Matrices

Dans tout le chapitre, on désignera par $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Matrices et opérations algébriques

1.1. L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

a) <u>**Définitions**</u> **:** on appelle **matrice à** n **lignes et** p **colonnes** (ou **matrice** $n \times p$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ de la forme

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & j & \phantom{a_{1p}} \end{array} & \end{array}$$

On note aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou plus simplement (a_{ij}) . Le terme (i, j) de A se note parfois A_{ij}.

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices } n \times p \text{ à coefficients dans } \mathbb{K} \text{ se note } \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$$

Remarque : deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales lorsqu'elles ont mêmes coefficients :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]] \, , \; a_{ij} = b_{ij}}$$

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})\,;\quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,.$

- Les éléments de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sont les **matrices carrées d'ordre** n, et on note $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}$
- Les éléments de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ sont appelés **matrices colonnes**, et notées plus simplement $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  On identifiera $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (d'où la notation en colonne des n-uplets).
- Les éléments de $\mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ sont appelés **matrices lignes**, et notées plus simplement $L = (y_1, \ldots, y_p)$.

b) <u>**Sommes et combinaisons linéaires**</u> **:** on définit, si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & a_{ij} + b_{ij} & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \ldots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

$$\text{et pour } \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_p \\ \vdots & \lambda a_{ij} & \vdots \\ \lambda a_n & \ldots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si$(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

<u>$\lambda A + \mu B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de terme général $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$</u>

La **matrice nulle** $0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ est neutre pour l'addition, qui est **associative** et **commutative**.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, on a $A + \lambda I_n =$

1.2. Produits de matrices

a) <u>Produit d'une matrice et d'une colonne</u> : si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n \times p$, on not

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p, \quad AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

On a ainsi la multiplication d'une matrice $n \times p$ par une colonne $p \times 1$ qui donne une colonne $n \times 1$.

- On a vu que ce produit vérifiait $\boxed{A(\lambda X + \mu X') = \lambda AX + \mu AX'}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

  Il est facile de vérifier qu'on a aussi pour deux matrice $n \times p$ A et B : $\boxed{(\lambda A + \mu B) X = \lambda AX + \mu BX}$

- Posons $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, C_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$ les colonnes de A : alors on a $\boxed{AX = x_1C_1 + \cdots + x_pC_p}$:

  <u>AX est une combinaison linéaire des colonnes de A</u>

- Inversement, posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (dite base canonique de $\mathbb{K}^p$) :

  alors

$$\forall j \in [[1, p]], \ \boxed{AE_j = C_j}$$

Exemple 1 : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

Exemple 2 : la matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $\boxed{I_nX = X}$

Remarque : si $B \in \mathbb{K}^n$, $AX = B$ (S) est le système de matrice augmentée $A|B$

En notant $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application définie par $f(X) = AX$, la résolution de (S) revient à déterminer les antécédents X de B par f. A suivre...

b) <u>Produit de deux matrices</u> : on veut généraliser cette notion de produit à deux matrices rectangulaires.

Pour cela, on interprète celle de droite comme "concaténation" de colonnes. Soit donc A une matrice $n \times p$:

pour pouvoir définir AB, il faut que le nombre de ligne de B soit égal au nombre de colonnes de A.

<u>Définition</u> : soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de B.

Le produit $AB \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est défini comme la matrice $n \times p$ de colonnes sont $AC_1, \dots, AC_p$

Attention : BA n'a AUCUN SENS dans le cas général

Exemple : soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcul de AB.

