Ex 1 Calculer $\arccos\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\arcsin\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\arccos\cos(6)$, $\arcsin\sin(3)$, $\arctan\tan\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$

Ex 2 Comparer $x = \arccos\left(\dfrac{7}{8}\right)$, $y = \arccos\left(\dfrac{-7}{8}\right)$, $z = 2\arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Ex 3 Soit $\theta \in \left]-1, 1\right[$. Résoudre dans $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ l'équation $\sin x = \theta$.

Ex 4 Déterminer l'ensemble des solutions sur $I = [0, 2\pi]$ de l'équation $\arccos(\cos(2x)) = \dfrac{2\pi}{3}$

Ex 5 Pour $x \in [-1, 1]$, simplifier les expressions : $\cos(2\arccos x)$ et $\sin(2\arcsin x)$

Ex 6 Soit $f : x \mapsto \arccos(x-1) - \dfrac{\pi}{3}$

a) Tracer sans calculs la courbe de f, en précisant l'intersection avec l'axe (Ox).

b) Tracer alors les courbes des fonctions $g : x \mapsto \left|\arccos(x-1) - \dfrac{\pi}{3}\right|$ et $h : x \mapsto \arccos(|x|-1) - \dfrac{\pi}{3}$

Ex 7 a) Tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ à l'aide de considérations de parité et de périodicité.

b) Simplifier l'expression $f(x)$ lorsque $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ (discuter sur la parité de k)

Ex 8 En simplifiant son expression, tracer la courbe sur $[0, 2\pi]$ de $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \dfrac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.

Ex 9 Calculer la dérivée (où elle existe) des fonctions $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ et $g : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)$

Ex 10 a) Montrer que $\forall k \geqslant 0$, $\arctan\dfrac{1}{1+k+k^2} = \arctan(k+1) - \arctan k$.

b) En déduire une simplification de l'expression $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$ et sa limite.

Ex 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arcsin x = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}$. On pourra remarquer que $\dfrac{4}{5} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{5}{13} < \dfrac{1}{2}$

Ex 12 Résoudre en faisant attention l'équation $\arccos(x) = \arcsin(2x)$

Ex 13 a) Montrer que : $\forall t > 0$, $\arctan(t) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ (on pourra poser $\theta = \arctan t$).

b) En déduire la résolution de l'équation : $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Ex 14 a) Trouver la valeur exacte de : $A = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

b) Résoudre l'équation $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \dfrac{5\pi}{4}$

Ex 15 a) Etudier la fonction cotan sur l'intervalle $]0, \pi[$, et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

b) Montrer que cotan réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$, dont on note $\operatorname{arccotan}$ la réciproque
Calculer $\operatorname{arccotan} 1$ et $\operatorname{arccotan}\operatorname{cotan}\dfrac{11\pi}{6}$, puis tracer la courbe représentative de $\operatorname{arccotan}$.

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arccotan} x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$, et en déduire sa dérivée sur $\mathbb{R}$.

Ex 16 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh} x)$ et $g(x) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right)$

a) Préciser (en justifiant) l'ensemble sur lequel f et g sont définies, et celui où elles sont dérivables, puis donner une expression simplifiée de f' et de g' (ne faisant intervenir que ch).

b) En déduire que $f = g$ sur un intervalle à préciser.

c) Application : donner une expression simple de $\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$ et de $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$.
En écrivant $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$, en déduire une expression simple de $\tan\dfrac{\pi}{12}$