Primitives et intégrales des fonctions continues

1. Compléments sur les primitives

Attention : la notation $F(x) = \int f(x)\,dx$ est abusive. la lettre x n'y est pas muette, et cette notation n'est utilisé que pour les calculs de primitives, mais en aucun cas dans des raisonnements mathématiques.

1.1. Intégration par parties

a) Principe : si u et v sont des fonction de classe C^1 sur I, alors

$$\boxed{\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx}$$

Ce résultat permet de remplacer le calcul de $\int u'v$ par celui de $\int uv'$ (quand il est plus simple)

b) Exemples :

Exemple 1 : $F(t) = \int te^{2t}dt$ sur $\mathbb{R}$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = e^{2t} \\ v(t) = t \end{array} \right.$

Exemple 2 : $G(t) = \int t \ln t dt$ sur $]0, +\infty[$. On pose $\forall t > 0, \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = t \\ v(t) = \ln t \end{array} \right.$

Exemple 3 : $H(t) = \int \arctan t dt$ sur $\mathbb{R}$.

c) Application : primitives de la forme $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$, avec P polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}^*$

Ces primitives sont de la forme $Q(x)\,e^{\alpha x} + C$, avec $C \in \mathbb{C}$ et Q polynôme de même degré que P

1.2. Changement de variable

a) Sens direct : (facile) : soit f une fonction continue sur J, F une primitive de f sur J, et φ une fonction de classe C^1 sur I à valeurs dans J. Alors $F(\varphi(x))$ est une primitive de $\varphi'(x) \times f(\varphi(x))$ sur I, soit

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

Formellement, on écrit, en posant $y = \varphi(x)$: $\dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ soit $\boxed{"dy = \varphi'(x)\,dx"}$. Alors

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Exemple 1 : $F(t) = \int \sin^3 t \cos^2 t dt$: on pose $x = \cos t$

Exemple 2 : $G(x) = \int (1 + \ln x)^2 \dfrac{dx}{x}$

Exemple 3 : $H(x) = \int \dfrac{x^4 dx}{x^{10} + x^5 + 1}$: on pose $t = x^5$

b) **Sens indirect :** supposons $\varphi : J \to I$ **bijective** et de classe C^1 sur J.

On veut calculer $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ avec le changement de variable $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ t = \varphi^{-1}(x) \\ "dx = \varphi'(t)\,dt" \end{cases}$. Alors

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Si cette nouvelle primitive se calcule, alors on trouve

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + C = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C$$

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$: on pose $t = e^x$

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}$ sur $]0, \pi[$: on pose $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$

Exemple 3 : changements de variable affines : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ puis $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

1.3. Primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}dx$

a) **1er cas :** $\Delta = b^2 - 4ac > 0$Alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles λ et μ. On trouve alors deux réels α et β tels que

$$\forall x \notin \{\lambda, \mu\}, \ \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu}$$

Alors sur tout intervalle ne contenant pas λ et μ, $\displaystyle\int \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}dx = \alpha \ln|x - \lambda| + \beta \ln|x - \mu| + C$

Exemple : $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ sur $\mathbb{R}$

b) **2ème cas :** $\Delta = b^2 - 4ac < 0. F$ est alors définie sur $\mathbb{R}$.

On fait apparaitre la dérivée du dénominateur au numérateur, et on trouve α et β tels que

$$\frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}dx = \alpha\ \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \beta\ \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

- On a $\displaystyle\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}dx = \ln\left|ax^2 + bx + c\right| + C$
- Pour $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, on utilise la forme canonique du trinôme, on a deux réels λ et μ tels que

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x - \lambda)^2 + \mu} = \frac{1}{a\sqrt{\mu}} \arctan\frac{x - \lambda}{\sqrt{\mu}} + C$$

Exemple : $F(x) = \displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}dx$ sur $\mathbb{R}$

c) **Application :** calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{x - (a + ib)}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ b \neq 0$

2. Intégrale sur un segment

2.1. Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$, et F une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

a) <u>Lemme et définition</u> : le réel $\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie.

On note alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \in \mathbb{R}}$$

Cas particulier : $\displaystyle\int_a^b dt = b - a$ $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$

b) <u>Remarque importante</u> : dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, la lettre t est muette, puisqu'elle n'apparait pas dans le résultat $(F(b) - F(a))$. On peut donc noter indifféremment :

$$I = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(\xi)d\xi = \int_a^b f$$

En revanche, la notation (impropre) $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ désigne une **fonction de** x (fonction primitive de f).

c) <u>Interprétation géométrique</u> : on montre que si $a < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est la surface du domaine défini par $\left\{\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right.$ en unité d'aire, surface du rectangle défini par le repère orthogonal.

Remarque : si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b (g - f)$ est la surface du domaine défini par $\left\{\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{array}\right.$

2.2. Propriétés élémentaires

a) <u>Linéarité</u> : si f et g sont continues sur I, $(a, b) \in I^2$, et λ, μ deux réels, alors

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g}$$

Remarque 1 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\Big[f(t) + g(t)\Big]_a^b = \Big[f(t)\Big]_a^b + \Big[g(t)\Big]_a^b$ et $\Big[\lambda f(t)\Big]_a^b = \lambda \Big[f(t)\Big]_a^b$

Remarque 2 : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b M dt = M(b - a)$ (aire d'un rectangle!) $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$

Remarque 3 : si $f \in C^1([a, b])$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$

b) <u>Relation de Chasles</u> : $\boxed{\forall c \in I,\ \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$

Remarque 1 : $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^a f = 0$

Remarque 2 : on écrit souvent : $\displaystyle\int_a^b f = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f$

c) Intégration par parties : si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\boxed{\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv'}$$

ou

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$$

Exemple 1 : $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin t dt.$

Exemple 2 : soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{2n}{3}\left(u_{n-1} - u_n\right).$

Calculer u_0 et u_1.

