Lorsque ce n'est pas précisé, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non trivial.

Ex 1 Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E, et $1 \leq p < n$. On pose $r = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_n)$ et $s = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.
Montrer que $r - s \leqslant n - p$.

Ex 2 Soient f et g deux endomorphismes de E (de dimension n) tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g$.

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Ex 3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Calculer $\dim(\ker f + \operatorname{Im} f) + \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f)$.

b) En déduire que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f \iff \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

c) Application : on suppose que $f^3 + 3f^2 + f = 0$. Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Ex 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et f et g deux endomorphismes de E vérifiant

$$f \circ g = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad f + g \in GL(E)$$

Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

Ex 5 Soient E et F deux espaces de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et f, g des applications linéaires de E dans F.
Montrer (en considérant les images) :

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

Ex 6 Inégalités de Sylvester : soient E un espace de dimension n sur $\mathbb{K}$, et f, g deux endomorphismes de E.
En appliquant le théorème du rang à $h = f_{|\operatorname{Im} g}$, montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

Ex 7 a) Soit f un endomorphisme de E de rang 1.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul $a \in E$ et une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tels que

$$\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x)\, a$$

b) On suppose $E = \mathbb{R}^3$ et $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que l'on est dans le cas précédent.

Ex 8 **Interpolation de Lagrange** : soient n un entier naturel non nul et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts deux à deux.

a) On se propose de montrer que, pour tout élément $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P (interpolante de Lagrange) de degré inférieur à n tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = y_i$$

A cet effet, on introduit l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n))$$

Montrer que l'application φ est un isomorphisme et en déduire le résultat proposé.

b) Calculer l'interpolante de $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ à l'aide de la base de Lagrange $(L_0, \ldots, L_n)$, où l'on note

$$L_p = \prod_{k \neq p} \frac{X - x_k}{x_p - x_k}$$

Ex 9 Soit T une matrice triangulaire inversible de taille n. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ définie par $\varphi(M) = TM$.

a) Montrer que φ est linéaire injective, qu'elle induit un automorphisme de $\mathcal{T}_n$.

b) En déduire que T^{-1} est triangulaire supérieure.

Ex 10 Montrer que deux formes linéaires non nulles de E sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau.

Ex 11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

a) Montrer que si $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots 0)$, alors
$$H = \{x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E \ / \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$
est un hyperplan de E.

b) Inversement, soit H est un hyperplan de E.
Montrer qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots 0)$ tel que pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$ on ait
$$x \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$
$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est appelée équation de H dans la base $\mathcal{B}$.

Ex 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = \mathrm{id}_E$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On pose $\quad p = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + \cdots + f^{n-1}\right)$.

a) Montrer que $\quad \mathrm{Im}\, p \subset \ker(f - \mathrm{id}_E) \quad$ et $\quad \ker(f - \mathrm{id}_E) \subset \ker(p - \mathrm{id}_E) \quad$ (interpréter).

b) En déduire que p est un projecteur et donner son image.

c) On suppose que E est de dimension finie. Calculer $\ker p$.

Ex 13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre 3et de rang $2n$.
On se propose de démontrer que
$$\mathrm{Im}\, f^2 = \ker f \subsetneq \mathrm{Im}\, f = \ker f^2$$

a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \ker f$. En déduire une majoration de $\mathrm{rg}\, f^2$.

b) Montrer que $\ker f \subsetneq \ker f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subsetneq \mathrm{Im}\, f$.

c) Justifier que f induit une surjection $\tilde{f} : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f^2$ (définie par $\forall x \in \mathrm{Im}\, f,\ \tilde{f}(x) = f(x)$).
Calculer $\ker \tilde{f}$ et majorer sa dimension.

d) En appliquant le théorème du rang à $\tilde{f}$, prouver que $\mathrm{rg}\, f^2 = n$. Conclure.

Ex 14 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer l'existence de deux automorphismes de E tels que $u = f - g$.
Indication : compléter une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\ker u$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E
Compléter aussi $(u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n))$ (base de $\mathrm{Im}\, u$?) en une base $\mathcal{B}'$ de E. Définir f et g sur $\mathcal{B}$.

Ex 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère une **transvection** de E, c'est-à-dire un endomorphisme u vérifiant
$$\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\},\ \exists a \in \ker \varphi \ / \ \forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\, a$$
On note $H = \ker \varphi$

a) Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par u.

b) Montrer que u est inversible et déterminer u^{-1}.

c) Soit $g \in GL(E)$. Déterminer l'endomorphisme $v = g \circ u \circ g^{-1}$ $\quad$ (**conjuguée** de u)

d) On suppose E de dimension finie. Montrer que deux transvections sont toujours conjuguées.

Ex 16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
On rappelle que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$

a) On considère l'application $F : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ F(g) = f \circ g$.
Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer son rang en fonction de celui de f.

b) Même question avec $G : g \mapsto g \circ f$.

Ex 17 Quelles sont les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$?