Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. la formule du binôme de Newton donne : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

La dernière somme est constituée de termes positifs puisque $x \in \mathbb{R}_+$. Il en résulte

$$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx}$$

Ex 2 Linéarisation de $\operatorname{ch}^5 x$ et $\operatorname{sh}^6 x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^5 x &= \frac{1}{2^5}\left(e^x + e^{-x}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5}\left(e^{5x} + 5e^{4x}e^{-x} + 10e^{3x}e^{-2x} + 10e^{2x}e^{-3x} + 5e^{x}e^{-4x} + e^{-5x}\right) \\ &= \frac{1}{2^5}\left(e^{5x} + 5e^{3x} + 10e^{x} + 10e^{-x} + 5e^{-3x} + e^{-5x}\right) \end{aligned}$$

En regroupant, avec la formule $e^a + e^{-a} = 2\operatorname{ch} a$, il vient

$$\operatorname{ch}^5 x = \frac{1}{32}\left(2\operatorname{ch}(5x) + 5\left(2\operatorname{ch}(3x)\right) + 10\left(2\operatorname{ch}(x)\right)\right)$$

Finalement

$$\boxed{\operatorname{ch}^5 x = \frac{1}{16}\left(\operatorname{ch}(5x) + 5\operatorname{ch}(3x) + 10\operatorname{ch}(x)\right)}$$

De même

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^6(x) &= \frac{1}{2^6}\left(e^x - e^{-x}\right)^6 \\ &= \frac{1}{2^6}\left(e^{6x} - 6e^{4x} + 15e^{2x} - 20 + 15e^{-2x} - 6e^{-4x} + e^{-6x}\right) \\ &= \frac{1}{2^6}\left(2\operatorname{ch}(6x) - 12\operatorname{ch}(4x) + 30\operatorname{ch}(2x) - 20\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\operatorname{sh}^6(x) = \frac{1}{32}\left(\operatorname{ch}(6x) - 6\operatorname{ch}(4x) + 15\operatorname{ch}(2x) - 10\right)}$$

Ex 3 a) Quel est le coefficient de $x^2y^2z^2$ dans le développement de $(x+y+z)^7$ est **nul** :

En effet tous les termes de ce produit $(x+y+z)\cdots(x+y+z)$ sont de la forme $x^iy^jz^k$ où $i+j+k=7$ (on dit que ces monômes sont homogènes de degré 7).

b) Calculons le coefficient de $x^2y^3z^2$ dans le développement de $(x+y+z)^7$:

$$\begin{aligned} (x+(y+z))^7 &= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k (y+z)^{7-k} \\ &= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k \sum_{i=0}^{7-k} \binom{7-k}{i} y^i z^{7-k-i} \\ &= \sum_{k=0}^{7} \sum_{i=0}^{7-k} \binom{7}{k} \binom{7-k}{i} x^k y^i z^{7-k-i} \end{aligned}$$

Le coefficient cherché s'obtient en prenant $k=2$ et $i=3$ dans cette double somme : il vaut

$$\boxed{\binom{7}{2}\binom{5}{3} = 210}$$

c) il est aisé de généraliser : si $i+j \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (y+z)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} y^j z^{n-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} x^i y^j z^{n-i-j}
\end{aligned}$$

Le coefficient de $x^i y^j z^{n-i-j}$ est donc

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!}$$

soit

$$\boxed{\frac{n!}{i!j!\,(n-i-j)!}}$$

Remarque : si $i+j+k=n$, alors le coefficient de $x^i y^j z^k$ est $\boxed{\dfrac{n!}{i!j!k!}}$

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$. La formule du binôme donne immédiatement

$$\boxed{S_n = \left(-1+\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

De même, si $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{n-k}}$, on a en écrivant $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} = -3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1-k}$

$$\begin{aligned}
T_n &= -3 \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1-k} \\
&= -3 \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1-k} - \binom{n+1}{n+1} \left(-\frac{1}{3}\right)^0 \right) \\
&= -3 \left(\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{T_n = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n}}$$