Disposition pratique : règle du "sémaphore" : on "balaie" simultanément la ligne i de A et la colonne j

de B pour avoir le terme (i,j) de AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & & \cdots & & c_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & c_{ij} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & & \cdots & & c_{mp} \end{pmatrix} = AB = C \end{array}$$

Formule du produit : le terme (i,j) de AB est donc le "produit terme à terme" de la ligne i de A et de la colonne j de B :

$$\boxed{(AB)_{ij} = a_{i\mathbf{1}}b_{\mathbf{1}j} + a_{i\mathbf{2}}b_{\mathbf{2}j} + \cdots + a_{i\mathbf{n}}b_{\mathbf{n}j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}j}}$$

1.3. Propriétés de la multiplication matricielle

a) **Eléments "neutres" :** $\boxed{\text{si } A \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}),\text{ alors } I_n A = A I_p = A}$

b) **Associativité :** $\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_{mn},\ B \in \mathcal{M}_{np},\ C \in \mathcal{M}_{pq},\text{ alors } A(BC) = (AB)C \in \mathcal{M}_{mq}}$

A retenir : formule du "double produit" : pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant q$

$$\boxed{(ABC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j}}$$

Remarque : $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$

c) **Distributivité :** $\boxed{\text{Si } (A,A') \in \mathcal{M}_{mn}^2,\ (B,B') \in \mathcal{M}_{np}^2,\text{ alors } \begin{cases} (A+A')B = AB + A'B \\ A(B+B') = AB + AB' \end{cases}}$

d) **Ce qui ne "marche pas" :**

(i) Commutativité : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcul de AB et BA

(ii) "Règle du produit nul" : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA

On s'abstiendra donc de conclure à la nullité d'une matrice lorsque $AB = 0$, **et à simplifier par** A **dans une égalité du type** $AB = AC$

2. L'"algèbre" $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées

Remarque préliminaire : si A et B sont des matrices carrées d'ordre n, alors AB et BA sont des matrices carrées d'ordre n, ce qui fait de la multiplication matricielle une "loi interne" sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associative, distributive, admettant I_n comme élément neutre, mais pas commutative.

Cela étant, certaines matrices "commutent", comme A et I_n ou A et A^2, ou encore A et 0

2.1. Puissances de matrices

a) **Définitions :** on peut définir, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}}$

Plus sérieusement, les puissances de A sont définies par $\boxed{\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall p \in \mathbb{N},\ A^{p+1} = AA^p = A^pA \end{cases}}$

Exemple 1 : soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2 : calculer $(AB)^2$, $(AB)^3$, $(A+B)^2$ et $(A+B)^3$ dans le cas général.

b) **Formules algébriques élémentaires :**

(i) Formule du binôme : **si** A **et** B **commutent**, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = A^p + pA^{n-1}B + \cdots + pAB^{p-1} + B^p}$$

En particulier, comme I_n et A commutent, on a toujours

$$\boxed{(A+I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{n-1} + \cdots + pA + I_n}$$

(ii) Factorisation de $A^p - B^p$: de même **si** A **et** B **commutent**, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\boxed{A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}(A-B)}$$

En particulier

$$\boxed{A^p - I_n = (A-I_n)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = (A-I_n)\left(A^{p-1} + A^{p-2} + \cdots + A + I_n\right)}$$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: calculer de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Une application : calculer les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = -1$ et les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n \end{cases}$$

(iii) Polynômes de matrices : plus généralement, si $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$, on peut noter

$$P(A) = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

Dans toute identité polynomiale on peut alors substituer une matrice à l'indéterminée X.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5A - 4I$:

Le polynôme $P(X) = X^2 - 5X + 4$ vérifie $P(A) = A^2 - 5A + 4I = 0$

On dit que P est un **polynôme annulateur** de la matrice A

De l'identité $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ on déduit : $(A - I)(A - 4I) = 0$ (vérifier!)

c) Matrices nilpotentes :

(i) Définition : on dit que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** d'ordre p lorsque

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{N} \ / \ N^p = 0 \text{ et } N^{p-1} \neq 0}$$

On a alors

$$\begin{cases} \forall k \geqslant p, & N^k = 0 \\ \forall k < p, & N^k \neq 0 \end{cases}$$

Exemple : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 3.

(ii) Application au calcul de puissances : calcul de $A^n,\ n \in \mathbb{N}$: où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) Calcul avec un polynôme annulateur :

Idée : lorsqu'on connait un polynôme annulateur de la matrice A, on peut calculer ses puissances.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.2. Inversibilité

a) **Définition :** $\boxed{\text{On dit que } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible lorsque } \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AB = BA = I_n}$

La matrice B est alors notée A^{-1} et appelée **inverse de** A : on a donc $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé **groupe linéaire**.

