# Inégalité triangulaire

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors

$$\boxed{|z+z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

et il y a égalité si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}_+ \ / \ z' = kz$ ou $\exists k \in \mathbb{R}_+ \ / \ z = kz'$.

---

*Preuve* : comparer deux nombres positifs équivaut à comparer leur carrés : on est donc ramené à montrer que

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2$$

Or

$$|z+z'|^2 = (z+z')\,\overline{(z+z')} = (z+z')\,(\overline{z}+\overline{z}') = z'\overline{z}' + z\overline{z}' + z'\overline{z} + z'\overline{z}' = |z|^2 + z\overline{z}' + z'\overline{z} + |z'|^2$$

Or $z'\overline{z} = \overline{z\overline{z}'}$, el la somme de deux complexes conjugés donne 2 fois la partie réelle de ces complexes, d'où

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + z\overline{z}' + \overline{z\overline{z}'} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{z}') + |z'|^2$$

Mais la partie réelle d'un complexe est inférieure à son module, d'où la majoration :

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z\overline{z}'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|\overline{z}'| + |z'|^2$$

Finalement, comme $z'$ et $\overline{z}'$ ont même module,

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2 \quad \text{CQFD.}$$

*Condition d'égalité* : si l'un des deux complexes est nul, alors on a evidemment

$$|z+z'| = |z| + |z'| \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0z' \text{ ou} \\ z' = 0z \end{array} \right.$$

On peut donc supposer que $z$ **et** $z'$ **sont non nuls**.

Lemme : $\boxed{\text{si } Z \in \mathbb{C} \text{ alors } \mathrm{Re}\,Z = |Z| \Longleftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+}$

En effet, en posant $a = \mathrm{Re}\,Z$ et $b = \mathrm{Im}\,Z$, on a

$$\mathrm{Re}\,Z = |Z| \Longleftrightarrow a = \sqrt{a^2+b^2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geqslant 0 \\ a^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geqslant 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+$$

- Supposons que $|z+z'| = |z| + |z'|$ . Alors le calcul précédent montre que :

  $$\mathrm{Re}\,(z\overline{z}') = |z\overline{z}'|$$

  puisque $\mathrm{Re}\,(z\overline{z}') \leqslant |z\overline{z}'|$ est la seule majoration utilisée. Donc il existe un réel positif $\lambda$ tel que

  $$z\overline{z}' = \lambda$$

  En multipliant par $z'$ :

  $$zz'\overline{z}' = \lambda z'$$

  Soit en posant $\mu = z'\overline{z}' = |z'|^2 \in \mathbb{R}_+$ :

  $$\mu z = \lambda z'$$

  Comme $\mu = |z'|^2 \neq 0$ on a bien, en posant $k = \dfrac{\lambda}{\mu}$ : $z = kz'$.

- Inversement, si $\exists k \in \mathbb{R}_+ \ / \ z = kz'$, alors

  $$|z+z'| = |(1+k)\,z'| = |1+k|\,|z'| \overset{1+k \in \mathbb{R}_+}{=} (1+k)\,|z'|$$

  et

  $$|z| + |z'| = |kz'| + |z'| = |k|\,|z'| + |z'| \overset{k \in \mathbb{R}_+}{=} k\,|z'| + |z'| = (1+k)\,|z'|$$

  On a bien

  $$|z+z'| = |z| + |z'|$$

  D'où l'équivalence.