + (x'',y'')\right) \end{array}$$
  - L'élément $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$ est neutre pour l'addition : si $(x,y) \in E \times F$,
  $$(x,y) + (0_E, 0_F) = (x + 0_E, y + 0_F) = (x,y)$$
  - Tout élément $(x,y) \in E \times F$ admet un symétrique $-\left(x,y\right) = (-x - y)$ pour l'addition, vérifiant :
  $$(x,y) + \left(-\left(x,y\right)\right) = (x,y) + (-x-y) = (x-x, y-y) = (0_E, 0_F) = 0_{E\times F}$$
  - Si $(x,y) \in E \times F$, on a bien $1\left(x,y\right) = (1x, 1y) = (x,y)$.
  - Si $(x,y) \in E \times F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors
  $$\lambda\left(\mu\left(x,y\right)\right) = \lambda\left(\mu x, \mu y\right) = \left(\lambda\left(\mu x\right), \lambda\left(\mu y\right)\right) = \left(\left(\lambda\mu\right)x, \left(\lambda\mu\right)y\right) = \left(\lambda\mu\right)\left(x,y\right)$$
  - Si $(x,y) \in E \times F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors
  $$\begin{array}{rcl} \left(\lambda+\mu\right)\left(x,y\right) & = & \left(\left(\lambda+\mu\right)x, \left(\lambda+\mu\right)y\right) \\ & = & (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) \\ & = & (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) \\ & = & \lambda\left(x,y\right) + \mu\left(x,y\right) \end{array}$$
  - Si $\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right) \in \left(E \times F\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
  $$\begin{array}{rcl} \lambda\left((x,y) + (x',y')\right) & = & \lambda\left(x+x', y+y'\right) \\ & = & \left(\lambda\left(x+x'\right), \lambda\left(y+y'\right)\right) \\ & = & (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y') \\ & = & (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') \\ & = & \lambda\left(x,y\right) + \lambda\left(x',y'\right) \end{array}$$

Ex 2 Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E.

Montrons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel que si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

- On suppose que $F \subset G$ ou $G \subset F$: alors dans le premier cas $F \cup G = G$ et dans le second $F \cup G = F$.

  Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E.

- On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

  Par l'absurde, si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors on dispose d'un vecteur $x \in F \backslash G$ et d'un vecteur $y \in G \backslash F$.

  Alors par hypothèse $z = x + y \in F \cup G$. Mais :

  * Si $z \in F$ alors $y = z - x \in F$ contradiction
  * Si $z \in G$ alors $x = z - y \in G$ contradiction

  On est dans une impasse dans chaque cas, ce qui prouve que $F \subset G$ ou $G \subset F$, CQFD.

Ex 3 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

a) * L'ensemble E_1 des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

- La fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
- Soient $(f, g) \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists M \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M \\ \exists M' \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leqslant M' \end{array} \right.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\lambda f(x) + g(x)| \overset{\text{I.T.}}{\leqslant} |\lambda| \, |f(x)| + |g(x)| \leqslant |\lambda| \, M + M'$$

Ainsi $\lambda f + g \in E_1$, CQFD.

* L'ensemble E_2 des fonctions vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1$ ne contient pas la fonction nulle, donc n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

b) * L'ensemble E_3 des polynômes unitaires n'est pas stable par somme ($X + X = 2X$!!) donc n'est pas un espace vectoriel.

* L'ensemble E_4 des polynômes divisibles par $X^2 + 1$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$:

- Le polynôme nul est divisible par $X^2 + 1$.
- Soient $(P_1, P_2) \in E_4$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X] \ / \ P_1 = \left(X^2+1\right) Q_1 \\ \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X] \ / \ P_2 = \left(X^2+1\right) Q_2 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda P_1 + P_2 = \left(X^2+1\right)(\lambda Q_1 + Q_2) \in E_4, \text{CQFD}.$$

c) * L'ensemble E_5 des suites complexes convergentes et un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

- La suite nulle est convergente
- Toute combinaison linéaire de suites convergentes converge.

* L'ensemble E_6 des suites géométriques réelles n'est pas stable par somme : en effet, la suite u de terme général $u_n = 2^n + 3^n$ n'est pas géométrique, sinon la suite v de terme général $\dfrac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 3^n}$ serait constante. Or

$$v_0 = \frac{5}{2} \neq \frac{13}{5} = v_1 \quad \text{contradiction}$$

* Soit E_7 l'ensemble des suites géométriques de raison 2. Les suites de E_7 ont un terme général du type $\lambda 2^n$ où λ est un réel. Si on pose $v = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors les suites u de E_4 sont toutes multiples de v, soit

$$E_7 = \{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(v)$$

A ce titre (droite vectorielle), E_7 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

d) L'ensemble E_8 des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 2u_n \quad (*)$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet :

$*$ La suite nulle vérifie évidemment la relation de récurrence $(*)$

$*$ Soient u et v deux suites de E_8 et λ un réel. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 2u_n \\ v_{n+2} = 5v_{n+1} - 2v_n \end{cases}$$

En combinant :

$$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = 5\left(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}\right) - 2\left(\lambda u_n + v_n\right)$$

Autrement dit la suite $\lambda u + v$ vérifie $(*)$, i.e. $\lambda u + v \in E_8$, CQFD.

Ex 4 Soit $E = \mathbb{R}^4$. On confond $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_{41}(\mathbb{R})$.

a) Soit $F = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + t - 3z = 0\right\}$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow y = 2x + t - 3z \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2x + t - 3z \\ z \\ t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc F est l'espace engendré par les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A ce titre, F est un sous espace vectoriel de E.

