Ex 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $P_n(X) = (1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\cdots\left(1+X^{2^n}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} P_0 &= 1+X, \\ P_1 &= (1+X)\left(1+X^2\right) = 1+X+X^2+X^3 \\ P_2 &= \left(1+X+X^2+X^3\right)\left(1+X^4\right) = 1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7 \end{aligned}$$

On conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k \quad (H_n)$.

- H_0 a été vue
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_{n-1} et montrons H_n : par hypothèse de récurrence

$$P_n = \left(1+X^{2^n}\right)P_{n-1} = \left(1+X^{2^n}\right)\sum_{k=0}^{2^n-1} X^k = \sum_{k=0}^{2^n-1} X^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} X^{k+2^n}$$

On effectue la translation d'indice $k' = k+2^n$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} X^k + \sum_{k=2^n}^{2^n-1+2^n} X^k = \sum_{k=0}^{2\times 2^n-1} X^k = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k \quad \text{CQFD.}$$

Ex 2 Divisions euclidiennes :

a) Division de $A = X^6+4X^5+X^4+X^3-2X+1$ par $B = X^2+2X-1$. On trouve :

$$\boxed{A = \left(X^4+2X^3-2X^2+7X-16\right)B + (37X-15)}$$

b) Division de $A = 4X^3+X^2$ par $B = X+(1+i)$. On trouve :

$$\boxed{A = \left[4X^2-(3+4i)X+(-1+7i)\right]B + (8-6i)}$$

Ex 3 La division euclidienne de $P = X^4+6X^3+10X^2+3X-6$ par $B = X^2+3X$ donne

$$P = \left(X^2+3X\right)\left(X^2+3X+1\right)-6$$

En revenant à B :

$$P = B(B+1)-6 = B^2+B-6$$

Connaissant les racines de X^2+X-6, soit 2 et -3, et donc la factorisation $X^2+X-6 = (X-2)(X+3)$,

$$P = (B-2)(B+3) = \left(X^2+3X-2\right)\left(X^2+3X+3\right)$$

Les polynômes X^2+3X-2 et X^2+3X+3 sont irréductibles (discriminants négatifs).

La factorisation précédente est donc la décomposition sur $\mathbb{R}[X]$ de P :

$$\boxed{P = \left(X^2+3X-2\right)\left(X^2+3X+3\right)}$$

Ex 4 Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. L'identité $(X+1)^{p+q} = (X+1)^p\,(X+1)^q$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} X^k = \Big(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} X^k\Big)$$

Soit par formule du produit de deux polynômes :

$$\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} X^k = \sum_{k=0}^{p+q} \Big(\sum_{i+j=k} \binom{p}{i}\binom{q}{j}\Big) X^k$$

Soit $n \in [\![0, p+q]\!]$:

- Le coefficient de X^n dans $(X+1)^{p+q}$ est $\binom{p}{n}$
- Le coefficient de X^n dans $(X+1)^p\,(X+1)^q$ est $\displaystyle\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \sum_{k} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$

On en déduit la formule de Vandermonde :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}}$$

Ex 5 Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = \left(1+X^2\right) P_k' - (2k+1)\,XP_k$.

On a

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & -X \\ P_2 & = & -1 - X^2 + 3X^2 = 2X^2 - 1 \\ P_3 & = & \left(1+X^2\right)4X - 5X\left(2X^2-1\right) = -6X^3 + 9X \end{array}$$

On conjecture : $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) : \begin{cases} \deg P_n = n \text{ et} \\ \operatorname{cd}(P_n) = (-1)^n\, n! \end{cases}$ (cd désigne le coefficient dominant).

- $H(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$. Pour simplifier, écrivons, par hypothèse de récurrence :

  $$P_n = a_n X^n + R \quad \text{où } R \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et } a_n = (-1)^n\, n!$$

  Alors par définition

  $$\begin{array}{rcl} P_{n+1} & = & \left(1+X^2\right)\left(na_nX^{n-1} + R'\right) - (2n+1)\,X\,(a_nX^n + R) \\ & = & (-n-1)\,a_nX^{n+1} + na_nX^{n-1} + \left(1+X^2\right)R' - (2n+1)\,XR \end{array}$$

  Or $R' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, donc

  $$\begin{cases} \left(1+X^2\right)R' \in \mathbb{R}_n[X] \\ (2n+1)\,XR \in \mathbb{R}_n[X] \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} na_nX^{n-1} + \left(1+X^2\right)R' - (2n+1)\,XR \in \mathbb{R}_n[X]$$

  Il s'ensuit que P_{n+1} s'écrit :

  $$P_{n+1} = -(n+1)\,a_nX^{n+1} + S \quad \text{avec } S \in \mathbb{R}_n[X]$$

  et donc $\deg P_{n+1} = n+1$ et $\operatorname{cd}(P_n) = -(n+1)\,a_n = -(-1)^n\,(n+1)\,n! = (-1)^{n+1}\,(n+1)!$.
- Par principe de récurrence, notre conjecture est démontrée.

Ex 6 On considère n un entier supérieur à 1, $x_1, \dots, x_n$ des réels **distincts**, et $P,\ Q$ deux polynômes réels **unitaires** de degré n vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ P(x_k) = Q(x_k)$$

Posons $R = P - Q$. Alors comme P et Q sont unitaires de degré n, $\deg R < n$.