Attention : **une matrice inversible est nécessairement carrée!**

Remarque : **unicité de l'inverse** : si B et C sont deux inverses de A, alors $B = C$

Exemple 1 : la matrice nulle O n'est pas inversible. I_n l'est, et $\boxed{I_n^{-1} = I_n}$

Exemple 2 : montrer que $A = \begin{pmatrix} i & 4 & 0 \\ 2+i & 5i & 0 \\ 3-i & 6 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

Exemple 3 : montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1} (méthode "formelle")

b) **Propriétés :**

(i) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A}$

(ii) Simplifications : soit A une matrice inversible : alors pour toutes matrices B et C, on a

$$\boxed{AB = AC \Longleftrightarrow B = C} \quad \text{et} \quad \boxed{BA = CA \Longleftrightarrow B = C}$$

et

$$\boxed{AB = C \Longleftrightarrow B = A^{-1}C} \quad \text{et} \quad \boxed{BA = C \Longleftrightarrow B = CA^{-1}}$$

(iii) Produit : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont inversibles, alors } AB \text{ est inversible et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

(iv) Puissances : si A est inversible, alors les puissances de A sont inversibles.

De plus, on a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ (A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$, et on note $\boxed{A^{-n} = (A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n}$

Exemple 1 : montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Exemple 2 : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + N,\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que la formule $A^n = (2I+N)^n = 2^n I + n2^{n-1}N + \binom{n}{2} 2^{n-2}N^2$ reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$

Exemple 3 : même question avec l'exemple du 2.1.d)

c) **Lien avec les systèmes :**

(i) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors

$$\boxed{\forall Y \in \mathbb{K}^n, \text{ le système } (S) : AX = Y \text{ admet une unique solution, qui est donnée par } X = A^{-1}Y}$$

Exemple : résoudre le système $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x + 3y - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, puis $\begin{cases} 3x + y - z = x' \\ x + 3y - z = y' \\ x + y + z = z' \end{cases}$

(ii) Réciproque : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{\text{Si } \forall Y \in \mathbb{K}^n, \text{ le système } (S) : AX = Y \text{ admet une unique solution, alors } A \text{ est inversible}}$$

Exemple : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}

Rappel : $\boxed{\operatorname{rg} A = n \iff A \underset{L}{\sim} I_n \iff [\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ AX = Y \text{ admet une unique solution}]}$

d) <u>Diverses caractérisations de l'inversibilité</u> : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ AB = BA = I_n}$ On montre :

$$\boxed{\begin{array}{lll} A \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ BA = I_n \text{ (inversibilité à gauche)} \\ A \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ AB = I_n \text{ (inversibilité à droite)} \end{array}}$$

Autrement dit la condition $AB = I_n$ $\boxed{\text{ou}}$ $BA = I_n$ suffit à établir l'inversibilité de A.

(ii) $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } \forall Y \in \mathbb{R}^n,\ AX = Y \text{ admet une unique solution}}$ On montre

$$\boxed{\begin{array}{lll} A \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & AX = 0 \text{ n'admet que la solution nulle} \\ A \text{ est inversible} & \text{si et seulement si} & \forall Y \in \mathbb{K}^n,\ AX = Y \text{ admet au moins une solution} \end{array}}$$

Autrement dit l'existence $\boxed{\text{ou}}$ l'unicité d'une solution de $AX = Y$ suffit à établir l'inversibilité de A.

