EXERCICE 1

1. On se propose l'étude des trois propositions suivantes : $(A_1) : \exists a_0 > 0 \,/\, \forall x > 0,\ (a \geqslant a_0 \Longrightarrow \ln x \leqslant x^a)$
$(A_2) : \forall a > 0,\ \exists x_0 > 0 \,/\, (x \geqslant x_0 \Longrightarrow \ln x \leqslant x^a)$
$(A_3) : \exists x_1 > 0 \,/\, \forall a > 0,\ (x \geqslant x_1 \Longrightarrow \ln x \leqslant x^a)$

a) Variations de $f_a : x \mapsto x^a - \ln x$:

$$\forall x > 0, \quad f_a'(x) = ax^{a-1} - \frac{1}{x} = \frac{ax^a - 1}{x}$$

$f_a'(x)$ a donc le signe de $ax^a - 1$. Or $a > 0$, donc $x \mapsto ax^a - 1$ est strictement croissante, et s'annule en

$$x_a = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/a}$$

* Valeur de f_a en x_a : $f_a\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{1}{a} = \frac{1+\ln a}{a}$
* Limite en 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{0^+} f_a = +\infty$.
* Limite en $+\infty$: puisque $a > 0$, on a $\ln x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^a$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
* Tableau :

x	0		$\left(\frac{1}{a}\right)^{1/a}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln a}{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dès lors que $\dfrac{1+\ln a}{a} > 0$, on aura, puisque le minimum de f_a est positif,

$$\forall x > 0,\ f_a(x) > 0, \quad i.e. \quad \ln x \leqslant x^a$$

Or

$$\frac{1+\ln a}{a} > 0 \Longleftrightarrow 1 + \ln a > 0 \Longleftrightarrow \ln a > -1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{e}.$$

(A_1) est donc vraie, car en prenant par exemple $a_0 = \dfrac{1}{e}$, on a bien $\forall x > 0,\ a > a_0 \Rightarrow \ln x \leqslant x^a$.

b) Soit $a > 0$ fixé. On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. donc "pour x au voisinage de $+\infty$", $f_a(x) > 0$, ce qui s'exprime par :

$$\exists x_0 > 0 \,/\, (x \geqslant x_0 \Rightarrow f_a(x) \geqslant 0)$$

(A_2) est donc vraie.

c) Soit $x > e$ fixé : on a $\lim\limits_{a\to 0^+} x^a = 1$ (car $x^a = e^{a\ln x}$), d'où

$$\lim_{a\to 0^+} f_a(x) = 1 - \ln x < 0$$

La proposition (A_3) signifie qu'il existe un réel $x_1 > 0$ à partir duquel toutes les fonctions f_a sont positives.
Si cela était vrai, on aurait donc $\forall a > 0,\ \forall x > x_1,\ f_a(x) > 0$.
Fixons alors $x > \max(x_1, e)$: on a $\forall a > 0,\ f_a(x) > 0$, et en passant à la limite dans cette inégalité :

$$\lim_{a\to 0+} f_a(x) \geqslant 0$$

ce qui est contradictoire avec la limite trouvée plus haut. (A_3) est donc fausse.

EXERCICE 2

1. Primitives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x + \tan x}$. On pose

$$\begin{cases} t = \tan \dfrac{x}{2} \\ x = 2 \arctan t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{cases}$$

($x \mapsto \tan \frac{x}{2}$ est une bijection C^1 de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}^+$). Alors $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x} = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1-t^2}} \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}{t\left(1-t^2+1+t^2\right)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2}{t} \mathrm{d}t$$

Donc

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin x + \tan x} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - t\right) \mathrm{d}t == \frac{1}{2}\left(\ln t + \frac{t^2}{2}\right) + C$$

Ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x} = \frac{1}{2} \ln \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C}$$

2. Primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \dfrac{1}{\left(1+u^2\right)^2}$. Posons

$$\begin{cases} u = \tan t,\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ t = \arctan u \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \end{cases}$$

($u \mapsto \arctan u$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). Alors $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t} = \int \cos^2 t \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t)\, \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)^2} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arctan u + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan u\right)\right) + C$$

et finalement $\exists C \in \mathbb{R}$ / $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\arctan u + \frac{u}{1+u^2}\right) + C}$$

3. Primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x}$. Posons

$$\begin{cases} u = \operatorname{sh} x \\ x = \operatorname{arg\,sh} x \\ \mathrm{d}u = \operatorname{ch} x \mathrm{d}x \end{cases}$$

($x \mapsto \operatorname{sh} x$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^4 x} \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\left(1+\operatorname{sh}^2 x\right)^2} \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{\left(1+u^2\right)^2} \mathrm{d}u = \int \frac{u^2+1-1}{\left(1+u^2\right)^2} \mathrm{d}u$$

Donc

$$\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \int \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)^2} = \arctan u - \frac{1}{2}\left(\arctan u + \frac{u}{1+u^2}\right) + C$$

