Ex 1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrons que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1} \Rightarrow x = y$.

Supposons donc que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$: alors $x^2 + x = y^2 + y$, soit $x^2 - y^2 = y - x$. Ainsi

$$(x - y)(x + y) = y - x$$

Si $y \neq x$, alors on peut simplifier par $x - y$, ce qui donne $x + y = -1$, impossible puisque $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
On en déduit que $x = y$, CQFD.

Ex 2 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto mx + 1$. Montrons que f garde un signe constant si et seulement si $m = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $m = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$. f est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Inversement, montrons que si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$
On démontre la contraposée, plus pratique : si $m \neq 0$, alors f n'est pas de signe constant.
On suppose donc $m \neq 0$. Alors

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{m} - m\right) = -1 - m^2 + 1 = -m^2 < 0$$

f prend donc deux valeurs de signes opposés, elle n'est donc pas de signe constant, CQFD.

Ex 3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $f : x \mapsto ax + b$. Montrons que f est la fonction nulle si et seulement si $a = b = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $a = b = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$: f est la fonction nulle.

$\boxed{\Rightarrow}$ Inversement, supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Alors en particulier $f(0) = 0$, soit $b = 0$.
Mais alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax = 0$. En particulier $f(1) = a = 0$. Au total $a = b = 0$, CQFD.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que n est pair $\Longleftrightarrow n^2$ est pair.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons n pair : alors $\exists k \in \mathbb{N}\ /\ n = 2k$. Donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k)$ est pair, CQFD/2.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, montrons que n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair, ou plutôt sa contraposée : n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair :
Supposons donc n impair : $\exists k \in \mathbb{N}\ /\ n = 2k+1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$: n^2 est impair, CQFD.

Raisonnements par l'absurde et par contraposée

Ex 5 Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel :

Supposons **par l'absurde** que $\sqrt{2}$ soit rationnel : alors on put l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont des entiers naturels non nuls (et premiers entre eux). En élevant au carré, il vient $p^2 = 2q^2$.
On en déduit que p^2 est pair, donc que p est pair (cf. exercice précédent). Donc il existe $k \in \mathbb{N}\ /\ p = 2k$.
Mais alors $p^2 = 2q^2$ s'écrit $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: donc q^2 est pair, et le mêe argument donne q pair, ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction (p et q ne peuvent être simultanément pairs). Cela établit notre résultat.

Ex 6 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon$. Montrons que $x = 0$.

Supposons **par l'absurde** que x soit non nul, c'est-à-dire $x > 0$. Posons

$$\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$$

Alors $x > \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse : $\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon$. Le résultat est donc démontré.

Ex 7 Soient a et b deux réels. On suppose que $a \in \mathbb{Q}^*$ et $b \notin \mathbb{Q}$. Montrons que ab est irrationnel.

Supposons **par l'absurde** que $x = ab$ soit rationnel. Alors, comme $a \neq 0$, on a $b = \frac{x}{a}$.
Mais le quotient de deux rationnels est rationnel (le quotient de deux fractions est une fraction). Il vient $b \in \mathbb{Q}$ contradiction. D'où $ab \notin \mathbb{Q}$, CQFD.

Ex 8 Supposons que x est irrationnel et positif, et montrons que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Supposons **par l'absurde** que $y = \sqrt{x}$ soit rationnel. Alors $y^2 = x$ est rationnel (carré d'un nombre rationnel). C'est une contradiction, qui prouve l'irrationalité de $\sqrt{x}$.

Ex 9 Principe des tiroirs : montrons que si l'on range $n+1$ pulls dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 pulls :
Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, tous les tiroirs contiendraient au plus un pull. Le nombre total de pulls serait alors majoré par $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ tiroirs}} = n$, ce qui est contradictoire, d'où le principe des tiroirs.

Ex 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$.

