Ex 1 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$. Montrer que $\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{y}{x+1}\Rightarrow x=y$

Ex 2 Soit $m\in\mathbb{R}$ et $f:x\mapsto mx+1$. Montrer que f garde un signe constant si et seulement si $m=0$

Ex 3 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et $f:x\mapsto ax+b$. Montrer que f est la fonction nulle si et seulement si $a=b=0$

Ex 4 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que n est pair $\Longleftrightarrow n^2$ est pair

Raisonnements par l'absurde et par contraposée

Ex 5 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ex 6 Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On suppose que $\forall\varepsilon>0,\ x\leqslant\varepsilon$. Montrer que $x=0$.

Ex 7 Soient a et b deux réels. On suppose que $a\in\mathbb{Q}^*$ et $b\notin\mathbb{Q}$. Montrer que ab est irrationnel

Ex 8 Montrer que si x est irrationnel et positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Ex 9 Principe des tiroirs : démontrer que si l'on range $n+1$ pulls dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 pulls.

Ex 10 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels $x_0,x_1,\dots,x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0\leqslant x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$.
On veut démontrer la propriété P suivante : "deux de ces réels sont distants de moins de $1/n$".

a) Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs x_i-x_{i-1} une formule logique équivalente à P puis sa négation.
b) Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété P (on pourra montrer que $x_n-x_0>1$).
c) Donner une autre preuve de P en utilisant le principe des tiroirs.

Raisonnement par analyse et synthèse

Ex 11 Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f=g+h$, où g est une fonction paire et h une fonction impaire.

Ex 12 Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=f(xy)+x+y$

Raisonnement par récurrence

Ex 13 Montrer que $H(n)$: 10^n+1 est multiple de 9 est héréditaire. A-t-on $H(n)$ vraie pour tout n ?

Ex 14 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(nx)|\leqslant n|\sin(x)|$

Ex 15 Montrer que $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\,]0,1[^n,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\geqslant 1-\sum_{k=1}^{n}x_k$.

Ex 16 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases}u_0=2\ ,\ u_1=3\\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n\end{cases}$.
Trouver le terme général de (u_n) (on conjecturera le résultat)

Ex 17 On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases}a_0=a_1=1\\ \forall n\geqslant 1,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}\end{cases}$
Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1\leqslant a_n\leqslant n^2$.

Ex 18 **Suite de Fibonacci**: soit (u_n) définie par $\begin{cases}u_0=u_1=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\end{cases}$.

a) Etablir que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_{2k-1}=u_{2n}-1$
b) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=u_{n+2}-1$
c) On pose $\Phi>\Psi$ les racines de l'équation $x^2-x-1=0$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^n+\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\Psi^n$

Ex 19 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z},\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

Indication : on pourra calculer : $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Ex 20 On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_0 \cdots u_n)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Ex 21 Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ où $(p, q) \in \mathbb{N}$.

Ex 22 Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Ex 23 Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i) } 1 \in A \\ \text{(ii) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A \\ \text{(iii) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A \end{cases}$$

Démontrer que $A = \mathbb{N}^*$.