Ex 1 – On ne peut écrire $\arccos(\cos x) = x$ que pour $x \in [0, \pi]$

– On ne peut écrire $\arcsin(\sin x) = x$ que pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

– On ne peut écrire $\arctan(\tan x) = x$ que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Si ce n'est pas le cas, on s'y ramène via des translations de 2π et les anges associés :

$$\cos(-x) = \cos x, \sin(\pi - x) = \sin x, \tan(\pi + x) = \tan x$$

Ainsi :

$$\arccos\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\tfrac{\pi}{4}} \quad \text{car } \tfrac{\pi}{4} \in [0, \pi]$$
$$\arcsin\left(\sin\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = \boxed{\tfrac{\pi}{6}} \quad \text{car } \tfrac{\pi}{6} \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\arctan\tan\left(\tfrac{8\pi}{7}\right) = \arctan\tan\left(\tfrac{\pi}{7}\right) = \boxed{\tfrac{\pi}{7}} \quad \text{car } \tfrac{\pi}{7} \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$
$$\arccos(\cos(6)) = \arccos(\cos(6 - 2\pi)) = \arccos(\cos(2\pi - 6)) = \boxed{2\pi - 6} \quad \text{car } 2\pi - 6 \in [0, \pi]$$
$$\arcsin(\sin(3)) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \boxed{\pi - 3} \quad \text{car } \pi - 3 \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Ex 2 Soient $x = \arccos\left(\frac{7}{8}\right)$, $y = \arccos\left(\frac{-7}{8}\right)$ et $z = 2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

La fonction $\arccos$ est strictement décroissante sur $[-1, 1]$, donc $x < y$.

Par ailleurs

$$\cos z = 2\cos^2\left(\arccos\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) - 1 = \tfrac{1}{8} - 1 = -\tfrac{7}{8}$$

et de plus $\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $z \in [0, \pi]$.

Ces deux informations ($\cos z = -\frac{7}{8}$ et $z \in [0, \pi]$) permettent de conclure que $z = \arccos\left(\frac{-7}{8}\right) = y$. On conclut :

$$\boxed{x < y = z}$$

Ex 3 Soit $y \in]-1, 1[$. Résolution dans $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ l'équation $\sin x = y \ (E)$.

On ramène cette équation au type $\sin\theta = y$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin x = y \Longleftrightarrow \sin(\pi - x) = y \Longleftrightarrow \pi - x = \arcsin y \quad \text{car } \tfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \tfrac{3\pi}{2} \Rightarrow -\tfrac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \tfrac{\pi}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ sur } \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right] \text{ est } \pi - \arcsin y}$$

Ex 4 Ensemble des solutions sur $I = [0, 2\pi]$ de l'équation $\arccos(\cos(2x)) = \dfrac{2\pi}{3}$ (E) : Cette équation équivaut à

$$\cos(2x) = \cos\frac{2\pi}{3} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

L'ensemble cherché est

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Ex 5 Soit $x \in [-1, 1]$. Alors

$$\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1}$$

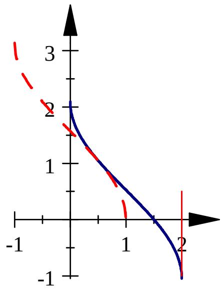
et

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) \quad \text{soit} \quad \boxed{\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1 - x^2}}$$

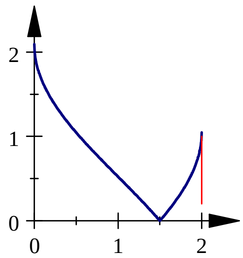
Ex 6 Soit $f : x \mapsto \arccos(x - 1) - \dfrac{\pi}{3}$

a) La courbe de f est translatée de celle d'$\arccos$ de vecteur $\vec{v}\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$. Elle coupe l'axe (Ox) au point d'abscisse x vérifaint

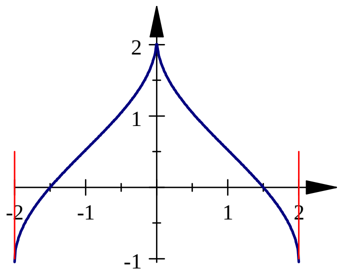
$$\arccos(x - 1) = \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow x - 1 = \cos\frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$



b) On sait alors tracer alors les courbes des fonctions $g : x \mapsto \left|\arccos(x-1) - \dfrac{\pi}{3}\right|$:



et $h : x \mapsto \arccos(|x|-1) - \dfrac{\pi}{3}$:



Ex 7 Etudes de courbes.

a) $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$:

(i) f est 2π-périodique (preuve laisée au lecteur) : on restreint l'intervalle à $[-\pi, \pi]$

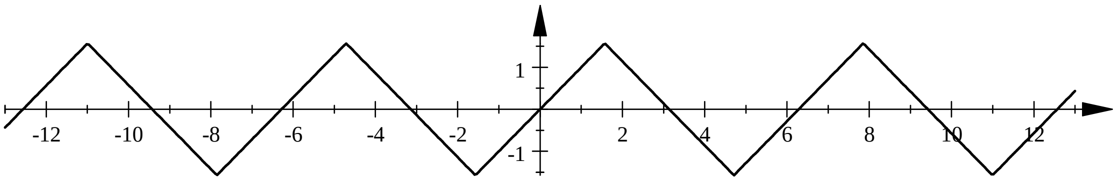
(ii) f est impaire (idem) : on restreint l'intervalle à $[0, \pi]$. On complètera par symétrie de centre O.

(iii) La droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \arcsin(\cos x)$$

Donc $x \mapsto f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ est paire, CQFD. On restreint l'intervalle à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on complètera par symétrie.

Mais $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x$. La courbe se construit donc en partant de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en appliquant (iii) puis (ii) puis (i) :



b) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. Simplifions l'expression $\arcsin(\sin(x))$: on a

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x - k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

D'où

$$\arcsin(\sin(x-k\pi)) = x - k\pi$$

C'est-à-dire

$$\arcsin\left((-1)^k \sin(x)\right) = x - k\pi$$

et par parité d'arcsinus :

$$(-1)^k \arcsin(\sin(x)) = x - k\pi$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } k \text{ est pair, on a } \arcsin(\sin(x)) = x - k\pi \\ \text{Si } k \text{ est impair, on a } \arcsin(\sin(x)) = -x + k\pi \end{cases}}$$

On retrouve les équations des segments constituant la courbe de f dans l'exercice précédent.

Ex 8 Soit $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$. f est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique (à peu près clair).
Etudions la sur la période $[0, 2\pi]$. Si $x \in [0, 2\pi]$, simplifions $f(x)$:
On ne peut simplifier $\arccos\cos x = x$ que pour $x \in [0, \pi]$, et donc $\arccos\cos(2x)$ que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ainsi :

– Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = x + \frac{1}{2}(2x) = \boxed{2x}$$

– Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et $2\pi - 2x \in [0, \pi]$. D'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x-2\pi)) \overset{\text{parité}}{=} x + \frac{1}{2}\arccos(\cos(4\pi - 2x)) = x + \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = \boxed{\pi}$$

Pour $x \in [\pi, 2\pi]$, on a $2\pi - x \in [0, \pi]$, donc $\arccos x = \arccos\cos(2\pi - x) = 2\pi - x$. Ainsi

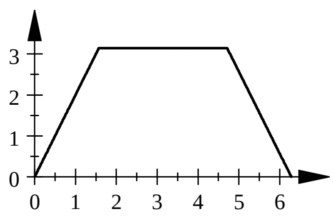
– Si $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [2\pi, 3\pi]$ et $2x - 2\pi \in [0, \pi]$.'où

$$f(x) = (2\pi - x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x - 2\pi)) = 2\pi - x + \frac{1}{2}(2x - 2\pi) = \boxed{\pi}$$

– Si $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, alors $2x \in [3\pi, 4\pi]$ et $4\pi - 2x \in [0, \pi]$. D'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x - 4\pi)) = (2\pi - x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2\pi - 2x)) = 2\pi - x + \frac{1}{2}(4\pi - 2x) = \boxed{4\pi - 2x}$$

On peut dès lors facilement tracer la courbe de f sur $[0, 2\pi]$:



Ex 9 Calculs de dérivées :

a) Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$: f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, et y est dérivable par composée.

