Ex 1 Soit $x > 0$. Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{(x+k)^2} < \dfrac{1}{x+k-1} - \dfrac{1}{x+k}$:

On met au même dénominateur le membre de droite : pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{x+k} = \frac{1}{(x+k-1)(x+k)}$$

Or $\boxed{0 <} x+k-1 < x+k$, donc $0 < (x+k-1)(x+k) < (x+k)^2$. Il vient donc simplement par inversion :

$$\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{x+k} > \frac{1}{(x+k)^2} \quad \text{CQFD.}$$

On a remarqué que le membre de droite était télescopique... Il suffit donc de sommer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{x+k} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$$

Comme $x+n > 0$, il en résulte la majoration

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} < \frac{1}{x}}$$

Ex 2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et deux réels a et b vérifient $0 < a < b$. Partons de l'égalité

$$b^n - a^n = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Mais puisque $0 < a < b$, on peut écrire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$a^{n-1} = a^k a^{n-1-k} < a^k b^{n-1-k} < b^k b^{n-1-k} = b^{n-1}$$

Par sommation

$$n a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} < \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} < \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} = n b^{n-1}$$

Il reste à multiplier par $b-a > 0$:

$$\boxed{n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}} \quad \text{CQFD.}$$

Ex 3 a) On a plusieurs fois montré que $\forall x > 0, \ \ln x \leqslant x - 1 \ (*)$ (étude de $f : x \mapsto \ln x - x + 1$).

Soit $k \geqslant 2$. Appliquée à $x = \dfrac{k+1}{k} > 0$, $(*)$ donne

$$\ln \frac{k+1}{k} \leqslant \frac{k+1}{k} - 1 = \frac{1}{k} \quad \text{soit} \quad \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

Appliquée et à $x = \dfrac{k-1}{k} > 0$, $(*)$ donne cette fois

$$\ln \frac{k-1}{k} \leqslant \frac{k-1}{k} - 1 = -\frac{1}{k} \quad \text{soit} \quad \ln(k-1) - \ln k \leqslant -\frac{1}{k}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \ \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)}$$

Remarque : cet exercice est archi classique...

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Alors on a $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ par translation d'indice.

On somme l'encadrement précédent de $n+1$ à $2n$ (puisque $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $k \geqslant 2$) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k+1) - \ln k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln(k-1))$$

Après télescomage des termes extrêmes :

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln(2n) - \ln(n)$$

Soit

$$\boxed{\ln \frac{2n+1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln 2}$$

Comme $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2+1/n}{1+1/n}$, .$il$ vient vite grâce au théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim u_n = \ln 2}$$

Ex 4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1}$. Montrons que $\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la majoration, on ramène à une somme connue par l'inégalité $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{k^2}{k+1} \leqslant \frac{k^2}{k} = k$.
Pour la minoration, c'est plus subtil : on conserve k^2 mais on majore $k+1$ par $n+1$:

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!]}, \ \frac{k^2}{n+1} \leqslant \frac{k^2}{k+1} \leqslant k$$

Par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k$$

On connait ces sommes :

$$\frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k+1} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

En divisant par n^2 et en simplifiant :

$$\frac{2n+1}{6n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$$

Or

$$\frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{n+n}{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2n+1}{6n} \geqslant \frac{2n}{6n} = \frac{1}{3}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1}$$

Ex 5 a) Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \ \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Par sommation (puisqu'il y a n termes) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant 1}$$

Mais $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ k^2 + 1 \geqslant k^2$, donc

$$\frac{k}{k^2+1} \leqslant \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

Par sommation encore,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Et d'après la majoration précédente :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \leqslant 1}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}$.

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, c'est à dire que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée :

D'après l'inégalité triangulaire généralisée,

$$|u_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \sin k}{k^2+1}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \left|\frac{k \sin k}{k^2+1}\right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|k|\,|\sin k|}{|k^2+1|} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k\,|\sin k|}{k^2+1}$$

En majorant chaque $|\sin k|$ par 1, il vient

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+1} \leqslant 1 \quad \text{d'après la question a)}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc <u>bornée</u> CQFD.

