Ex 1 Déterminer les racines sixièmes de -27, les racines quatrièmes de $\dfrac{4\sqrt{2}}{1+i}$

Ex 2 Déterminer les racines quatrièmes de $-119+120i$.

Ex 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8+z^4+1=0$

Ex 4 Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$(E)\ z^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \quad \text{puis} \quad (E')\ (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

Ex 5 A l'aide de $\mathbb{U}_9$, calculer et simplifier $S = \cos^2\dfrac{\pi}{9} + \cos^2\dfrac{2\pi}{9} + \cos^2\dfrac{3\pi}{9} + \cos^2\dfrac{4\pi}{9}$.

Ex 6 Vérifier que $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$.

Ex 7 Trouver un complexe non nul z admettant deux racines cubiques distinctes z_1 et z_2 vérifiant $z_1+2z_2 = z\sqrt{3}$

Ex 8 Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\omega^k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

Ex 9 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\begin{cases} x = y^2 \\ y = z^2 \\ z = x^2 \end{cases}$.

Ex 10 On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $\alpha = \omega+\omega^2+\omega^4$, $\beta = \omega^3+\omega^5+\omega^6$.

a) Rappeler la définition de $\mathbb{U}_{7,}$ et sa description à l'aide d'exponentielles complexes puis de ω.

b) Montrer que α et β sont conjugués, et que $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$ (on pourra utiliser le fait que $\sin\dfrac{2\pi}{7} > \sin\dfrac{\pi}{7}$).

c) Calculer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, et en déduire α et β.

Ex 11 Pour tout complexe z, on pose $P(z) = z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$.

a) Résoudre l'équation $P(z)=0$. Factoriser P.

b) Calculer $P(1)$ de deux manières différentes et en déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{6}\sin\frac{k\pi}{7} = \frac{7}{2^6}$

c) Montrer de manière analogue que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{2n+1}{2^{2n}}$.

Ex 12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^k$.

Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Ex 14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^{2n} - 2\cos(n\theta)\,z^n + 1 = 0$.

Ex 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$. Simplifier les solutions et les compter.