De plus la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre. En effet si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_E$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{cases} a = 0 \\ 2a - 3b + c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de F et donc

$$\boxed{\dim F = 3}$$

b) Soit $G = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x + y - t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}\right\}$. Pareillement

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = x + y \\ z = -x + 2y \end{cases} \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + 2y \\ x + y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc G est l'espace engendré par les vecteurs $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A ce titre, G est un sous espace vectoriel de E. Comme e'_1 et e'_2 ne sont pas colinéaires, la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est libre, et

$$\boxed{\dim G = 2}$$

Ex 5 Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -b+c & 3b-c \\ 2b & a+2b-c & b+2c \\ -3b & -2b & a-b+2c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. On pose :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & -b+c & 3b-c \\ 2b & a+2b-c & b+2c \\ -3b & -2b & a-b+2c \end{pmatrix} = aI + bJ + cK$$

avec

$$I = I_3, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$F = \left\{ aI + bJ + cK,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(I,J,K)$$

Espace engendré par $I,\ J,\ K$, F est un sous espace vectoriel de E.

De plus, la famille $\mathcal{B} = (I,J,K)$ qui engendre F, est aussi libre. En effet, si (a,b,c) sont tels que

$$aI + bJ + cK = 0_E \quad \text{alors} \quad \begin{pmatrix} a+b & -b+c & 3b-c \\ 2b & a+2b-c & b+2c \\ -3b & -2b & a-b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $b = 0$ (coefficient $(2,1)$), puis que $a = 0$ (coefficient $(1,1)$) et $c = 0$ (coefficient $(1,2)$).

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de F et $\boxed{\dim F = 3}$

Ex 6 Soient $E = \mathbb{C}^4$, et $a \in \mathbb{C}$. On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}\ ;\ X_2 = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ X_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\ ;\ X_4 = \begin{pmatrix} a^3 \\ 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

a) On suppose $a^4 \neq 1$ soit $a \notin \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

Montrons que $\mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) = E$, i.e. tout vecteur X de E peut s'écrire

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 \quad (*) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^4$$

$$\text{Avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},\ (*) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + a\lambda_2 + a^2\lambda_3 + a^3\lambda_4 = x \\ a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \lambda_4 = y \\ a^2\lambda_1 + a^3\lambda_2 + \lambda_3 + a\lambda_4 = z \\ a^3\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 + a^2\lambda_4 = t \end{array} \right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - a^3L_1$ donnent, en utlisant la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & x \\ a & a^2 & a^3 & 1 & y \\ a^2 & a^3 & 1 & a & z \\ a^3 & 1 & a & a^2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & y-ax \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a\left(1-a^4\right) & z-a^2x \\ 0 & 1-a^4 & a\left(1-a^4\right) & a^2\left(1-a^4\right) & t-a^3x \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & x \\ 0 & 1-a^4 & a\left(1-a^4\right) & a^2\left(1-a^4\right) & t-a^3x \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a\left(1-a^4\right) & z-a^2x \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & y-ax \end{pmatrix}$$

Le système est échelonné et de rang 4, donc de Cramer, et admet une unique solution. On paut affirmer que

$$\boxed{\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ est une base de } \mathbb{C}^4}$$

b) Lorsque $a^4 = 1$, i.e. $a \in \{1, i, -1, -i\}$, alors la matrice augmentée du système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-a^3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-a^2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y-ax \end{pmatrix}$$

Le système est de rang 1 et n'est compatible que si $y - ax = z - a^2x = t - a^3x = 0$

Par exemple $X = (1,0,0,0)$ ne peut pas se décomposer sur (X_1, X_2, X_3, X_4), qui n'est donc pas génératrice.

Ex 7 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ définie par

$$\begin{aligned} P_1 &= (X-2)(X-3)(X-4) \quad P_2 = (X-1)(X-3)(X-4) \\ P_3 &= (X-1)(X-2)(X-4) \quad P_4 = (X-1)(X-2)(X-3) \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre : si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ vérifient $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0_E$, alors en substituant successivemnt $1, 2, 3$ et 4 à X, on obtient directement

$$-6\lambda_1 = 0, \quad 2\lambda_2 = 0, \quad -2\lambda_3 = 0, \quad 6\lambda_4 = 0 \quad \text{CQFD}$$

Ex 8 **Base de Lagrange**. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts, et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose pour $p \in [\![0, n]\!]$:

$$L_p = \frac{\prod_{k \neq p} (X - a_k)}{\prod_{k \neq p} (a_p - a_k)}$$

On remarque que si $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{p\}$, alors $L_p(a_i) = 0$, et que $L_p(a_p) = 1$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ L_p(a_i) = \delta_{pi}$$

- Montrons que $\mathcal{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une famille libre : si $(\lambda_0, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifie

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0_E$$

  Alors pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, en évaluant en a_j, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(a_j) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{kj} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_j = 0 \quad \text{CQFD.}$$

- Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in E$. On cherche $(\lambda_0, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$$

  * **Analyse** : si $(\lambda_0, \ldots \lambda_n)$ convient, alors

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \ P(a_j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{kj} = \lambda_j$$

  * **Synthèse** : on pose $(\lambda_0, \ldots \lambda_n) = (P(a_0), \ldots P(a_n))$,

$$Q = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k \quad \text{et} \quad R = P - Q$$

    Alors

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \ R(a_j) = P(a_j) - \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\delta_{kj} = P(a_j) - P(a_j) = 0$$