(iii) $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } \operatorname{rg} A = n \iff A \sim I_n}$

Remarque : on a en général $\operatorname{rg} A \leqslant n$

(iv) par contraposée de la caractérisation du (ii), on a

$$\boxed{A \text{ non inversible si et seulement si il existe } X \neq 0 \text{ tel que } AX = 0}$$

ou encore, en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A :

$$\boxed{A \text{ non inversible si et seulement si } \exists (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\ /\ x_1C_1 + \cdots + x_nC_n = 0}$$

(il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes de A)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas inversible.

e) <u>Cas des matrices 2×2</u> : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose $\boxed{\det A = ad - bc}$. Alors

$$\boxed{A \in GL_2(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0}$$

et dans ce cas

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

3. Matrices particulières

3.1. Matrices triangulaires

a) <u>Définitions</u> :

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si $1 \leqslant j < i \leqslant n \Rightarrow a_{ij} = 0$
On dit que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si $1 \leqslant i < j \leqslant n \Rightarrow b_{ij} = 0$

Autrement dit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

On notera $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{K}$

b) <u>Opérations</u> : soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices triangulaires supérieures, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$: alors

(i) $\boxed{\lambda A + \mu B \text{ est triangulaire supérieure}}$

(ii) $\boxed{AB \text{ est triangulaire supérieure}}$

Remarque : $\boxed{\text{le coefficient diagonal } (AB)_{ii} \text{ vaut } a_{ii}b_{ii}.}$

c) <u>Inversibilité</u> : $\boxed{A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \forall i \in [[1, n]],\ a_{ii} \neq 0.}$

<u>A^{-1} est alors triangulaire supérieure</u>

Exemple : $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer T^{-1}

Remarque : $\boxed{\text{le coefficient diagonal } \left(A^{-1}\right)_{ii} \text{ vaut } \dfrac{1}{a_{ii}}.}$

3.2. Matrices diagonales

a) <u>Définition</u> : on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonale** lorsqu'elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

autrement dit

$$\boxed{\forall (i, j) \in [[1, n]]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0}$$

b) Opérations :

(i) La somme et le produit de matrices diagonales sont diagonales.

Plus précisément, pour tous $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n,\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^{2n+2}$

$$\boxed{\alpha\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)+\beta\,\mathrm{diag}\,(\mu_1,\dots,\mu_n)=\mathrm{diag}\,(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1,\dots,\alpha\lambda_n+\beta\mu_n)}$$

et

$$\boxed{\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\,\mathrm{diag}\,(\mu_1,\dots,\mu_n)=\mathrm{diag}\,(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)}$$

(ii) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\boxed{[\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)]^p=\mathrm{diag}\,(\lambda_1^p,\dots,\lambda_n^p)}$$

Remarque : si P est un polynôme, alors $P\,(\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=\mathrm{diag}\,(P\,(\lambda_1)\,,\dots,P\,(\lambda_n))$

Exemple : $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Calculer A^n, puis $P\,(A)$ avec $P=X^2-5X+6$ puis $P=(X+1)\,(X-2)\,(X-3)$

c) Inversibilité :

$$\boxed{A=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\text{ est inversible}\iff\forall i\in[[1,n]]\,,\ \lambda_i\neq0.\text{ On a alors }A^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right)}$$

Remarque : les systèmes diagonaux inversibles sont triviaux

$$AX=Y\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda_1x_1=y_1\\\lambda_2x_2=y_2\\\vdots\\\lambda_nx_n=y_n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_1=y_1/\lambda_1\\x_2=y_2/\lambda_2\\\vdots\\x_n=y_n/\lambda_n\end{array}\right.$$

3.3. Transposition-Matrices symétriques

a) Transposition dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle **transposée de** A la matrice $\boxed{{}^tA=(a_{ji})\in\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})}$. On note aussi parfois ${}^tA=T\,(A)$.

$$\boxed{\text{Si }A=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1p}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\text{ alors }{}^tA=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{p1}\\\vdots&&\vdots\\a_{1n}&\dots&a_{pn}\end{pmatrix}\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})}$$

Exemple : $A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\3&1&1\end{pmatrix}$ a pour transposée ${}^tA=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\-5&1\end{pmatrix}$

Remarque : $\boxed{{}^t\left({}^tA\right)=A}$

b) Propriétés :

(i) Linéarité : si $(A,B)\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, alors $\boxed{{}^t\,(\lambda A+\lambda B)=\ \lambda^tA+\mu^tB}$

(ii) Produit : si $A\in\mathcal{M}_{mn}\,(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{np}\,(\mathbb{K})$, alors $\boxed{{}^t\,(AB)=\ {}^tB\,{}^tA}$