On veut démontrer la propriété P suivante : "deux de ces réels sont distants de moins de $1/n$".

a) P s'écrit symboliquement : $\exists\,(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \ / \ i<j$ et $x_j - x_i \leqslant \frac{1}{n}$
Mais comme la plus petite distance entre les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est nécessairement atteinte entre deux **consécutifs** d'entre eux, P est équivalente à :

$$\boxed{\exists i \in [\![1,n]\!] \ / \ x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{1}{n}}$$

La négation de cette assertion est alors

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] \ , \ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}}$$

b) **Par l'absurde** si la propriété P était fausse, on aurait donc $\forall i \in [\![1,n]\!] \ , \ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$, c'est à dire

$$\begin{cases} x_1 - x_0 > 1/n \\ x_2 - x_1 > 1/n \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} > 1/n \end{cases}$$

En sommant toutes ces inégalités il vient

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

soit après télescopage

$$x_n - x_0 > \frac{n}{n} = 1$$

Ce qui contredit le fait que x_0 et x_n sont dans l'intervalle $[0,1]$ (donc distants d'au plus 1)

c) Autre démonstration : considérons les n intervalles $I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right[\,,\ I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\,, \ldots, I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$.

Ces n intervalles partitionnent l'intervalle $[0,1]$. D'après le principe des tiroirs (exercice précédent), parmi les $n+1$ réels $x_0, \ldots, x_n$ de $[0,1]$, deux au moins sont dans le même intervalle I_k pour un k de $[\![1,n]\!]$.
Ces deux-là sont alors nécessairement distants de moins de $1/n$, CQFD.

Raisonnement par analyse et synthèse

Ex 11 Montrons que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f = g + h$, où g est une fonction paire et h une fonction impaire.

On fixe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$, alors on cherche un couple unique $(g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tel que $f = g + h$.

(i) Analyse : supposons avoir $(g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tel que $f = g + h$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x) \quad (\heartsuit)$$

En substituant $-x$ à x, on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \quad (\diamondsuit)$$

En combinant $(\heartsuit)$ et $(\diamondsuit)$ il vient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

Remarque : cette analyse démontre l'unicité d'un éventuel couple (g, h) , en aucun cas son existence.

(ii) Synthèse : posons, pour tout réel x :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

Alors :

- $*$ $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = f(x)$
- $*$ g est paire : en effet, $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$
- $*$ h est impaire : en effet, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$

Remarque : cette synthèse démontre l'existence d'un couple (g, h) .

(iii) Conclusion : le couple $(g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ existe et il est unique, CQFD.

Ex 12 Trouvons toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) f(y) = f(xy) + x + y \ (*)$

(i) Analyse : supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $(*)$: alors avec le couple $(x, y) = (0, 0)$:

$$f(0)^2 = f(0)$$

Il s'ensuit que $f(0) \in \{0, 1\}$. Mais si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(*)$ donne

$$f(x) f(0) = f(0) + x \quad \text{soit} \quad x = 0 \quad \text{contradiction}$$

On en déduit donc que $f(0) = 1$. Mais alors, $(*)$ appliqué à $(x, 0)$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) f(0) = f(0) + x$$

soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1}$$

unique fonction possible vérifiant $(*)$.

(ii) Synthèse : soit $f : x \mapsto x + 1$. f est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) f(y) = (x + 1)(y + 1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y$$

f vérifie donc bien la relation $(*)$.

(iii) Conclusion : $\boxed{\text{l'unique fonction vérifiant } (*) \text{ est } f : x \mapsto x + 1}$

Raisonnement par récurrence

Ex 13 Montrons que $H(n) : 10^n + 1$ est multiple de 9 est héréditaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ vraie. Alors $\exists k \in \mathbb{N} \ / \ 10^n + 1 = 9k$. Donc

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10(9k-1) + 1 = 9 \times 10k - 9 = 9(10k-1)$$

Ainsi 10^{n+1} est multiple de 9, et $H(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité de $H(n)$.
Néanmoins $H(n)$ n'est vraie pour aucun entier $n \geqslant 0$: en effet $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$10^n + 1 = (10^n - 1) + 2 = 9 \sum_{k=0}^{n-1} 10^k + 2$$

donc si $10^n + 1$ était multiple de 9, alors 2 le serait aussi, contradiction. $H(0)$ est clairement fausse aussi.

