Ex 1 Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y minorée par 0 (c'est évident). donc $\inf\limits_{\mathbb{R}_+^*} f$ existe. De plus :

- Si $x > 1$, alors $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ et $f(x) = \lfloor x \rfloor \geqslant 1$.
- Si $0 < x < 1$ alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1$.
- $f(1) = 2$.

1 est minorant de f et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, donc $\boxed{\inf\limits_{\mathbb{R}_+^*} f = \min\limits_{\mathbb{R}_+^*} f = 1}$

Remarque : 1 est atteint sur tout l'intervalle $]1, 2[$ et l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Ex 2 Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2}$. Alors pour tout réel x :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = 2 - \frac{1}{(x+1)^2 + 1}$$

Comme $(x+1)^2 + 1 \geqslant 1$, on a donc :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence de $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$.

- De plus $f(-1) = 1$, donc $\boxed{\inf\limits_{\mathbb{R}} f = \min\limits_{\mathbb{R}} f = 1}$
- Montrons que $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 2$.
  * 2 est bien majorant de f et n'est pas atteint par f ($f(x) = 2 \Longleftrightarrow 0 = 1$).
  * Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $2 - \varepsilon$ n'est pas majorant de f, c'est-à-dire qu'il existe un réel x tel que

$$f(x) > 2 - \varepsilon \quad (*)$$

Or

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{1}{(x+1)^2 + 1} > 2 - \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad (x+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{aligned}$$

  · Si $\varepsilon \geqslant 1$, n'importe quel réel x vérifie $(*)$.

  · Si $\varepsilon < 1$, le réel $x = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ vérifie $(*)$ (car $(x+1)^2 > x^2 = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$)

Dans tous les cas $2 - \varepsilon$ n'est pas majorant de f, ce qui confirme notre conjecture : $\boxed{\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 2}$

Ex 3 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \cos x}{1+x^2}$.

- On a $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$, et $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$ existent.
- Montrons que $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 1$ (un dessin le suggère aisément).
  - $*$ <u>1 est majorant</u>, comme on vient de le montrer.
  - $*$ <u>Soit $\varepsilon > 0$</u>. Montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas majorant, c'est-à-dire qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) \overset{(*)}{>} 1-\varepsilon$.

    Pour s'approcher au plus près de 1, cherchons x_0 sous la forme $x_0 = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$, de sorte que le cosinus soit maximal. Alors $(*)$ devient

    $$\frac{4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2} > 1-\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{1+4k^2\pi^2} < \varepsilon \Longleftrightarrow k^2 > \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$

    - $\cdot$ <u>Si $\varepsilon > 1$</u>, avec n'importe quel k, $x_0 = 2k\pi$ vérifie bien $(*)$.
    - $\cdot$ <u>Si $\varepsilon \leqslant 1$</u>, alors en posant $k = \left\lfloor \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right\rfloor + 1$, $x_0 = 2k\pi$ vérifie bien $(*)$.

    Au total, $1-\varepsilon$ n'est pas majorant et on a bien $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = 1$.
- Montrons de même que $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = -1$
  - $*$ <u>-1 est minorant</u>, puisque $|f| \leqslant 1$.
  - $*$ <u>Soit $\varepsilon > 0$</u>. Montrons que $-1+\varepsilon$ n'est pas minorant, i.e. qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) \overset{(*)}{<} -1+\varepsilon$.

    Pour s'approcher au plus près de -1, cherchons x_0 sous la forme $x_0 = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$, de sorte que le cosinus soit minximal. Alors $(*)$ devient

    $$-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2} < -1+\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{1+(2k+1)^2\pi^2} < \varepsilon \Longleftrightarrow (2k+1)^2 > \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$

    - $\cdot$ <u>Si $\varepsilon > 1$</u>, avec n'importe quel k, $x_0 = (2k+1)\pi$ vérifie bien $(*)$.
    - $\cdot$ <u>Si $\varepsilon \leqslant 1$</u>, alors en posant $k = \left\lfloor \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right\rfloor$, $x_0 = (2k+1)\pi$ vérifie bien $(*)$.

