La méthode du pivot

ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS

Toute matrice $n \times p$ est équivalente en lignes à une matrice échelonnée par lignes

---

<u>*Algorithme*</u> : on pose $i = 1$ # indice de ligne initial.

On fait une **boucle pour** j **variant de** 1 **à** p **tant que** $i < n$. # j est l'indice de la colonne du pivot

- <u>Etape j</u> : le pivot est l'élément (i, j) . Notons le π.
  - Si $\pi = 0$, on recherche un élément non nul (m, j) , $m > i$ dans la colonne j.
    - Si on n'en trouve pas, **on passe à l'étape** $j + 1$ **sans incrémenter** i.
    - Si on en trouve un, l'échange $L_i \leftrightarrow L_m$ ramène au cas $\pi \neq 0$.
  - Si $\pi \neq 0$, on opère $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{a_{kj}}{\pi} L_i$ pour k variant de $i + 1$ à n $\#$ on annule sous la colonne

    On passe alors à l'étape $j + 1$ **en incrémentant** i **d'une unité**.

ALGORITHME DE GAUSS-JORDAN

Toute matrice $n \times p$ est équivalente en lignes à une (unique) matrice échelonnée réduite par lignes

---

<u>*Algorithme*</u> : on pose $i = 1$ # indice de ligne initial.

On fait une **boucle pour** j **variant de** 1 **à** p **tant que** $i \leqslant n$. # j est l'indice de la colonne du pivot

- <u>Etape j</u> : le pivot est l'élément (i, j) . Notons le π.
  - Si $\pi = 0$, on recherche un élément non nul (m, j) , $m > i$ dans la colonne j.
    - Si on n'en trouve pas, **on passe à l'étape** $j + 1$ **sans incrémenter** i
    - Si on en trouve un, l'échange $L_i \leftrightarrow L_m$ ramène au cas $\pi \neq 0$.
  - Si $\pi \neq 0$:
    - On divise la ligne i par π $\left(L_i \leftarrow \dfrac{L_i}{\pi} \right)$
    - On opère $L_k \leftarrow L_k - a_{kj} L_i$ pour k variant de 1 à n sauf i $\#$ on annule la colonne sauf π

    On passe alors à l'étape $j + 1$ **en incrémentant** i **d'une unité**.

Remarque : on a toujours $i \leqslant j$ puisque on incrémente ou pas i lorsque on incrémente j

EXEMPLE 1

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{lllll} x & -2y & +2z & +t & =7\\ 2x & -4y & +3z & +4t & =3\\ 3x & -3y & +4z & +7t & =-7\\ -x & +5y & & -4t & =5\end{array}\right.$$

1. On élimine x à l'aide du pivot 1 (coefficient de x dans la première équation) :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{llllll} x & -2y & +2z & +t & =7 & \\ & & -z & +2t & =-11 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ & 3y & -2z & +4t & =-28 & L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ & 3y & +2z & -3t & =12 & L_4\leftarrow L_4+L_1\end{array}\right.$$

Le nouveau "pivot" (coefficient de y dans la deuxième équation) étant nul on échange les lignes :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{llllll} x & -2y & +2z & +t & =7 & \\ & 3y & -2z & +4t & =-28 & L_2\leftrightarrow L_3\\ & & -z & +2t & =-11 & \\ & 3y & +2z & -3t & =12 & \end{array}\right.$$

On élimine alors y dans les lignes 3 et 4 :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{llllll} x & -2y & +2z & +t & =7 & \\ & 3y & -2z & +4t & =-28 & \\ & & -z & +2t & =-11 & \\ & & 4z & -7t & =40 & L_4\leftarrow L_4-L_2\end{array}\right.$$

Le nouveau pivot (coefficient de z de la troisième ligne) est non nul. On élimine z dans la dernière ligne :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{llllll} x & -2y & +2z & +t & =3 & \\ & 3y & -2z & +4t & =-28 & \\ & & -z & +2t & =-11 & \\ & & & t & =-4 & L_4\leftarrow L_4+4L_3\end{array}\right.$$