    $R \in \mathbb{R}_n[X]$ admet donc $n+1$ racines distinctes. Il est donc nul, c'est-à-dire $P = Q$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k \quad \text{CQFD.}$$

- On peut conclure que $\mathcal{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle

$$\boxed{\text{les coordonnées d'un polynôme } P \text{ sont } (P(a_0), \ldots P(a_n))}$$

Ex 9 On considère les vecteurs de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$f_0 : x \mapsto 1, \quad f_1 : x \mapsto \cos(x), \quad f_2 : x \mapsto \cos^2(x), \quad f_3 : x \mapsto \cos^3(x), \quad g_2 : x \mapsto \cos(2x), \quad g_3 : x \mapsto \cos(3x).$$

Montrons que : $\text{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) = \text{Vect}(f_0, f_1, g_2, g_3)$:

Notons $F = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$ et $G = \text{Vect}(f_0, f_1, g_2, g_3)$. La linéarisation donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\ \cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x)) \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2 = \frac{1}{2}(f_0 + g_2) \in G \\ f_3 = \frac{1}{4}(3f_1 + g_3) \in G \end{array} \right.$$

Comme $(f_0, f_1) \in G^2$, on en déduit que $\text{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) \subset G$, i.e. $F \subset G$.

Mais inversement (cf. Tchebychev)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_2 = 2f_2 - f_0 \in F \\ g_3 = 4f_3 - 3f_1 \in F \end{array} \right.$$

Comme $(f_0, f_1) \in F^2$, on en déduit que $\text{Vect}(f_0, f_1, g_2, g_3) \subset F$, i.e. $G \subset F$.

La double inclusion donne le résultat escompté.

Ex 10 Soient $E = C^0(\mathbb{R})$, et $a_1 < \cdots < a_n$ des réels ($n \geqslant 2$). Les familles suivantes sont elles libres dans E ?

a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on pose $f_i : x \mapsto e^{a_i x}$. Montrons que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Démonstration par l'absurde : supposons que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Considérons le plus grand entier k tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = 0_E$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_k e^{a_k x} = 0$$

On divise par $e^{a_k x}$ qui est le terme dominant en $+\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 e^{(a_1 - a_k)x} + \cdots + \lambda_{k-1} e^{(a_{k-1} - a_k)x} + \lambda_k = 0$$

On passe à la limite quand $x \to +\infty$: compte tenu du fait que $a_1 - a_k < 0, \ldots, a_{k-1} - a_k < 0$, on obtient

$$\lambda_k = 0 \quad \textbf{contradiction}$$

b) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on pose $g_i : x \mapsto e^{x + a_i}$. Alors pour $i \neq j$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_i\left(x\right) = e^{x + a_j - a_j + a_i} = e^{a_i - a_j} g_j\left(x\right), \quad \text{soit} \quad \boxed{g_i = e^{a_i - a_j} g_j}$$

Les vecteurs $g_1, \ldots, g_n$ sont donc deux à deux colinéaires, et $\boxed{\text{la famille } (g_1, \ldots, g_n) \text{ est liée}}$.

Remarque : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g_i = e^{a_i} \exp$, d'où $\text{Vect}\left(g_1, \ldots, g_n\right) = \text{Vect}\left(\exp\right)$ est une droite vectorielle.

c) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\varphi_i : x \mapsto \cos(x + a_i)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_i\left(x\right) = \cos\left(a_i\right) \cos\left(x\right) - \sin\left(a_i\right) \sin\left(x\right)$$

On en déduit

$$\boxed{\varphi_i = \cos\left(a_i\right) \cos - \sin\left(a_i\right) \sin \in \text{Vect}\left(\cos, \sin\right)}$$

* Si $n \geqslant 3$, alors $\text{Vect}\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right) \subset \text{Vect}\left(\cos, \sin\right)$, donc la famille $\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$ est liée.

  En effet, si elle était libre, la dimension de $\text{Vect}\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$ serait $n \geqslant 3$, ce qui contredit son inclusion dans le plan vectoriel $\text{Vect}\left(\cos, \sin\right)$.

* Si $n = 2$, alors si $\left(\varphi_1, \varphi_2\right)$ est liée, φ_1 et φ_2 doivent s'annuler aux mêmes points, en particulier en $\frac{\pi}{2} - a_1$. Donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a_1 + a_2\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad a_2 - a_1 \equiv 0 \ [\pi]$$

  Inversement, si $a_2 \equiv a_1 \ [\pi]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_2\left(x\right) = \cos\left(x + a_2\right) = \cos\left(x + a_1 + k\pi\right) = \left(-1\right)^k \cos\left(x + a_1\right)$$

  Donc $\varphi_2 = \left(-1\right)^k \varphi_1$, et $\left(\varphi_1, \varphi_2\right)$ est liée. Ainsi

$$\boxed{\left(\varphi_1, \varphi_2\right) \text{ est liée si et seulement si } a_2 \equiv a_1 \ [\pi]}$$

d) $\forall i \in [\![1, n]\!]$; on pose $h_i : x \mapsto |x - a_i|$. Montrons que $(h_1, \ldots, h_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i h_i = 0_E$. **Par l'absurde**, s'il existe $p \in [\![1, n]\!]\ /\ \lambda_p \neq 0$, alors

$$h_p = -\frac{1}{\lambda_p} \sum_{i \neq p} \lambda_i h_i$$

La fonction de gauche n'est pas dérivable en a_p, mais par combinaison linéaire, celle de droite l'est (h_i est dérivable en tout point sauf a_i). C'est une contradiction qui établit l'indépendance cherchée.