    Au total, $-1+\varepsilon$ n'est pas majorant et on a bien $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = -1$.

Ex 4 Soit $E = \left\{ \dfrac{n}{mn+1},\ m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

– E contient $\frac{1}{2}$ (avec $(m,n) = (1,1)$) donc est non vide. De plus, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$

$$0 < \frac{n}{mn+1} < \frac{n}{n+1} = 1$$

Donc E est non vide et borné, et $\sup E$ et $\inf E$ existent.

– Montrons que $\sup E = 1$. 1 est bien majorant, et montrons que c'est le plus petit :
Soit $\varepsilon > 0$. montrons que $1 - \varepsilon$ n'est pas majorant de E en trouvant un élément $x \in E$ tel que $x > 1 - \varepsilon$.
Cela revient à trouver $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\dfrac{n}{mn+1} > 1 - \varepsilon\ (*)$.
Posons $\boxed{m = 1}$. $(*)$ devient alors $\dfrac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$ soit $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.
 * Si $\varepsilon > 1$, avec n'importe quel $n \in \mathbb{N}^*$, (m,n) vérifie $(*)$.
 * Si $\varepsilon \leqslant 1$, en posant $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, le couple (m,n) vérifie $(*)$.

Dans tout les cas, $1 - \varepsilon$ n'est pas majorant de E, i.e. $\sup E = 1$.

– Montrons que $\inf E = 0$. 0 est bien minorant, et montrons que c'est le plus grand :
Soit $\varepsilon > 0$. montrons que ε n'est pas minorant de E en trouvant un élément $x \in E$ tel que $x < \varepsilon$.
Cela revient à trouver $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\dfrac{n}{mn+1} < \varepsilon\ (*)$.
Posons $\boxed{n = 1}$. $(*)$ devient alors $\dfrac{1}{m+1} > 1 - \varepsilon$ soit $m > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.
 * Si $\varepsilon > 1$, avec n'importe quel $m \in \mathbb{N}^*$, (m,n) vérifie $(*)$.
 * Si $\varepsilon \leqslant 1$, en posant $m = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, le couple (m,n) vérifie $(*)$.

Dans tout les cas, ε n'est pas minorant de E, i.e. $\sup E = 0$.

Ex 5 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que $A \subset B$ et B majorée.
A est non vide par hypothèse et majorée en effet $\forall x \in A$, on a $x \in B$ donc $x \leqslant \sup B$.
Donc $\sup A$ existe (théorème de la borne supérieure).
De plus, on a $\forall x \in A,\ x \leqslant \sup B$, donc $\sup B$ majore A, et donc $\sup A$. Ainsi

$$\boxed{\sup A \leqslant \sup B}$$

Ex 6 Soient f et g deux fonctions strictement positives majorées sur un intervalle I.
Alors $\sup\limits_I f$, $\sup\limits_I g$, $\inf\limits_I f$ et $\inf\limits_I g$ existent et

$$\forall x \in I,\ 0 \leqslant \inf_I f \leqslant f(x) \leqslant \sup_I f \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \inf_I g \leqslant g(x) \leqslant \sup_I g$$

Par produit on a donc $\forall x \in I$,

$$0 \leqslant \inf_I (f) \times \inf_I (g) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant \sup_I (f) \times \sup_I (g)$$

Donc fg est bornée sur I, $\sup\limits_I (f) \times \sup\limits_I (g)$ en est un majorant et $\inf\limits_I (f) \times \inf\limits_I (g)$ un minorant. Ainsi

$$\boxed{\sup_I (fg) \leqslant \sup_I (f) \times \sup_I (g)} \quad \text{et} \quad \boxed{\inf_I (fg) \geqslant \inf_I (f) \times \inf_I (g)}$$

Ex 7 Soit f une fonction majorée sur un intervalle I et sur un intervalle J. On note $M_I = \sup\limits_I f$ et $M_J = \sup\limits_J f$.