Commençons par dériver $u : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$: sa dérivée sur $\mathcal{D}_f$ est $u' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Mais alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$$

Après simplification du dénominateur, il vient

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Remarque : on peut en déduire que f diffère d'$\arctan$ d'une constante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.

b) Soit $g : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)$. $g(x)$ est défini lorsque

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 0 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 0 \leqslant x-1 \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Ainsi $\underline{\mathcal{D}_g = [1,2]}$.
Mais $x \mapsto \sqrt{1-x}$ n'est pas dérivable en 1.
De plus, g n'est pas dérivable a priori aux points x tels que $\sqrt{x-1} = 1$.
On en conclut que g est dérivable sur $\mathcal{D}'_g =]1,2[$. Alors :

$$\forall x \in]1,2[,\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x+1}}$$

Finalement

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}}$$

Ex 10 a) Montrons que $\forall k \geqslant 0$, $\arctan\dfrac{1}{1+k+k^2} = \arctan(k+1) - \arctan k$:

* Notons A et B les deux membres de cette égalité : alors

$$\tan A = \frac{1}{1+k+k^2}$$

et d'après les formules d'addition :

$$\tan B = \frac{\tan\arctan(k+1) - \tan\arctan(k)}{1-\tan\arctan(k+1)\tan\arctan(k)} = \frac{(k+1)-k}{1-(k+1)k} = \frac{1}{1+k+k^2}$$

Ainsi $\tan A = \tan B$, soit $\exists p \in \mathbb{Z}\ /\ A = B + 2p\pi$.

* Argument de **localisation** : on a par définition $A \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus comme $k \geqslant 0$ et $k > 0$,

$$\begin{cases} 0 < \arctan(k+1) < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \arctan(k) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

d'où par différence $B \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Il s'ensuit que l'entier p est nu et donc que $A = B$ CQFD.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$: alors d'après a) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} [\arctan(k+1) - \arctan k] = \arctan(n+1) - \arctan 0$$

après télescopage. Finalement

$$\boxed{S_n = \arctan(n+1)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim S_n = \frac{\pi}{2}}$$

Remarque : on notera plus tard : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \frac{\pi}{2}}$

Ex 11 Soit (E) l'équation $\arcsin x = \arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13}$, définie sur $[-1,1]$.

Pour que (E) ait une solution, il faut et il suffit que le second membre soit dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or

– $0 < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0 < \arcsin \frac{4}{5} < \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ par stricte croissance de $\arcsin$ sur $[-1,1]$

– De même $0 < \frac{5}{13} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \arcsin \frac{5}{13} < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Par somme, il vient

$$0 < \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{2}$$

Mais alors

$$(E) \iff x = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) &= \sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) + \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) \\
&= \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}} + \sqrt{1-\frac{16}{25}} \times \frac{5}{13} \\
&= \frac{4}{5}\sqrt{\frac{144}{169}} + \frac{5}{13}\sqrt{\frac{9}{25}} \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} \\
&= \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ est } \frac{63}{65}}$$

Ex 12 Résolution de l'équation $(E) : \arccos(x) = \arcsin(2x)$, définie évidemment pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
Remarquons que si $x < 0$ alors x ne peut pas vérifier (E) car $\arccos x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
Résolvons donc (E) sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ses deux membres sont alors dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et on peut écrire l'équivalence :

$$(E) \iff \sin \arccos x = 2x \iff \sqrt{1-x^2} = 2x \overset{x \geqslant 0}{\iff} 1 - x^2 = 4x^2 \iff x^2 = \frac{1}{5}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ est } \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

<u>Autre méthode</u> : on peut aussi raisonner par analyse, et trouver $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ pour candidats potentiels.
Pour la synthèse, on considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin(2x) - \arccos(x) = \arcsin(2x) + \arcsin(x) - \frac{\pi}{2}$:
elle est continue strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, et atteint l'intervalle $\left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ qui contient 0.
(E) admet donc une unique solution positive car $f(0) = -\frac{\pi}{2}$. On conclut alors comme précédemment.

Ex 13 a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $\arctan(t) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

Posons $\theta = \arctan t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de sorte que $t = \tan \theta$. Alors

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \arccos \sqrt{\cos^2\theta} \overset{\cos\theta \geqslant 0}{=} \arccos \cos\theta$$

De plus, on peut écrire $\arccos(\cos\theta) = \theta$, car $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]$. Finalement :

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \theta = \arctan t \quad \text{CQFD.}$$

b) Soit à résoudre l'équation : $\arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} \quad (E)$.