Ex 14 Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leqslant n |\sin(x)| : P(n)$

(i) La proposition $P(0)$ est évidemment vraie ($\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin 0| \leqslant 0.\ |\sin x|$)

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(n+1)x| \leqslant (n+1)|\sin x|$)

Pour tout réel x, on a, grâce aux formules d'addition :

$$\begin{aligned}
|\sin(n+1)x| &= |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \\
&\leqslant |\sin nx \cos x| + |\cos nx \sin x| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant |\sin nx|\,|\cos x| + |\cos nx|\,|\sin x| \\
&\leqslant |\sin nx| + |\sin x| \qquad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ |\cos x| \leqslant 1 \text{ et } |\cos nx| \leqslant 1) \\
&\leqslant n|\sin x| + |\sin x| \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant (n+1)|\sin x| \qquad \text{CQFD.}
\end{aligned}$$

(iii) Le principe de récurrence permet d'affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Ex 15 Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in]0,1[^n,\ \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k : H(n)$.

(i) La proposition $H(1)$ est évidemment vraie ($\forall x_1 \in]0,1[,\ 1 - x_1 \geqslant 1 - x_1$)

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: supposons $H(n)$ vraie, et montrons $H(n+1)$.

Si $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in]0,1[^{n+1}$, alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) = (1 - x_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \overset{H(n) \text{ et } 1 - x_{n+1} > 0}{\geqslant} (1 - x_{n+1}) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

En développant

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Or $x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 0$ puisque chaque x_k est positif : il s'ensuit

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \quad \text{CQFD.}$$

(iii) Le principe de récurrence permet d'affirmer que $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 16 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \ , \ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On calcule $u_2 = 5,\ u_3 = 9,\ u_4 = 17$. On conjecture : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1 : H(n)$.

(i) $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et $H(n+1)$, et montrons $H(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3\left(2^{n+1} + 1\right) - 2\left(2^n + 1\right) \quad \text{d'après } H(n) \text{ et } H(n+1) \\ &= (3-1)\,2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

(iii) Par principe de récurrence double, on a ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1}$

Ex 17 On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1} \end{cases}$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2 : H(n)$.

(i) $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies puisque $1 \leqslant a_1 \leqslant 1^2$ et $a_2 = 2 \leqslant 2^2$.

(ii) Soit $n \geqslant 2$. Supposons $H(n-1)$ et $H(n)$, et montrons $H(n+1)$. On a donc

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{n-1} \leqslant (n-1)^2 \\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n+1} a_{n-1} \leqslant \dfrac{2}{n+1}(n-1)^2 \leqslant \dfrac{2n^2}{n} = 2n \\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2 \end{cases}$$

Par somme

$$2 \leqslant a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \leqslant n^2 + 2n$$

A fortiori

$$1 \leqslant a_{n+1} \leqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \text{CQFD.}$$

(iii) Par principe de récurrence double, on a ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2}$

Ex 18 **Suite de Fibonacci**: soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition de la suite (u_n) : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{2k-2} + u_{2k-1} = u_{2k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(u_{2k} - u_{2(k-1)}\right) \\ &= u_{2n} - u_0 \quad \text{\#télescopage} \end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1}$$

b) De même on a $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = u_{k+2} - u_{k+1}$, donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}) \\ &= u_{n+2} - u_1 \quad \text{\#télescopage} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1}$$

c) On pose $\Phi > \Psi$ les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, soit $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\psi = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$.
Remarquons que $\Phi + \psi = 1$ et $\Phi - \psi = \sqrt{5}$.
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^n$: $H(n)$

i. $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies, car

$$\begin{aligned}
\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^0 + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^0 &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 1 = u_0 \\
\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^1 + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^1 &= \frac{5}{10}(\Phi + \psi) + \frac{\sqrt{5}}{10}(\Phi - \Psi) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = 1 = u_1
\end{aligned}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $H(n)$ et $H(n+1)$. Montrons $H(n+2)$:

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \\
&= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^{n+1}\right) + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^n\right) \\
&= \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\Phi+1)\Phi^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}(\Psi+1)\Psi^n
\end{aligned}$$

Or par définition de Φ et Ψ, on $\Phi + 1 = \Phi^2$ et $\Psi + 1 = \Psi^2$. On en déduit

$$u_{n+2} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^{n+2} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^{n+2} \quad \text{CQFD.}$$

iii. Le principe de récurrence (à deux pas) permet d'affirmer que $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Ex 19 Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$: $H(n)$.

