Calcul algébrique élémentaire

1. Notation $\sum$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexes, on note, et $0 \leqslant p \leqslant q$ deux entiers, on note

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q} \quad \text{(il y a } q-p+1 \text{ termes)}$$

Attention : la variable k est **muette** (*i.e.* n'apparait pas dans le résultat) : on peut donc noter, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Exemple 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) =$

Exemple 2 : écriture décimale : tout entier naturel N s'écrit sous la forme

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \text{ , avec } n \in \mathbb{N}, \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k \in [\![0, 9]\!]$$

Remarque : sommes alternées : pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} a_k = \end{cases}$

Identités remarquables : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

2. Propriétés

(on fixe $n \in \mathbb{N}^*$)

a) __Formule de récurrence__ **:** $\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}}$

Exemple : conjecturer et montrer une formule simplifiant $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

b) __Linéarité__ **:** $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k}$.

Plus généralement, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$),

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k}$$

Pièges : $\sum_{k=1}^{n} 1 =$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} 1 =$ $\qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda =$ $\qquad \sum_{k=1}^{n} a_n =$

Remarque : on peut dériver ou intégrer une somme "terme à terme" : pour $f_0 \dots f_n$ dérivables sur $[a, b]$

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{n} f_k'} \quad \text{et} \quad \boxed{\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\left(x\right)\right) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k\left(x\right) dx}$$

Exemple : simplifier $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{kx}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) dx$

c) <u>Changements d'indexation</u> :

(i) <u>Translations</u> : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}}$ ou $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}}$

Dans la pratique, on peut (ici dans la première) poser $\begin{cases} k' = k-1 \\ k = k'+1 \end{cases}$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k'=0}^{n-1} a_{k'+1}$

(ii) <u>Inversion de compteur</u> : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}}$

Exemple : calcul de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

d) <u>Télescopage</u> : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0}$ ou $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1}$

Une méthode de calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ est donc de trouver une suite (a_k) telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = a_{k+1} - a_k$.

Exemple 1 : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$: on remarque $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ 2k+1 = (k+1)^2 - k^2$.

Exemple 2 : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$: on utilise la ruse $k = k+1-1$

e) <u>Séparation des termes d'indices pairs et impairs dans une somme</u> : on cherche à écrire proprement

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = (a_0 + a_2 + \cdots) + (a_1 + a_3 + \cdots)$$

On peut écrire abusivement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{p \text{ pair}} a_p + \sum_{q \text{ impair}} a_q = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} a_{2p} + \sum_{0 \leqslant 2q+1 \leqslant n} a_{2p+1}$$

Mais plus rigoureusement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} a_{2k+1}}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne partie entière de x (voir plus loin)

Exemple 1 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} a_k = \sum_{k=0}^{2} a_{2k} + \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1}$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} a_k = \sum_{k=0}^{3} a_{2k} + \sum_{k=0}^{2} a_{2k+1}$

Exemple 2 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2k+1}$.

3. Produits

a) **Notation :** on note pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ réels ou complexes :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$$

b) **Factorielle :** si $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k \quad \textbf{(factorielle } n\textbf{)}}$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemples : $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $\dots$ $70! \approx 1,2.10^{100}$

Formule de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = n! \times (n+1)}$ (ou pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = (n-1)! \times n$)

Remarque : si $0 \leqslant p \leqslant q$, on a $\dfrac{q!}{p!} = q\,(q-1)\dots(p+1) = \displaystyle\prod_{k=p+1}^{q} k$

c) **Propriétés des produits** (mêmes notations) :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)}$$

et

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p}$$

Cas particuliers : si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

Remarque 1 : formule de récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}}$

Remarque 2 : on a le télescopage $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_0}{a_{n+1}}$ (les a_i sont supposés non nuls)

4. Quelques extensions

a) <u>Sommation sur un ensemble fini I</u> : si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels ou de complexes indexée sur I, on note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme de ses éléments.