Ex 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$Montrons l'encadrement $n \overset{(1)}{\leqslant} k(n+1-k) \overset{(2)}{\leqslant} \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$

(1) La différence $k(n+1-k) - n$ s'écrit

$$k(n+1-k) - n = k(n-k) + (k-n) = (n-k)(k-1)$$

Or $k \in [\![1, n]\!] \Rightarrow \begin{cases} n-k \geqslant 0 \\ k-1 \geqslant 0 \end{cases}$. D'où $k(n+1-k) - n \geqslant 0$ $\dfrac{\text{CQFD}}{2}$

(2) De la même manière :

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - k(n+1-k) = \frac{(n+1)^2}{4} - k(n+1) + k^2 = \frac{(n+1)^2 - 4k(n+1) + 4k^2}{4}$$

On reconnait une identité remarquable :

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - k(n+1-k) = \left(\frac{n+1-2k}{2}\right)^2 \geqslant 0 \quad \text{CQFD.}$$

b) Les trois membres étant positifs, on peut les multiplier pour k variant de 1 à n :

$$\prod_{k=1}^{n} n \leqslant \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Soit

$$n^n \leqslant \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} (n+1-k) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

Mais en inversant le compteur : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+1-k) = \prod_{j=1}^{n} j = \prod_{k=1}^{n} k = n!$. Il en résulte

$$n^n \leqslant (n!)^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

Comme les trois membres sont positifs on peut prendre la racine carrée :

$$\boxed{n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n}$$

Ex 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrons que $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

On peut étudier les fonctions $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $g : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$, ou raisonner par intégration : partons de

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$$

En effet l'égalité de droite est banale, celle de gauche est vraie car $1 - t = \dfrac{1-t^2}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$.

Si $x \geqslant 0$, on peut intégrer cet encadrement entre 0 et x :

$$\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t$$

qui donne immédiatement

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

b) On applique cet encadrement à $x = \dfrac{k}{n^2} > 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

Par sommation

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

soit

$$\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leqslant \ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

ou encore

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{n+1}{2n}$$

Or $n \geqslant 1$, donc

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{n+n}{2n} = 1$$

et de manière assez évidente $u_n \geqslant 1$ (produit de réels supérieurs à 1).

On peut donc écrire l'encadrement suivant :

$$\boxed{1 \leqslant u_n \leqslant e}$$

Mais l'esprit de cette étude serait plutôt l'encadrement en vue d'un calcul de limite. Donc en s'en tenant à

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

ou éventuellement en minorant

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \geqslant \frac{n \times (2n)}{12n^3} = \frac{1}{6n}$$

il vient

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sqrt{e}.e^{\frac{1}{3n}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{e}.e^{\frac{1}{2n}}$$

Le théorème des gendarmes assure alors la convergence de u_n et

$$\boxed{\lim u_n = \sqrt{e}}$$

Ex 8 Soient $n \geqslant 2$, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n réels strictement positifs. On définit

$$M = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad ; \quad m = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad ; \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

a) L'étude de $\varphi : x \mapsto \ln x - (x-1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi' : x \mapsto \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ donne le tableau

x	0 $\qquad$ 1
$\varphi'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$ $\quad 0 \quad$ $\searrow$

qui assure que $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x - 1$, où l'égalité est réalisée pour la seule valeur 1.

b) On a donc$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\ln \frac{a_k}{M} \leqslant \frac{a_k}{M} - 1 \quad (*)$, qui donne par sommation sur k

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{a_k}{M} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{M} - n$$

Avec, d'un côté

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{a_k}{M} = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{M} = \ln \frac{1}{M^n} \prod_{k=1}^{n} a_k$$

et de l'autre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{M} - n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} a_k - n = \frac{nM}{M} - n = 0$$

