Ex 1 Extractions de racines

a) Racines sixièmes de -27 $= 3^3 e^{3i\pi}$. L'une d'elle est $\sqrt{3}e^{i\pi/2} = \boxed{\sqrt{3}i}$.

On la multiplie par les racines sixièmes de l'unité, soit les $e^{ik\pi/3}$ avec $k \in [\![-3, 2]\!]$. On obtient

$$(E) \iff \begin{cases} \rho^6 = 27 = 3^3 \\ 6\theta \equiv \pi \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{3} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{6} \ \left[\frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$$

On trouve les complexes de la forme $\boxed{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{3}\right)}}$ avec $k \in [\![-3, 2]\!]$, soit

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} & (k=-1)\,, & \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} & (k=-2) \\ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3} & (k=0)\,, & \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{3} & (k=-3) \\ \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} & (k=1)\,, & \sqrt{3}e^{\frac{-5i\pi}{6}} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} & (k=2 \text{ ou } -3) \end{array}}$$

b) Racines quatrièmes de $\frac{4\sqrt{2}}{1+i}$ $= \dfrac{4}{e^{i\pi/4}} = 2^2 e^{-i\pi/4}$. L'une d'elle est $\boxed{\sqrt{2}e^{-i\pi/16}}$.

On la multiplie par les racines quatrièmes de l'unité, soit $1, i, -1, -i$. On obtient

$$\boxed{\sqrt{2}e^{-i\pi/16},\ \sqrt{2}ie^{-i\pi/16},\ -\sqrt{2}e^{-i\pi/16},\ -\sqrt{2}ie^{-i\pi/16}}$$

Ex 2 Racines quatrièmes de $-119 + 120i = A$. On commence par déterminer une racine carrée de A, en cherchant

$$z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R} \ / \ z^2 = -119 + 120i$$

(la forme trigonométrique de $-119 + 120i$ n'est pas praticable). En "rajoutant" $|z|^2 = |-119 + 120i| = 169$, on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 + x^2 = 169 \\ x^2 - x^2 = -119 \\ 2xy = 120 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 144 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Une racine carrée de A est donc $B = 5 + 12i$. Cherchons une racine carrée de B sous la même forme que précédemment : on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Une racine carrée de B est donc $C = \boxed{3 + 2i}$, qui vérifie donc $C^4 = B^2 = A$.

a) En multipliant comme au b) par $1, i, -1, -i$, il vient les quatre racines quatrièmes de A :

$$\boxed{3 + 2i,\ -3 - 2i,\ -2 + 3i,\ 2 - 3i}$$

Ex 3 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$ (E) : on pose $Z = z^4$, et (E) devient

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Dons les deux solutions sont $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\pi/3}$. Ainsi

$$(E) \iff \begin{cases} z^4 = e^{2i\pi/3} \text{ ou} \\ z^4 = e^{-2i\pi/3} \end{cases}$$

Or $e^{i\pi/6}$ est une racine quatrième de $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/6}$ est une racine quatrième de $e^{-2i\pi/3}$, d'où, en multipliant par les éléments de $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$:

$$(E) \iff \begin{cases} z = e^{i\pi/6} \text{ ou } z = -e^{i\pi/6} \text{ ou } z = ie^{i\pi/6} \text{ ou } z = -ie^{i\pi/6} \\ z = e^{-i\pi/6} \text{ ou } z = -e^{-i\pi/6} \text{ ou } z = ie^{-i\pi/6} \text{ ou } z = -ie^{-i\pi/6} \end{cases}$$

Les 8 solutios de (E) sont :

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{\sqrt{3}-i}{2}, -\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}-i}{2},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$$

Ex 4 Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) L'équation $(E) : z^3 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ s'écrit aussi

$$z^3 = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} \Longleftrightarrow z^3 = e^{2i\alpha}$$

Ses trois solutions sont donc

$$\boxed{\zeta_0 = e^{2i\alpha/3},\ \zeta_1 = e^{2i\alpha/3}j = e^{2i(\alpha+\pi)/3} \text{ et } \zeta_2 = e^{2i\alpha/3}j^2 = e^{2i(\alpha+2\pi)/3} = e^{2i(\alpha-\pi)/3}}$$

b) L'équation $(E') : (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ s'y ramène : on remarque d'abord que $-i$ n'est pas solution , puisque $8(1-i\tan\alpha) \neq 0$. On peut donc résoudre (E') sur $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, où l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} (E') \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \{0,1,2\} \ / \ \frac{1+iz}{1-iz} = \zeta_k = e^{2i(\alpha+k\pi)/3} \end{aligned}$$

