Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

1. Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1. Généralités

a) **Définitions :** on s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{a(x)\,y' + b(x)\,y = u(x) \qquad (E)}$$

où a, b, u sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs réelles (ou complexes).
Une **solution** de (E) sur un intervalle $J \subset I$ est une fonction f dérivable sur J vérifiant

$$\forall x \in J, \quad a(x)\,f'(x) + b(x)\,f(x) = u(x)$$

On peut ajouter la **condition initiale** $f(x_0) = y_0$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Un problème $\left\{\begin{array}{l}\text{Equation différentielle}\\ \text{Conditions initiales}\end{array}\right.$ s'appelle un **problème de Cauchy**.

Exemple : $x^2y' - \dfrac{y}{1+x} = \arctan x$ est une équation différentielle définie sur $]-1, +\infty[$.

Cas particulier : si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $ay' + by = u(x)$ est dite **à coefficients constants** (définie sur $\mathbb{R}$)

Si $a \neq 0$, on l'écrit plus volontiers $y' - \lambda y = v(x)$, où $\lambda = -b/a$ et $v = u/a$

b) **Décomposition des solutions de (E) :**

(i) Equation homogène associée : l'équation

$$(E_0) \quad a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

est appelée **équation homogène associée à** (E) (ou équation "sans second membre")

(ii) Principe fondamental :

> Soit y_1 une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ("solution particulière").
> Alors toute solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme
> $y = y_1 + y_0$ où y_0 est solution de (E_0)

Morale : les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution de l'équation sans second membre à une solution particulière.

Dans la pratique, on résout l'équation homogène (facile), on cherche une solution particulière et on "recolle" à la fin.

c) **Principe de superposition des solutions :**

$$\begin{array}{rll}
\text{Si } y_1 \text{ est solution de} & (E_1) & a(x)\,y' + b(x)\,y = u(x) \\
\text{Si } y_2 \text{ est solution de} & (E_2) & a(x)\,y' + b(x)\,y = v(x)\,. \\
\text{Alors } y_1 + y_2 \text{ est solution de} & (E) & a(x)\,y' + b(x)\,y = u(x) + v(x)
\end{array}$$

Ce résultat (et le précédent) permet de décomposer la résolution en problèmes simples.

1.2. Résolution

a) <u>Résolution de l'équation homogène</u> $(E_0) : a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$

Attention : **on résout** (E_0) **sur un intervalle** I **<u>où</u>** $a(x)$ **<u>ne s'annule pas</u>**.

> Soit G est une primitive la fonction $\dfrac{b}{a}$ sur un intervalle I où a ne s'annule pas.
>
> Alors les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions de la forme :
>
> $y : x \mapsto Ce^{-G(x)}$, avec C constante réelle (ou complexe)

Lemme : si f est dérivable sur I, g continue sur I et G une primitive de g sur I, alors $\forall x \in I$,

$$\boxed{\left(f.e^{G}\right)' = (f' + g.f)\ e^{G}}$$

Remarque 1 : une condition initiale $y(x_0) = y_0$ détermine la constante C.

Remarque 2 : si une solution s'annule en $x_0 \in I$, alors c'est la fonction nulle.

Exemple : résolution de $(E) : xy' - 2y = 0$, <u>sur $]0, +\infty[$</u> avec la condition initiale $y'(1) = 3$

Cas particulier : si $(E) : y' - \lambda y = 0$ est à **coefficients constants**, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\boxed{y : x \mapsto Ce^{\lambda x}, \quad \text{avec } C \text{ constante}}$$

b) <u>Méthode de la variation de la constante</u> : soit G une primitive de $\dfrac{b}{a}$ sur I.

On cherche une solution ("particulière?") de $(E) : a(x)\,y' + b(x)\,y = u(x)$ sous la forme

$$\boxed{y(x) = C(x)\,e^{-G(x)}, \quad \text{où } C \text{ est une fonction dérivable sur } I}$$

Autrement dit on opère le **changement d'inconnue** sur I : $\left\{\begin{array}{l} y = Ce^{-G} \\ C = ye^{G} \end{array}\right.$.

Celui-ci amène à une équation différentielle d'ordre 1 où le coefficient de C est nul :

Exemple 1 : résolution de $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad(E)$ <u>sur $]0, +\infty[$</u> avec la condition initiale $y(1) = 0$.

Exemple 2 : résolution de $y' + 2y = e^{-2x} + e^{-x} + \sin x$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0) = 0$.

Exemple 3 : cas général : résolution de l'équation $y' - \lambda y = Ke^{\alpha x}$, avec $(\lambda, \alpha, K) \in \mathbb{C}^3$

Remarque 1 : forme intégrale des solutions sur I, si $x_0 \in I$ et $G : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}dt$:

$$y : x \mapsto e^{-G(t)} \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{a(t)} e^{G(t)} dt$$

Remarque 2 : théorème de Cauchy-Lipschitz :

> si u est continue sur l'intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$,
> alors le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} a(x)\,y' + b(x)\,y = u(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$ admet une unique solution.

c) <u>Exemples de raccordements de solutions d'équations différentielles</u> :

Exemple 1 : résolution $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$ de $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exemple 2 : résolution sur $\mathbb{R}$ de $xy' + y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

2. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1. Généralités

a) Définitions : on s'intéresse à l'équation différentielle (à coefficients constants)

$$\boxed{ay'' + by' + cy = u(x) \quad (E)}$$

où a, b, c sont des réels, avec $a \neq 0,\ c \neq 0$ et u une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (réelle ou complexe)
Le **problème de Cauchy** associé (avec **conditions initiales**) est