Ex 5 Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$: alors

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{kx} - e^{-kx}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^x)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-x})^k$$

La formule du binôme donne

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left((1+e^x)^n - (1+e^{-x})^n\right)}$$

Remarque : on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\left(e^{x/2}\left(e^{-x/2}+e^{x/2}\right)\right)^n-\left(e^{-x/2}\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{nx/2}\left(2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n-e^{-nx/2}\left(2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2^n\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n\left(e^{nx/2}-e^{-nx/2}\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{S_n=\left(2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

Ex 6 Soient $0\leqslant k\leqslant p\leqslant n$. On a

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(p-k)!\,(n-p)!}=\frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p)!}$$

et

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p}=\frac{p!}{k!\,(p-k)!}\times\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p)!}$$

On a ainsi

$$\boxed{\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}}$$

Mais alors on peut simplifier la somme :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}}$$

Ex 7 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On dérive la fonction $p:x\mapsto(1+x)^n$: $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$p'(x)=n\,(1+x)^{n-1}$$

Mais comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $p(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, on peut aussi dériver terme à terme : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$p'(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}\quad\text{(le premier terme s'annule à la dérivation)}$$

En égalant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}=n\,(1+x)^{n-1}$$

On substitue alors 1 à x et on obtient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}}$$

b) On sait aussi que $\forall\,(n,k)\in\mathbb{N}^2$, on a $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

par translation d'indice. On a alors d'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\,(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}\quad\text{CQFD.}$$

c) On a d'une part

$$\int_0^1 (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left[(x+1)^{n+1}\right] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Mais aussi en intégrant terme à terme la formule du binôme :

$$\int_0^1 (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 x^k \mathrm{d}x\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$$

En égalant, il vient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

Ex 8 Soient p et q des réels positifs tels que $p+q=1$.

a) La formule du binôme donne directement

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = (p+q)^n = \boxed{1}$$

b) On sait que $\forall\,(n,k)\in\mathbb{N}^2$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$

On réidexe :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}q^{n-k-1} = np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{n-1-k}$$

La formule du binôme donne encore

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\,(p+q)^{n-1} = \boxed{np}$$

c) De même, en appliquant successivement la formule plus haut :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k\,(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n}k\,(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\
&= n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}\\
&= n\,(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k}\\
&= n\,(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+2}q^{n-k-2} \quad \text{(réindexation)}\\
&= n\,(n-1)\,p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k q^{n-2-k}\\
&= n\,(n-1)\,p^2\,(p+q)^{n-2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k\,(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n\,(n-1)\,p^2}$$

d) Enfin on remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(k\left(k-1\right)+k\right)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k\left(k-1\right)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\ &= n\left(n-1\right)p^2+np\\ &= np\left(1+pn-p\right)\end{aligned}$$

On peut écrire finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\left(q+np\right)}$$

Ex 9 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2k}$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2k+1}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}S_n &= \binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}x^2+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}\\ T_n &= \binom{2n}{1}x+\binom{2n}{3}x^3+\cdots+\binom{2n}{2n-1}x^{2n-1}\end{aligned}$$

On est donc incité à sommer et soustraire :

$$\begin{aligned}S_n+T_n &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\left(1+x\right)^{2n} \quad (1)\\ S_n-T_n &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(-1\right)^k x^k=\left(1-x\right)^{2n} \quad (2)\end{aligned}$$

Il vient donc immédiatement

$$\boxed{\begin{cases} S_n=\frac{1}{2}\left(\left(1+x\right)^{2n}+\left(1-x\right)^{2n}\right)\\ T_n=\frac{1}{2}\left(\left(1+x\right)^{2n}-\left(1-x\right)^{2n}\right)\end{cases}}$$

Remarque : pour justifier (1) et (2) , on écrit

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{2n}{2}\right\rfloor}\binom{2n}{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{2n-1}{2}\right\rfloor}\binom{2n}{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2k+1}$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(-x\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(-x\right)^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\left(-x\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2k+1}$$