En effet on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{ll} P = X^n + P_1 & \text{avec} \deg P_1 \leqslant n-1 \\ Q = X^n + Q_1 & \text{avec} \deg Q_1 \leqslant n-1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad P - Q = P_1 - Q_1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Mais

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = 0$$

R admet n racines distinctes, il est donc nul, et on peut conclure :

$$\boxed{P = Q}$$

Ex 7 Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels distincts, et $F : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\,,\ F(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n))$$

<u>Montrons que F est injective</u> : si $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ vérifie $F(P) = F(Q)$, alors

$$(P(x_0), \dots, P(x_n)) = (Q(x_0), \dots, Q(x_n))$$

soit

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ P(x_k) = Q(x_k)$$

Ainsi le polynôme $R = P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ admet $n+1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$, il est donc nul : $P = Q$ CQFD.

Ex 8 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, et $\tilde{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son application polynomiale associée.

Si $a \in \mathbb{C}$, posons $Q = P - a$, polynôme non constant aussi.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, Q admet au moins une racine z dans $\mathbb{C}$. Autrement dit

$$\exists z \in \mathbb{C} \ / \ P(z) = a$$

On en déduit que

$$\boxed{\tilde{P} \text{ est surjective}}$$

Pour $P = X^n$, avec $n \geqslant 2$, on a $\tilde{P}(1) = \tilde{P}\left(e^{2i\pi/n}\right) = 1$, donc <u>$\tilde{P}$ n'est pas injective</u>.

Ex 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $B = X^5 + 1$ divise $P = \left(X^4 - 1\right)\left(X^3 - X^2 + X - 1\right)^n + (X+1)\,X^{4n-1}$.

On a $B(z) = 0 \iff z^5 = -1$. Comme -1 est une racine cinquième de 5, les racines de B sont :

$$-1, -\omega, -\omega^2, -\omega^3, -\omega^4 \quad \text{soit} \quad -1, -\omega, -\overline{\omega}, -\omega^2, -\overline{\omega}^2$$

où l'on a noté $\omega = e^{2i\pi/5}$. Donc

$$B = (X+1)(X+\omega)(X+\overline{\omega})\left(X+\omega^2\right)\left(X+\overline{\omega}^2\right)$$

Montrer que B divise P équivaut à montrer que $-1, -\omega, -\overline{\omega}, -\omega^2, -\overline{\omega}^2$ sont racines de P.

Comme P est réel, les racines conjuguées sont automatiques, et il suffit de prouver :

$$P(-1) = P(-\omega) = P\left(-\omega^2\right) = 0$$

Or $P(-1) = 0$ est immédiat, et, en rappelant que $\omega^5 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$:

$$\begin{array}{rcl} P(-\omega) & = & \left(\omega^4 - 1\right)\left(-\omega^3 - \omega^2 - \omega - 1\right)^n + (-\omega + 1)(-\omega)^{4n-1} \\ & = & \left(\omega^4 - 1\right)\left(-\omega^3 - \omega^2 - \omega - 1\right)^n + (\omega - 1)\,\omega^{4n-1} \\ & = & \left(\omega^4 - 1\right)\omega^{4n} + (\omega - 1)\,\omega^{4n-1} \\ & = & \omega^{4n-1}\left[\left(\omega^4 - 1\right)\omega + (\omega - 1)\right] \\ & = & \omega^{4n-1}\left(\omega^5 - 1\right) \\ & = & 0 \end{array}$$

De même (sachant que $\omega^{8n} = \left(\omega^8\right)^n = \left(\omega^3\right)^n = \omega^{3n}$) :

$$\begin{aligned}
P\left(-\omega^2\right) &= \left(\omega^8-1\right)\left(-\omega^6-\omega^4-\omega^2-1\right)^n + \left(-\omega^2+1\right)\left(-\omega^2\right)^{4n-1} \\
&= \left(\omega^3-1\right)\left(-\omega-\omega^4-\omega^2-1\right)^n + \left(\omega^2-1\right)\omega^{8n-2} \\
&= \left(\omega^3-1\right)\omega^{3n} + \left(\omega^2-1\right)\omega^{3n-2} \\
&= \omega^{3n-2}\left[\left(\omega^3-1\right)\omega^2 + \left(\omega^2-1\right)\right] \\
&= \omega^{3n-2}\left[\left(1-\omega^2\right) + \left(\omega^2-1\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

La divisibilité de P par B est ainsi établie.

Ex 10 Soit $\theta \in \mathbb{R},\ n \geqslant 2,\ B = X^2 - 2X\cos\theta + 1$ et $P_n = X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$. On sait que

$$B = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$$

Montrer que B divise P_n revient à montrer que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont racines de P_n, et même que seulement $e^{i\theta}$ l'est, puisque son conjugué $e^{-i\theta}$ le sera automatiquement (P_n est réel). Or

$$\begin{aligned}
P_n\left(e^{i\theta}\right) &= e^{ni\theta}\sin\theta - e^{i\theta}\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) \\
&= \frac{1}{2i}e^{ni\theta}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) - \frac{1}{2i}e^{i\theta}\left(e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}\right) + \frac{1}{2i}\left(e^{(n-1)i\theta}-e^{-(n-1)i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{(n+1)i\theta} - e^{(n-1)i\theta} - \left(e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n-1)i\theta}\right) + \left(e^{(n-1)i\theta} - e^{-(n-1)i\theta}\right)\right) \\
&= 0 \quad \text{CQFD.}
\end{aligned}$$

Ex 11 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculons le reste de la division de $A = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par $B = X^2+1$:

$$\exists!\,(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2 \ / \ A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < 2$$

Ecrivons $R = aX + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(X\sin\theta + \cos\theta)^n = \left(X^2+1\right)Q(X) + aX + b$$