Or si $k \in \{0,1,2\}$,

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \zeta_k \Longleftrightarrow 1+iz = \zeta_k(1-iz) \Longleftrightarrow i(\zeta_k+1)z = \zeta_k - 1$$

On vérifie que $\zeta_k \neq -1$: en effet $-\frac{\pi}{3} < \frac{2\alpha}{3} < \frac{\pi}{3}$ donc $\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} < \frac{2\alpha+2\pi}{3} < \pi \\ -\pi < \frac{2\alpha-2\pi}{3} < -\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$ aucune des exponentielle ne vaut -1. Ainsi

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \zeta_k \Longleftrightarrow z = \frac{\zeta_k - 1}{i(\zeta_k+1)}$$

Il reste à calculer

$$\frac{\zeta_k-1}{i(\zeta_k+1)} = \frac{e^{2i(\alpha+k\pi)/3}-1}{i\left(e^{2i(\alpha+k\pi)/3}+1\right)} = \frac{2i\sin\frac{\alpha+k\pi}{3}e^{i(\alpha+k\pi)/3}}{2i\cos\frac{\alpha+k\pi}{3}e^{i(\alpha+k\pi)/3}} = \tan\frac{\alpha+k\pi}{3}$$

Finalement, les trois solutions (réelles) de (E') sont

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{3}, \tan\frac{\alpha+\pi}{3} \text{ et } \tan\frac{\alpha-\pi}{3}} \quad \left(\text{ou } \tan\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)$$

Ex 5 Soit $S = \cos^2\dfrac{\pi}{9} + \cos^2\dfrac{2\pi}{9} + \cos^2\dfrac{3\pi}{9} + \cos^2\dfrac{4\pi}{9}$. En linéarisant

$$\begin{aligned} S &= \frac{1+\cos\frac{2\pi}{9}+1+\cos\frac{4\pi}{9}+1+\cos\frac{6\pi}{9}+1+\cos\frac{8\pi}{9}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(4+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

: 1. 75 Oo on sait que la somme des racines 9-èmes de l'unité est nulle, c'est à dire

$$1+e^{2i\pi/9}+e^{-2i\pi/9}+e^{4i\pi/9}+e^{-4i\pi/9}+e^{6i\pi/9}+e^{-6i\pi/9}+e^{8i\pi/9}+e^{-8i\pi/9} = 0$$

ou encore

$$1+2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\right) = 0$$

Il vient facilement

$$S = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{7}{4}}$$

Ex 6 Pour vérifier que $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$, partons de la somme des racines onzièmes de l'unité :

$$\sum_{k=-5}^{5} e^{2ik\pi/11}=0$$

On multiplie par $e^{i\pi/11}$:

$$\sum_{k=-5}^{5} e^{(2k+1)i\pi/11}=0$$

Soit

$$e^{-9i\pi/11}+e^{-7i\pi/11}+e^{-5i\pi/11}+e^{-3i\pi/11}+e^{-i\pi/11}+e^{i\pi/11}+e^{3i\pi/11}+e^{5i\pi/11}+e^{7i\pi/11}+e^{9i\pi/11}+e^{11\pi/11}=0$$

En regroupant et en utilisant les formules d'Euler :

$$2\cos\frac{\pi}{11}+2\cos\frac{3\pi}{11}+2\cos\frac{5\pi}{11}+2\cos\frac{7\pi}{11}+2\cos\frac{9\pi}{11}+1=0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}}\ \text{CQFD.}$$

Ex 7 On cherche un complexe non nul z admettant deux racines cubiques distinctes z_1 et z_2 vérifiant $z_1+2z_2=z\sqrt{3}$

a) Analyse : supposons que $z\in\mathbb{C}^*$ ait deux racines cubiques distinctes z_1 et z_2 vérifiant $z_1+2z_2=z\sqrt{3}$ $(*)$

On sait d'après le cours que comme $z_1^3=z_2^3=z$, alors $z_2=jz_1$ ou $z_2=j^2z1$.

