Ex 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Compléter :

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0 \Longleftrightarrow \ a_i \neq 0$

b) $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0) \Longleftrightarrow \ a_i \neq 0$

Ex 2 Ecrire les quantificateurs dans l'affirmation : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = kb \\ c = kd \end{array} \right.$

Ex 3 Ecrire la négation de $x = y = z$.

Ex 4 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 0$

d) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 0$

e) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 0$

Ex 5 Exprimer les énoncés suivants à l'aide du symbolisme mathématique, puis donner leur négation :

a) Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif.

b) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = 2$ est inclus dans $]1, 2[$.

c) Tout entier naturel est pair ou impair.

Ex 6 Soient E un ensemble et $P(x)$ un prédicat de la variable $x \in E$. Ecrire la négation de $\exists! x \in E \ / \ P(x)$.

Ex 7 Soient E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats de la variable $x \in E$.

a) $[\exists x \in E \ / \ P(x)$ et $Q(x)]$ est elle équivalente à $[\exists x \in E \ / \ P(x)$ et $\exists x \in E \ / \ Q(x)]$?

b) $[\forall x \in E,\ P(x)$ ou $Q(x)]$ est elle équivalente à $[\forall x \in E,\ P(x)$ ou $\forall x \in E,\ Q(x)]$?

Ex 8 Soient P, Q, R trois assertions. Montrer que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est équivalente à $(P$ et $Q) \Rightarrow R$.

Ex 9 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

a) Ecrire symboliquement : "f est croissante sur I" puis sa négation.

b) Ecrire symboliquement : "si f s'annule en un point de I, alors elle est nulle sur I", sa contraposée et sa négation.

c) Donner la négation et la contraposée de $P : (\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0) \Longrightarrow (\exists x \in I \ / \ f(x) \neq 0)$

d) Donner la négation et la contraposée de $Q : \forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Ex 10 Soient x, y, z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose les implications

$$\text{(i) } x = 0 \Rightarrow y > 0 \quad \text{(ii) } x > 0 \Rightarrow y < 0 \quad \text{(iii) } y \neq 0 \Rightarrow z > 0$$

Comparer x, y et z.