Ex 1 Soit $x > 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{(x+k)^2} < \dfrac{1}{x+k-1} - \dfrac{1}{x+k}$.

En déduire une majoration de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si les réels a et b vérifient $0 < a < b$, alors $n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}$.

Ex 3 a) Montrer que $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x - 1$, et en déduire que $\forall k \geqslant 2,\ \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

b) On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Déduire du a) que $\ln \dfrac{2n+1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln 2$. Que vaut $\lim u_n$?

Ex 4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1}$. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$

Ex 5 a) Soit $n \geqslant 1$. Majorer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, puis $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Ex 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a $\quad n \leqslant k(n+1-k) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$

b) En déduire que $\quad n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

Ex 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire un encadrement de u_n.

Ex 8 Soient $n \geqslant 2$, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n réels strictement positifs.

On définit les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique par

$$M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad ; \quad m = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \quad ; \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

a) Montrer que $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x - 1$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

b) En appliquant cette inégalité à $\dfrac{a_k}{M},\ 1 \leqslant k \leqslant n$, démontrer que $m \leqslant M$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

c) En appliquant b) à $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, démontrer que $H \leqslant m$ (qui revient à $H^n \leqslant m^m$)

Ex 9 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

a) Exprimer $u_{n+1}^2 - u_n^2$ en fonction de u_n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2n+25}$.

b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \sqrt{2k+25} - \sqrt{2(k-1)+25} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2k+25}}$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 5 - \sqrt{23} + \sqrt{2n+23}$

d) Encadrer u_{1000} et déterminer $\lim \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$.