Par exemple, pour $I = [\![p,q]\!]$, $(p \leqslant q)$, on a $\sum\limits_{i\in[\![p,q]\!]} a_i = \sum\limits_{i=p}^{p} a_i$. Mais aussi si $I = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$,

$$\sum_{i\in I} a_i = a_\clubsuit + a_\diamondsuit + a_\heartsuit + a_\spadesuit$$

Remarque : si $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0,n]\!]$, on note abusivement $\sum\limits_{i\neq p} a_i$ pour $\sum\limits_{i\in[\![0,n]\!]\setminus\{p\}} a_i$, i.e.

$$a_0 + \cdots + a_{p-1} + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

b) <u>Sommes doubles</u> : on considère la famille à deux indices $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \overset{\text{notation}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Interprétation sur le tableau (ou matrice) des a_{ij}.

Remarque : en fait, on peut écrire moins pompeusement

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[[1,m]]} a_{ij}$$

ou plus abusivement $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$. On rencontre même $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$.

Exemple 1 : "variables séparées" : supposons a_{ij} sous la forme $a_{i,j} = b_i c_j$. Alors

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)}$$

Exemple 2 : sommes "triangulaires" (indexée sur $\left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \ / \ i\leqslant j\right\}$) :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}}$$

- Point de vue "géométrique"
- Point de vue "algébrique". Attention, on ne peut pas permuter les sigmas ici!!

Exemple 3 : une identité remarquable :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j}$$

5. Factorisation de $b^n - a^n$

a) Formule générale : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tous complexes a et b,

$$\boxed{b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1})}$$

soit

$$\boxed{b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Cas courants : $$\boxed{\begin{array}{l} b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \\ b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ b^4 - a^4 = (b-a)(b^3+ab^2+a^2b+a^3) \quad \textit{etc.} \end{array}} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Cas particulier : lorsque n **est impair**, on peut écrire : $b^n + a^n = b^n - (-a)^n$ et donc factoriser par $(b+a)$. Par exemple :

$$\boxed{b^3 + a^3 = (b+a)(b^2 - ab + a^2)} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Exemples : factoriser $x^6 - 64$ et $x^5 + 243$

b) Cas où $a = 1$: pour tout $x \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

On doit connaitre les cas courants

$$\boxed{\begin{array}{l} x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \\ x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) \\ x^4 - 1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1) \end{array}} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

et le cas particulier, **pour** n **est impair** :

$$\boxed{x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \cdots - x + 1) = (x+1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k}$$

c) Sommes de puissances : soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$. Alors

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\text{Si } x \neq 1}, \text{ alors } \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \\ \underline{\text{Si } x = 1}, \text{ alors } \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \end{cases}}$$

Cas particulier : si $x \neq -1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

Exemple : calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k$. Expliciter lorsque $n = 10$

6. Inégalités et sommes

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels.

a) **Proposition :** $\boxed{\text{on suppose que } \forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ a_k \leqslant b_k : \text{alors } \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k}$

Autrement dit, on peut sommer "terme à terme" n inégalités.

Attention 1 : veiller à ce que le domaine de validité des inégalités soit bien l'ensemble de sommation.

Attention 2 : ne surtout pas écrire d'équivalence ici. On écrit : "par somme" ou "par sommation".

Exemple : soit $u_n = \dfrac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{k^4}{1+k^2}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

b) **un encadrement utile :** la somme de n termes est majorée par n fois le plus grand d'entre eux et minorée par n fois le plus petit d'entre eux.

$$\boxed{n \times \min(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant n \times \max(a_1, \ldots, a_n)}$$

Exemple : soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$: montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) **Généralisation de l'inégalité triangulaire :** $\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|}$

Exemple : soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\sin(k\alpha) - \sin((k+1)\alpha)}{2^k}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

d) **Inégalités et produits :** $\boxed{\text{on suppose que } \forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ \mathbf{0} \leqslant a_k \leqslant b_k : \text{alors } \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k}$

Exemple : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n!}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$