On substitue i puis $-i$ à X dans cette égalité :

$$\left\{\begin{array}{l} (i\sin\theta+\cos\theta)^n = ai+b \\ (-i\sin\theta+\cos\theta)^n = -ai+b \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{l} ai+b = e^{ni\theta} \\ -ai+b = e^{-ni\theta} \end{array}\right. \qquad \text{\# Moivre}$$

Par somme et différence, on obtient immédiatement (# Euler) :

$$\left\{\begin{array}{l} a = \cos(n\theta) \\ b = \sin(n\theta) \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\boxed{R = \cos(n\theta)\,X + \sin(n\theta)}$$

Ex 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$P = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

Remarquons que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $D\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$. Il vient

$$P' = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$

Par l'absurde, si P admettait une racine multiple $a \in \mathbb{C}$, alors elle serait racine de P et P', d'où

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \dfrac{a^3}{3!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n!} = 0 \\ 1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \end{array}\right.$$

Il vient facilement $\frac{a^n}{n!} = 0$, d'où $a = 0$. Mais $P(0) = 1$ donc 0 n'est pas racine de P, contradiction.

$$\boxed{P \text{ n'admet pas de racines multiples}}$$

Ex 13 On cherche l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(X^2+X+1\right)^2$ divise $P=(X+1)^n-X^n-1$.

Comme chacun sait, $\left(X^2+X+1\right)^2=(X-j)^2\left(X-j^2\right)^2$ où $j=e^{2i\pi/3}$.

Le problème se ramène donc à chercher les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que P admette j et j^2 pour racine double, ce qui revient, puisque P est réel à j est racine double de P, autrement dit

$$\begin{cases} P(j)=0 \quad \text{et} \\ P'(j)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (j+1)^n-j^n-1=0 \\ n(j+1)^{n-1}-nj^{n-1}=0 \end{cases}$$

On sait tous que $1+j+j^2=0$, donc la condition équivaut à

$$\begin{cases} \left(-j^2\right)^n-j^n-1=0 & (1) \\ \left(-j^2\right)^{n-1}-j^{n-1}=0 & (2) \end{cases}$$

Analyse : si ces conditions sont réalisées, alors (2) s'écrit

$$\begin{aligned} \left(e^{i\pi/3}\right)^{n-1}=\left(e^{2i\pi/3}\right)^{n-1} &\Longleftrightarrow e^{i(n-1)\pi/3}=e^{2i(n-1)\pi/3} \\ &\Longleftrightarrow (n-1)\frac{\pi}{3} \equiv 2(n-1)\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Longleftrightarrow n-1 \equiv 2(n-1)\ [6] \\ &\Longleftrightarrow n \equiv 1\ [6] \end{aligned}$$

Synthèse : si donc $\exists k \in \mathbb{N} \;/\; n=6k+1$; alors :

$$\begin{array}{rcl} j^{n-1}=\left(j^6\right)^k=1 & \text{et} & j^n=j \\ \left(-j^2\right)^{n-1}=\left(\left(-j^2\right)^6\right)^k=1 & \text{et} & \left(-j^2\right)^n=-j^2 \end{array}$$

Alors

$$P(j)=\left(-j^2\right)^n-j^n-1=-j^2-j-1=0$$

et

$$P'(j)=n\left(\left(-j^2\right)^{n-1}-j^{n-1}\right)=n(1-1)=0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les entiers } n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \left(X^2+X+1\right)^2 \text{ divise } (X+1)^n-X^n-1 \text{ sont de la forme } 6k+1,\ k \in \mathbb{N}}$$

Ex 14 Soit $P = X^6 + 1$.

- <u>Décomposons P sur $\mathbb{C}[X]$</u>: ses racines sont les solutions de l'équation $z^6 = -1$, i.e. les racines sixièmes de -1.

  i en est une (donc aussi $-i$). Les autres sont alors

  * $i \times e^{2i\pi/6} = e^{5i\pi/6}$ et son conjugué $e^{-5i\pi/6}$
  * $i \times e^{-2i\pi/6} = e^{i\pi/6}$ et son conjugué $e^{-i\pi/6}$

  On a les 6 racines distinctes complexes de P unitaire, donc

  $$\boxed{P = (X-i)(X+i)\left(X - e^{i\pi/6}\right)\left(X - e^{-i\pi/6}\right)\left(X - e^{5i\pi/6}\right)\left(X - e^{-5i\pi/6}\right) :}$$

- On sait que

  $$\begin{aligned}\left(X - e^{i\pi/6}\right)\left(X - e^{-i\pi/6}\right) &= X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)X + 1\\ \left(X - e^{5i\pi/6}\right)\left(X - e^{-5i\pi/6}\right) &= X^2 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)X + 1\end{aligned}$$

  En développant deux par deux, on a ainsi la décomposition sur $\mathbb{R}[X]$:

  $$\boxed{P = \left(X^2+1\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)}$$

- <u>Méthode directe</u> $\left(a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)\right)$:

  $$\begin{aligned}P &= \left(X^2\right)^3 + 1\\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^4 - X^2 + 1\right) \quad \text{\# classique}\\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2\right) \quad \text{\# la ruse}\\ &= \left(X^2+1\right)\left(\left(X^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{3}X\right)^2\right)\\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right) \quad \text{CQFD.}\end{aligned}$$

Ex 15 Soit $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

L'équation $P(z) = 0$ n'admet pas 0 pour solution, on peut donc poser

$$Z = z + \frac{1}{z} \quad \text{de sorte que} \quad Z^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$$