Si par exemple $z_2=jz_1$, $(*)$ s'écrit :

$$z_1\left(1+2j\right)=z\sqrt{3}=z_1^3\sqrt{3}$$

Comme $1+2j=1+\left(-1+i\sqrt{3}\right)=i\sqrt{3}$, cela devient

$$i\sqrt{3}z_1=z_1^3\sqrt{3}\overset{z_1\neq 0}{\iff} i=z_1^2$$

z_1 est donc une racine carrée de $i=e^{i\pi/2}$, c'est-à-dire $z_1=e^{i\pi/4}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ou $z_1=-e^{i\pi/4}=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

b) Synthèse : essayons $z=\left(e^{i\pi/4}\right)^3=e^{3i\pi/4}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

Alors $z_1=e^{i\pi/4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$est une racine cubique de z, et

$$z_2=jz_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\left(-\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$$

en est une autre. On vérifie que $z_1+2z_2=z\sqrt{3}$:

$$z_1+2z_2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{\left(-\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}z$$

c) Conclusion : le complexe $\boxed{z=e^{3i\pi/4}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}$ admet bien deux racines cubiques distinctes

$$z_1=e^{i\pi/4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{\left(-\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$$

vérifiant $z_1+2z_2=z\sqrt{3}$.

Ex 8 Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la formule du binôme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k = (1+\omega)^n$$

On peut simplifier :

$$S_n = \left(1 + e^{2i\pi/n}\right)^n = \left(2\cos\frac{\pi}{n} e^{i\pi/n}\right)^n = 2^n \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n e^{i\pi}$$

Soit

$$\boxed{S_n = -2^n \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n}$$

La somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$ est quant à elle géométrique :

- $\underline{1^{\text{er}} \text{ cas} : \omega^p = 1}$, c'est-à-dire $e^{2ip\pi/n} = 1$, soit $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \dfrac{2p\pi}{n} = 2k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ p \equiv kn$.

  Autrement dit, si $\underline{p \text{ est un multiple de } n}$, alors

  $$\boxed{T_n = n}$$

- $\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas} : \omega^p \neq 1}$, c'est-à-dire $\underline{p \text{ n'est pas multiple de } n}$, alors

  $$T_n = \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega} = \frac{1 - e^{2ip\pi}}{1 - \omega}$$

  Soit

  $$\boxed{T_n = 0}$$

Ex 9 Soit $(S) : \begin{cases} x = y^2 \\ y = z^2 \\ z = x^2 \end{cases}$ à résoudre dans $\mathbb{C}^3$. On a :

$$(S) \iff \begin{cases} x = x^8 \\ y = x^4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Or

$$x = x^8 \iff x\left(x^7 - 1\right) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ \exists k \in [\![0, 6]\!] \ / \ x = e^{2ik\pi/7} = \omega^k \end{cases}$$

où l'on a posé $\omega = e^{2i\pi/7}$, dont on sait que $\omega^7 = 1$ et que $\left(\omega^k\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est 7-périodique. Il vient les 8 triplets solution de (S) :

$$(0,0,0), (1,1,1), \left(\omega, \omega^4, \omega^2\right), \left(\omega^2, \omega^8, \omega^4\right), \left(\omega^3, \omega^{12}, \omega^6\right), \left(\omega^4, \omega^{16}, \omega^8\right), \left(\omega^5, \omega^{20}, \omega^{10}\right), \left(\omega^6, \omega^{24}, \omega^{12}\right)$$

Soit

$$\boxed{(0,0,0), (1,1,1), \left(\omega, \omega^4, \omega^2\right), \left(\omega^2, \omega, \omega^4\right), \left(\omega^3, \omega^5, \omega^6\right), \left(\omega^4, \omega^2, \omega\right), \left(\omega^5, \omega^6, \omega^3\right), \left(\omega^6, \omega^3, \omega^5\right)}$$

Ex 10 On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$, $\alpha = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad , \quad \beta = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

a) On rappelle que
$$\mathbb{U}_7 = \left\{e^{2ik\pi/7}, k \in [\![0,6]\!]\right\} = \left\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6\right\}$$
et que
$$\omega^7 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$$
Remarque : on a aussi $\omega^6 = \overline{\omega}$, $\omega^5 = \overline{\omega^2}$ et $\omega^4 = \overline{\omega^3}$.

b) Alors
$$\overline{\alpha} = \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4} = \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4} = \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 = \beta$$
Donc α et β sont conjugués, et
$$\operatorname{Im}\alpha = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = \left(\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \sin\frac{4\pi}{7}$$
Or $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$. Ainsi
$$\boxed{\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0}$$

c) Calculons :
$$\alpha + \beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$$
et
$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)\left(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6\right) \\ &= \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 3\omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 3 + \omega + \omega^2 + \omega^3 \\ &= 2 \end{aligned}$$
Ainsi
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases}$$
Donc α et β sont les solutions de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$, i.e. $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
Sachant $\operatorname{Im}\alpha > 0$, on peut conclure
$$\boxed{\begin{cases} \alpha = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \\ \beta = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{cases}}$$

