Ex 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_n(X) = (1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\cdots\left(1+X^{2^n}\right)$.

Ex 2 Effectuer les divisions euclidiennes de

a) $A = X^6 + 4X^5 + X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $B = X^2 + 2X - 1$

b) $A = 4X^3 + X^2$ par $B = X + 1 + i$

Ex 3 Effectuer la division euclidienne de $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$ par $B = X^2 + 3X$.
En déduire la factorisation de P sur $\mathbb{R}$.

Ex 4 Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in [\![0, p+q]\!]$. A l'aide du coefficient de degré n du polynôme $(X+1)^p (X+1)^q$, montrer la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$

Ex 5 Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = \left(1+X^2\right)P_k' - (2k+1)XP_k$.
Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 6 On considère n un entier supérieur à 1, $x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts, et $P,\ Q$ deux polynômes réels unitaires de degré n vérifiant $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(x_k) = Q(x_k)$. Montrer que $P = Q$.

Ex 7 Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts, et $F : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ F(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n))$$

Montrer que F est injective.

Ex 8 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Démontrer que l'application polynomiale associée $\tilde{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.
Pour $P = X^n\ \ (n \geqslant 2)$, $\tilde{P}$ est-elle injective ?

Ex 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^5 + 1$ divise $P = \left(X^4 - 1\right)\left(X^3 - X^2 + X - 1\right)^n + (X+1)X^{4n-1}$.

Ex 10 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Montrer que $B = X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $P_n = X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$.

Ex 11 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division de $A = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par $B = X^2 + 1$.

Ex 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \dfrac{X^3}{3!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'admet pas de racines multiples.

Ex 13 Trouver l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(X^2 + X + 1\right)^2$ divise $(X+1)^n - X^n - 1$.

Ex 14 Factoriser $X^6 + 1$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$. Trouver la décomposition sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'un raisonnement direct.

Ex 15 Résoudre l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ en posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$, et en déduire $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

Ex 16 Décomposer sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$ et $Q = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Ex 17 Soit $P = X^{10} - X^9 - X^8 + 2X^6 - 2X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 1$.
Montrer que $e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}$ sont racines au moins doubles de P, et en déduire la décomposition de P sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Ex 18 a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme admettant $a \in \mathbb{K}$ pour racine au moins double.
Montrer que le reste de la division euclidienne de P par P' admet a pour racine.

b) Application : décomposer $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ sur $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'il admet une racine au moins double.

Ex 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^n + 1$.
On distinguera n pair et n impair, et on remarquera que -1 est racine de P pour n impair.

Ex 20 On donne $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X+1)^n - e^{2ni\theta}$.

a) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

b) A l'aide de $P(0)$, calculer $A(\theta) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$ puis $B = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.

Ex 21 Trouver tous les polynômes complexes vérifiant $(X+1)P(X)=(X-2)P(X+1)$.

Ex 22 Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $\left(X^2+1\right)P''-6P=0$.

On commencera par déterminer le degré d'un polynôme répondant à cette condition.

Ex 23 Déterminer $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré 7 tel que $\begin{cases}(X+1)^4 \text{ divise } P-1\\(X-1)^4 \text{ divise } P+1\end{cases}$ (factoriser P').

Ex 24 Soit P un polynôme de degré n vérifiant : $\forall k\in[\![1,n+1]\!]$, $P(k)=\dfrac{1}{k}$.
On considère $Q=XP-1$. Factoriser Q, et en déduire la valeur de $P(n+2)$.

Ex 25 Trouver les polynômes unitaires P de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée P'.

On raisonnera par analyse et synthèse, en étudiant l'ordre de multiplicité d'une racine d'un tel polynôme.

Ex 26 Soit $n\geqslant 2$. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Trouver un polynôme $P\in\mathbb{Z}_{n-1}[X]$ dont les racines sont

$$\frac{1}{\omega_1-1},\ldots,\frac{1}{\omega_{n-1}-1}.$$

En déduire les valeurs de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k-1}$.

Ex 27 Résoudre le système

$$\begin{cases}x+y+z=2\\ xyz=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Ex 28 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P=X^{2n+1}-(X-2)^{2n+1}$. On note pour tout $k\in N$, $a_k=\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}$.

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P

b) Trouver les racines de P et vérifier qu'elles ont toutes une partie réelle égale à 1.

c) Justifier que $P=2(2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-2X+\frac{1}{a_k^2}\right)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}$

Ex 29 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et $P(X)=nX^n-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}X^k$.

a) Montrer que 1 est racine de P.

b) Soit $z\in\mathbb{C}$: montrer que si $|z|>1$, alors $\left|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1\right|<n|z|^n$.

c) Soit $z\in\mathbb{C}$: montrer que si $|z|=1$ et $z\neq 1$, alors $|1+z|<2$ et en déduire $\left|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1\right|<n$.

d) En déduire que les racines de P autres que 1 sont de module strictement inférieur à 1.

e) Soit $Q=(X-1)P$. Montrer que $Q=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$

f) Montrer que toutes les racines de Q autres que 1 sont simples, et en déduire que les racines de P sont simples.