Alors

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\iff \left(Z^2 - 2\right) + Z + 1 = 0 \\ &\iff Z^2 + Z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Les deux solutions se calculent facilement : $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Ainsi

$$P(z) = 0 \iff \begin{cases} z + \dfrac{1}{z} = \alpha \text{ ou} \\ z + \dfrac{1}{z} = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 - \alpha z + 1 = 0 \text{ ou} \\ z^2 - \beta z + 1 = 0 \end{cases} \iff$$

Autrement dit

$$P(z) = 0 \iff \left(z^2 - \alpha z + 1\right)\left(z^2 - \beta z + 1\right) = 0$$

Les polynômes P et $\left(X^2 + \alpha X + 1\right)\left(X^2 + \beta X + 1\right)$ ont même degré, même coefficient dominant et mêmes racines, et sont donc égaux :

$$P = \left(X^2 - \alpha X + 1\right)\left(X^2 - \beta X + 1\right)$$

Mais on sait par ailleurs que P admet pour racines les éléments de $\mathbb{U}_5 \backslash \{1\}$, donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right) \\ &= \left(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1\right) \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition sur $\mathbb{R}[X]$, et sachant que $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$, on en déduit

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\beta}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$$

Remarque : les racines de P sont donc

- Les racines de $X^2 - \alpha X + 1$, soit, avec $\Delta = \alpha^2 - 4 = -\alpha - 3 = -\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ le discriminant :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}}$$

- Les racines de $X^2 - \beta X + 1$, soit, avec $\Delta = \beta^2 - 4 = -\beta - 3 = -\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ le discriminant :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = e^{\frac{4i\pi}{5}} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = e^{-\frac{4i\pi}{5}}$$

Ex 16 Factorisons sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$ et $Q = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ directement :

- On fait apparaitre $\left(X^2+1\right)^3$:

$$\begin{aligned} P &= X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 - X^4 - X^2 \\ &= \left(X^2+1\right)^3 - X^2\left(X^2+1\right) \\ &= \left(X^2+1\right)\left(\left(X^2+1\right)^2 - X^2\right) \end{aligned}$$

  Finalement

$$\boxed{P = \left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)^2\left(X^2+X+1\right)^2}$$

  Remarque : on en déduit les racines complexes de P : $i, -i, j, j^2, -j, -j^2$.

- On factorise X^3+1 :

$$\begin{aligned} Q &= X^6\left(X^3+1\right) + X^3 + 1 \\ &= \left(X^3+1\right)\left(X^6+1\right) \\ &= (X+1)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^4-X^2+1\right) \\ &= (X+1)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^4+2X^2+1-3X^2\right) \\ &= (X+1)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+1\right)\left(\left(X^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{3}X\right)^2\right) \end{aligned}$$

  Finalement

$$\boxed{Q = (X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)}$$

  Remarque 1 : on en déduit les racines complexes de Q : $-1, i, -i, j, j^2, e^{i\pi/6}, e^{-i\pi/6}, e^{5i\pi/6}, e^{-5i\pi/6}$

  Remarque 2 : passer par les équations $P(z) = 0$ et $Q(z) = 0$ est beaucoup plus long ici.

Ex 17 Soit $P = X^{10} - X^9 - X^8 + 2X^6 - 2X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 1$.

Montrer que $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{-\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ sont racines au moins doubles de P revient à montrer qu'il est divisible par

$$\begin{aligned} \left(X-e^{i\pi/4}\right)^2\left(X-e^{-i\pi/4}\right)^2\left(X-e^{3i\pi/4}\right)^2\left(X-e^{-3i\pi/4}\right)^2 &= \left(X^4+1\right)^2 \\ &= X^8 + 2X^4 + 1 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} P &= X^8\left(X^2-X-1\right) - 2X^6\left(X^2-X-1\right) + \left(X^2-X-1\right) \\ &= \left(X^8+2X^4+1\right)\left(X^2-X-1\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. Les racines de $X^2 - X - 1$ étant $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et P étant unitaire, on a donc

$$\boxed{P = \left(X-e^{i\pi/4}\right)^2\left(X-e^{-i\pi/4}\right)^2\left(X-e^{3i\pi/4}\right)^2\left(X-e^{-3i\pi/4}\right)^2\left(X-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

et sa décomposition sur $\mathbb{R}[X]$ est bien sûr, par regroupements :

$$\boxed{P = \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)^2\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)^2\left(X-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Ex 18 a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme admettant $a \in \mathbb{K}$ pour racine au moins double,

Si R est le reste de la division euclidienne de P par P', alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QP' + R$.

En substituant a à X, sachant que $P(a) = P'(a) = 0$, il vient $R(a) = 0$.

$$\boxed{a \text{ est racine de } R}$$

b) Application : décomposons $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ sur $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'il admet une racine au moins double. On a

$$P' = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44$$

On effectue la division euclidienne de P par P', et on trouve

$$P = \left(\frac{X}{4} - \frac{9}{16}\right)P' - \frac{3}{16}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{3}{4}$$

Le reste est donc

$$R = -\frac{3}{16}\left(X^2 - 4X + 4\right) = -\frac{3}{16}(X-2)^2$$

et admet l'unique racine 2. D'après le a), 2 est donc la racine double de P.