Ex 11 Soient $a_1 < \ldots < a_p$ des réels positifs. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on note $u(a)$ la suite de terme général a^n

Montrons que $(u(a_1), \ldots, u(a_p))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

– **Démonstration par récurrence** : $H(p)$: $(u(a_1), \ldots, u(a_p))$ est libre.

  * $u(a_1)$ n'est pas la suite nulle, donc $(u(a_1))$ est libre et $H(1)$ est vraie.
  * Soit $p \geqslant 2$. Supposons $H(p-1)$ et montrons $H(p)$:

    Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ vérifient $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i u(a_i) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, alors

    $$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 a_1^n + \cdots + \lambda_p a_p^n = 0$$

    On divise par la suite prédominante $u(a_p)$:

    $$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 \frac{a_1^n}{a_p^n} + \cdots + \lambda_{p-1} \frac{a_{p-1}^n}{a_p^n} + \lambda_p = 0$$

    On passe à la limite pour $n \to \infty$. Comme $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{a_i}{a_p} < 1$, on obtient $\boxed{\lambda_p = 0}$.

    Il reste donc l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i u(a_i) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, qui par hypothèse de récurrence ($(u(a_1), \ldots, u(a_{p-1}))$ est libre) assure que

    $$\boxed{\lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0}$$

    Au total, on a bien la nullité de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, d'où $H(p)$.

– **Démonstration par l'absurde** : supposons que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i u(a_i) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$.

  Considérons le plus grand entier k tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i u(a_i) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, soit

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 a_1^n + \cdots + \lambda_k a_k^n = 0$$

  La division par a_k^n non nul et le passage à la limite quand $n \to +\infty$ donnent alors $\lambda_k = 0$ **contradiction**.

Ex 12 a) T l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{tr} M = 0 = m_{11} + m_{22} + m_{33}$. (ensemble des matrices "de trace nulle"). D'après l'exercice 17, T admet la droite vectorielle

$$D = \operatorname{Vect}(I_3) \quad \text{(ensemble des matrices scalaires)}$$

pour supplémentaire. On peut en déduire que T est un hyperplan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a alors

$$\boxed{\dim T = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - 1 = 8}$$

Remarque : on peut aussi trouver une base de T, mais c'est lourd : on écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in T \Longleftrightarrow i = -a - e \Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & -a-e \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + bE_{12} + cE_{13} + dE_{21} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + fE_{23} + gE_{31} + hE_{32}$$

b) Généralisation à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on montre de même que

$$D_n = \operatorname{Vect}(I_n)$$

droite vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est supplémentaire de

$$T_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \operatorname{tr} M = 0\}$$

Donc

$$\boxed{T_n \text{ est un hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(T_n) = n^2 - 1}$$

Ex 13 a) Soient $\mathcal{S}_3, \mathcal{A}_3$ les espaces des matrices carrées réelles d'ordre 3 symétriques et antisymétriques.

* Tout élément A de $\mathcal{A}_3$ s'écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

avec

$$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est très facile de montrer que $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3)$ est une famille libre : en effet

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0_{\mathcal{M}_3} \iff \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

$\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathcal{A}_3$, et

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_3 = 3}$$

* De même tout élément S de $\mathcal{S}_3$ s'écrit sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = aS_1 + bS_2 + cS_3 + dS_4 + eS_5 + fS_6$$

avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$, et

$$S_1 = E_{11}, \ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_4 = E_{22}, \ S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_6 = E_{33}$$

Qui forme une base de $\mathcal{S}_3$. On a ainsi

$$\boxed{\dim \mathcal{S}_3 = 6}$$

* On a ainsi $\dim \mathcal{S}_3 + \dim \mathcal{A}_3 = 9 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{A}_3$, alors

$${}^tM = M = -M, \quad \text{donc} \quad M = 0_{\mathcal{M}_3}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{S}_3 \cap \mathcal{A}_3 = \{0_{\mathcal{M}_3}\}$, ce qui permet d'affirmer :

$$\boxed{\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3 \oplus \mathcal{A}_3}$$

Remarque : ce raisonnement ne donne en revanche pas la décomposition d'une matrice.

b) <u>Généralisation</u> : soit $n \geqslant 2$.

$*$ Montrons que $\boxed{\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}}$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n$, alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} = 0$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors $a_{ji} = -a_{ij}$. Donc

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} - \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}E_{ji} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\left(E_{ij} - E_{ji}\right)$$

La famille

$$\boxed{\mathcal{B} = \{E_{ij} - E_{ji},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}}$$

est donc génératrice de $\mathcal{A}_n$. Elle est libre car si $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\left(E_{ij} - E_{ji}\right) = 0_{\mathcal{M}_n}$, alors

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} - \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}E_{ji} = 0_{\mathcal{M}_n}$$

Par indépendance des matrices élémentaires E_{ij}, on a bien $1 \leqslant i < j \leqslant n \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$\mathcal{B}$ est ainsi une base de $\mathcal{A}_n$, et son cardinal est $\frac{n(n-1)}{2}$ (cf. dénombrements), CQFD.

$*$ Montrons que $\boxed{\dim \mathcal{S}_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Si $S = (s_{ij}) \in \mathcal{A}_n$, alors si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors $s_{ji} = s_{ij}$. Donc

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} s_{ij}E_{ji} = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}\left(E_{ij} + E_{ji}\right)$$

La famille

$$\mathcal{B} = \{E_{ii},\ i \in [\![1,n]\!]\} \cup \{E_{ij} + E_{ji},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

est donc génératrice de $\mathcal{S}_n$. Elle est libre car si $\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ii}E_{ii} + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}\left(E_{ij} + E_{ji}\right) = 0$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}E_{ij} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}E_{ji} = 0$$

Par indépendance des E_{ij}, on a bien $1 \leqslant i < j \leqslant n \Rightarrow s_{ij} = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow s_{ii} = 0$.