(i) La proposition $H(0)$ vraie puisque $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$ et $H(1)$ aussi par hypothèse.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: supposons $H(n-1)$ et $H(n)$, et montrons $H(n+1)$:

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$$

D'où

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Or $H(n)$ et $H(n-1)$ permettent d'affirmer que $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ et $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \in \mathbb{Z}$, et par hypothèse $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Il s'ensuit par somme et produit que :

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z} \quad \text{CQFD.}$$

(iii) Le principe de récurrence (à deux pas) permet d'affirmer que $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Si $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $-n \in \mathbb{N}$ donc $x^{-n} + \frac{1}{x^{-n}} \in \mathbb{Z}$, i.e. $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, CQFD.

Ex 20 On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_0 \times \cdots \times u_n)$.

On considère le prédicat $H(n)$: u_n existe et $u_n > 0$.

(i) La proposition $H(0)$ vraie par hypothèse.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons $H(0), \ldots, H(n)$ vraies, et montrons $H(n+1)$.

Puisque $u_0 > 0, \ldots, u_n > 0$, on a par produit $u_0 \times \cdots \times u_n > 0$, d'où $1 + u_0 \times \cdots \times u_n > 1$.
On en déduit que u_{n+1} existe et $u_{n+1} = \ln(1 + u_0 \times \cdots \times u_n) > 0$, CQFD.

(iii) Le principe de récurrence forte permet d'affirmer que $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et strictement positive.

Ex 21 Démontrons que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p (2q+1)$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

a) Existence : posons $P(n) : \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2 \;/\; n = 2^p (2q+1)$.

i. $P(1)$ est vraie puisque $1 = 2^0 (2 \times 0 + 1)$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(k)$ soit vraie, et montrons $P(n)$:

· Si n est impair, $\exists k \in \mathbb{N}^* \;/\; n = 2k+1 = 2^0 (2k+1)$ d'où $P(n)$ avec $(p,q) = (0,k)$.

· Si n est pair, $\exists k \in \mathbb{N}^* \;/\; n = 2k$. Or $k \in [\![1, n-1]\!]$, donc $P(k)$ est vraie :

$$\exists (p', q') \in \mathbb{N}^2 \;/\; k = 2^{p'} (2q'+1)$$

Il s'ensuit

$$n = 2^{p'+1} (2q'+1)$$

D'où $P(n)$ avec $(p,q) = (p'+1, q')$.

Dans les deux cas $P(n)$ est vraie.

iii. Par principe de récurrence forte, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; P(n)$ est vraie.

b) Unicité : soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(p,q,p',q') \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^p (2q+1) = 2^{p'} (2q'+1)$. $(*)$

Si par exemple $p > p'$, alors $(*) \Rightarrow 2^{p-p'} (2q+1) = (2q'+1)$, qui est contradictoire car le membre de gauche est pair tandis que celui de droite est impair.

On en déduit que $p = p'$. Mais alors $(*)$ se simplifie en $2q+1 = 2q'+1$, soit $q = q'$.

Finalement $(p,q) = (p',q')$ d'où l'unicité.

Ex 22 Démontrons que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P(n) : \exists p \in \mathbb{N}^*,\; \exists (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p \;/\; k_1 < \cdots < k_p$ et $n = \sum\limits_{i=1}^{p} 2^{k_i}$.

(i) $P(1)$ est vraie avec $p = 1$ et $k_1 = 0$ puisque $1 = 2^0$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(k)$ soit vraie, et montrons $P(n)$:

$*$ Si n est pair, $\exists k \in \mathbb{N}^* \;/\; n = 2\ell$.Or $\ell \in [\![1, n-1]\!]$, donc $P(k)$ est vraie :

$$\exists p' \in \mathbb{N}^*,\; \exists \left(k'_1, \ldots, k'_{p'}\right) \in \mathbb{N}^p \;/\; k'_1 < \cdots < k'_{p'} \text{ et } \ell = \sum_{i=1}^{p'} 2^{k'_i}$$

Mais alors

$$n = 2\ell = \sum_{i=1}^{p'} 2^{k'_i + 1}$$

Donc $P(n)$ est vraie avec $p = p'$, et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $k_i = k'_i + 1$ (on a bien $k_1 < \cdots < k_p$).