L'inégalité s'écrit donc

$$\ln \frac{1}{M^n} \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant 0, \quad i.e. \quad \frac{1}{M^n} \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1, \quad \text{ou} \quad \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant M^n$$

Par passage à la racine n-ième (les membres sont positifs), on obtient ainsi

$$\boxed{m \leqslant M}$$

et il y a égalité lorsque toutes les inégalités $(*)$ sont des égalités, c'est-à-dire (question a)), lorsque

$$\frac{a_1}{M} = \frac{a_2}{M} = \cdots = \frac{a_n}{M} = 1$$

autrement dit lorsque $\boxed{a_1 = a_2 = \cdots = a_n}$ $\quad$ (M vaut alors a_1).

c) Le résultat précédent signifie donc que la moyenne géométrique de n nombres strictement positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique. Appliqué à $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, cela donne

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

qui s'écrit $\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{H}$, en remarquant que $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = \frac{1}{m}$..D'où (termes positifs)

$$\boxed{H \leqslant m}$$

Ex 9 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \quad \text{d'où} \quad u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \geqslant 2$$

Par sommation, pour tout $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n$$

Après télescopage

$$u_n^2 - u_0^2 \geqslant 2n \quad i.e. \quad u_n^2 \geqslant 2n + 25$$

Or une récurrence très simple montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ (vrai pour u_0, transmis de u_n à $u_n + \frac{1}{u_n} = u_{n+1}$)

On peut finalement conclure, en remarquant que l'inégalité reste vraie pour $n=0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2n+25}}$$

b) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N},\ \sqrt{2k+25}-\sqrt{2\left(k-1\right)+25} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2k+25}}$:
La multiplication par la "quantité conjuguée" donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sqrt{2k+25}-\sqrt{2\left(k-1\right)+25} = \frac{2}{\sqrt{2k+25}+\sqrt{2\left(k-1\right)+25}}$$

Comme $\sqrt{2\left(k-1\right)+25} \leqslant \sqrt{2k+25}$, il vient

$$\sqrt{2k+25}-\sqrt{2\left(k-1\right)+25} \geqslant \frac{2}{2\sqrt{2k+25}} = \frac{1}{\sqrt{2k+25}} \quad \text{CQFD.}$$

c) D'après la question 1. et la question 2., on a pour tout entier k

$$u_{k+1}-u_k = \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k+25}} \leqslant \sqrt{2k+25}-\sqrt{2\left(k-1\right)+25}$$

Par sommation encore de 0 à $n-1$, et après télescopage des deux membres, on obtient pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}-u_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{2k+25}-\sqrt{2\left(k-1\right)+25}\right)$$

i.e.

$$u_n-u_0 \leqslant \sqrt{2\left(n-1\right)+25}-\sqrt{-2+25}$$

Soit ($u_0=5$)

$$\boxed{u_n \leqslant 5-\sqrt{23}+\sqrt{2n+23}}$$

d) On a ainsi établi pour tout entier n

$$\boxed{\sqrt{2n+25} \leqslant u_n \leqslant 5-\sqrt{23}+\sqrt{2n+23}}$$

Pour $n=1000$, cela donne

$$\sqrt{2025} \leqslant u_{1000} \leqslant 5-\sqrt{23}+\sqrt{2023}$$

soit, en calculant le membre de droite à 10^{-2} près par excès,

$$\boxed{45 \leqslant u_{1000} \leqslant 45,2}$$

Par ailleurs, on a aussi en divisant notre encadrement par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{2+\frac{25}{n}} \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{5-\sqrt{23}}{\sqrt{n}}+\sqrt{2+\frac{23}{n}}$$

Le théorème des gendarmes donne ainsi tout de suite

$$\boxed{\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}}$$

Remarque : on écrit alors $\boxed{u_n \sim \sqrt{2n}}$.