Ex 1 Soit E un ensemble de n personnes qui ne sont nées ni un 29 février ni un 31 avril.
Quelle est la probabilité pour que deux personnes de E aient le même anniversaire.
A.N. Calculer cette probabilité pour $n = 22$, $n = 23$ et $n = 46$.

Ex 2 On joue au poker (main de 5 cartes) avec un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour avoir un carré? Une double paire?

Ex 3 Un sac opaque contient trois cartes indiscernables au toucher. La première a ses deux faces rouges, la deuxième ses deux faces noires, et la troisième a une face noire et une face rouge. On tire au hasard une carte et on la pose sur la table. La face apparente est noire. Quelle est la probabilité pour que la face cachée soit noire aussi?

Ex 4 **Problème de Galilée** : on lance trois dés indiscernables.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir $6, 6, 6$? D'obtenir $5, 5, 1$? D'obtenir $4, 2, 1$?

b) Galilée a constaté qu'on obtenait plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que ces deux sommes sont obtenues chacune de 6 façons différentes. Expliquer cette différence.

Ex 5 **Problème du chevalier de Méré** : est-il plus probable d'obtenir au moins un six en lançant 4 dés que d'obtenir au moins un double six en lançant 24 fois 2 dés?

Ex 6 Soit une famille ayant deux enfants (on suppose le sexe équiprobable)

a) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons?

b) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon?

c) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon?

Ex 7 Quatre exercices de mathématiques sont répartis entre cinq élèves d'un pentanôme P de PCSI 1 par tirage au sort (avec remise). Pour tout $e \in P$, on note A_e l'événement : "l'élève e ne reçoit aucun exercice".
Les événements $(A_e)_{e\in P}$ sont-ils indépendants ?

Ex 8 On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit dans ce meuble est p.
Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

Ex 9 L'inspecteur chargé d'une enquête est convaincu à 60% de la culpabilité d'un suspect.
Une nouvelle pièce à conviction permet soudain d'affirmer que le criminel est gaucher. Or 7% des individus dans la population sont gauchers.
Comment l'inspecteur doit-il réapprécier la culpabilité du suspect, s'il se trouve que le suspect est gaucher ?

Ex 10 Dans un lycée lointain, il y a deux classes de PCSI : la PCSI 1 a 46 élèves et un élève y a 65% de chances d'avoir la moyenne au prochain devoir de chimie. La PCSI 2 a 45 élèves et un élève y a 40% de chances d'avoir la moyenne au prochain devoir de chimie.
Un PCSI moyen a eu la moyenne en chimie. Quelle est la probabilité pour qu'il vienne de PCSI 2?

Ex 11 Dans une population, une personne sur 10000 souffre d'une certaine maladie.
Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test de dépistage de cette maladie.
Celui-ci est positif à 99% sur les personne malades, mais aussi faussement positif sur $0,1\%$ des personnes saines.
Un individu passe le test, qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade? Conclusion?

Ex 12 Pour se rendre au lycée, Blaise a le choix entre trois itinéraires.
S'il emprunte le premier, il est sûr d'arriver à l'heure. S'il emprunte le deuxième, il n'a que deux chances sur trois d'arriver à l'heure, et n'a plus qu'une chance sur trois s'il prend le troisième. Tous les matins, il choisit un itinéraire au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il arrive à l'heure?

b) S'il arrive à l'heure, quelle est la probabilité pour qu'il ait emprunté le premier itinéraire?

Ex 13 Dans un beau pays lointain, il pleut trois jours sur dix.

a) Une station météorologique M_1 annonce tous les matins ses prévisions pour la journée à venir. Son taux de fiabilité est de 80%. Si un matin elle annonce du beau temps, quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau?

b) Une seconde station M_2 est fiable à 90% et ses prévisions sont faites indépendamment de la station M_1. Si M_1 annonce beau temps et M_2 la pluie, quelle est la probabilité qu'il fasse beau?

Ex 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une file d'attente de $2n$ personnes, le nombre de femme est un entier aléatoire entre n et $2n$ (il y a équiprobabilité de chaque cas).

a) On choisit une personne au hasard dans la file d'attente. Quelle est la probabilité que ce soit une femme.

b) Sachant qu'on a choisi une femme, quelle est la probabilité que la file ne soit constituée que de femmes?

Ex 15 Une urne contient $2n$ boules dont n blanches et n noires. On tire successivement n boules sans remise.

a) Calculer la probabilité de ne tirer que des boules noires.

b) Calculer la probabilité de tirer une alternance de blanches et de noires (en supposant n pair)

c) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche

Ex 16 On effectue $n > 0$ expériences aboutissant au succès ou à l'échec avec la probabilité p et $q = 1 - p$, où $p \in \left]0, 1\right[$.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un succès?

b) Quelle est la probabilité pour qu'au cours de ces n expériences, un succès ne soit jamais suivi d'un échec?

Ex 17 Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$

a) On prélève une "poignée aléatoire de p boules.

Calculer la probabilité de l'évènement A_k : "le plus grand numéro de la poignée est k" où $k \in [\![p, n]\!]$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$

b) On tire successivement et sans remise p boules.

Calculer la probabilité de l'évènement B : " la p-ième boule tirée a un numéro supérieur aux $p - 1$ précédents"

Ex 18 On dispose de $n \geqslant 2$ urnes numérotées contenant une boule blanche et une boule noire, sauf la première qui contient deux boules noires et une boule blanche.
On prélève au hasard une boule dans la première urne, qu'on place dans la deuxième. On prélève ensuite au hasard une boule dans la deuxième qu'on place dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on considère l'évènement A_k : "la boule extraite de l'urne k est blanche" et $p_k = \mathbb{P}(A_k)$.

a) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, exprimer p_{k+1} en fonction de p_k

b) En déduire l'expression de p_k en fonction de k puis sa limite lorsque k tend vers l'infini.

Ex 19 Un fabriquant de chaussures en produit n paires et les assemble au hasard dans des boîtes contenant deux chaussures, sans prendre garde aux pieds droits et gauches.

a) Calculer la probabilité p_n que toutes les boîtes possèdent un pied droit et un pied gauche.

b) Calculer la probabilité q_n que toutes les boîtes soient constituées de deux chaussures du même pied.

c) Etablir que $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n}2^{2n-1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$, et en déduire les limites de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 20 Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement " l'animal est en A (resp. B, C) après son n-ième trajet".
On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n,\ \mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

a) Déterminer une relation de récurrence entre $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ et (a_n, b_n, c_n).

b) A l'aide de la matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1, calculer a_n, b_n, c_n en fonction de n puis les limites de chacune d'elles.

Ex 21 Au moment où chacun possède un tiers du marché de la téléphonie mobile, trois opérateurs A, B, C décident de mettre sur le marché un nouveau type de forfait annuel. A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante :

- Les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante.
- Les clients de la compagnie B lui restent toujours fidèles.
- Les clients de la compagnie C iront chez A (resp. B) avec une probabilité $\frac{1}{12}$ (resp. $\frac{7}{12}$) et resteront avec la probabilité $\frac{1}{3}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n,\ b_n,\ c_n$ les probabilités qu'à l'issue de l'année n, un consommateur décide de s'abonner chez A, B, C pour l'année suivante.

a) Déterminer une relation de récurrence entre $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ et (a_n, b_n, c_n).

b) En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n et déterminer la limite de chacune d'elles.