Soit $x \in I \cup J$. Si $x \in I$, alors $f(x) \leqslant M_I$, et si $x \in J$ alors $f(x) \leqslant M_J$. Donc $f(x) \leqslant \max(M_I, M_J)$.

Ainsi f est majorée sur $I \cup J$, ce qui assure l'existence de $\sup\limits_{I\cup J} f$. De plus $\sup\limits_{I\cup J} f \leqslant \max(M_I, M_J)$.

Inversement, si μ est un majorant de f sur $I \cup J$, alors $\forall x \in I \cup J,\ f(x) \leqslant \mu$. En particulier

$$\begin{array}{rcl} \forall x & \in & I,\ f(x) \leqslant \mu \quad \text{donc} \quad M_I \leqslant \mu \\ \forall x & \in & J,\ f(x) \leqslant \mu \quad \text{donc} \quad M_J \leqslant \mu \end{array}$$

μ est donc supérieur à M_I et M_J, donc au plus grand des deux : $\mu \geqslant \max(M_I, M_J)$.

On en déduit que $\max(M_I, M_J)$ est le plus grand des majorants de f sur $I \cup J$, soit

$$\boxed{\sup_{I\cup J} f = \max(M_I, M_J)}$$

Ex 8 Soit E une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$, $M = \sup E$, $m = \inf E$. On pose $\mathcal{D} = \left\{|x-y|,\ (x,y) \in E^2\right\}$.

E est non vide, donc en choisissant $x \in E$, on a $0 = |x - x| \in D$, donc $\mathcal{D} \neq \varnothing$. De plus

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \left\{ \begin{array}{l} m \leqslant x \leqslant M \\ m \leqslant y \leqslant M \end{array} \right. \Rightarrow m - M \leqslant x - y \leqslant M - m \Rightarrow |x-y| \leqslant M - m$$

$\mathcal{D}$ est donc majoré par $M - m$. Donc il admet une borne supérieure $\sup \mathcal{D}$

Montrons que $\sup \mathcal{D} = M - m$: soit μ un majorant de $\mathcal{D}$: alors

$$\forall y \in E, \forall x \in E,\ x - y \leqslant \mu$$

$y \in E$ étant fixé quelconque, on a ainsi

$$\forall x \in E,\ x \leqslant \mu + y$$

Par "passage au sup", on en déduit

$$M \leqslant \mu + y$$

Ainsi

$$\forall y \in E,\ y \geqslant M - \mu$$

Par "passage à l'inf" on peut donc affirmer

$$m \geqslant M - \mu$$

et ainsi

$$\mu \geqslant M - m$$

$M - m$ est donc le plus petit des majorants de $\mathcal{D}$, CQFD.

<u>Autre solution</u> : soit $\varepsilon > 0$: par définition des bornes supérieures et inférieures,

$$\exists x \in E \;/\; x > M - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \exists y \in E \;/\; y < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais alors

$$|x - y| \geqslant x - y > M - m - \varepsilon$$

Donc $M - m - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\mathcal{D}$, CQFD.

Ex 9 Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et borné tel que $\inf A > 0$

On pose $B = \left\{ \dfrac{1}{a},\ a \in A \right\}$. Alors B est non vide (il existe un élément a de A, donc $\dfrac{1}{a} \in B$).

De plus si $b \in B$, alors $\exists a \in A \ / \ b = \dfrac{1}{a}$. Comme $a \geqslant \inf A$, on a alors $b \leqslant \dfrac{1}{\inf A}$.

Ainsi B est majoré par $\dfrac{1}{\inf A}$ et minoré par 0 : B est borné non vide, et $\sup B$ existe.

Montrons que $\sup B = \dfrac{1}{\inf A}$: si M est un majorant de B, alors

$$\forall b \in B,\ b \leqslant M \quad \text{soit} \quad \forall a \in A,\ 0 < \frac{1}{a} \leqslant M$$

(en effet $\inf A > 0$, donc $\forall a \in A,\ a > 0$). On en déduit que

$$\forall a \in A,\ a \geqslant \frac{1}{M} > 0$$

Par "passage" à la borne inférieure, il vient $\inf A \geqslant \dfrac{1}{M} > 0$, soit $M \geqslant \dfrac{1}{\inf A}$.

