Limites, continuité

1. Limites

1.1. Définitions

a) **Limite d'une fonction en un point :** soit f une fonction définie sur I et et $a \in \overline{I}$.

(i) **Limite finie en $a \in \mathbb{R}$:**

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I,\ \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon}$$

qui s'écrit aussi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, (|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut, **pourvu** que x soit suffisamment proche de a.

(ii) **Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$:**

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, (a - \alpha \leqslant x \leqslant a + \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant M)}$$

(iii) **Limite finie en $+\infty$:**

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \ / \ \forall x \in I, (x \geqslant A \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon)}$$

(iv) **Limite infinie en $+\infty$:**

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0,\ \exists A > 0 \ / \ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M)}$$

Remarque 1 : dans tous les cas ($a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$), $\lim\limits_{a} f = \ell$ revient à

$$\boxed{\text{Pour tout voisinage } \mathcal{V} \text{ de } \ell, \text{ il existe un voisinage } \mathcal{W} \text{ de } a \text{ dans lequel on ait : } f(x) \in \mathcal{V}}$$

Remarque 2 : f admet 0 pour limite en 0 s'écrit

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, \text{ si } |x| \leqslant \alpha, \text{ alors } |f(x)| \leqslant \varepsilon}$$

On peut toujours s'y ramener car $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} (f(a + h) - \ell) = 0}$

Exemples : montrer avec la définition : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x + 1} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{x - 2} = 1$

Remarque 3 : il y a unicité de la limite.

b) **Limite à gauche-à droite :** soit I un intervalle, $a \in \overset{\circ}{I}$ (i.e. a n'est pas une borne de I).

On suppose que f est définie sur I **sauf éventuellement en** a.

On dit que $\lim\limits_{a^+} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet ℓ pour limite soit :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, \text{ si } a < x \leqslant a + \alpha, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon} \quad (\text{cas } \ell \in \mathbb{R})$$

Définition analogue pour la limite à gauche. On a la caractérisation suivante

$$\boxed{\text{si } f \text{ n'est pas définie en } a, \text{ alors } \lim_{a} f = \ell \Longleftrightarrow \lim_{a-} f = \lim_{a+} f = \ell}$$

Cela est faux lorsque f est définie en a.

c) Deux conséquences :

(i) $\boxed{\text{Soit } a \in \overline{\mathbb{R}}. \text{ Si } \lim_a f = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } f \text{ est bornée au voisinage de } a}$

(ii) $\boxed{\text{Si } \lim_a f = \ell > 0, \text{ alors } f(x) > 0 \text{ au voisinage de } a.}$

1.2. Caractérisation séquentielle des limites :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors on a l'équivalence :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ si, et seulement si, pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } a, \text{ la suite } (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell}$$

Remarque : la contraposée est très utilisée : si on trouve une suite (u_n) de limite a telle que $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ alors f ne tend pas vers ℓ en a (par exemple, cos n'a pas de limite en $+\infty$)

Application : soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f s'annule sur $\mathbb{R}$.

1.3. Opérations sur limites.

1. **Sommes et produits** : on suppose que $\lim_a f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_a g = \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si} \quad \ell + \ell' \quad \text{est défini sur } \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{alors} \quad \lim_a (f+g) = \ell + \ell' \\ \text{Si} \quad \ell\ell' \quad \text{est défini sur } \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{alors} \quad \lim_a (fg) = \ell\ell' \end{array}}$$

2. **Quotients** : on suppose que $\lim_a f = \ell$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si} \quad \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \text{alors} \quad \lim_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell} \\ \text{Si} \quad \ell = \pm\infty, \quad \text{alors} \quad \lim_a \dfrac{1}{f} = 0 \\ \text{Si} \quad \ell = 0, \quad \text{alors} \quad \lim_a \left|\dfrac{1}{f}\right| = +\infty \end{array}}$$

Les quotients $\dfrac{f}{g}$ se traitent alors comme produits : $f \times \dfrac{1}{g}$.

3. **Composées** : soient $u : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, et $b \in \overline{J}$ (a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\boxed{\text{Si} \quad \lim_{x\to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y\to b} f(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(u(x)) = \ell}$$

1.4. Limites et inégalités

a) Théorème des gendarmes :

$$\boxed{\text{on suppose } f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \text{ au voisinage de } a \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ et } \lim_a f = \lim_a h = \ell. \text{ alors } \lim_a g \text{ existe et vaut } \ell}$$

Attention : ce théorème n'est pas un passage à la limite. **Il prouve l'existence** et donne la valeur.