$\mathcal{B}$ est ainsi une base de $\mathcal{S}_n$, et son cardinal est $\frac{n(n+1)}{2}$, CQFD.

$*$ Il est facile de voir, comme au a), que $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right\}$. Comme

$$\dim \mathcal{S}_n + \dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n}$$

Ex 14 Soit F_T l'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$.

- La fonction nulle est T-périodique. et toute combinaison linéaire de fonctions T-périodiques l'est aussi : en effet si f et g sont T-périodiques et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + g)(x+T) = \lambda f(x+T) + g(x+T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$$
Donc $\lambda f + g$ st T-périodique. Ainsi $\underline{F_T \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

- $F_4 \cap F_6$ est l'ensemble des fonctions 4 et 6 périodiques. Une telle fonction f est alors 2-périodique : en effet
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) = f(x+6-4) = f(x)$$
Inversement toute fonction 2-périodique est aussi 4 et 6 périodique, d'où
$$\boxed{F_4 \cap F_6 = F_2}$$

- Si $f \in F_4 + F_6$. alors $\exists (f_4, f_6) \in F_4 \times F_6 \ / \ f = f_4 + f_6$. Mais alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+12) = f_4(x+12) + f_6(x+12) = f_4(x) + f_6(x)$$
Donc $f \in F_{12}$, et on a
$$\boxed{F_4 + F_6 \subset F_{12}}$$

Ex 15 Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 2z = 0 \right\}$, $\quad G = \operatorname{Vect}(X_0)$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
F (noyau) et G (droite) sont des sous espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont supplémentaires.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$. On cherche $(X_F, Y_G) \in F \times G$ uniques tels que $X = X_F + X_G$.

- **Analyse** : supposons avoir (X_F, Y_G). Posons $X_G = aX_0$, où $a \in \mathbb{R}$: alors
$$X_G = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} \text{ et } X_F = \begin{pmatrix} x-a \\ y+a \\ z-a \end{pmatrix}$$
Mais alors
$$X_F \in F \Rightarrow (x-a) + (y+a) + 2(z-a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(x+y+2z)$$
Ainsi
$$\boxed{X_G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y+2z \\ -x-y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{X_F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y-2z \\ x+3y+2z \\ -x-y \end{pmatrix}}$$

- **Synthèse** : soient X_F, Y_G ainsi définis.
  - $X_F \in F$ car il en vérifie l'équation, $X_G \in G$ car il s'écrit $X_G = \frac{1}{2}(x+y+2z) X_0$
  - Il est clair que $X_F + X_G = X$.

Ainsi, le couple (X_F, Y_G) existe et il est unique, CQFD.

Ex 16 Soient $E=\mathbb{R}^4$,

$$F=\left\{X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E\ /\ \left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=0\\x-y+2z-2t=0\end{array}\right.\right\}$$

et

$$G=\operatorname{Vect}(X_1,X_2)\,,\ \text{avec } X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et } X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

– F est un sous espace vectoriel de E. En effet :

  ∗ F contient 0_E (qui vérifie les deux équations),

  ∗ Si $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$ sont dans E et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda X+Y=\begin{pmatrix}\lambda x+x'\\\lambda y+y'\\\lambda z+z'\\\lambda t+t'\end{pmatrix}$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda x+x')+(\lambda y+y')+(\lambda z+z')+(\lambda t+t')=\lambda(x+y+z+t)+(x'+y'+z'+t')=0\\(\lambda x+x')-(\lambda y+y')+2(\lambda z+z')-2(\lambda t+t')=\lambda(x-y+2z-2t)+(x'-y'+2z'-2t')=0\end{array}\right.$$

– G est un sous espace vectoriel de E car c'est un espace engendré.

Montrons que $E=F\oplus G$:

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E$. On cherche $(X_F,Y_G)\in F\times G$ uniques tels que $X=X_F+X_G$.

– **Analyse** : supposons avoir (X_F,Y_G). Posons $X_G=aX_1+bX_2$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$: alors

$$X_G=\begin{pmatrix}a+b\\a+b\\a+b\\a-b\end{pmatrix}\text{ et } X_F=\begin{pmatrix}x-a-b\\y-a-b\\z-a-b\\t-a+b\end{pmatrix}$$

Mais alors $X_F\in F$ donne

$$\left\{\begin{array}{l}(x-a-b)+(y-a-b)+(z-a-b)+(t-a+b)=0\\(x-a-b)-(y-a-b)+2(z-a-b)-2(t-a+b)=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}2b+4a=x+y+z+t\\4b=x-y+2z-2t\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{8}(x+3y+4t)\\b=\frac{1}{4}(x-y+2z-2t)\end{array}\right.$$

Ainsi

$$\boxed{X_G=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3x+y+4z\\3x+y+4z\\3x+y+4z\\-x+5y-4z+8t\end{pmatrix}}\text{ et }\boxed{X_F=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5x-y-4z\\-3x+7y-4z\\-3x-y+4z\\x-5y+4z\end{pmatrix}}$$

– **Synthèse** : soient X_F,Y_G ainsi définis.

