On rendra seulement une copie par trinôme de colle.

EXERCICE 1 Résoudre sur $[0, 2\pi[$ l'inéquation (I) : $4\sin^2(x) + 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos(x) - \sqrt{2} - 4 > 0$.

EXERCICE 2 Pour n entier naturel, on pose:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)\times(n!)^2}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 puis S_0, S_1, S_2, S_3. Que remarque-t-on?

2. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_{n-k} a_k$

En déduire que $2T_n = nS_n$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\, a_{n+1} = 2\,(2n+1)\, a_n$

4. Déduire des questions précédentes que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\, S_n \text{ puis que } \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\, S_n$$

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$ (on pourra raisonner par récurrence).

EXERCICE 3

On sait tous que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$. Etablir la "réciproque" suivante :

On se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs, et on suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2$$

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $x_n = n$.

EXERCICE 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, ..., a_n des réels strictement positifs. On pose

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(k-1)/k}$$

On fixe un réel λ strictement supérieur à 1 et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_k : x \mapsto x^{(k-1)/k} - \lambda x$

1. Dans cette question on fixe que $k \geqslant 2$

a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ? Est-elle dérivable sur $\mathcal{D}$?

b) Etudier les variations de f_k sur $\mathcal{D}$, et en déduire que f_k admet un maximum en un point x_k dont on déterminera l'expression en fonction de k.

c) Montrer que $f_k(x_k) = \dfrac{1}{\lambda^{k-1}} \times \dfrac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$

d) En déduire que $f_k(x_k) \leqslant \dfrac{1}{\lambda^{k-1}}$

2. Démontrer à l'aide de la question précédente que $T \leqslant \lambda S + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$.

3. Pour $x > 1$ on définit $g(x) = xS + \dfrac{x}{x-1}$.

a) Montrer que g admet un minimum sur $]1, +\infty[$ que l'on précisera.

b) En déduire que : $\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S} + 1$.