Finalement $\exists C \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arctan \operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\right) + C}$$

PROBLEME

A tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on associe $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \,\mathrm{d}t$

1. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties dans $I(p,q)$, avec les fonctions $C^1([0,1])$

$$\begin{cases} u(t) = (1-t)^q \\ v'(t) = t^p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = -q(1-t)^{q-1} \\ v(t) = \dfrac{t^{p+1}}{p+1} \end{cases}$$

Alors

$$I(p,q) = \frac{1}{p+1}\left[t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\left[t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 = 0$ car $p+1 \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, il vient

$$\boxed{I(p,q) = \frac{q}{p+1}\, I(p+1, q-1)}$$

b) Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$I(p+q,0) = \int_0^1 t^{p+q}(1-t)^0\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{p+q}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

c) On a ainsi en itérant q fois la formule établie au a) :

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \frac{q}{p+1}\, I(p+1,q-1) \\ &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2}\, I(p+2,q-2) \\ &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{q-2}{p+3}\, I(p+3,q-3) \\ &= \cdots \\ &= \frac{q(q-1)(q-2)\cdots 1}{(p+1)(p+2)(p+3)\cdots(p+q)}\, I(p+q,0) \end{aligned}$$

Donc d'après b)

$$I(p,q) = \frac{q!}{(p+1)(p+2)(p+3)\cdots(p+q)(p+q+1)}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

2. a) Montrons que $\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$:

Soit $t \in [0,1]$. D'une part

$$\begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1-t \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow t(1-t) \geqslant 0$$

et d'autre part

$$t(1-t) = -\left(t^2 - t\right) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{CQFD.}$$

<u>*Remarque*</u> : on peut aussi étudier la fonction $t \mapsto t(1-t)$ sur $[0,1]$.

b) On a ainsi, si $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant t^n(1-t)^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$, et par intégration sur $[0,1]$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{4^n}$$

D'après la question 1., cela revient à $0 \leqslant \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{1}{4^n}$, qui équivaut à

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+1)! \geqslant 4^n (n!)^2}$$

3. On pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left[\arctan\left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$: l'inégalité du 2.a) permet d'écrire,

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant 2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1} \leqslant \frac{2^{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

La division par le nombre $2t^2 - 2t + 1 > 0$ donne alors

$$0 \leqslant \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}$$

et par intégration, vu a) :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

c) Si $n \in \mathbb{N}$, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$ est une somme géométrique de raison $2t(1-t) \neq 1$ (cf. 2.a)) :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k = \frac{1 - [2t(1-t)]^{n+1}}{1 - [2t(1-t)]} = \frac{1 - 2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{1 - 2t + 2t^2}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}}$$

d) L'intégration sur $[0,1]$ de l'égalité précédente nous fournit :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \int_0^1 t^k (1-t)^k \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \,\mathrm{d}t \quad \text{(cf. question 1.)}$$

D'où

$$\frac{\pi}{2} - w_n = \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \,\mathrm{d}t$$

L'encadrement de la question b) permet donc de conclure à :

$$\boxed{0 \leqslant \frac{\pi}{2} - w_n \leqslant \frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

Le théorème des gendarmes assure alors le résultat : $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = \frac{\pi}{2}}$ (car $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$).

4. On pose, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $\quad J(p,q)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}t\cos^{2q+1}t\,\mathrm{d}t$.

a) Faisons le changement de variable (C^1) : $\left\{\begin{array}{l} x=\sin^2 t\\ \mathrm{d}x=2\cos t\sin t\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$. Alors

$$\begin{aligned} J(p,q) &= \int_0^{\pi/2}\sin^{2p}t\cos^{2q}t\cos t\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t\right)^p\left(1-\cos^2 t\right)^q\sin t\cos t\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I(p,q)\end{aligned}$$

b) Faisons le changement de variable (C^1) : $\left\{\begin{array}{l} y=\sin t\\ \mathrm{d}y=\cos t\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$. Alors

$$J(p,q)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}t\cos^{2q}t\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}t\left(1-\sin^2 t\right)^q\cos t\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$J(p,q)=\int_0^1 y^{2p+1}\left(1-y^2\right)^q\mathrm{d}y=\int_0^1 y^{2p+1}\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}(-1)^k y^{2k}\mathrm{d}y=\int_0^1\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}(-1)^k y^{2p+1}y^{2k}\mathrm{d}y$$

En échangeant intégrale et somme

$$J(p,q)=\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}(-1)^k\int_0^1 y^{2p+2k+1}\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}(-1)^k\int_0^1\left[\frac{y^{2p+2k+2}}{2p+2k+2}\right]_0^1\mathrm{d}y$$

Au total

$$\boxed{J(p,q)=\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{2p+2k+2}}$$

En comparant avec le résultat du a), et en simplifiant par $\frac{1}{2}$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$