Relations d'équivalence

1. Définitions

a) **Relations binaires :** soit E un ensemble.
Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est la donnée d'une application sur E^2 à valeurs booléennes.
Autrement dit, si x et y sont éléments de E, $x\mathcal{R}y$ peut être vrai ou faux.
Par exemple, les relations $=$, $\Longleftrightarrow$, $\leqslant$, $\subset$, // sont des relations binaires. Sur quels ensembles?

b) **Relations d'équivalence :** soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
$\mathcal{R}$ est appelée **relation d'équivalence** lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{R}$ est **réflexive** : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$

(ii) $\mathcal{R}$ est **transitive** : $\forall\,(x,y,z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$

(iii) $\mathcal{R}$ est **symétrique** : $\forall\,(x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$

Exemples de base : $=$, $\Longleftrightarrow$, // $\sim$ sont des relations d'équivalence.

Exemple 2 : si $p \in \mathbb{N}^*$, la relation de congruence modulo p : $a \equiv b\ [p] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ /\ a = b + kp$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

2. Classes d'équivalence

soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et $x \in E$.

a) **Définition :** on appelle classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x :

$$\boxed{\mathrm{cl}\,(x) = \{y \in E\ /\ x\mathcal{R}y\}}$$

On note aussi $\bar{x}$ ou $\dot{x}$ pour la classe d'équivalence de x

Remarque : $x \in \mathrm{cl}\,(x)$, donc $\mathrm{cl}\,(x) \neq \varnothing$

Exemple : pour la relation de congruence modulo 2, calculer $\mathrm{cl}\,(0)$, $\mathrm{cl}\,(1)$, $\mathrm{cl}\,(13)$
Même question avec la congruence modulo 3

b) **Propriété :** les classes d'équivalences forment une **partition** de E, c'est-à-dire

(i) $\forall\,(x,y) \in E^2,\ \mathrm{cl}\,(x) = \mathrm{cl}\,(y)$ ou $\mathrm{cl}\,(x) \cap \mathrm{cl}\,(y) = \varnothing$

(ii) $E = \displaystyle\bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}\,(x)$

Exemple : les vecteurs. Soit E l'ensemble des couples de points du plan ("bipoints" du plan).
On définit dans E la relation (A,B) équipollent à $(C,D) \Longleftrightarrow ABDC$ est un parallèlogramme.
La relation d'équipollence est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence sont les **vecteurs** du plan.

c) **Systèmes complets de représentants :** soit Σ une partie de E vérifiant :

(i) Les classes d'équivalence des éléments de Σ sont deux à deux disjointes

(ii) $E = \displaystyle\bigcup_{x \in \Sigma} \mathrm{cl}\,(x)$

On dit que Σ est un **système complet de représentants** des classes d'équivalence.

Exemple : si $p \in \mathbb{N}^*$, $\Sigma = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ forme un système complet de représentants des classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo p.

3. Exercices :

Exercice 1 : soient E et F deux ensembles et u une application de E dans F.

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$$

est une relation d'équivalence et que pour tout x de E, on a $\mathrm{cl}(x) = u^{-1}\left(\{u(x)\}\right)$

Exercice 2 : soit $\mathcal{U}$ une partition de l'ensemble E. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \left(\exists A \in \mathcal{U} \ / \ x \in A \text{ et } y \in A\right)$$

est une relation d'équivalence dont les classes sont les éléments de $\mathcal{U}$.

Exercice 3 : sur $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$$

est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, déterminer le nombre d'éléments de la classe de x.