$*$ Si n est impair, on applique $P(n-1)$, vraie par hypothèse :

$$\exists p' \in \mathbb{N}^*,\; \exists \left(k'_1, \ldots, k'_{p'}\right) \in \mathbb{N}^p \;/\; k'_1 < \cdots < k'_{p'} \text{ et } n - 1 = \sum_{i=1}^{p'} 2^{k'_i}$$

On peut alors écrire

$$n = 1 + \sum_{i=1}^{p'} 2^{k'_i} = 2^0 + \sum_{i=1}^{p'} 2^{k'_i} = \sum_{i=1}^{p} 2^{k_i}$$

avec

$$p = p' + 1,\; k_1 = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2, p]\!],\; k_i = k'_{i-1}$$

Remarquons que $k'_1 > 0$, car sinon, $n - 1 = 1 + \sum\limits_{i=2}^{p'} 2^{k'_i}$ serait impair.

On a donc bien $k_1 < \cdots < k_p$, et $P(n)$ est vraie.

Dans les deux cas $P(n)$ est vraie.

(iii) Par principe de récurrence forte, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; P(n)$ est vraie.

Ex 23 Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i) } 1 \in A \\ \text{(ii) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A \\ \text{(iii) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A \end{cases}$$

Montrons que $A = \mathbb{N}^*$.

L'inclusion $A \subset \mathbb{N}^*$ étant vraie par hypothèse, il s'agit de montrer $\mathbb{N}^* \subset A$:

a) Première méthode : **par l'absurde**, s'il existait un entier $n \in \mathbb{N}^*$ qui ne soit pas dans A.

Choisissons le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \notin A$. Alors $n \geqslant 2$ puisque $1 \in A$ d'après (i).

- Si n est pair, alors, comme $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}^*$, la contraposée de (ii) donne : $\frac{n}{2} \notin A$.
  Mais $\frac{n}{2} < n$ (puisque $n > 0$) : on a donc un entier non nul strictement inférieur à n qui n'est pas dans A, ce qui contredit de même la minimalité de n.
- Si n est impair, alors la contraposée de (iii) donne $n+1 \notin A$.
  Mais $n+1$ est pair, et la contraposée de (ii) donne : $\frac{n+1}{2} \notin A$ puisque $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}^*$.
  Mais $\frac{n+1}{2} < n$ (puisque $n > 1$), on a donc encore un entier non nul strictement inférieur à n qui n'est pas dans A, ce qui contredit la minimalité de n.

Dans les deux cas on tombe sur une contradiction, qui démontre notre résultat.

b) Deuxième méthode : montrons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A : H(n)$.

- $H(1)$ est vraie d'après (i).
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $H(k)$ est vraie et montrons $H(n)$.
  - 1^er^ cas : n est pair. $\exists k \in \mathbb{N}^* \ /\ n = 2k$. Or $k = \frac{n}{2} \in [\![1, n-1]\!]$: en effet
  $$n \geqslant 2 \Rightarrow \frac{n}{2} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{n}{2} < n \Longleftrightarrow n > 0 \text{ vrai}$$
  Ainsi $H(k)$ est vraie, $i.e.$ $k \in A$. Il s'ensuit d'après (ii) que $n = 2k \in A$.
  - 2^ème^ cas : n est impair (donc $n \geqslant 3$). $\exists k \in \mathbb{N}^* \ /\ n = 2k-1$. Or $k = \frac{n+1}{2} \in [\![1, n-1]\!]$: en effet
  $$n \geqslant 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \frac{n+1}{2} < n \Longleftrightarrow n > 1 \text{ vrai}$$
  Ainsi $H(k)$ est vraie, $i.e.$ $k \in A$. Il s'ensuit d'après (ii) que $2k \in A$, et d'après (iii) : $n = 2k-1 \in A$.

  Dans les deux cas $n \in A$, d'où $H(n)$.
- Par principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A}$.