Lemme : soient E et F des ensembles équipotents, non vides et non réduits à un singleton
Si $a \in E$ et $b \in F$, alors $E \backslash \{a\}$ et $F \backslash \{b\}$ sont équipotents.

Soit $f : E \to F$ une bijection. Posons $b' = f(a)$

- Si $b' = b$, alors f induit une bijection $\tilde{f} : E \backslash \{a\} \to F \backslash \{b\}$
- Si $b' \neq b$, alors considérons la bijection $\tau : F \to F$ qui échange b et b'.
  ($\tau(b) = b'$, $\tau(b') = b$ et $\forall k \notin \{b, b'\}$, $\tau(k) = k$. On a $\tau^{-1} = \tau$).
  Posons alors $g = \tau \circ f : E \to F$: c'est une bijection (par composée) vérifiant $g(a) = b$: on est ramené au cas précédent : g induit une bijection $\tilde{g} : E \backslash \{a\} \to F \backslash \{b\}$

Théorème : si $n \neq m$, alors $[\![1, n]\!]$ n'est pas équipotent à $[\![1, m]\!]$

Par symétrie de la relation d'équipotence, il suffit de montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat $P(n)$ suivant :

$$\forall m \geqslant n, \ [\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!] \Rightarrow n = m$$

- Initialisation : $P(1)$: $\forall m \geqslant 1, \ \{1\} \simeq [\![1, m]\!] \Rightarrow m = 1$.
  En effet si $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \{1\} \to [\![1, m]\!]$ bijective, alors m et 1 ont le même antécédent par φ et donc $m = 1$.
- Hérédité : soit $n \geqslant 2$. On suppose $P(n-1)$. Montrons $P(n)$.
  Soit donc $m \geqslant n$. Si $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!]$, alors (lemme) $[\![1, n-1]\!] \simeq [\![1, m-1]\!]$
  Par hypothèse de récurrence $n - 1 = m - 1$, i.e. $n = m$ CQFD

Au total, dans tous les cas $P(n)$ est démontrée.

Si $\operatorname{card} E = n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in E$, alors $E \backslash \{a\}$ est fini et $\operatorname{card}(E \backslash \{a\}) = n - 1$

- Si $\operatorname{card} E = 1$, alors $E \backslash \{a\} = \varnothing$ et le résultat est acquis.
- Si $\operatorname{card} E > 1$,alors $E \simeq [\![1, n]\!]$, donc (lemme) $E \backslash \{a\} \simeq [\![1, n-1]\!]$: d'où $\operatorname{card} E \backslash \{a\} = n - 1$ CQFD.

Si E est fini de cardinal $n \geqslant 1$ et A un sous ensemble de E.
Alors A est fini, $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$ et $\operatorname{card} A = \operatorname{card} E \Longleftrightarrow A = E$

Par récurrence sur $n = \operatorname{card} E$:

- Pour $n = 1$, c'est banal, puisque les sous ensembles de E sont E et $\varnothing$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour les ensembles de cardinal $n-1$, et prouvons le pour un ensemble E de cardinal n : soit A un sous ensemble de E.
  - Si $A = E$, c'est réglé.
  - Si $A \neq E$, alors il existe un élément a dans $A \backslash F$. Mais alors A est un sous ensemble de $E \backslash \{a\}$.
    Par hypothèse de récurrence, A est fini et $\operatorname{card} A \leqslant n - 1$, donc $\operatorname{card} A < n$ CQFD

  Dans tous les cas le résultat est acquis.

Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si $f : E \to F$ est injective, alors $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$. Il y a égalité si et seulement si f est bijective.

2. Si $f : E \to F$ est surjective, alors $\operatorname{card} E \geqslant \operatorname{card} F$. Il y a égalité si et seulement si f est bijective.

---

1. Si $f : E \to F$ est injective, alors f induit une bijection $\tilde{f} : E \to f\langle E\rangle$. Donc $\operatorname{card} E = \operatorname{card} f\langle E\rangle \leqslant \operatorname{card} F$
De plus il y a égalité si et seulement si $f\langle E\rangle = F$, *i.e.* f surjective.

2. Si $f : E \to F$ est surjective. Posons $F = \{y_1, \ldots, y_n\}$ et choisissons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ un antécédent x_i de y_i par f (les x_i sont évidemment tous distincts).
Posons $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$: alors f induit une bijection $\tilde{f} : A \to F$. Donc $\operatorname{card} F = \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$
De plus il y a égalité si et seulement si $A = E$, autrement dit lorsque $f = \tilde{f}$ est bijective.

