Continuité

Ex 1 Ecrire comme composées de fonctions élémentaires :

a) $x \mapsto \sqrt{1-\ln(x)}$ b) $x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(x)}$

c) $x \mapsto 1-e^{2-x^2}$ d) $x \mapsto \cos\left(3x^2-1\right)$

e) $x \mapsto \dfrac{1}{1-e^x}$ f) $x \mapsto \dfrac{a\sqrt[3]{x}+b}{c\sqrt[3]{x}+d}$

Ex 2 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \to \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Ex 3 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

a) $x \mapsto x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ b) $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$

c) $x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ d) $x \mapsto \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{1/x}$

Ex 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$, puis étudier la continuité à droite et à gauche de f en 0.

Ex 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex 6 Trouver toutes les fonctions continues en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

Indication : raisonner par analyse-synthèse : pour un x donné, considérer la suite de terme général $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

Dérivabilité

Ex 7 Calculer les domaines de définition-continuité-dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sqrt[3]{\operatorname{th} x}$ b) $x \mapsto \ln(1+\sqrt[6]{x})$

c) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$ d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$

e) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ f) $x \mapsto \dfrac{ax^n+b}{cx^n+d}$ $(cd \neq 0)$

g) $x \mapsto \sin(\cos(\sin(x)))$ h) $x \mapsto \left(x^2+1\right)^2\left(x^3-1\right)^2$

i) $x \mapsto \sqrt[3]{\arcsin x}$ j) $x \mapsto \arctan(\operatorname{th} x)$

k) $x \mapsto \operatorname{ch}(x)^{1/x}$ l) $x \mapsto (x+2)e^{1/x}$

m) $x \mapsto x^{\ln(x)}$ n) $x \mapsto x^{(x^x)}$

Ex 8 Soit $f : x \mapsto 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

a) Etudier l'ensemble de définition $\mathcal{D}_0$, de continuité $\mathcal{D}$ et de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f.

b) Calculer et simplifier f' sur l'intervalle $I_k = \left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire que pour tout $x \in I_k,\ f(x) = \frac{\pi}{2} - (-1)^k (x-k\pi)$ et donner l'allure de la courbe de f.

d) Retrouver le résultat précédent directement sur l'intervalle I_0.

Ex 9 a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\arctan[\operatorname{sh}(x)]| = \arccos\left[\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right]$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \arcsin(\operatorname{th}(x)) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$

Ex 10 Soit f une fonction dérivable en a. Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

Ex 11 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$

Ex 12 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des réels et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant |\sin(x)|$. Montrer que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$

Ex 14 Pour tout paramètre m, on définit $f_m : x \mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$ dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_m$.

a) Montrer que toutes les tangentes au point d'abscisse $x = 0$ aux courbes $\mathcal{C}_m$ sont parallèles.

b) Montrer que toutes les tangentes au point d'abscisse $x = 1$ aux courbes $\mathcal{C}_m$ sont concourantes.

Ex 15 Soient $0 < a < b$. et $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2$$

Ex 16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$. Quel est le sens de variation de $f \circ f$? de $f \circ f \circ f$?

Redémontrer ces résultats en supposant f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex 17 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y-x|^{\alpha}$, où $k > 0$ et $\alpha > 1$.

Montrer que f est constante sur I (intervalle de $\mathbb{R}$)

Ex 18 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \leqslant f(x)$ et $f(0) = 0$.

Etudier les variations de $g(x) = e^{-x}f(x)$, puis en déduire f.

Ex 19 a) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions de classe C^1 sur I sont de classe C^1 sur I.

b) Montrer que la composée de deux fonctions de classe C^1 l'est aussi.

Ex 20 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et paire (resp. impaire, resp. T-périodique). Que peut-on dire de f'?

Ex 21 Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans un intervalle à préciser.

Sur quel intervalle J sa réciproque est-elle dérivable? Calculer alors la dérivée de f^{-1} sur J.

Ex 22 On pose $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle à préciser. On note g sa réciproque.

b) Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer g' en fonction de g.