Ex 10 On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$

a) Soit p un entier fixé. On a d'après le triangle de Pascal

$$\forall k\geqslant p,\ \binom{k}{p}+\binom{k}{p+1}=\binom{k+1}{p+1} \quad \text{soit} \quad \binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$$

On a ainsi une somme télescopique : $\forall n\geqslant p$,

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=\binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}$$

Finalement

$$\forall n\geqslant p,\quad \boxed{\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}}$$

Interprétation : en sommant une colonne du triangle de Pascal jusqu'à la ligne n, on obtient le terme de la colonne suiante et de la ligne suivante $n+1$:

$n\backslash k$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0	1							
1	1	1						
2	1	2	$\boxed{1}$					
3	1	3	$\boxed{3}$	1				
4	1	4	$\boxed{6}$	4	1			
5	1	5	$\boxed{10}$	10	5	1		
6	1	6	15	$\boxed{20}$	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Alors $\forall n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

Finalement $\forall n \geqslant 2$,

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \frac{1}{2}\left(T_n - S_n\right)}$$

c) Mais d'après a), appliqué à $p=2$, on a $\forall n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\left(T_n - S_n\right) = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}$$

Soit

$$\begin{aligned} T_n &= S_n + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}\left(3 + 2(n-1)\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Ex 11 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j}$. On a, puisque $\binom{i}{j} = 0$ lorsque $j > i$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

Finalement

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1}$$

Ex 12 Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad H(n)$

- $H(1)$ est vraie car $\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k} = 1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

  Utilisons la formule de Pascal : $\forall k \in \mathbb{N},\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} \quad \text{car } \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} \quad \text{d'après } H(n)
\end{aligned}$$

  Or une formule bien connue donne $k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} - (-1)^{1}\binom{n+1}{0}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left((1-1)^{n+1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

  Il vient en reportant :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \quad \text{CQFD}$$

- Par récurrence, la propriété $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Ex 13 Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2, n-2]\!]$. Montrons que $\dbinom{n}{k} \geqslant \dbinom{n}{2}$:

– <u>Première méthode</u> : on écrit

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n\,(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)\cdots(n-k+1)}{3 \times \cdots \times k}$$

Soit

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{2} \frac{\prod\limits_{i=3}^{k} (n-i+1)}{\prod\limits_{i=3}^{k} i}$$

Après inversion du compteur ($3 \times \cdots \times k = k \times \cdots \times 3$) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{2} \frac{\prod\limits_{i=3}^{k} (n-i+1)}{\prod\limits_{i=3}^{k} (k+3-i)} = \binom{n}{2} \prod_{i=3}^{k} \frac{n-i+1}{k+3-i}$$

Il suffit alors de montrer que la fraction est supérieure à 1 : or

$$\forall i \in [\![3, k]\!]\,,\ (n-i+1) - (k+3-i) = n-2-k \geqslant 0 \text{ car } k \in [\![2, n-2]\!]$$

Comme de plus les facteurs sont positifs, il en résulte que

$$\forall i \in [\![3, k]\!]\,,\ \frac{n-i+1}{k+3-i} \geqslant 1$$

et par produit

$$\prod_{i=3}^{k} \frac{n-i+1}{k+3-i} \geqslant 1 \quad \text{CQFD.}$$

– <u>Deuxième méthode</u> : on étudie la monotonie de la suite de terme général $a_k = \dbinom{n}{k}$: $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} - \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \\ &= n!\frac{(n-k+1)-k}{k!\,(n-k+1)!} \\ &= n!\frac{n+1-2k}{k!\,(n+1-k)!} \end{aligned}$$

Or

$$n+1-2k > 0 \Longleftrightarrow k < \frac{n+1}{2} \Longleftrightarrow k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

(a_k) croit donc de 0 à $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et décroit de $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ à n.

k	2		$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$		$n-2$
$\binom{n}{k}$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$\binom{n}{2}$				$\binom{n}{2}$

En particulier, comme $a_2 = a_{n-2} = \dbinom{n}{2}$, on a

$$\forall k \in [\![2, n-2]\!]\,,\ a_k \geqslant a_2 \quad \text{soit} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$$