2.3. Intégration des fonctions complexes

Soit $f = f_1 + if_2 : I \to \mathbb{C}$ continue sur I (i.e. f_1 et f_2 réeeles continues sur I) : on pose

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f_1(t)\, dt + i\int_a^b f_2(t)\, dt}$$

Autrement dit

$$\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\, dt \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\, dt$$

On montre alors que la relation de Chasles et la linéarité restent vraie pour les fonctions complexes :

$$\boxed{\forall (f, g) \text{ continues complexes, } \forall (\lambda, \mu) \in \boxed{\mathbb{C}^2},\ \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda\int_a^b f(t)\, dt + \mu\int_a^b g(t)\, dt}$$

Exemple : calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^t \cos 3t\, dt$

2.4. Changement de variable

a) Principe : soit f continue sur l'intervalle I, et φ de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans I. Alors :

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du}$$

Remarque : on peut écrire $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$ puisque t et u sont muettes.

C'est ingérable dans la pratique. Le changement de variable dans les intégrales est purement formel.

b) Exemples : dans la pratique, on pose

$$t = \varphi(u) : \text{alors } \frac{dt}{du} = \varphi'(u) : \text{donc formellement } "dt = \varphi'(u)\, du"$$

Lorsque de plus φ est bijective on pose $\boxed{\left\{\begin{array}{c} t = \varphi(u) \\ u = \varphi^{-1}(t) \\ dt = \varphi'(u)\, du \end{array}\right.}$: alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du$$

Attention : **ne pas oublier de changer les bornes**

Exemple 1 : calcul de $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $t = \sin\theta$ puis $J = \displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}dt$

Exemple 2 : montrer, en posant $t = \dfrac{1}{x}$, que $\forall a > 0,\ \displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0.$

c) **Applications :** soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(i) Parité : si f est **paire**, alors $\forall a > 0$, $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt}$

si f est **impaire**, alors $\forall a > 0$, $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0}$

(ii) Périodicité : si f est T**-périodique**, alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt}$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt}$

Exemple : étudier la parité de $f : x \to \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$

2.5. Lien entre primitives et intégrales :

a) **Expression des primitives :** soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, et $a \in I$.

On peut considérer la fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^{\boxed{x}} f(t)dt$

Alors

$$\boxed{F : x \to \int_a^x f(t)dt \quad \text{est LA primitive de } f \text{ sur } I \text{ qui s'annule en } a.}$$

Exemple 1 : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

Exemple 2 : si $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^4}}$, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$

Remarque 1 : cela explique la notation des primitives $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$: la notation rigoureuse est $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, où a est un réel quelconque de I.

Remarque 2 : la primitive qui vaut b en a a pour expression : $\forall x \in I,\ F(x) =$

b) **Fonctions des bornes :** soient f continue sur I et u et v dérivables sur J à valeurs dans I.
On considère la fonction

$$\Phi : x \to \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

Montrer que Φ est dérivable sur J et calculer Φ'.

Exemple : $\forall x > 0$, on note $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, et calculer F'

2.6. Intégrales et inégalités

On supposera f et g continues sur $[a,b]$.

a) Positivité et croissance :

(i) Positivité : $\boxed{\text{si } f \text{ vérifie } \forall t\in[a,b],\quad f(t)\geqslant 0, \text{ alors } \quad \int_a^b f(t)dt\geqslant 0}$

(ii) Croissance : $\boxed{\text{si } \forall t\in[a,b],\quad f(t)\leqslant g(t), \text{ alors } \quad \int_a^b f(t)dt\leqslant \int_a^b g(t)dt}$

b) Inégalité de la moyenne : $\boxed{\text{si } \forall t\in[a,b],\ m\leqslant f(t)\leqslant M, \text{ alors } m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)dt\leqslant M(b-a)}$

On a aussi l'autre conséquence très utilisée :

$$\boxed{\text{si } g\geqslant 0 \text{ sur } [a,b], \text{ et } \forall t\in[a,b],\ 0\leqslant f(t)\leqslant M, \text{ alors } \int_a^b f(t)g(t)dt\leqslant M\int_a^b g(t)dt}$$

c) Généralisation de l'inégalité triangulaire : $\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt}$

Remarque 1 : en particulier, si $|f|\leqslant M$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right|\leqslant \int_a^b |f(t)|\,|g(t)|\,dt\leqslant M\int_a^b |g(t)|\,dt$

Remarque 2 : si a et b sont quelconques, on a $\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right|$

Remarque 3 : inégalité vraie pour f complexe (en TD).

d) Nullité : $\boxed{\text{si } f \text{ est positive continue sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b f=0 \text{ alors } f \text{ est nulle sur } [a,b]}$

Dont un énoncé équivalent est

$$\boxed{\text{si } f \text{ est positive continue sur } [a,b] \text{ et n'est pas identiquement nulle, alors } \int_a^b f>0}$$

e) Exemples :

Exemple 1 : soit $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}}dt$. Montrer que (I_n) converge vers 0.

Exemple 2 : montrer que $f:x\to\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}dt$ est bornée sur $[1+\infty[$

Exemple 3 : inégalité des accroissements finis : montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |\sin y-\sin x|\leqslant|y-x|$