  ∗ $X_F\in F$ car il en vérifie les équations :

$$\left\{\begin{array}{l}(5x-y-4z)+(-3x+7y-4z)+(-3x-y+4z)+(x-5y+4z)=0\\(5x-y-4z)-(-3x+7y-4z)+2(-3x-y+4z)-2(x-5y+4z)=0\end{array}\right.$$

  ∗ $X_G\in G$ car il s'écrit

$$X_G=\frac{1}{8}(x+3y+4t)X_1+\frac{1}{4}(x-y+2z-2t)X_2$$

  ∗ Il est clair que $X_F+X_G=X$.

Ainsi, le couple (X_F,Y_G) existe et il est unique, CQFD.

Ex 17 Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, F l'ensemble des matrices scalaires ($\lambda I_3,\ \lambda \in \mathbb{R}$) et G l'ensemble des matrices de trace nulle.

a) F est la droite vectorielle engendrée par I_3 ($F = \operatorname{Vect}(I_3)$), donc un SEV de E.
G est le noyau de l'application trace, qui est linéaire, c'est donc un SEV de E.

b) Montrons que F et G sont supplémentaires, soit $E = F \oplus G$
On fixe $M \in E$, et on cherche un couple unique $(M_F, M_G) \in F \times G$ tel que $M = M_F + M_G$.

* **Analyse** : supposons avoir (M_F, M_G). Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ M = \lambda I_3$, donc

$$M = \lambda I_3 + M_G$$

On applique la trace, qui est linéaire. Comme M_G est de trace nulle :

$$\operatorname{tr}(M) = \lambda \operatorname{tr}(I_3) + \operatorname{tr}(M_G) = 3\lambda$$

Il vient $\lambda = \frac{1}{3}\operatorname{tr} M$, et donc

$$\boxed{M_F = \frac{1}{3}(\operatorname{tr}(M))\, I_3} \quad \text{et} \quad \boxed{M_G = M - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}(M))\, I_3}$$

* **Synthèse** : soit (M_F, M_G) ainsi défini. Alors :
  · $M = M_F + M_G$ (évident).
  · $M_F \in F$ (évident).
  · $M_G \in G$: en effet par linéarité :

$$\operatorname{tr}(M_G) = \operatorname{tr}(M) - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} M)\operatorname{tr}(I_3) = \operatorname{tr}(M) - (\operatorname{tr} M) = 0$$

* **Conclusion** : la décomposition existe, et elle est unique, CQFD.

Ex 18 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Soit $F = \{P \in E \ / \ P(a) = 0\}$.

i. Montrons que F est un sous espace vectoriel de E :

· Le polynôme nul 0_E est bien dans F (il s'annule en a).

· Si P et Q sont dans F et λ dans $\mathbb{R}$, alors $(\lambda P + Q)(a) = \lambda P(a) + Q(a) = 0$, d'où $\lambda P + Q \in F$, CQFD.

ii. Soit $\mathcal{B} = \left((X-a), (X-a)^2, \dots (X-a)^n\right)$. Si $P \in F$, d'après la formule de Taylor,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Mais comme $P(a) = 0$, on a

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

$\mathcal{B}$ est donc <u>génératrice</u> de F. Etagée en degrés, elle est aussi <u>libre</u>. Finalement <u>$\mathcal{B}$ est une base de F</u>, et

$$\boxed{\dim F = n}$$

iii. Considérons $F' = \mathbb{R}_0[X]$ (ensemble des polynômes constants).

· C'est un espace vectoriel de dimension 1 (engendré par le polynôme $X^0 = 1$).

· $F \cap F' = \{0_E\}$ puisque le seul polynôme constant qui s'annule en a est le polynôme nul.

· Comme $\dim F + \dim F' = n + 1 = \dim E$, on peut conclure :

$$\boxed{E = F \oplus F'}$$

Remarque : "il manque une constante" à un polynôme de F pour faire un polynôme quelconque.

b) Soit $G = \{P \in E \ / \ P(a) = P'(a) = 0\}$

i. Montrons que G est un sous espace vectoriel de E :

· Le polynôme nul 0_E est bien dans G (il s'annule en a ainsi que sa dérivée).

· Si P et Q sont dans F et λ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} (\lambda P + Q)(a) = \lambda P(a) + Q(a) = 0 \\ (\lambda P + Q)'(a) = \lambda P'(a) + Q'(a) = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où } \lambda P + Q \in G, \text{ CQFD.}$$

ii. Soit $\mathcal{B} = \left((X-a)^2, (X-a)^3, \dots (X-a)^n\right)$.

Soit $P \in G$. D'après la formule de Taylor, comme $P(a) = P'(a) = 0$, on a

$$P = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \frac{P''(a)}{2}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

$\mathcal{B}$ est donc génératrice de G, et comme elle est étagée en degrés, libre. Finalement <u>$\mathcal{B}$ est une base de G</u>, et

$$\boxed{\dim G = n - 1}$$

iii. Considérons $G' = \mathbb{R}_1[X]$ (ensemble des polynômes "affines").

· C'est un espace vectoriel de dimension 2.

· $G \cap G' = \{0_E\}$ puisque le seul polynôme affine qui admet a pour racine double est le polynôme nul.