(iii) Transposée de l'inverse : $\boxed{\text{si }A\in GL_n\,(\mathbb{K})\,,\text{ alors }{}^tA\in GL_n\,(\mathbb{K})\,,\text{ et }\left({}^tA\right)^{-1}=\ {}^t\left(A^{-1}\right)}$

Ainsi, pour calculer A^{-1}, on peut calculer l'inverse de ${}^tA$ et la transposer.

c) Matrices symétriques, antisymétriques :

(i) On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $\boxed{{}^tS = S}$, autrement dit

$$\boxed{\forall (i,j) \in [[1,n]]^2 ,\ a_{ij} = a_{ji}}$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Toute combinaison linéaire de matrices symétriques est symétrique

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -7 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3$

(ii) On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $\boxed{{}^tS = -S}$, autrement dit

$$\boxed{\forall (i,j) \in [[1,n]]^2 ,\ a_{ij} = -a_{ji}}$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Toute combinaison linéaire de matrices antisymétriques est antisymétrique

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3$

Remarque1 : $\boxed{\text{si } A = (a_{ij}) \text{ est antisymétrique, alors } \forall i \in [[1,n]] ,\ a_{ii} = 0}$

Remarque2 : seule la matrice nulle est symétrique **et** antisymétrique

4. Matrices et opérations élémentaires

4.1. Matrices élémentaires

a) **Définitions :** on appelle **matrice élémentaire** toute matrice obtenue en faisant subir une opération élémentaire sur les lignes de I_n. Il y en a donc trois types

- Les matrices correspondant aux échanges $L_i \leftrightarrow L_j$. Elles sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Les matrices correspondant aux multiplications $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Elles sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Les matrices correspondant aux multiplications $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Elles sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

b) **Effet par multiplication à gauche :**

> La multiplication à gauche d'une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire (d'ordre n) effectue l'opération correspondante sur les lignes de A

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) **Inversibilité :** les matrices élémentaires sont toutes inversibles

Plus précisément

- L'inverse de la matrice correspondant à $L_i \leftrightarrow L_j$ est elle-même
- L'inverse de la matrice correspondant à $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la matrice correspondant à $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$
- L'inverse de la matrice correspondant à $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est la matrice correspondant à $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_i$

4.2. Interprétation matricielle de l'algorithme de Gauss

a) **Théorème :** soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors il existe un nombre fini de matrices élémentaires $L_1, \ldots, L_q$ telles que le produit $L_q \cdots L_1 A$ soit échelonnée réduite en lignes

Autrement dit, puisque $L_1, \ldots, L_q$ sont inversibles, et que leur produit $P = L_q \cdots L_1$ l'est aussi,

> il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PA soit échelonnée réduite en lignes

b) **Applications à l'inversibilité :** soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: alors

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } \forall Y \in \mathbb{R}^n, \text{ le système } AX = Y \ (S) \text{ admet une unique solution}}$$

On montre en fait le résultat plus fin :

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ inversible } \textbf{à gauche} \text{ si et seulement si } (S_0) : AX = 0 \text{ n'admet que la solution nulle} \\ A \text{ inversible } \textbf{à droite} \text{ si et seulement si } \forall Y \in \mathbb{R}^n, (S) : AX = Y \text{ admet au moins une solution} \end{array}}$$

Dans les deux cas A est en fait inversible

c) **Application au calcul de l'inverse :** ainsi, $\boxed{\text{si } A \text{ est inversible}}$, on a une suite finie de matrices élémentaires $L_1, \ldots, L_q$ telles que

$$L_q \cdots L_1 A = I_n$$

Ce qui signifie que

$$\boxed{A^{-1} = L_q \cdots L_1}$$

Qu'on peut aussi écrire

$$\boxed{A^{-1} = L_q \cdots L_1 I_n}$$

Cela signifie qu'en effectuant sur la I_n les opérations réduisant la matrice A, on aboutit à la matrice A^{-1}

Exemple : inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut travailler sur la matrice concaténée :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$