On divise alors P par $(X-2)^2 = X^2 - 4X + 4$. On trouve :

$$P = \left(X^2 - 4X + 4\right)\left(X^2 - 5X + 6\right)$$

Il est alors facile de conclure à $P = (X-2)^2(X-2)(X-3)$, soit

$$\boxed{P = (X-2)^3(X-3)}$$

Ex 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Décomposition de $P = X^{2n+1} + 1$. On remarque que -1 est racine de P

P admet donc pour racines les opposées des racines $(2n+1)$-èmes de l'unité, soit :

$$-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}},\ k \in [\![0, 2n]\!] \quad \text{ou mieux} \quad -e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}},\ k \in [\![-n, n]\!]$$

Ainsi, P étant unitaire, on obtient la décomposition de P sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{X^{2n+1} + 1 = \prod_{k=0}^{2n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)}$$

Pour décomposer P sur $\mathbb{R}[X]$, on utilise la deuxième forme, en regroupant les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=-n}^{n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) \\ &= (X+1) \prod_{k=-n}^{-1} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) \\ &= (X+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X + e^{\frac{-2ik\pi}{2n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

Finalement, en développant les $\left(X + e^{\frac{-2ik\pi}{2n+1}}\right)\left(X + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)$:

$$\boxed{X^{2n+1} + 1 = (X+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) X + 1\right)}$$

b) Décomposition de $Q = X^{2n} + 1$: l'équation $Q(z) = 0$ s'écrit

$$z^{2n} = e^{i\pi}$$

Les racines de Q sont donc de la forme

$$\zeta_k = e^{\frac{i\pi}{2n}} e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}, \quad k \in [\![0, 2n-1]\!]$$

On a ainsi la décomposition de Q sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}\right)}$$

Pour décomposer Q sur $\mathbb{R}[X]$, on remarque que pour $k \in [0, n-1]$,

$$0 < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < \pi \quad \text{donc} \quad \operatorname{Im} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$$

Donc $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ ne peuvent pas être conjuguées deux à deux.

Mais comme Q est un polynôme réel, ses racines sont conjuguées deux à deux, et on en déduit que $\zeta_n, \ldots, \zeta_{2n-1}$ sont les conjuguées (éventuellement dans le désordre) de $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{k=0}^{n-1} (X - \zeta_k) \prod_{k=n}^{2n-1} (X - \overline{\zeta_k}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(\zeta_k) X + |\zeta_k|^2\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) X + 1\right)}$$

Ex 20 On donne $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X+1)^n - e^{2ni\theta}$.

a) Racines complexes de P. On résout dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff (z+1)^n = \left(e^{2i\theta}\right)^n \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z+1 = e^{2i\theta} e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z = e^{2i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} - 1 \end{aligned}$$

Les n racine complexes de P sont, via une formule connue :

$$\boxed{2i \sin\left(\theta + \tfrac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \quad k \in [\![0, n-1]\!]}$$

(elles sont distinctes car les $\theta + \frac{k\pi}{n}$ sont distincts et dans $[\theta, \theta + \pi[$)

b) On a donc la décomposition de P (unitaire de degré n) sur $\mathbb{C}[X]$:

$$(X+1)^n - e^{2ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \right)$$

En évaluant en 0 :

$$1 - e^{2ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \right)$$

Soit, en posant $A(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} -2i \sin(n\theta) e^{ni\theta} &= (-2i)^n A(\theta) \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= 2^n (-i)^n A(\theta) e^{i \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= 2^n (-i)^n A(\theta) e^{i\left(n\theta + \frac{\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right)} \\ &= 2^n (-i)^n A(\theta) e^{ni\theta} e^{i\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)} \end{aligned}$$

En simplifiant $e^{i\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1} = i^{n-1}$:

$$\sin(n\theta) = 2^{n-1} (-i)^{n-1} A(\theta) i^{n-1} = 2^{n-1} A(\theta)$$

Finalement

$$\boxed{A(\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}}$$

On cherche $B = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Posons pour $\theta \in \mathbb{R}$: $B(\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$. Alors

$$A(\theta) = \sin(\theta) B(\theta)$$

Lorsque $\sin\theta \neq 0$, soit par exemple pour $\theta \in]0, \pi[$, on a donc

$$B(\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1} \sin(\theta)}$$

Mais l'application $\theta \mapsto B(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions sinus. Donc

$$B = B(0) = \lim_{\theta \to 0} B(\theta)$$

Comme, à n fixé,

$$\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}\sin(\theta)} \underset{\theta \to 0}{\sim} \frac{n\theta}{2^{n-1}\theta} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Il vient finalement

$$\boxed{B = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

Ex 21 Trouvons tous les polynômes complexes vérifiant $(X+1)P(X) = (X-2)P(X+1) \quad (*)$

- **Analyse** : supposons que P convient. Alors
  - $*$ En substituant 2 à X dans $(*)$: $3P(2) = 0$, donc 2 est racine de P.
  - $*$ En substituant -1 à X dans $(*)$: $0 = -3P(0)$, donc 0 est racine de P.
  - $*$ En substituant 1 à X dans $(*)$: $2P(1) = -1P(2) = 0$, donc 1 est racine de P.

