A rendre individuellement

EXERCICE 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad u_n = S_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = S_{2n+1}$$

1. a) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones et adjacentes.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite λ vérifie : $\dfrac{1}{3} < \lambda < \dfrac{1}{2}$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |S_n - \lambda| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ (on distinguera le cas n pair et le cas n impair).

2. Dans cette question, on montre par l'absurde que λ est irrationnel. On pose $\lambda = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

a) Soit $n \geqslant q$. Montrer que : $n!S_n - n!\lambda \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire, à l'aide de 1c), que : $\forall n \geqslant q\,,\ S_n = \lambda$.

c) Aboutir à une absurdité.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+\,,\ 1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\,,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!}$ (on pourra raisonner par récurrence)

5. En déduire la valeur de λ.

EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par
$$0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - 2u_n^3.$$

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Montrer que (u_n) est convergente, et calculer sa limite.

2. On considère les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :
$$\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

a) Montrer que (V_n) diverge vers $+\infty$.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant \dfrac{2}{1-2u_1^2}\, u_n$, et en déduire la limite de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

3. Soit (a_n) une suite réelle, et $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

a) On suppose que (a_n) converge vers 0, et on fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$,
En déduire que (b_n) converge vers 0

b) Montrer que si (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (b_n) aussi.

4. On considère la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$

a) Montrer que (w_n) converge vers 4.

b) A l'aide de la question 3. et de (w_n), montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

EXERCICE 3

Dans tout ce problème $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle **bornée**.

Pour tout entier naturel n on définit l'ensemble

$$A_n = \{u_k, k \geqslant n\}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble A_n admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
On notera désormais $a_n = \sup A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides telles que $A \subset B$ et B majorée.
Montrer que A admet une borne supérieure qui vérifie $\sup A \leqslant \sup B$.

b) Justifier que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout entier naturel n et en déduire le sens de variation de la suite (a_n).

c) Montrer que la suite (a_n) est convergente. On note $\ell(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ sa limite.

3. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un entier $N > p$ tel que $a_N \leqslant \ell(u) + \varepsilon$.

b) Soit N un tel entier. Montrer qu'il existe $k \geqslant N$ tel que

$$\ell(u) - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant a_N \leqslant \ell(u) + \varepsilon$$

4. a) En raisonnant par récurrence sur n, construire à l'aide de la question 3. une extractrice φ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \ell(u) - \frac{1}{n+1} \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant \ell(u) + \frac{1}{n+1}$$

(On rappelle qu'une **extractrice** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante).

b) Qu'en déduire pour $(u_{\varphi(n)})$?

5. a) On appelle **valeur d'adhérence** de la suite u la limite d'une suite convergente extraite de u.
Soit ℓ une valeur d'adhérence de u et σ une extractrice telle que $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge versℓ.
Justifier que $u_{\sigma(n)} \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\ell \leqslant \ell(u)$.
Indication : on pourra utiliser que si φ est une extractrice alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

b) En déduire que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence et que $\ell(u)$ est la plus grande d'entre elles.

c) Que vaut $\ell(u)$ si u est convergente ?

6. Déterminer $\ell(u)$ si l'on définit $u_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Remarque 1 : $\ell(u)$ s'appelle la *limite supérieure de* u, que l'on note $\limsup\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

Remarque 2 : le résultat démontré dans ce problème sur l'existence d'une valeur d'adhérence pour une suite bornée porte le nom de *théorème de* BOLZANO-WEIERSTRASS. Il est d'une importance cruciale en mathématiques.