* (E) n'est définie que si $x \neq -1$, $\frac{1-x}{1+x} > 0$, et $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
  $\frac{1-x}{1+x}$ ayant le signe de $(1-x)(1+x)$, cela revient donc à $-1 < x \leqslant 1$

$*$ (E) s'écrit aussi $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, ou encore

$$\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x$$

Posons $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geqslant 0$: alors (question précédente) :

$$\arctan t = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1-x}{1+x}}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{1+x}}} = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

(E) s'écrit donc

$$\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$$

qui équivaut à

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \quad (\text{car } \arccos \text{ est bijective}).$$

Ainsi

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} = x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\boxed{(E) \text{ admet donc } 1 \text{ pour unique solution}}$$

Remarque : en raisonnant par **analyse**, on trouve aussi $-\frac{1}{2}$, qui après vérification n'est pas solution.

Ex 14 a) Soit $A = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$. La formule de la tangente d'une somme donne :

$$\begin{aligned}
\tan A &= \frac{\tan\arctan 2 + \tan(\arctan 5 + \arctan 8)}{1 - \tan\arctan 2 \times \tan(\arctan 5 + \arctan 8)} \\
&= \frac{2 + \tan(\arctan 5 + \arctan 8)}{1 - 2\tan(\arctan 5 + \arctan 8)} \\
&= \frac{2 + \frac{5+8}{1-5\times 8}}{1 - 2 \times \frac{5+8}{1-5\times 8}} \\
&= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

On en déduit que $A = \arctan 1 \ [\pi]$, c'est-à-dire

$$A = \frac{\pi}{4} \ [\pi] \quad (\text{ou } \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ A = \frac{\pi}{4} + k\pi)$$

Mais la fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc puisque $1 < 2 < 5 < 8$,

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 5 < \arctan 8 < \frac{\pi}{2}$$

Par somme, $A \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$. On a donc nécessairement

$$\boxed{A = \frac{3\pi}{4}}$$

En effet $\frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < k < \frac{5}{4} \Longleftrightarrow k = 1$ car k est entier, d'où $A = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

b) Soit (E) l'équation $\quad \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \dfrac{5\pi}{4}$.
On vient de voir que 5 est solution.
Mais la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois fonctions strictement croissantes, de limites $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
f réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ qui contient $\frac{3\pi}{4}$. Donc l'équation (E) admet une unique solution.
Au total

$$\boxed{5 \text{ est l'unique solution de } (E)}$$

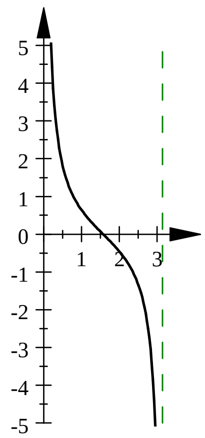
Ex 15 a) <u>Etude de la fonction cotan sur l'intervalle $]0,\pi[$</u> :

Remarque : cotan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et il est facile de voir qu'elle est π-périodique et impaire. Par quotient cotan est dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall x\in]0,\pi[$,

$$\text{cotan}'\,x=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-1-\text{cotan}^2\,x<0$$

De plus comme $\begin{cases}\lim\limits_{0^+}\sin=0\\ \lim\limits_{0^+}\cos=1\end{cases}$, et $\sin>0$ sur $]0,\pi[$, on a $\lim\limits_{0^+}\text{cotan}=+\infty$, et de même $\lim\limits_{\pi^-}\text{cotan}=-\infty$.