  On en déduit que $X(X-1)(X-2)$ divise P, soit
  $$\exists Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P = X(X-1)(X-2)Q$$
  Reportons dans $(*)$:
  $$(X+1)X(X-1)(X-2)Q(X) = (X-2)P(X+1) = (X-2)(X+1)X(X-1)Q(X+1)$$
  En simplifiant par le polynôme non nul $(X+1)X(X-1)(X-2)$ il vient :
  $$Q(X) = Q(X+1) \quad (\heartsuit)$$
  Par l'absurde, si Q n'était pas constant, il aurait une racine complexe α (théorème de d'Alembert-Gauss). Alors
  $$Q(\alpha+1) = Q(\alpha) = 0$$
  Donc $\alpha+1$ est aussi racine de Q. Par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha+n$ est racine de Q.
  (vrai pour $n=0$, si vrai pour n, alors $(\heartsuit) \Rightarrow Q(\alpha+1) = Q(\alpha) = 0$).
  Q a une infinité de racine, c'est contradictoire pour un polynôme non constant.
  Ainsi Q est constant, et P est de la forme
  $$\boxed{P = \lambda X(X-1)(X-2), \quad \lambda \in \mathbb{C}}$$
- **Synthèse** : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P = \lambda X(X-1)(X-2)$. Alors
  $$\begin{array}{rcl}(X+1)P(X) & = & \lambda(X+1)X(X-1)(X-2) \\ (X-2)P(X+1) & = & \lambda(X-2)(X+1)X(X-1)\end{array}$$
  Donc P vérifie $(*)$.
- **Conclusion** : $\boxed{\text{les polynômes vérifiant } (*) \text{ sont les polynômes de la forme } \lambda X(X-1)(X-2), \quad \lambda \in \mathbb{C}}$

Ex 22 Déterminons les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\left(X^2+1\right)P'' - 6P = 0 \quad (*)$
Remarquons que le polynôme nul convient.

- **Analyse** : supposons que P non nul convient, et soit $n = \deg P \geqslant 2$ (sinon $P = 0$) et $a_n = \mathrm{cd}(P)$.
  Le coefficient de X^{n-2} de P'' est alors $n(n-1)a_n$ (si $n \geqslant 2$). En identifiant le coefficient de X^n dans $(*)$, il vient
  $$n(n-1)a_n - 6a_n = 0 \quad \text{d'où} \quad n^2 - n - 6 = 0 \quad (\text{car } a_n \neq 0)$$
  Le polynôme $X^2 - X - 6$ admet -2 et 3 pour racines. On en déduit que nécessairement $\boxed{n = 3}$
  On peut alors poser
  $$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad \text{d'où} \quad P'' = 6aX + 2b$$
  $(*)$ devient
  $$\left(X^2+1\right)(6aX+2b) - 6\left(aX^3 + bX^2 + cX + d\right) = 0$$
  soit
  $$-4bX^2 + (6a - 6c)X + (2b - 6d) = 0$$
  En identifiant les coefficients, on obtient $b = d = 0$ et $c = a$. On a ainsi
  $$P = a\left(X^3 + X\right)$$
  Remarquons que pour $a = 0$, on retrouve le polynôme nul.
- **Synthèse** : si $a \in \mathbb{C}$, le $P = a\left(X^3 + X\right)$ vérifie bien $(*)$ (cf. calcul précédent).
- **Conclusion** : $\boxed{\text{les polynômes vérifiant } (*) \text{ sont les polynomes de la forme } a\left(X^3+X\right) \text{, où } a \in \mathbb{C}}$

Ex 23 Déterminons $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (X+1)^4 \text{ divise } P-1 \\ (X-1)^4 \text{ divise } P+1 \end{array} \right.$$

Remarque : il est très maladroit de procéder par identification des (8) coefficients!

– **Analyse** : supposons que P convienne. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ est racine d'ordre au moins } 4 \text{ de } P-1 \\ 1 \text{ est racine d'ordre au moins } 4 \text{ de } P+1 \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ est racine d'ordre au moins } 3 \text{ de } (P-1) = P' \\ 1 \text{ est racine d'ordre au moins } 3 \text{ de } (P+1)' = P' \end{array} \right.$$

Comme $\deg P' = 6$, on a à un facteur près la décomposition de P' : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} P' &= \lambda (X-1)^3 (X+1)^3 \\ &= \lambda \left(X^2-1\right)^3 \\ &= \lambda \left(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1\right) \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient une deuxième constante μ telle que

$$P = \lambda \left(\frac{X^7}{7} - \frac{3X^5}{5} + X^3 - X \right) + \mu$$

Mais -1 est racine de $P-1$ et 1 racine de $P+1$. Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} P(-1) = \frac{16}{35}\lambda + \mu = 1 \\ P(1) = -\frac{16}{35}\lambda + \mu = -1 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{35}{16} \\ \mu = 0 \end{array} \right.$$

Il vient

$$\boxed{P = \frac{35}{16} \left(\frac{X^7}{7} - \frac{3X^5}{5} + X^3 - X \right)}$$

– **Synthèse** : ce dernier polynôme P est bien de degré 7.

* $P-1$ s'annule bien en -1 et $P+1$ en -1 par construction
* La dérivée de P, $\frac{35}{16}\left(X^2-1\right)^3$ (voir calculs plus haut) admet bien -1 et 1 pour racines triples.

Comme $P' = (P-1)' = (P+1)'$, -1 (resp. 1) est donc racine quadruple de $P-1$ (resp.$P+1$).

P répond donc bien au problème.

– **Conclusion** : $\boxed{\text{l'unique polynôme répondant au problème est } \frac{35}{16} \left(\frac{X^7}{7} - \frac{3X^5}{5} + X^3 - X \right)}$

Ex 24 Soit P un polynôme de degré n vérifiant : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]\,,\ P(k) = \dfrac{1}{k}$.