Le système est échemonné, il ne reste qu'à "remonter" :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-2\\ z=3\\ t=-4\end{array}\right.}$$

2. <u>Version matricielle</u> : on travaille sur la matrice augmentée

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 7\\ 2 & -4 & 3 & 4 & 3\\ 3 & -3 & 4 & 7 & -7\\ -1 & 5 & 0 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

par transformations successives :

$$B\ \sim\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & -2 & 2 & 1 & 7\\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 2 & -11\\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 4 & -28\\ \mathbf{0} & 3 & 2 & -3 & 12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 1 & 7\\ \hline 0 & 3 & -2 & 4 & -28\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -11\\ 0 & 3 & 2 & -3 & 12\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 1 & 7\\ \hline 0 & \boxed{\mathbf{3}} & -2 & 4 & -28\\ 0 & \mathbf{0} & -1 & 2 & -11\\ 0 & \mathbf{0} & 4 & -7 & 40\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 1 & 7\\ 0 & \mathbf{3} & -2 & 4 & -28\\ \hline 0 & 0 & \boxed{\mathbf{-1}} & 2 & -11\\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & -4\end{array}\right)$$

On termine comme plus haut.

3. Méthode du pivot de Gauss-Jordan (ou "pivot total") : même début

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & -2 & 2 & 1 & 7 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 2 & -11 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 4 & -28 \\ \mathbf{0} & 3 & 2 & -3 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & -2 & 2 & 1 & 7 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 4 & -28 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 2 & -11 \\ \mathbf{0} & 3 & 2 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

On rend le deuxième pivot égal à 1 ($L_2 \leftarrow L_2/3$) puis on élimine toute la deuxième colonne :

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & 2/3 & 11/3 & -35/3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2/3 & 4/3 & -28/3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & 2 & -11 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & -7 & 40 \end{array}\right) \qquad \left(\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.\right)$$

On rend le troisième pivot égal à 1 ($L_3 \leftarrow -L_3$) puis on élimine toute la troisième colonne :

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & -19 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 & 11 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - (2/3)\, L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (2/3)\, L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \end{array}\right.\right)$$

Le dernier pivot, vaut 1, et servira à éliminer la quatrième colonne :

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array}\right.\right)$$

Le système est résolu.

EXEMPLE 2

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x - y - z + t + 2u &=& 1 \\ 2x - 2y - z + 3t + 3u &=& -2 \\ -x + y + 3z + t - u &=& 3 \\ -x + y \quad\quad - 2t - u &=& 3 \end{array}\right.$$

1. On pose

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

On annule la première colonne avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$:

$$B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ \mathbf{0} & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

La colonne 2 est nulle à partir de la deuxième ligne, le pivot passe donc à la place $(2,3)$:

$$B \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{3} & 12 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\left\{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.\right)$$

La matrice est échelonnée, et le système (S) équivaut donc à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y - z + t + 2u &=& 1 \\ z + t - u &=& -4 \\ 3u &=& 12 \end{array}\right.$$

On "passe y et t en paramètres", ne gardant que x, z et u pour inconnues principales (correspondant aux pivots) :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & -7 + y - 2t \\ z = & \quad\quad\quad -t \\ u = & 4 \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc de la forme

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & -7 + y - t \\ y = & y \\ z = & -t \\ t = & t \\ u = & 4 \end{array}\right. \quad i.e.\quad X = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solution du système homogène}}, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^2$$

2. <u>Réduite de Gauss Jordan</u> : même début

$$B \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ \mathbf{0} & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & \mathbf{0} & 2 & 1 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{3} & 12 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

On rend le dernier pivot égal à 1 par $L_3 \leftarrow L_3/3$:

$$B \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & \mathbf{0} & 2 & 1 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} & -7 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.\right)$$

Cette dernière matrice est échelonnée réduite par ligne, et le système, compatible (cf. dernière ligne), équivaut bien à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2t &=& -7 \\ z + t &=& 0 \\ u &=& 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & -7 + y - 2t \\ z = & \quad\quad\quad -t \\ u = & 4 \end{array}\right.$$