La réduite de Gauss-Jordan (échelonnée réduite par ligne) d'une matrice A est unique

---

<u>*Preuve*</u> [1]: supposons que A admette deux réduites R et S et montrons qu'elles sont nécessairement égales.

Par l'absurde si $R \neq S$, on considère la première colonne C en partant de la gauche pour laquelle R diffère de S, et on note C' la colonne de S correspondante

On construit alors la sous matrice R' de R obtenue en en ne conservant que la colonne C et les colonnes à sa gauche qui n'ont qu'un coefficient 1 et les autres nuls. On construit aussi l'analogue S' de S.

Par exemple si

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement R' est de la forme (par blocs)

$$R' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & c' \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad (1) \quad \text{ou} \quad R' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) \quad (2)$$

ou c' est une colonne de $\mathbb{K}^n$, et de même

$$S' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & c'' \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad (1') \quad \text{ou} \quad S' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) \quad (2')$$

Avec $c'' \neq c'$.

Or les matrices R' et S' sont équivalentes en ligne puisque R et S le sont (transitivité de l'équivalence en ligne) et que la suppression de colonnes n'affecte pas l'équivalence en ligne.

Elles sont de plus réduites mais distinctes, et on peut donc avoir les cas $((1), (1'))$, $((1), (2'))$ et $((2), (1'))$

Interprétons les comme des matrices augmentées : alors

- Le système correspondant à R' admet l'unique solution c' (premier cas) ou il est incompatible (second cas)
- Le système correspondant à S' admet l'unique solution c'' (premier cas) ou il est incompatible (second cas)

Mais ces systèmes sont équivalents donc ont même ensemble de solution, ce qui n'est possible que si on est dans les cas $((2), (2'))$, ce qui est exclu (on ne peut pas avoir $R' = S'$)

Le résultat est donc établi.

---

[1] D'après W.H. Holzmann