Remarquons que $\forall k \in [\![1, n+1]\!]\,,\ kP(k) - 1 = 0\ \ (*)$. On pose donc tout naturellement :

$$Q = XP - 1$$

Q est un polynôme de degré $n+1$ qui s'annule en $1, 2, \ldots, n+1$ d'après $(*)$. On en déduit sa factorisation :

$$Q = \lambda \prod_{k=1}^{n+1} (X - k) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Mais on peut aussi remarquer que $Q(0) = -1$, donc

$$-1 = \lambda \prod_{k=1}^{n+1} (-k) = (-1)^{n+1} \lambda \prod_{k=1}^{n+1} k = (-1)^{n+1} \lambda (n+1)!$$

Il s'ensuit que $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ et donc

$$Q = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n+1} (X - k)$$

En particulier

$$\begin{aligned} Q(n+2) &= \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n+1} (n+2-k) \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (n+1)\, n \cdots 1 \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

Ainsi, comme $Q(n+2) = (n+2)\, P(n+2) - 1$,

$$\boxed{P(n+2) = \frac{1 + (-1)^n}{n+2}}$$

Remarque : $P(n+2)$ vaut donc alternativement 0 et $\dfrac{2}{n+2}$.

Ex 25 Déterminons les polynômes unitaires P de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée P'.

- **Analyse** : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ divisible par sa dérivée P'. On pose $p = \deg P \geqslant 1$.
  Il existe donc un polynôme de degré 1, soit $\lambda(X-a)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que
  $$P = \lambda (X-a) P' \quad (*)$$
  En identifiant les coefficients donminants (celui de P vaut 1 et celui de P' vaut p), il vient $\lambda = \frac{1}{p}$.

  P admet donc a pour racine. **Par l'absurde**, supposons que P admette une autre racine $b \neq a$ dans $\mathbb{C}$, et soit $k \geqslant 1$ l'ordre de multiplicité de cette racine.

  P est donc divisible par $(X-a)(X-b)^k$. Plus précisément
  $$\exists Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P = (X-a)(X-b)^k Q \text{ et } Q(b) \neq 0$$
  Alors $(*)$ s'écrit
  $$(X-a)(X-b)^k Q = \lambda (X-a) P'$$
  Puisque $X-a$ est non nul, il vient
  $$(X-b)^k Q = \lambda P'$$
  b est donc racine d'ordre k de P', donc d'ordre $k+1$ de P, **contradiction**.

  Il s'ensuit que P admet une unique racine a dans $\mathbb{C}$, nécessairement d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$. Comme P est unitaire :
  $$P = (X-a)^p$$
- **Synthèse** : soit $a \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-a)^p$. Alors $P' = p(X-a)^{p-1}$ et donc
  $$P = \frac{1}{p}(X-a)P' : \underline{P' \text{ divise } P}$$
- **Conclusion** : les seuls polynômes unitaires divisibles par leur dérivée sont les polynômes
  $$\boxed{(X-a)^p \text{, où } a \in \mathbb{C} \text{ et } p \in \mathbb{N}^*}$$

Ex 26 Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, et $\alpha_k = \dfrac{1}{\omega_k - 1}$. Alors
$$\omega_k = 1 + \frac{1}{\alpha_k} = \frac{\alpha_k + 1}{\alpha_k}$$
En élevant à la puissance n, on a donc
$$1 = \frac{(\alpha_k+1)^n}{\alpha_k^n} \quad \text{soit} \quad (\alpha_k+1)^n - \alpha_k^n = 0$$
Le polynôme de degré $n-1$:
$$P = (X+1)^n - X^n$$
admet donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ pour racines. En développant
$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k = nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} + \cdots + nX + 1$$
D'après le résultat sur la somme et le produit des racines de P, on en déduit
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k - 1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{n-1}{2}}$$
et
$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k - 1} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}}$$

Ex 27 On considère le système (S) (non linéaire) suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ xyz=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ xyz=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ xyz=-\dfrac{1}{2} \\ yz+xz+xy=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Si (x,yz) est solution de (S), alors x,y,z sont les racines du polynômes

$$\begin{array}{rcl} P &=& (X-x)(X-y)(X-z) \\ &=& X^3-(x+y+z)X^2+(yz+xz+xy)X-xyz \\ &=& X^3-2X^2-\dfrac{1}{4}X+\dfrac{1}{2} \end{array}$$

On peut chercher une racine "évidente" de P ou "factoriser partiellement" :

$$\begin{array}{rcl} P &=& X^2(X-2)-\dfrac{1}{4}(X-2) \\ &=& (X-2)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\left(X+\dfrac{1}{2}\right) \end{array}$$

Le triplet $\left(2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ est inversement bien solution de (S), et c'est le seul à permutation près. Il y en a donc 6 :

$$\boxed{\left(2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)}$$

Ex 28 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^{2n+1} - (X-2)^{2n+1}$. On note pour tout $k \in N$, $\quad a_k = \sin \dfrac{k\pi}{2n+1}$.

a) Par somme on peut dire que $\deg P \leqslant 2n+1$.

De plus le coefficient de X^{2n+1} dans P est $1-1=0$ d'après la formule du binôme.