Ex 11 Pour tout complexe z, on pose $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

a) Résolvons l'équation $(E) : P(z) = 0$. On remarque que $P(1) = 7$, donc 1 n'est pas solution, et on peut résoudre (E) sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Alors
$$(E) \iff \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0 \iff z^7 = 1 \iff \exists k \in [\![0,6]\!] \ / \ z = e^{2ik\pi/7}$$
Comme $k = 0$ donne $e^{2ik\pi/7} = 1$, on a les 6 racines de P :
$$\boxed{e^{2i\pi/7}, e^{4i\pi/7}, e^{6i\pi/7}, e^{8i\pi/7}, e^{10i\pi/7}, e^{12i\pi/7}}$$
Le polynôme P se factorise alors sous la forme,
$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z - e^{2i\pi/7}\right)\left(z - e^{4i\pi/7}\right)\left(z - e^{6i\pi/7}\right)\left(z - e^{8i\pi/7}\right)\left(z - e^{10i\pi/7}\right)\left(z - e^{12i\pi/7}\right)$$

b) Substituons la valeur 1 à z :
$$P(1) = 7 = \left(1 - e^{2i\pi/7}\right)\left(1 - e^{4i\pi/7}\right)\left(1 - e^{6i\pi/7}\right)\left(1 - e^{8i\pi/7}\right)\left(1 - e^{10i\pi/7}\right)\left(1 - e^{12i\pi/7}\right)$$

Avec la formule $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$, il vient

$$\begin{aligned}
7 &= (-2i)^6 \sin \frac{\pi}{7} e^{i\pi/7} \sin \frac{2\pi}{7} e^{2i\pi/7} \sin \frac{3\pi}{7} e^{3i\pi/7} \sin \frac{4\pi}{7} e^{4i\pi/7} \sin \frac{5\pi}{7} e^{5i\pi/7} \sin \frac{6\pi}{7} e^{6i\pi/7} \\
&= -2^6 \prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7} e^{i\frac{\pi}{7}(1+2+3+4+5+6)} \\
&= -2^6 e^{3i\pi} \prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7} \\
&= 2^7 \prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7} = \frac{7}{2^6}}$$

c) Généralisons : on considère, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(z) = z^{2n} + z^{2n-1} + \cdots + z + 1 = \sum_{k=0}^{2n} z^k$$

Comme $P_n(1) = 2n + 1 \neq 0$, on résout $(E_n) : P_n(z) = 0$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et

$$(E_n) \iff \frac{z^{2n+1} - 1}{z - 1} = 0 \iff z^{2n+1} = 1 \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!] \ / \ z = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

On a les $2n$ solutions de l'équation (E_n) qui est de degré $2n$, donc on a la factorisation

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P_n(z) = \prod_{k=1}^{2n} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)$$

Mais alors

$$2n + 1 = P(1) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\right)$$

Donc

$$2n + 1 = \prod_{k=1}^{2n} \left(-2i \sin \frac{k\pi}{2n+1} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\right) = (-i)^{2n} 2^n \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \prod_{k=1}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}$$

Or

$$\prod_{k=1}^{2n} e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} = e^{\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{ik\pi}{2n+1}} = e^{\frac{i\pi}{2n+1} \sum\limits_{k=1}^{2n} k} = e^{\frac{i\pi}{2n+1} \frac{2n(2n+1)}{2}} = e^{ni\pi}$$

Donc

$$2n + 1 = (-1)^n 2^n \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} e^{ni\pi} = (-1)^n 2^n \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} (-1)^n = 2^n \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{2n+1}$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{2n+1}{2^{2n}}}$$

Ex 12 Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$.

a) Première méthode :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \sum_{k=1}^{n-1} k\omega^k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$$

Or on sait que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ (somme des racines de l'unité), et que $\omega^n = 1$. En réindexant la première somme, il vient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,\omega^{k+1} = \omega \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,\omega^k = \omega\left(S_n - n\omega^{n-1}\right)$$

On obtient ainsi

$$S_n = \omega S_n - n$$

Ainsi, puisque $\omega \neq 1$:

$$S_n = \frac{n}{\omega - 1}$$

b) Deuxième méthode : on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

En dérivant

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = -\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2} + \frac{(n+1)\,x^n}{x-1}$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,x^k = \frac{(n+1)\,x^n}{x-1} - \frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}$$