· Comme $\dim G + \dim G' = n + 1 = \dim E$, on peut conclure :

$$\boxed{E = G \oplus G'}$$

Ex 19 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 0$. et $F = \{PQ,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
Il n'est pas difficile de voir que F (ensemble des polynômes divisibles par P) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (le polynôme nul est divisible par P et tout combinaison de polynômes divisibles par P l'est aussi).
Déterminons un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}[X]$ on pense à la division euclidienne :

$$\forall A \in \mathbb{K}[X],\ \exists!\,(Q,R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]\ /\ A = PQ + R$$

En posant $G = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $A_F = PQ$ et $A_G = R$, cela s'écrit :

$$\forall A \in \mathbb{K}[X],\ \exists!\,(A_F, A_G) \in F \times \mathbb{K}_{n-1}[X]\ /\ A = A_F + A_G$$

Autrement dit

$$\boxed{\mathbb{K}[X] = F \oplus G} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{K}[X]}$$

Ex 20 Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

- $\mathcal{P}$ est un sous espace vectoriel de E. En effet
  - La fonction nulle $\mathbb{O}$ est paire ($\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{O}(-x) = 0 = \mathbb{O}(x)$)
  - Si f et g sont paires et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est paire ($\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + g)(-x) = (\lambda f + g)(x)$)
- $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel de E : démonstration analogue.
- Montrons que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, i.e. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.
  Soit $f \in E$. on cherche un couple unique $(p,i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tel que $f = p + i\ \ (*)$
  - **Analyse** : supposons avoir p et i. Alors
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)$$
    En substituant $-x$ à x et en utilisant les parités de p et i, on obtient
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(x) - i(x)$$
    Il vient facilement
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{\begin{cases} p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}}$$
  - **Synthèse** : soient p et i ainsi définies. Alors
    - $\underline{p + i = f}$ (immédiat)
    - $\underline{p \in \mathcal{P}}$: en effet $\forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = p(x)$
    - $\underline{i \in \mathcal{I}}$: en effet $\forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -i(x)$
  - La décomposition existe et elle est unique CQFD.

On a ainsi démontré que tout fonction est somme d'une fonction paire et d'une impaire, en donnant la formul permettant cette décomposition.

- Par exemple, pour $f = \exp$, cela donne
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} p(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x \\ i(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x \end{cases}$$
  autrement dit la décomposition (unique) est
  $$\boxed{\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}}$$
- Si $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - x - 3$, alors en posant
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} p(x) = x^4 - 3 \\ i(x) = -2x^3 - x \end{cases}$$
  On a bien p paire et i impaire, et la décomposition unique de f est $f = p + i$.

Ex 21 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ / \ f(1) = f(2) = 0\}$, et G l'ensemble des fonctions affines.

– F est un sous espace vectoriel de E. En effet :

  * La fonction nulle $\mathbb{O}$ est dans F (elle s'annule en 1 et 2!!)
  * Si f et g sont dans F et λ dans $\mathbb{R}$, alors $(\lambda f + g)(1) = (\lambda f + g)(2) = 0$, donc $\lambda f + g \in F$.

– G est un sous espace vectoriel de E. En effet $G = \text{Vect}(f_0, f_1)$, avec $\begin{cases} f_0 : x \mapsto 1 \\ f_1 : x \mapsto x \end{cases}$.

– Montrons que $E = F \oplus G$.
Soit $h \in E$. on cherche un couple unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g \ \ (*)$

  * **Analyse** : supposons avoir f et g. Alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = ax + b$ et $(*)$ devient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ h(x) = f(x) + ax + b$$

En substituant 1 et 2 à x, sachant que $f(1) = f(2) = 0$:

$$\begin{cases} h(1) = a + b \\ h(2) = 2a + b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = h(2) - h(1) \\ b = 2h(1) - h(2) \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\boxed{\begin{cases} g(x) = [h(2) - h(1)]\, x + [2h(1) - h(2)] \\ f(x) = h(x) - [h(2) - h(1)]\, x - [2h(1) - h(2)] \end{cases}}$$

  * **Synthèse** : soient f et g ainsi définies. Alors
    · $\underline{f + g = h}$ (immédiat)
    · $\underline{g \in G}$: immédiat, g est affine.
    · $\underline{f \in F}$: en effet $\begin{cases} f(1) = h(1) - [h(2) - h(1)] - [2h(1) - h(2)] = 0 \\ f(2) = h(2) - 2[h(2) - h(1)] - [2h(1) - h(2)] = 0 \end{cases}$
  * La décomposition existe et elle est unique CQFD.

Ex 22 Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

– $\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n \ / \ {}^tM = M\}$ contient la matrice nulle, et si $(M, M') \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$${}^t(\lambda M + M') = \lambda\, {}^tM + {}^tM' = \lambda M + M' \quad \text{donc} \quad \lambda M + M' \in \mathcal{S}_n$$

– $\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n \ / \ {}^tM = -M\}$ se traite rigoureusemnt de la meme manière.

– Montrons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

On fixe $M \in \mathcal{M}_n$, et on cherche un couple unique $(S, A) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{A}_n$ tel que $M = S + A \ \ (*)$

  * **Analyse** : supposons avoir (S, A) . Alors en transposant $(*)$, par linéarité de la transposition :$(*)$

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A \ \ (\heartsuit)$$

$(*)$ et $(\heartsuit)$ donnent directement

$$\boxed{\begin{cases} S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \\ A = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \end{cases}}$$

  * **Synthèse** : soit (S, A) ainsi défini. Alors :
    · $M = S + A$ (évident).
    · $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$: ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$.
    · $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$: ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$
  * **Conclusion** : la décomposition existe, et elle est unique, CQFD.

Ex 23 Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E vérifiant

$$F \cap H \subset G, \quad H \subset F + G \quad \text{et} \quad G \subset H$$

Montrons que $G = H$: il suffit pour cela de montrer que $H \subset G$ puisqu'on a déjà $G \subset H$.

Soit $x \in H$. Alors comme $H \subset F + G$, $\exists\,(x_F, x_G) \in F \times G \;/\; x = x_F + x_G$.