La courbe de cotan sur $[0,\pi]$ a donc cette allure :



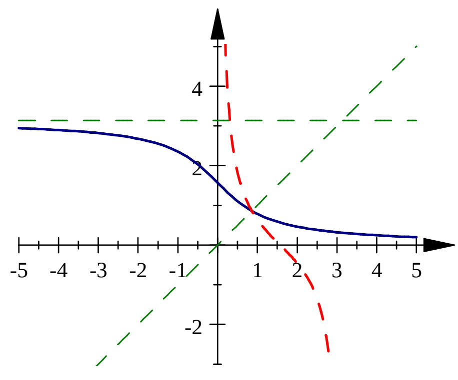
b) cotan est continue, strictement décroissante sur $]0,\pi[$, $\lim\limits_{0^+}\text{cotan}=+\infty$, et $\lim\limits_{\pi^-}\text{cotan}=-\infty$. On en déduit que cotan réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$, dont on note la réciproque :

$$\text{arccotan}:\mathbb{R}\to]0,\pi[$$

* De $\text{cotan}\,\frac{\pi}{4}=\dfrac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}=1$ on tire $\boxed{\text{arccotan}\,1=\frac{\pi}{4}}$ (car $\frac{\pi}{4}\in]0,\pi[$)

* De $\frac{11\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+\pi\in]0,\pi[$ on déduit que $\text{arccotan}\left(\text{cotan}\,\frac{11\pi}{6}\right)=\text{arccotan}\left(\text{cotan}\,\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

La courbe de arccotan se déduit de celle de cotan par symétrie d'axe $\Delta : y=x$:



c) Montrons que $\forall x\in\mathbb{R},\ \text{arccotan}\,x=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$:

Le premier membre de cette égalité est dans $]0,\pi[$, et le deuxième aussi, car

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\frac{\pi}{2}-\arctan x<\pi$$

Il suffit donc de montrer que les deux membres ont même cotangente :

* $\text{cotan}\,(\text{arccotan}\,x)=x$ par définition.

$*\quad \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=\dfrac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}=\tan(\arctan x)=x$ CQFD.

On a ainsi en dérivant, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\operatorname{arccotan}' x=-\frac{1}{1+x^2}}$$

Remarque : on pouvait dériver aussi via la formule de dérivation des composées (puisque $\operatorname{cotan}'=-\left(1+\operatorname{cotan}^2\right)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{arccotan}' x=\frac{1}{\operatorname{cotan}'(\operatorname{arccotan} x)}=-\frac{1}{1+\operatorname{cotan}^2(\operatorname{arccotan} x)}=-\frac{1}{1+x^2}\quad \text{CQFD.}$$

Ex 16 On considère les fonctions $f : x\mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh} x)$ et $g : x\mapsto \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right)$

a) La fonction $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme ch et sh . comme $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+\operatorname{ch} x>1$, on en déduit, par composition (et quotient) que f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{2\operatorname{ch} x}$$

et en notant $h(x)=\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{\operatorname{ch} x+\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{(1+\operatorname{ch} x)^2}=\frac{\operatorname{ch} x+1}{(1+\operatorname{ch} x)^2}=\frac{1}{1+\operatorname{ch} x}$$

donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\frac{h'(x)}{1+h^2(x)}$$

Or

$$1+h^2(x)=1+\frac{\operatorname{sh}^2 x}{(1+\operatorname{ch} x)^2}=\frac{1+2\operatorname{ch} x+\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$$

En utilisant encore $1+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}^2 x$, il vient

$$1+h^2(x)=\frac{2\operatorname{ch} x+2\operatorname{ch}^2 x}{(1+\operatorname{ch} x)^2}=\frac{2\operatorname{ch} x\,(1+\operatorname{ch} x)}{(1+\operatorname{ch} x)^2}=\frac{2\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch} x}$$

Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\frac{1}{1+\operatorname{ch} x}\times\frac{1+\operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch} x}=\frac{1}{2\operatorname{ch} x}$$

b) On a donc établi que $f'=g'$ sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$: on sait qu'alors f et g diffèrent d'une constante :

$$\exists C\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)+C$$

Or $f(0)=\frac{1}{2}\arctan 0=0=g(0)$. Ainsi $\boxed{f=g}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Application. Simplifions :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)=\frac{e^{1/2\ln 3}+e^{-1/2\ln 3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1/\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)=\frac{\sqrt{3}-1/\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'égalité $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)=g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ s'écrit

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}/3}{1+2\sqrt{3}/3}\right)$$

soit

$$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}\right)$$

Il vient ainsi

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(3-2\sqrt{3}\right)}{9-12}=\frac{3\sqrt{3}-6}{-3}=\boxed{2-\sqrt{3}}$$