Si $A \cap B = \varnothing$ alors $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$

Soient p et q les cardinaux de A et B. On considère deux énumérations

$$\varphi : [\![1, p]\!] \to A \quad \text{et} \quad \psi : [\![1, q]\!] \to B$$

Posons

$$f : \begin{array}{l} [\![1, p+q]\!] \to A \cup B \\ k \mapsto \begin{cases} \varphi(k) \text{ si } k \in [\![1, p]\!] \\ \psi(k-p) \text{ si } k \in [\![p+1, p+q]\!] \end{cases} \end{array}$$

Alors f est bijective de réciproque

$$g : \begin{array}{l} A \cup B \to [\![1, p+q]\!] \\ x \mapsto \begin{cases} \varphi^{-1}(x) \text{ si } x \in A \\ \psi^{-1}(x) + p \text{ si } x \in B \end{cases} \end{array} \quad (x \text{ est soit dans } A \text{ soit dans } B)$$

En effet, soit $k \in [\![1, p+q]\!]$,

- Si $k \in [\![1, p]\!]$, alors $f(k) \in A$ donc $g(f(k)) = \varphi^{-1}(\varphi(k)) = k$
- Si $k \in [\![p+1, p+q]\!]$, alors $f(k) \in B$ donc $g(f(k)) = \psi^{-1}(\psi(k)) = k$

Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{[\![1,p+q]\!]}$. De même, si $x \in A \cup B$

- Si $x \in A$, alors $g(x) = \varphi^{-1}(x) \in [\![1, p]\!]$ donc $f(g(x)) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = x$
- Si $x \in B$, alors $g(x) = \psi^{-1}(x) \in [\![p+1, p+q]\!]$ donc $f(g(x)) = \psi\left(\psi^{-1}(x)\right) = x$

Donc $f \circ g = \mathrm{id}_{A \cup B}$.
Cette relation d'équipotence entre $A \cup B$ et $[\![1, p+q]\!]$ permet donc de conclure : $\operatorname{card}(A \cup B) = p + q$ CQFD

Soient E et F des ensembles finis, . Alors $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$

Soient $n = \operatorname{card}(E)$ et $p = \operatorname{card}(F)$. On énumère E : $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, posons

$$A_i = \{(x_i, y)\,,\ y \in F\}$$

Il est facile de voir que $(A_1, \ldots, A_n)$ forme une partition de $E \times F$.
De plus $\forall i,\ F \simeq A_i$ par $y \mapsto \varphi(y) = (x_i, y)$. Donc $\#A_i = p$ et le principe des bergers s'applique :

$$\operatorname{card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card} A_i = np \quad \text{CQFD.}$$

Si $\text{card}(E) = n$, et $p \in \mathbb{N}^*$, alors le nombre de p-uplets de E est n^p, soit $\text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p$

Par récurrence sur p :

- $p = 1$: $\text{card}\, E^1 = \text{card}(E) = n$
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons $\text{card}(E^p) = n^p$ et prouvons $\text{card}\left(E^{p+1}\right) = n^{p+1}$
  L'application $\varphi : E^{p+1} \to E^p \times E$ définie par $\varphi(x_1, \ldots, x_{p+1}) = ((x_1, \ldots, x_p), x_p)$ est assez clairement bijective, ce qui démontrer que
  $$\text{card}\left(E^{p+1}\right) = \text{card}(E^p \times E) = n^p \times n = n^{p+1}$$

Remarque : version naïve : pour construire un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$:
On choisit x_1 : n choix possibles, puis x_2 : n choix possibles... puis x_p : n choix possibles.
Par principe de produit, il y a $n \times \ldots \times n = n^p$ possibilités pour $(x_1, \ldots, x_p)$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \leqslant n$. Alors $\text{card}\,\mathcal{A}_p(E) = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Version naïve : pour construire un p-arrangement de E, i.e. p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments distincts :
On choisit x_1 : n choix possibles, puis x_2 : $n-1$ choix possibles... puis x_p : $n-p+1$ choix possibles.
Par principe de produit, il y a $n \times (n-1) \ldots \times (n-p+1)$ possibilités pour $(x_1, \ldots, x_p)$.

Version par récurrence sur p

- On a clairement $A_n^1 = n$ (et même $A_n^0 = 1$ par convention)
- Supposons $A_n^{p-1} = \dfrac{n!}{(n-p-1)!}$ pour un $p \in [[2, n]]$.
  L'application $\pi : \mathcal{A}_p(E) \to \mathcal{A}_{p-1}(E)$ qui à un p-arrangement $a = (x_1, \ldots, x_p)$ associe $\pi(a) = (x_1, \ldots, x_{p-1})$ est clairement surjective, et $\pi^{-1}\langle\{(x_1, \ldots, x_{p-1})\}\rangle$ est l'ensemble des arrangements de la forme $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x)$, où x est dans $E \backslash \{x_1, \ldots, x_{p-1}\}$. Donc $\text{card}\,\pi^{-1}\langle\{(x_1, \ldots, x_{p-1})\}\rangle = n-p+1$ et
  $$\text{card}\,\mathcal{A}_p(E) = \sum_{c' \in \mathcal{A}_{p-1}(E)} \pi^{-1}\langle\{c'\}\rangle = (n-p+1)\,\text{card}\,\mathcal{A}_{p-1}(E)$$
  Par hypothèse de récurrence, on a donc $\text{card}\,\mathcal{A}_p(E) = (n-p+1)\dfrac{n!}{(n-p+1)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ CQFD.