On montrera plus tard que l'on peut aussi substituer le complexe ω à x dans cette égalité algébrique, de sorte que

$$S_n = \frac{(n+1)\,\omega^n}{\omega-1} - \frac{\omega^{n+1}-1}{(\omega-1)^2} = \frac{n+1}{\omega-1} - \frac{\omega-1}{(\omega-1)^2} = \frac{n+1}{\omega-1} - \frac{1}{\omega-1}$$

Finalement

$$\boxed{S_n = \frac{n}{\omega-1}}$$

Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit p_n des racines n-ièmes de l'unité est, si l'on note $\omega = e^{2i\pi/n}$:

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1}$$

Finalement

$$\boxed{p_n = (-1)^{n-1}}$$

Remarque : autre méthode. Les racines de l'unité non réelles sont associées à leur conjuguée. Or le produit $e^{2ik\pi/n}e^{-2ik\pi/n} = 1$. Il reste donc les racines réelles

– Si n est pair, ce sont 1 et -1, et le produit p_n vaut -1.

– Si n est impair, seul 1 est racine réelle de l'unité, et p_n vaut 1.

Ex 14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^{2n} - 2\cos(n\theta)\, z^n + 1 = 0 \quad (E)$:

En posant $Z = z^n$, l'équation devient :

$$(E') : Z^2 - 2\cos(n\theta)\, Z + 1 = 0$$

On peut, en observant la somme et le produit des racines (respectivement $2\cos(n\theta)$ et 1), voir tout de suite que les solutions de (E') sont $e^{ni\theta}$ et $e^{-ni\theta}$.

Si l'on est plus conventionnel, on calcule le discriminant $\Delta = 4\left(\cos^2(n\theta) - 1\right) = -4\sin^2(n\theta) \leqslant 0$, dont une racine carrée est $\delta = 2i\sin(n\theta)$. On retrouve bien les deux solutions

$$\frac{2\cos(n\theta) \pm 2i\sin(n\theta)}{2} = \cos(n\theta) \pm i\sin(n\theta) = e^{\pm ni\theta}$$

Ainsi

$$(E) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^n = e^{ni\theta} \text{ ou} \\ z^n = e^{-ni\theta} \end{array} \right.$$

Or on sait que

$$z^n = e^{ni\theta} \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z = e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Il est aussi évident que $z^n = e^{-ni\theta} \Longleftrightarrow \overline{z^n} = e^{ni\theta} \Longleftrightarrow \overline{z}^n = e^{ni\theta}$ et donc que les solutions de la deuxième équation sont les conjuguées des solutions de la première.

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\boxed{S = \left\{ e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \cup \left\{ e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$$

Attention : on n'a pas forcément $2n$ solutions. En effet, si $\sin(n\theta) = 0$, i.e. $\theta \equiv 0 \ \left[\frac{\pi}{n}\right]$, alors la solution de (E') est double, ce qui ne donne que n solutions (doubles) de (E) .

Inversement, si un élément du premier ensemble est dans le deuxième, alors : $\exists (k, k') \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que

$$e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} = e^{-i\left(\theta + \frac{2k'\pi}{n}\right)} \quad \text{soit} \quad \theta + \frac{2k\pi}{n} = -\theta - \frac{2k'\pi}{n} \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{(k+k')\,\pi}{n} \ [\pi]$$

On a alors $\sin(n\theta) = \pm\sin((k+k')\,\pi) = 0$, et on est bien dans le cas des n racines doubles.

Ex 15 Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : (z-1)^n = (z+1)^n$: on sait que

$$(E) \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z - 1 = e^{2ik\pi/n}(z+1) \ \ (e_k)$$

Il suffit donc de résoudre les n équations du premier degré (e_k) pour $k \in [\![0, n]\!]$:

- Si $k = 0$ alors $e^{2ik\pi/n} = 1$ et $(e_0) : z - 1 = z + 1 \Longleftrightarrow 1 = -1$ qui est absurde.
- Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors $e^{2ik\pi/n} \neq 1$ et

$$(e_k) \Longleftrightarrow \left(1 - e^{2ik\pi/n}\right) z = 1 + e^{2ik\pi/n} \Longleftrightarrow z = \frac{1 + e^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}}$$

  On a donc la solution

$$z_k = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n} e^{ik\pi/n}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n} e^{ik\pi/n}} = \frac{i\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}$$

Finalement, on peut conclure que (E) admet $\underline{n-1 \text{ solutions}}$, imaginaires pures, de la forme

$$\boxed{z_k = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n},\ k \in [\![1, n-1]\!]}$$

C'est conforme au fait que l'équation (E) est de degré $n-1$ (simplification des termes z^n de part et d'autre)