Ex 1 Quelle est la classe sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto 1 - 2x + x \sin \sqrt{x}$?

Ex 2 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 \ln x$ se prolonge en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

Ex 3 Convexité. On dit $f \in C^2(I)$ est convexe lorque $f'' \geqslant 0$.

a) Soit $f > 0$ de classe C^2 sur I. Montrer que si $\ln f$ est convexe sur I, alors f est convexe sur I. Réciproque?

b) Soient $f > 0$ et $g > 0$ de classe C^2 sur I. Montrer que $\ln f$ est convexe sur I si et seulement si pour tout $t \in I$ le polynôme $P_t(x) = f(t)x^2 + 2f'(t)x + f''(t)$ est positif sur $\mathbb{R}$
En déduire que si $\ln f$ et $\ln g$ sont convexes sur I, alors $\ln(f+g)$ aussi.

c) Soit $f \in C^2(I)$ une fonction convexe sur I. Montrer que C_f est au dessus de toutes ses tangentes.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$

b) En déduire la dérivée n-ième de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

Ex 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^3 e^{-2x}$

Ex 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$.

A l'aide de la formule de Leibniz, montrer que P_n est un polynôme dont on donnera l'expression.

Ex 7 Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ex 8 Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}$$

Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n' et calculer P_0, P_1 et P_2.

Ex 9 Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) Montrer que f vérifie : $\forall x \in]-1, 1[,\ \left(1-x^2\right) f'(x) - x f(x) = 1$

b) Montrer que f vérifie : $\forall x \in]-1, 1[,\ \left(1-x^2\right) f^{(n)}(x) - (2n-1) x f^{(n-1)}(x) - (n-1)^2 f^{(n-2)}(x) = 0$

c) En déduire $f^{(n)}(0)$ (Discuter sur la parité de n. On conjecturera et on raisonnera par récurrence.)