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = u(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{array}\right. , \text{ où } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3}$$

L'**équation homogène** associée est

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)}$$

b) Principe fondamental :

> Soit y_1 une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors toute solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme
> $y = y_1 + y_0$ où y_0 est solution de (E_0)

Remarque : on a encore le principe de superposition des solutions : soient

$$\begin{array}{rlcl} \text{si } y_1 \text{ est solution de } (E_1) & ay'' + by' + cy & = & u(x) \\ \text{et } y_2 \text{ est solution de } (E_2) & ay'' + by' + cy & = & v(x) \\ \text{alors } y_1 + y_2 \text{ est solution de } (E) & ay'' + by' + cy & = & u(x) + v(x) \end{array}$$

c) Solutions complexes et réelles : on suppose u, v à valeurs réelles. Soit

$$ay'' + by' + cy = u(x) + iv(x) \quad (E)$$

Une équation à second membre complexe.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est solution (complexe) de } (E)\text{, alors } \left\{\begin{array}{l} \operatorname{Re} f \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = u(x) \\ \operatorname{Im} f \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = v(x) \end{array}\right.}$$

En particulier,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est solution } \textbf{complexe} \text{ de } ay'' + by' + cy = 0\text{, alors } \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ aussi}} \quad (v = u = 0)$$

Remarque : résultat utilisé pour résoudre des équations dont le second membre est de la forme $K\cos(\omega x)$ ou $K\sin(\omega x)$: on préfère résoudre l'équation (complexe) de second membre $Ke^{i\omega x}$

2.2. Résolution de l'équation homogène

Remarque : y a-t-il des solutions de $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$ de la forme $y : x \to e^{\lambda x},\ (\lambda \in \mathbb{C})$?

a) Théorème :

Soient λ et μ les solutions (éventuellement complexes) de l'**équation caractéristique** $ax^2 + bx + c = 0$.

*Si $\lambda \neq \mu$, alors les solutions de $(E_0) \quad ay'' + by' + cy = 0$ sont de la forme :

$$y : x \to C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}, \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

*Si $\lambda = \mu$, alors les solutions de $(E_0) \quad ay'' + by' + cy = 0$ sont de la forme :

$$y : x \to (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda x}, \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes.

b) Solutions réelles : supposons $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: alors $\lambda = \alpha + i\omega,\ \omega > 0$, et $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\omega$.
Alors les solutions **réelles** de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y : x \to e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\right)}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque : on sait qu'on peut alors écrire $y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x\right)$ sous la forme

$$\boxed{y(x) = \rho e^{\alpha x} \cos(\omega x - \varphi)} \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi \in \left]-\pi, \pi\right]$$

c) Résumé : avec les mêmes notations :

1^er^ cas : si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: alors λ et μ sont réelles et distinctes. Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\boxed{x \to y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\mu x}}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \text{ constantes réelles}$$

2^ème^ cas : si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: alors $\lambda = \mu$ est racine double. Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\boxed{x \to y(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{\lambda x}}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \text{ constantes réelles}$$

3^ème^ cas : si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: alors en notant $\lambda = \alpha + i\omega$ on a $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\omega$.

Les solutions **complexes** de (E_0) sont de la forme :

$$x \to y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\bar{\lambda} x} \quad \text{avec } C_1, C_2 \text{ constantes complexes}$$

Les solutions réelles (celles qui nous intéressent) sont elles de la forme :

$$\boxed{x \to y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\right)}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \text{ constantes réelles}$$

d) Exemples :

Exemple 1 : $y'' - 2y' + y = 0 \quad$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$

Exemple 2 : $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

Exemple 3 : $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -7$

Cas particulier : équation $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega > 0$

2.3. Recherche d'une solution particulière

a) Equation avec second membre exponentiel : $(E)\ \ ay'' + by' + cy = Ke^{\alpha x}$, avec $\alpha \in \mathbb{C},\ K \in \mathbb{C}$

★ Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution particulière de la forme
$$y_1 : x \to y(x) = Ae^{\alpha x}, \text{ où } A \in \mathbb{C}$$
★ Si α est racine simple de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution particulière de la forme
$$y_1 : x \to y(x) = Axe^{\alpha x}, \text{ où } A \in \mathbb{C}$$
★ Si α est racine double de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution particulière de la forme
$$y_1 : x \to y(x) = Ax^2e^{\alpha x}, \text{ où } A \in \mathbb{C}$$

Dans tous cas la détermination de la constante A se fait en reportant y_1 dans (E) et en identifiant.

Cas particulier : si le second membre est **constant**, on cherche une solution particulière constante.

Exemple : $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch} x + \cos x$

b) Equation avec second membre trigonométrique : $(E)\ \ ay'' + by' + cy = K\cos(\omega x),\quad \omega > 0,\ K \in \mathbb{C}$

- 1ère méthode : on résout l'équation complexe $(E_{\mathbb{C}})\ \ ay'' + by' + cy = ke^{i\omega x} = k\cos(\omega x) + ik\sin(\omega x)$.
  Une solution particulière de (E) est la partie réelle d'une solution de $(E_{\mathbb{C}})$. Idem pour $K\sin(\omega x)$.
- 2ème méthode : on peut directement chercher une solution particulière de la forme $x \to a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, ou $x \to ax\cos(\omega x) + bx\sin(\omega x)$ sinon

Exemple 1 : $y'' + y = \cos 2x$

Exemple 2 : $y'' + y = \cos x$

c) Théorème :

si u est continue sur l'intervalle I, $x_0 \in I$ et $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$, alors

le problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = u(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$ admet une unique solution.