PARTIE 1: **généralités**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non trivial. On notera id l'application identité de E et $\mathbb{O}$ l'application nulle.

On considère un endomorphisme f de E vérifiant :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}) \quad (*)$$

1. L'ensemble des endomorphismes de E vérifiant $(*)$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

2. Déterminer toutes les homothéties de E vérifiant la relation $(*)$.

On supposera désormais que f n'est pas une homothétie.

3. Montrer que f est inversible, et exprimer f^{-1} à l'aide de f.

4. Démontrer que $E = \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \oplus \ker(f - \mathrm{id})$, en précisant la décomposition d'un vecteur x de E.

5. On note $p = \frac{2}{3}\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$ et $q = -\frac{2}{3}(f - \mathrm{id})$

a) Montrer que p et q sont deux projecteurs dont on donnera les éléments caractéristiques à l'aide de f.

b) Retrouver à l'aide de p et q le résultat de la question 4.

c) Exprimer f en fonction de p et q, puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n est une combinaison linéaire de p et q que l'on explicitera.

d) Montrer que la relation précédente reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

6. a) Montrer que $\ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \neq E$ et $\ker(f - \mathrm{id}) \neq E$

b) En déduire que $\ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \neq \{0_E\}$ et $\ker(f - \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si l'équation $f(x) = \lambda x$ admet une solution $x \in E$ non nulle, alors $\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ.

d) Réciproquement, montrer que pour ces valeurs de λ, l'équation $f(x) = \lambda x$ admet des solutions non nulles.

PARTIE 2 : **applications**

1. Application 1 : on considère $E = \mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de E associé à la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f vérifie la relation $(*)$.

b) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$, calculer $X_1 \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) = F$ et $X_2 \in \ker(f - \mathrm{id}) = G$ tels que

$$X = X_1 + X_2$$

c) Calculer les éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun) du projecteur sur F parallèlement à G et du projecteur sur G parallèlement à F.

d) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

2. Application 2 : on considère l'ensemble E des fonctions f de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$2x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=0 \quad (\mathcal{E})$$

Si $f\in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x>0,\ \varphi(f)(x)=xf'(x)$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et que φ est linéaire.

b) Démontrer que φ est un endomorphisme de E.

c) Montrer que φ vérifie la relation $(*)$ de la partie 1.

d) Résoudre sur $]0,+\infty[$ les équations différentielles :

$$xy'(x)-y(x)=0 \quad (\mathcal{E}_1) \quad \text{et} \quad xy'(x)+\frac{1}{2}y(x)=0 \quad (\mathcal{E}_2)$$

e) On note f_1 et f_2 les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ vérifiant $f_1(1)=f_2(1)=1.$

Ecrire les ensembles $\ker(\varphi-\mathrm{id})$ et $\ker\left(f+\frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$ à l'aide de f_1 et f_2

f) En déduire la dimension et une base de E.

Donner alors la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$.