On en déduit alors pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1}$$

Mais

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{2}^{-1} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n-2} 1 = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

On peut alors encadre u_n :

$$2 + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{1}{n} + \frac{2(1-3/n)}{n(1-1/n)}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 2}$$

Ex 14 Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$. On écrit simplement :

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (k!)^2} = \frac{(n!)^{n+1}}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k!\right)^2} = \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\right)^{n+1}}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} i\right)^2}$$

Or on a un produit triangulaire, qu'on sait réindexer :

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} i = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=i}^{n} i = \prod_{i=1}^{n} i^{n-i+1}$$

Il vient

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^{n+1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^{2n-2k+2}} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1} \quad \text{CQFD.}$$

Ex 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2\left(\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right)$:

On fait apparaitre $\binom{2n-1}{k}$ partout au dénominateur : de la formule $b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$ on tire

$$\binom{2n}{k+1} = \frac{2n}{k+1}\binom{2n-1}{k}$$

Par ailleurs

$$\binom{2n}{k} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(2n-k+1)}{k!} = \frac{2n}{2n-k}\frac{(2n-1)\cdots(2n-k)}{k!} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-1}{k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}2\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right) &= 2\left(\frac{(2n-k)\binom{n}{k}}{2n\binom{2n-1}{k}} - \frac{(k+1)\binom{n}{k+1}}{2n\binom{2n-1}{k}}\right)\\ &= \frac{(2n-k)\binom{n}{k} - (k+1)\binom{n}{k+1}}{n\binom{2n-1}{k}}\end{aligned}$$

Or

$$(k+1)\binom{n}{k+1} = (k+1)\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(n-k) = (n-k)\binom{n}{k}$$

donc

$$\begin{aligned}2\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right) &= \frac{(2n-k)\binom{n}{k} - (n-k)\binom{n}{k}}{n\binom{2n-1}{k}}\\ &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

Mais alors après télescopage

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right) = 2\left(\frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n}{0}} - \frac{\binom{n}{n+1}}{\binom{2n}{n+1}}\right)$$

Finalement

$$\boxed{S_n = 2}$$

Ex 16 Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Montrons par récurrence sur p que $\forall p \in \mathbb{N},\ H(p) : \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_{n+k} = f_{n+2p}$

- $H(0)$ est vraie car $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f_{n+k} = \binom{0}{0} f_{n+0} = f_{n+2\times 0}$

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $H(p)$ et montrons $H(p+1) : \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \tbinom{p+1}{k} f_{n+k} = f_{n+2p+2}$:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p+1} \tbinom{p+1}{k} f_{n+k} &= \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p+1}{k} f_{n+k} + \tbinom{p+1}{p+1} f_{n+p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \left(\tbinom{p}{k} + \tbinom{p}{k-1} \right) f_{n+k} + f_{n+p+1} \quad \text{(triangle de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} f_{n+k} + \sum_{k=0}^{p+1} \tbinom{p}{k-1} f_{n+k} + f_{n+p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} f_{n+k} + \sum_{k=0}^{p-1} \tbinom{p}{k} f_{n+k+1} + f_{n+p+1} \quad \text{(translation d'indice \& } \tbinom{p}{-1} = 0\text{)} \\
&= f_{n+2p} + \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} f_{n+k+1} \quad \text{(d'après } H(p)\text{)} \\
&= f_{n+2p} + f_{n+1+2p} \quad \text{(d'après } H(p) \text{ avec } n+1\text{)} \\
&= f_{n+2p+2} \quad \text{(par définition)} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

- Par récurrence notre résultat est établi.

