Ex 1 En interprétant ces ensembles comme noyaux d'applications linéaires, montrer que ce sont des espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = z + t = 0\}, \quad G = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f'' - 3f' + 2f = 0\right\}$$
$$H = \left\{f \in C^0([a, b]) \ / \ \int_a^b f = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$

Ex 2 Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $f : E \to E$ de matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que f est linéaire et injective. Calculer $\operatorname{Im} f$.

b) Montrer que f est un automorphisme de E, et calculer f^{-1}.

c) Calculer $F = \ker(f - 3\,\mathrm{id}_E)$. Si $X \in F$, que vaut $f(X)$? Que vaut $\operatorname{Im}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$?

Ex 3 Soit $E = \mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) sa base canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_3 \ , \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3 \ , \quad f(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur X de E. Quelle est la matrice A de f? Calculer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) $Y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils dans $\operatorname{Im} f$? Si oui, calculer leurs antécédents par f.

Ex 4 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\operatorname{tr} : E \to \mathbb{R}$ définie, si $M = (m_{ij}) \in E$, par $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.
Montrer que tr est une forme linéaire. Est-elle surjective ? injective?
Dans le cas où $n = 3$, calculer $\dim \ker \operatorname{tr}$.

Ex 5 soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.
Calculer l'image et le noyau de f (pour $\operatorname{Im} f$, utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

Ex 6 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, et $\varphi : E \to E$ définie par $\forall P \in E, \ \varphi(P) = P - XP'$.
Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Ex 7 Soit $E = \mathbb{K}_4[X]$, et $\varphi : E \to E$ définie par $\forall P \in E, \ \varphi(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' - (3X + 1) P'$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer $\ker \varphi$ (en donner une base).
Quels sont les antécédents par φ de $Q = \varphi\left(X^3\right)$?

Ex 8 Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et φ définie sur E par $\forall f \in E, \ \varphi(f) : x \mapsto xf(x)$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E

b) Déterminer son image et son noyau.

Ex 9 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et $T : E \to E$ définie par $\forall u \in E, T(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, et déterminer $F_\lambda = \ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
T est-elle injective, surjective ?

Ex 10 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe des réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des vecteurs non nuls $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!] \ , \ f(x_k) = \lambda_k x_k$. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Ex 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E, \ f(x)$ est colinéaire à x. Montrer que f est une homothétie de E.

Ex 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :

a) $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$

b) $\ker f + \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

Ex 13 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par g et $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$ stables par f.

b) On suppose que $E = \ker f + \ker g$. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker g$ et $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.

Ex 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $g = f - \mathrm{id}_E$ est inversible et exprimer g^{-1} à l'aide de f.

Ex 15 Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E.

Ex 16 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.

b) On suppose : $\exists p \in \mathbb{N}^*\ /\ \ker f^{p-1} \subsetneq \ker f^p = \ker f^{p+1}$. Montrer que $\begin{cases} k < p \Rightarrow \ker f^k \subsetneq \ker f^{k+1} \\ k \geqslant p \Rightarrow \ker f^k = \ker f^{k+1} \end{cases}$

c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

d) On suppose : $\exists p \in \mathbb{N}^*\ /\ \operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^p \subsetneq \operatorname{Im} f^{p-1}$. Montrer que $\begin{cases} k < p \Rightarrow \operatorname{Im} f^{k+1} \subsetneq \operatorname{Im} f^k \\ k \geqslant p \Rightarrow \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \end{cases}$

Ex 17 Soit $E = \mathbb{R}^4$. Calculer les matrices canoniquement associés au projecteur et à la symétrie sur l'espace F d'équation $x - y + t = 0$ parallèlement à la droite G engendrée par le vecteur $u = (1, 1, 2, -1)$.

Ex 18 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 3f + 2\operatorname{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$:

a) Montrer que $f \in GL(E)$ et calculer f^{-1} en fonction de f.

b) Montrer que $E = \ker(f - \operatorname{id}_E) \oplus \ker(f - 2\operatorname{id}_E)$.

c) Soit $p = f - \operatorname{id}_E$. Montrer p est un projecteur de E. Calculer son projecteur associé; retrouver le résultat du b).

Ex 19 Soit $E = \mathbb{R}^3$, et (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1) = 5e_1 + e_2 - 2e_3 \quad ; \quad f(e_2) = e_1 + 5e_2 + 2e_3 \quad ; \quad f(e_3) = -2e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

a) Donner la matrice A de f, puis calculer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) On pose $p = \frac{1}{6} f$: montrer que p est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

c) En déduire que $X \in \operatorname{Im} f \iff f(X) = 6X$. Les systèmes suivants admettent-ils des solutions ?

$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ x + 5y + 2z = 3 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 5x + y - 2z = 1 \\ x + 5y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ex 20 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, s un endomorphisme de F et φ un isomorphisme de F sur G. On pose, si $x = x_F + x_G \in E$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$,

$$f(x) = \varphi(x_F) + s(x_F) + \varphi^{-1}(x_G)$$

Montrer que f est un automorphisme de E et donner une expression de $f^{-1}(x)$ à l'aide de la décomposition de x.

Ex 21 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non trivial, et p et q deux projecteurs de E. Montrer que

$$p \circ q = q \circ p = p \iff \begin{cases} \ker q \subset \ker p \\ \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q \end{cases}$$

Ex 22 Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Sous ces conditions, montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Ex 23 Soient f, p, q trois endomorphismes de E et a, b deux scalaires distincts vérifiant : $\begin{cases} p + q = \operatorname{id} \\ ap + bq = f \\ a^2 p + b^2 q = f^2 \end{cases}$.

a) Montrer que $(f - a\operatorname{id}) \circ (f - b\operatorname{id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et en déduire que p et q sont deux projecteurs associés.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = a^n p + b^n q$.

c) On suppose $ab \neq 0$: montrer que $f \in GL(E)$, et que la formule du b) reste valable pour $n \in \mathbb{Z}$

Ex 24 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
On suppose qu'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g \circ f = f$.

a) Montrer que $f \circ g$ est un projecteur de $\mathbb{R}^m$, $g \circ f$ un projecteur de $\mathbb{R}^n$, et que $\begin{cases} \operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \\ \ker(g \circ f) = \ker f \end{cases}$

b) Soit $Y \in \mathbb{R}^m$. Montrer que $Y \in \operatorname{Im} f \iff f \circ g(Y) = Y$

c) En déduire que si $Y \in \operatorname{Im} f$, alors les solutions de l'équation linéaire $f(X) = Y$ sont les vecteurs de la forme $X = g(Y) + h(Z)$, $\quad Z \in \mathbb{R}^n$ où h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'on déterminera.