Remarque : on a aussi : $\boxed{\text{si } f(x) \geqslant g(x) \text{ au voisinage de } a \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ et } \lim_a g = +\infty, \text{ alors } \lim_a f = +\infty}$

b) **Passage à la limite dans une inégalité :**

$\boxed{\text{On suppose que } \lim\limits_a f = \ell,\ \lim\limits_a g = \ell' \text{ et qu'au voisinage de } a \text{, on ait } f(x) \leqslant g(x) \text{ : alors } \ell \leqslant \ell'}$

Attention : l'hypothèse $f(x) < g(x)$ n'entraîne pas $\ell < \ell'$:

c) **Limites et fonctions monotones :** soit f une fonction croissante sur un intervalle $[a, b[$ ($b \in \overline{\mathbb{R}}$). On a

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est majorée sur } [a,b[\text{, alors } f \text{ admet une limite finie en } b \text{, et } \lim\limits_b f = \sup\limits_{[a,b[} f \\ \text{Si } f \text{ est non majorée sur } [a,b[\text{, alors } \lim\limits_b f = +\infty \end{array}}$$

Résultats analogue pour les fonction décroissantes, et pour l'intervalle $]a, b]$.

Remarque : on en déduit que toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite à droite et une limite à gauche en chaque point.

2. Continuité

2.1. Compléments

a) **Continuité en un point :** soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La continuité de f en a, ($\lim\limits_a f = f(a)$) s'exprime par :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, \text{ si } |x - a| \leqslant \alpha, \text{ alors } |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon}$$

Remarque 1 : si f est définie en a **et** si $\lim\limits_a f$ existe, alors f est continue en a :

Remarque 2 : $\boxed{\text{si } f \text{ est continue en } a \text{ et } f(a) > 0, \text{ alors } f > 0 \text{ au voisinage de } a.}$ (utile)

De plus, toute fonction continue en a est bornée au voisinage de a (cf. plus haut)

b) **Fonctions lipschitziennes :**

(i) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **k-lipschitzienne** sur I lorsque

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x|}$$

Exemple : sin est 1-lip sur $\mathbb{R}$.

(ii) Propriété : $\boxed{\text{toute fonction } k\text{-lipschitzienne sur } I \text{ est continue sur } I}$

Remarque : la réciproque est fausse. Par exemple $f : x \to x^2$ est continue non lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Cas particulier : si $k < 1$, on dit que f est **k-contractante** sur I.

2.2. Théorème des valeurs intermédiaires

a) **Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$:** soit I une partie de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ si et seulement si pour tous réels } \alpha < \beta \text{ de } I, \text{ on a } [\alpha, \beta] \subset I}$$

ce qui revient à

$$\boxed{I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \forall (\alpha, \beta) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\alpha \leqslant x \leqslant \beta \Rightarrow x \in I)}$$

b) **Théorème :** si f est continue sur l'**intervalle** I, alors $f\langle I\rangle$ est un intervalle.

Contre exemple : E n'est pas continue, et on a $E\langle[0,2]\rangle = \{0,1,2\}$ qui n'est pas un intervalle.

c) **Enoncé équivalent : propriété des valeurs intermédiaires :**

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } [a,b], \text{ alors } \forall m \in \left\{ \begin{array}{l} [f(a), f(b)] \\ [f(b), f(a)] \end{array} \right., \text{ l'équation } f(x) = m \text{ admet au moins une solution.}}$$

d) **Enoncé équivalent plus courant :**

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } [a,b], \text{ et } f(a) f(b) < 0, \text{ alors } f \text{ s'annule au moins une fois sur }]a,b[}$$

Exemple 1 : tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle

Exemple 2 : si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue sur $[0,1]$, alors il existe $x \in [0,1]\ /\ f(x) = x$.

e) **Corollaire : théorème de la bijection :**

$$\boxed{\text{si } f \text{ est continue strictement monotone sur l'intervalle } I, \text{ alors } f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur l'intervalle } J = f\langle I\rangle}$$

Remarque : autre conséquence : $\boxed{\text{si } f \text{ continue ne s'annule pas sur } I, \text{ alors } f \text{ est de signe constant sur } I}$

2.3. Image d'un segment (intervalle fermé et borné, donc de la forme $[a,b]$)

a) **Théorème**(admis) : $\boxed{\text{l'image d'un segment par une fonction continue est un segment}}$.

b) **Conséquence :** toute fonction **continue** sur un **segment** y est **bornée**, et **atteint ses bornes**.

Contre exemples :

– I non borné : $f : x \mapsto \arctan x$. f est bornée sur $[0, +\infty[$, mais n'atteint pas sa borne supérieure.

– I non fermé : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$, mais $f(]0,1]) = [0, +\infty[$: f n'est pas bornée.

– f non continue : $f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ si } x = 1 \end{array} \right.$. f est bornée mais $\sup\limits_{[0,1]} f = 1$ n'est pas atteint.

Exemple : si $f \in C^1([a,b])$, alors on peut parler de $\sup\limits_{[a,b]} |f'|$ (qui est un $\max$)