$\dfrac{1}{\inf A}$ est donc le plus petit majorant de B, soit

$$\boxed{\sup B = \frac{1}{\inf A}}$$

Ex 10 Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés, c'est-à-dire d'intervalles fermés et bornés de type $I_k = [a_k, b_k]$ avec $a_k \leqslant b_k$, et formant une suite décroissante pour l'inclusion ($\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k$).

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$I_{k+1} \subset I_k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_k \leqslant a_{k+1} \\ b_k \geqslant b_{k+1} \end{array} \right.$$

Autrement dit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante.

De plus, si $k \in \mathbb{N}$, $a_0 \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant b_0$. On en déduit que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Posons $a = \sup a_k$ et $b = \inf b_k$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} \forall n < k,\ a_n \leqslant a_k \leqslant b_k \\ \forall n \geqslant k,\ a_n \leqslant b_n \leqslant b_k \end{array} \right.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, b_k majore la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N},\ a \leqslant b_k$.

Mais alors a minore la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donc

$$\boxed{a \leqslant b}$$

b) Montrons que $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = [a, b]$

* si $x \in [a, b]$, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a

$$a_k \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant b_k \quad \text{d'où} \quad x \in [a_k, b_k] = I_k$$

  On en déduit que $x \in \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$,

* Inversement si $x \in \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leqslant x \leqslant b_k$. Donc x majore $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et minore $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

  Il vient :

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{ou} \quad x \in [a, b]$$

  ce qui établit l'égalité proposée par double inclusion.

Ex 11 Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \in [0,1] \\ \forall (x,y) \in [0,1]^2\,, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \end{cases}$$

On se propose de démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]\ /\ f(\alpha) = \alpha$.

On pose à cet effet : $A = \{x \in [0,1]\ /\ f(x) \geqslant x\}$.

a) On a $f(0) \in [0,1]$, donc $f(0) \geqslant 0$, *i.e.* $0 \in A$.

Majoré (évidemment par 1) et non vide, il admet une borne supérieure $\sup A = m \in [0,1]$.

b) Si $z \in A$, alors par définition $z \leqslant f(z)$ et par hypothèse $f(z) - f(m) \leqslant |z-m| = m - z$ (car $z \leqslant m$) : donc

$$\boxed{\forall z \in A,\ z \leqslant f(z) \leqslant f(m) + m - z}$$

En considérant les deux membres extrêmes de cet encadrement, on obtient

$$\forall z \in A,\ 2z \leqslant f(m) + m \quad i.e.$$

soit

$$\forall z \in A,\ z \leqslant \frac{f(m)+m}{2}$$

Par passage au $\sup$ il vient

$$m \leqslant \frac{m+f(m)}{2}$$

Ce dont on déduit aisément

$$\boxed{f(m) \geqslant m}$$

c) On suppose que $m \neq 1$. Alors

$$\forall z \in \left]m,1\right],\ f(m) - f(z) \leqslant |m-z| \overset{z \geq m}{=} z - m$$

Mais comme $z > m$, on a $z \notin A$, et donc $f(z) < z$: en ajoutant, il vient

$$\boxed{\forall z \in \left]m,1\right],\ f(m) < 2z - m}$$

Mais alors

$$\forall z \in \left]m,1\right],\ z > \frac{f(m)+m}{2}$$

Par passage à l'$\inf$, on en déduit (puisque $\inf\left]m,1\right] = m$) que

$$m \geqslant \frac{m+f(m)}{2}$$

Et ainsi

$$\boxed{f(m) \leqslant m}$$

d) On a ainsi d'après b) et c), si $m \neq 1$, $\boxed{f(m) = m}$

Mais si $m = 1$, alors on a d'après 3. : $1 = m \leqslant f(m) \leqslant 1$, d'où

$$\boxed{f(m) = m = 1}$$

Dans les deux cas on a bien l'existence d'un réel $m = \sup A$ vérifiant $f(m) = m$, CQFD.