Ex 17 Formule d'inversion de Pascal

a) Montrons que $\forall\,(j,k,n)\in\mathbb{N}^3$, $\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}}$

Avec les conventions rappelées plus haut, cette formule est triviale $\left(0 \underset{\smile}{=} 0\right)$ dans tous les cas autres que $j\leq k\leq n$, pour lequel on a

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{k!}{j!\,(k-j)!}=\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{(n-j)!}{(k-j)!\,(n-k)!}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}\ \text{CQFD.}$$

b) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k\qquad(\$)$$

Montrons que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k\qquad(€)$$

Remplaçons pour cela a_k par son expression $(\$)$ dans le second membre de $(€)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}b_j\\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}b_j\quad\text{(en réindexant la somme triangulaire }\sum_{0\leq j\leq k\leq n}\text{)}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}b_j\quad\text{(formule du a))}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{k-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^{n-j-k}\binom{n-j}{k}\quad\text{(par translation d'indice)}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j\,(1-1)^{n-j}\quad\text{(d'après la formule du binôme)}
\end{aligned}$$

Or dans cette somme seul le terme pour $j=n$ est non nul (et vaut 1). Finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k=b_n}\quad\text{CQFD.}$$

Ex 18 a) Cas où $p=0$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n(0)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n$ (binôme de Newton) :

$$\text{Si } n=0 : \boxed{S_0(0)=1} \quad \text{et} \quad \text{si } n>0, \boxed{S_n(0)=0}$$

b) Cas où $p=1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction polynomiale $f : x\to\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$.

i. Le binôme donne encore $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=(1-x)^n}$.

On peut dériver la somme **terme à terme** (linéarité de la dérivée), ce qui donne pour tout réel x

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}kx^{k-1}=-n(1-x)^{n-1}$$

(le terme initial, pour $k=0$, a une dérivée nulle, donc "disparait", comme dans l'expression de $S_n(1)$).

ii. On calcule alors la valeur en 1 : $f'(1)=S_n(1)=-n(1-1)^{n-1}=-n0^{n-1}$

$$\text{Si } n=1 : \boxed{S_1(1)=-1} \quad \text{et} \quad \text{si } n>1, \boxed{S_n(1)=0}$$

c) Cas où $p=2$. Soit $n\geqslant 2$. On considère la fonction $g : x\to\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{kx}$.

i. Le binôme donne toujours $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{g(x)=(1-e^x)^n}$. On dérive deux fois terme à terme : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$g'(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}ke^{kx}=-ne^x(1-e^x)^{n-1} \quad \text{et}$$

$$g''(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^2e^{kx}=-n\left(e^x(1-e^x)^{n-1}-(n-1)e^x(1-e^x)^{n-2}\right)$$

ii. On calcule alors $g''(0)=S_n(2)=-n\left(0^{n-1}-(n-1)0^{n-2}\right)\overset{n\geqslant 2}{=}n(n-1)0^{n-2}$

$$\text{Si } n=2 : \boxed{S_2(1)=2} \quad \text{et} \quad \text{si } n>2, \boxed{S_n(2)=0}$$

d) Cas général.

i. Soit $p\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant p+1$. Alors en utilisant $\binom{n-1}{n}=0$

$$\begin{aligned} n(S_n(p)-S_{n-1}(p)) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k n\binom{n}{k}k^p-\sum_{k=0}^{\mathbf{n}}(-1)^k n\binom{n-1}{k}k^p \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k n\left[\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}\right]k^p \end{aligned}$$

Alors, avec le triangle de Pascal et la formule bien connue $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, (et aussi $\binom{n-1}{-1}=0$) :

$$n(S_n(p)-S_{n-1}(p))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}k^p=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}k^p$$

Finalement

$$\boxed{S_n(p+1)=n(S_n(p)-S_{n-1}(p))}$$

ii. Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}$, $H(p) : [S_p(p)=(-1)^p p! \quad \text{et} \quad \forall n>p,\ S_n(p)=0]$

- $H(0)$ a été montrée en question 1.
- Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons $H(p)$ et montrons $H(p+1)$: d'après la formule établie en a) :

$$S_{p+1}(p+1)=(p+1)(S_{p+1}(p)-S_p(p))\overset{\text{HDR}}{=}(p+1)(0-(-1)^p p!)=\boxed{(-1)^{p+1}(p+1)!}$$

et

$$\forall n>p+1,\ S_n(p)=n(S_n(p)-S_{n-1}(p))\overset{\text{HDR}}{=}n(0-0)=\boxed{0} car n>n-1>p \quad \text{CQFD}$$