Mais $x_G \in H$ par inclusion $G \subset H$, donc $x_F = x - x_G \in H$ par combinaison linéaire.

Ainsi $x_F \in F \cap H$, donc par hypothèse $x_F \in G$. Mais alors par somme $\underline{x = x_F + x_G \in G}$ CQFD.

Ex 24 Soient F, G, H, K des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E vérifiant $E = F \oplus G = H \oplus K$.

On suppose que $F \subset H$ et $G \subset K$. Montrons que $F = H$ et $G = K$.

Il suffit évidemment de montrer que $H \subset F$ et $K \subset G$. Soient donc $x_H \in H$ et $x_K \in K$.

Le vecteur $x = x_H + x_K \in E$ se décompose sur F et G de manière unique :

$$\exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G \;/\; x_H + x_K = x_F + x_G = x$$

Mais par hypothèse $x_F \in H$ puisque $F \subset H$ et $x_G \in K$ puisque $G \subset K$.

On a donc deux décompositions de x sur H et K. Comme $E = H \oplus K$, il y a unicité d'une telle décomposition, d'où

$$\underline{x_H = x_F \in F} \quad \text{et} \quad \underline{x_K = x_G \in G} \quad \text{CQFD.}$$

Ex 25 Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace E vérifiant $E = F + G$

Soit G' est un supplémentaire de $F \cap G$ dans G ($G = (F \cap G) \oplus G'$). Montrons que $E = F \oplus G'$:

- On a $\boxed{F \cap G'} = F \cap (G \cap G') = (F \cap G) \cap G' \boxed{= \{0_E\}}$ puisque $G = (F \cap G) \oplus G'$
- Soit $x \in E$. Alors on peut décomposer x en $x = x_F + x_G$, où $(x_F, x_G) \in F \times G$.
  Comme $G = (F \cap G) \oplus G'$, on peut décomposer x_G en $x_G = x_{F\cap G} + x_{G'}$, où $(x_{F\cap G}, x_{G'}) \in (F \cap G) \times G'$.
  Mais alors
  $$x = x_F + (x_{F\cap G} + x_{G'}) = (x_F + x_{F\cap G}) + x_{G'}$$
  avec $x_F + x_{F\cap G} \in F$ par somme et $x_{G'} \in G'$. Ainsi $\boxed{E = F + G'}$

Finalement F et G' sont supplémentaires.

Ex 26 Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soient

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $F = \operatorname{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ et $G = \operatorname{Vect}(a_4, a_5)$. Calcul des dimensions de F, G, $F \cap G$, $F + G$.

- Montrons que (a_1, a_2, a_3, a_4) est libre : si $xa_1 + ya_2 + za_3 + ta_4 = 0_E$, alors par pivot :

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x + y + z \qquad = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ 4x + 3y + z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \\ -2y - 5z + 2t = 0 \\ -y - 7z + 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \\ z - 2t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \\ z - 2t = 0 \\ -4t = 0 \end{cases}$$

  Il s'ensuit que $x = y = z = t = 0$, CQFD.
- Ainsi (a_1, a_2, a_3) est libre, donc $\boxed{\dim F = 3}$
- Manifestement (a_4, a_5) est libre, donc $\boxed{\dim G = 2}$
- $F+G = \operatorname{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = E$, car (a_1, a_2, a_3, a_4) est une base de E, donc l'engendre. $\boxed{\dim(F + G) = 4}$
- La formule de Grassmann donne alors $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = \boxed{1}$

Ex 27 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et F, G deux sous-espaces de E tels que : $\dim F + \dim G > n$.

Alors la formule de Grassmann donne

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) > n - \dim(F+G)$$

Comme $F + G \subset E \Rightarrow \dim(F+G) \leqslant n$, il s'ensuit

$$\underline{\dim(F \cap G) > 0} \quad \text{et donc} \quad \boxed{F \cap G \neq \{0_E\}}$$

Ex 28 a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et H, K deux hyperplans. Calculons la dimension de $H \cap K$.

* $\underline{1^{\text{er}} \text{ cas} : H = K}$, alors $H \cap K = H$ et $\boxed{\dim(H \cap K) = n-1}$

* $\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas} : H \neq K}$, alors $H \subset H + K \subset E$, donc

$$n - 1 \leqslant \dim(H+K) \leqslant n$$

Mais comme $H \neq H + K$ puisque $H + F$ contient un vecteur qui n'est pas dans H, on en déduit que

$$n - 1 < \dim(H+K)$$

d'où $\dim(H+K) = n$ et donc

$$H + K = E$$

La relation de Grassmann entraine alors :

$$\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H+K) = 2n - 2 - n$$

$$\boxed{\dim(H \cap K) = n-2}$$

b) Soit F est un sous-espace de dimension p. Calculons $\dim(H \cap F)$. Même méthode :

* $\underline{1^{\text{er}} \text{ cas} : F \subset H}$, alors $H \cap F = F$ et $\boxed{\dim(H \cap F) = p}$

* $\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas} : F \not\subset H}$, alors $H \subset H + F \subset E$, donc $n - 1 \leqslant \dim(H+F) \leqslant n$

Mais $H \neq H + F$ (car $H + F$ contient un vecteur qui n'est pas dans H), donc $n - 1 < \dim(H+F)$, d'où $\dim(H+F) = n$ et donc $H + F = E$. La relation de Grassmann entraine alors :

$$\dim H \cap F = \dim H + \dim F - \dim(H+F) = n - 1 + p - n$$

$$\boxed{\dim(F \cap H) = p-1}$$