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \leqslant n$. Alors $\text{card}\,\mathcal{P}_p(E) = C_n^p = \dbinom{n}{p}$

Soit $f : \mathcal{A}_p(E) \to \mathcal{P}_p(E)$ l'application définie, pour $f(x_1, \ldots, x_p) = \{x_1, \ldots, x_p\}$.
Si $c = \{x_1, \ldots, x_p\}$, alors les antécédents de c par f sont tous les p-arrangements d'éléments de c, i.e. les permutations de c Ainsi
$$\text{card}\, f^{-1}\langle\{c\}\rangle = p!$$
On écrit alors
$$\text{card}\,\mathcal{A}_p(E) = \sum_{c \in \mathcal{P}_p(E)} f^{-1}\langle\{c\}\rangle = p!\,\text{card}\,\mathcal{C}_p(E)$$
Ainsi
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p} \text{ CQFD.}$$
Version naïve : pour construire un p-arrangement de E, i.e. p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments distincts :
On choisit l'ensemble des éléments distincts $\{x_1, \ldots, x_p\}$: il y a $\binom{n}{p}$ choix (p-combinaison de E)
On l'ordonne : $p!$ choix (permutation de $\{x_1, \ldots, x_p\}$)
Par principe de produit : $A_n^p = p!\binom{n}{p}$ CQFD.

Nombre d'applications : si $\#E = p$ et $\#F = n$, alors $\#\mathcal{F}(E, F) = n^p$

On note $E = \{x_1, \dots, x_p\}$, et on considère $\varphi : \mathcal{F}(E, F) \to F^p$ définie par $\varphi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.
Alors φ est une bijection :

- Injectivité : soient f et g dans $\mathcal{F}(E, F)$. Si $\varphi(f) = \varphi(g)$ alors $\begin{cases} f(x_1) = g(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) = g(x_n) \end{cases}$.
  f et g coïncident sur E donc sont égales CQFD.
- Surjectivité : si $Y = (y_1, \dots, y_n) \in F$, on peut définir $f : E \to F$ par $\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ f(x_n) = y_n \end{cases}$
  f vérifie donc $\varphi(f) = Y$, et est donc bien antécédent de Y par φ CQFD.
  En d'autres termes, la donnée de f équivaut à la donnée de la liste des images des éléments de E.
  On en déduit que $\operatorname{card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{card}(F^p) = n^p$

Si $\mathcal{I}(E, F)$ est l'ensemble des injections de E dans F, $\#E = p$ et $\#F = n$, alors $\#\mathcal{I}(E, F) = A_n^p$

On note $E = \{x_1, \dots, x_p\}$ et soit $\varphi : \mathcal{I}(E, F) \to F^p$ définie par $f \to \varphi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.
On a vu que φ est injective, donc elle induit une bijection de $\mathcal{I}(E, F)$ sur son image notée $H \subset E$.
Or pour f injective, $\varphi(f)$ est une liste d'éléments distincts de F, et inversement (à toute liste d'éléments distincts $(y_1, \dots, y_n)$ de F on peut associer l'unique injection $f : E \to F$ définie comme plus haut).
Ainsi H est l'ensemble des p-arrangements de E, et on dispose de la bijection $\widetilde{\varphi} : \mathcal{I}(E, F) \to H$. Donc

$$\operatorname{card} \mathcal{I}(E, F) = \operatorname{card} H = A_n^p$$

Formule de Pascal : $1 \leqslant p \leqslant n$: $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

On cherche le cardinal de $\mathcal{P}_p([\![1, n]\!])$ que l'on partitionne en

- L'ensemble A des p-combinaisons de $[\![1, n]\!]$ qui ne contiennent pas n : c'est $A = \mathcal{P}_p([\![1, n-1]\!])$
- L'ensemble B des p-combinaisons de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent n :
  Une fois fixé n, il faut choisir une $(p-1)$-combinaison de $[\![1, n-1]\!]$. d'où $B \simeq \mathcal{P}_{p-1}([\![1, n-1]\!])$
  Alors $\operatorname{card} \mathcal{P}_p([\![1, n]\!]) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$, i.e. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

La formule de Vandermonde : on suppose $n \in [\![0, p+q]\!]$. Alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$

Soit E un ensemble de cardinal $p+q$, et A un sous-ensemble de E de cardinal p (d'où $\#\overline{A} = q$)
Dénombrons $\mathcal{P}_n(E)$ par partition : si $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $A_k = \{\Gamma \in \mathcal{P}_n(E) \ / \ \#(A \cap \Gamma) = k\}$.
Il est clair que l'on a $\#\mathcal{C}_n(E) = \binom{p+q}{n} \neq \sum_{k=0}^{n} \#A_k$. Or pour choisir un élément de A_k il faut choisir indépendamment une k-combinaison de A et une $(n-k)$-combinaison de $\overline{A}$. Il s'ensuit que $\#A_k = \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$, et le résultat cherché en découle.