A rendre par trinôme

EXERCICE 1

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = \dfrac{1}{(i+j-1)!}$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$. On définit le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-1)!} X^{n+k-1}$

1. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour $k \in [[0, n-1]]$.

2. En déduire que $P = 0$, et conclure sur la matrice A.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, la notation f^n désigne l'itérée : $f \circ \cdots \circ f$

On cherche les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\text{(i) } f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{(ii) } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^2(x) = 2f(x) - x \quad (\text{soit } f(f(x)) = 2f(x) - x)$$

On se donne une telle fonction f.

1. Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$

2. Montrer que f est injective.

3. Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires). Quel est le sens de variation de f?

4. Montrer que f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^n(x) - x = n(f(x) - x)$

6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) - x \geqslant -\dfrac{x}{n}$, puis que $f(x) \geqslant x$

7. Montrer que f^{-1} vérifie aussi les conditions de l'énoncé.

8. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x$ et conclure.

PROBLEME

Il est conseillé de faire des essais pour les petites valeurs ($n = 3, 4$ ou 5)

Les plus fragiles se contenteront de traiter le cas $n = 6$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la suite $(u_p)_{p\geqslant 1}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} = 2 - \dfrac{1}{u_p} \end{cases}$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Déterminer le terme général de la suite $(u_p)_{p\geqslant 1}$.

2. Donner le terme général de la matrice A.

3. On définit les matrices $A_1, \dots, A_n$ par

$$\begin{cases} A_1 = A \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ A_{i+1} \text{ se déduit de } A_i \text{ par l'opération } L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} L_i \end{cases}$$

a) Calculer A_n (on pourra conjecturer la forme de la ligne i de A_i et le montrer par récurrence).

b) En déduire que A est inversible.

c) Démontrer que A^{-1} est symétrique.

4. Si Y est une colonne de terme général y_i, on définit la colonne Y' de terme général y'_i défini par

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i \end{cases}$$

Montrer que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ le système $AX = Y$ équivaut à $A_i X = Y_i$ avec $Y_i = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

5. On fixe $j \in [\![1, n]\!]$ et on pose Y le vecteur colonne de terme général $y_i = \delta_{ij}$

a) Montrer que l'unique solution du système $AX = Y$ est la j-ème colonne de A^{-1} notée Γ_j

b) Montrer que $\begin{cases} \forall i < j,\ y'_i = 0 \\ \forall i \geqslant j,\ y'_i = j/i \end{cases}$

c) En déduire que si x_i est le terme général de Γ_j, alors $\forall i \geqslant j,\ x_i = \dfrac{j(n+1-i)}{n+1}$

d) Donner alors le terme général b_{ij} de la matrice A^{-1}.

e) Donner A^{-1} dans le cas où $n = 6$

6. En utilisant les résultats de la question 2., montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L dont les coefficients diagonaux valent 1 et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.