Ex 1 A l'aide des équivalents, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(7x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\tan(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{2^x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2+x-2\right)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \tan x \tan 2x$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ avec $ab\neq 0$

j) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\cos x}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ $\quad (a>0,\ b>0)$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{e^x}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}$

p) $\lim\limits_{x\to e} (\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2e}}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch}(x)^{1/\sin(x)^2}$

r) $\lim\limits_{x\to 2} (2^x-3)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$

s) $\lim\limits_{x\to \pi} (2+\cos(x))^{\operatorname{cotan}(x)^2}$

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x$

Ex 2 Même question :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x - x^2}{x\left(\sqrt{x+1}-\cos x\right)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{x}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)\right]^{1/n}-x\right)$ $\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

Ex 3 Etudier la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n=\sin\left(2\sqrt{n^2+1}\pi\right)$

Ex 4 Soit $x\in\mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite de termes général : $u_n=\dfrac{1}{2i}\left(\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{ix}{n}\right)^n\right)$.

Ex 5 Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 de

a) $\dfrac{5^x-1}{\sin(x)}$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}}$

c) $\ln(\cos(x))$

d) $(\tan(x))^3\left((\cos(x))^{x^2}-1\right)$

e) $\tan x-\sin x$

f) $\operatorname{ch}(x)-1$

g) $\dfrac{x^3+1-\cos(x)}{(x^2-2x)\tan(3x)}$

h) $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}$

Ex 6 a) Déterminer un équivalent de $\tan(x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Déterminer un équivalent de $e^{\sin(x)}-e$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$.

Ex 7 Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer un équivalent de $\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ au voisinage de 1.

Ex 8 A l'aide de $\sin\arccos x$, montrer que $\arccos x \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$

Ex 9 Trouver un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de

a) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ b) $\dfrac{\ln(x)+\ln(x)^2}{\sqrt{\ln(x)}+\sqrt[3]{\ln(x)}}$

c) $e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$ d) $(x+1)^{\frac{1}{x+1}}-x^{\frac{1}{x}}$

Ex 10 Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 et de $+\infty$ de

a) $\dfrac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x}+x^2}$ b) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

c) $\dfrac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{e^x+x+\ln(|x|)}{x+\sqrt{|x|}}$ (et en $-\infty$)

e) $\dfrac{1+x^\alpha}{x^\beta}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ f) $\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Ex 11 Donner un équivalent de la suite $u_n=\sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$.

Ex 12 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!\sim n!$ (on pourra montrer $\displaystyle\lim\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!=1$ par encadrement)

Ex 13 Etudier les branches infinies de la fonction $f:x\to\sqrt[3]{x^2(x-3)}$

Ex 14 Comparer à l'infini les suites 0.5^n, $n^{1/9}$, n^n, $\ln^3 n$, $\dfrac{1}{n^{15}}$, $n!$, 2^n, e^{2n}, $e^{-n/2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 1.

Ex 15 a) Comparer (en justifiant) les fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

$$x^2(\ln x)^2e^{2x}\quad;\quad x^3(\ln x)^3 3^x\quad;\quad x^4(\ln x)^3e^x\quad;\quad x^3(\ln x)^4e^x\quad;\quad x^5(\ln x)^3e^x$$

b) Comparer à l'infini les suites $(\ln n)^a n^b c^n$ et $(\ln n)^{a'}n^{b'}c'^n$ en discutant sur $a,b,c>0,a',b',c'>0$

Ex 16 Comparer $\dfrac{\ln(x)}{x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0.

Ex 17 Comparer $x^{\ln(x)}$ et x^xau voisinage de $+\infty$ puis de 0.

Ex 18 Justifier : $\ln(\ln(x))\underset{x\to+\infty}{=}\mathrm{o}(\ln(x))$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x}$.

Ex 19 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions suivantes :

a) $x^{(x^x)}$ et $(x^x)^x$ b) $a^{(b^x)}$ et $b^{(a^x)}$, où $1<a<b$ c) $x^{(x^a)}$ et $a^{(a^x)}$ où $1<a$

Ex 20 Soit $f:x\mapsto(2x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-2$

a) Calculer $\displaystyle\lim_{+\infty}f$.

b) Montrer que $\forall t\geqslant 0,\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^4}{4}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$. En déduire un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+$

c) Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ (en justifiant correctement la réponse).

Ex 21 Pour tout entir $n>0$, on note f_n la fonction définie pour $x>0$ par $f_n(x)=1+x^2-2x^2(n+\ln x)$.

a) Montrer que l'équation $f_a(x)=0$ admet une unique solution notée $x_n\in\left]0,+\infty\right[$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, et en déduire $\dfrac{1}{n}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ à partir d'un certain rang.

c) Montrer que $x_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\ln x_n=o(n)$.

d) Trouver un équivalent de x_n, et montrer que $\ln x_n\sim-\dfrac{\ln n}{2}$

e) Montrer que $x_{n,}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\sim\dfrac{\ln n}{4\sqrt{2n}\sqrt{n}}$, ce qui s'écrit aussi $x_{n,}=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\dfrac{\ln n}{4\sqrt{2n}\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{\ln n}{n^{3/2}}\right)$