Celui de X^{2n} est en revanche $2\binom{2n+1}{1} = 2(2n+1) \neq 0$. On en déduit que

$$\boxed{\deg P = 2n} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{le coefficient dominant de } P \text{ est } 2(2n+1)}$$

b) <u>Racines de P</u> : il s'agit de résoudre l'équation complexe : $\quad z^{2n+1} = (z-2)^{2n+1} \ (E)$

$$\begin{aligned}(E) &\iff \exists k \in [\![0,2n]\!] \ / \ z-2 = ze^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \\ &\iff \exists k \in [\![0,2n]\!] \ / \ z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right) z = 2 \ (\$_k)\end{aligned}$$

* <u>Pour $k=0$</u>: $(\$_0) \iff 0 = 2$ qui n'a pas de solutions
* <u>Pour $k \in [\![1,2n]\!]$</u>, on $1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} = -2i \sin \frac{k\pi}{2n+1} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \neq 0$, donc

$$(\$_k) \iff z = \frac{i}{\sin \frac{k\pi}{2n+1} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}} = \frac{ie^{-\frac{ik\pi}{2n+1}}}{\sin \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{\sin \frac{k\pi}{2n+1} + i\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{\sin \frac{k\pi}{2n+1}}$$

On a au total $2n$ solutions distinctes :

$$\boxed{z_k = 1 + i \operatorname{cotan} \tfrac{k\pi}{2n+1}, \ k \in [\![1,2n]\!]} \quad \text{\# on a } \operatorname{Re} z_k = 1$$

c) On a alors la décomposition de P sur $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = 2(2n+1) \prod_{k=1}^{2n} (X - z_k)$$

Comme le polynôme P est réel, ses racines sont deux à deux conjuguées. Or

$$\forall k \in [\![1,2n]\!], \ 0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \operatorname{Im} z_k = \frac{1}{\tan \frac{k\pi}{2n+1}} > 0$$

On en déduit que les conjugués de $z_1, \ldots, z_n$ sont (dans le désordre) $z_{n+1}, \ldots, z_{2n}$. En regroupant, on a alors

$$P(X) = 2(2n+1) \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \prod_{k=n+1}^{2n} (X - z_k) = 2(2n+1) \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)(X - \overline{z_k})$$

qui donne la décomposition de P sur $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = 2(2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - 2\operatorname{Re}(z_k) X + |z_k|^2\right)$$

Soit en remarquant que $|z_k|^2 = 1 + \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{a_k^2}$,

$$\boxed{P(X) = 2(2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - 2X + \frac{1}{a_k^2}\right)}$$

Substituons alors 0 à X :

$$-(-2)^{2n+1} = 2(2n+1) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} = \frac{2(2n+1)}{\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^2}$$

Alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \frac{2(2n+1)}{2^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2^{2n}}$$

Comme tous les a_k sont positifs $\left(\text{car } \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$, on en déduit

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \sin \tfrac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}}$$

Ex 29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

a) On a clairement $P(1) = n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n - n = 0$, donc $\boxed{1 \text{ est racine de } P}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$: si $|z| > 1$, alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $|z|^k < |z|^n$. Mais alors par inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} \left|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\right| & \leqslant & |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + |1| \\ & < & |z|^n + |z|^n + \cdots + |z|^n + |z|^n \end{array}$$

Ainsi

$$\boxed{\left|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\right| < n\,|z|^n}$$

c) Soit $z \in \mathbb{C}$: si $|z| = 1$ et $z \neq 1$: on peut écrire $z = e^{i\theta},\ \theta \in]0, 2\pi[$. Alors

$$|1 + z| = \left|1 + e^{i\theta}\right| = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}\right| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| < 2$$

Car $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$, donc $\cos\frac{\theta}{2} \neq 1$. Mais alors toujours par inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} \left|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\right| & \leqslant & |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots |z|^2 + |z + 1| \\ & \leqslant & n - 2 + |z + 1| \end{array}$$

Ainsi

$$\boxed{\left|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\right| < n}$$

d) Soit z une racine (complexe) de P autre que 1 : on a donc

$$nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \quad \text{d'où} \quad nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$$

En passant aux modules, il vient directement

$$\left|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\right| = n\,|z|^n$$

Cette égalité est incompatible avec l'inégalité du b), donc nécessairement $|z| \leqslant 1$.

Mais si $|z| = 1$, elle devient incompatible avec l'inégalité du c) ($n\,|z|^n = n$), donc $|z| < 1$. Au total :

$$\boxed{\text{les racines de } P \text{ autres que } 1 \text{ sont de module strictement inférieur à } 1}$$

e) Soit $Q = (X - 1)\,P$. Développons Q :

$$\begin{array}{rcl} Q & = & n(X-1)\,X^n - (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k \\ & = & nX^{n+1} - nX^n - (X^n - 1) \quad \text{(archi-connu)} \\ & = & nX^{n+1} - (n+1)\,X^n + 1 \end{array}$$

f) Soit z une racine de Q autre que 1 : de

$$Q' = n(n+1)\,X^n - n(n+1)\,X^{n-1} = n(n+1)\,X^{n-1}(X - 1)$$

On déduit que $Q'(z) \neq 0$ sauf si $z = 0$, ce qui n'est pas possible étant donné que 0 n'est pas racine de Q ($Q(0) = 1$) . Ainsi z est une racine simple de Q : les racines de Q autres que 1 sont simples.

Soit maintenant z une racine de P : c'est aussi une racine de Q.

* Si $z \neq 1$, z ne peut pas être racine multiple de P, car sinon P serait divisible par $(X - z)^2$, donc Q aussi, ce qui n'est pas le cas vu ce que nous avons montré à la question précédente (z est racine simple de Q)
* Si $z = 1$: 1 est racine simple de Q' (clair), donc racine d'ordre exactement 2 de Q.
  Si 1 était racine multiple de P, alors $(X-1)^2$ diviserait P, donc $(X-1)^3$ diviserait Q, contradiction.

Au total

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } P \text{ sont simples}}$$

Remarque : on peut aussi voir que

$$P' = n^2 X^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1} \quad \text{donc} \quad P'(1) = n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \neq 0$$

1 n'est donc pas racine double de P.