EXERCICE 1 Résolution sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation (I) : $4\sin^2(x) + 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos(x) - \sqrt{2} - 4 > 0$.

Posons $y = \cos x \in [-1, 1]$, de sorte que (I) s'écrive

$$4\left(1-y^2\right) + 2\left(1+\sqrt{2}\right)y - \sqrt{2} - 4 > 0 \Longleftrightarrow 4y^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)y + \sqrt{2} < 0 \ \ (\$)$$

Le polynôme $4y^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)y + \sqrt{2}$ admet les deux racines $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, toutes deux dans $[-1, 1]$.

Pour s'en convaincre, on peut observer que la somme des racines est $\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et le produit $\frac{\sqrt{2}}{4}$. L'idée vient alors assez vite... Sinon, il y a toujours le truc pointu, qui vaut

$$\Delta = 4\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{2}\right) = 4\left(\left(1+2\sqrt{2}+2\right) - 4\sqrt{2}\right) = 4\left(1 - 2\sqrt{2} + 2\right) = 4\left(1-\sqrt{2}\right)^2$$

Ainsi

$$(\$) \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(signe du trinôme)}$$

et donc

$$(I) \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A l'aide d'un dessin, on conclut (en se rappelant qu'on travaille sur $[0, 2\pi]$)

$$\boxed{(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou} \\ \dfrac{5\pi}{3} < x < \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}}$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right[}$$

EXERCICE 2 Pour n entier naturel, on pose:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)\times(n!)^2}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}$$

1. En simplifiant les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs on parvient vite à

$$\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5 \text{ et } a_4 = 14}$$

Puis

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0a_0 = 1, \quad S_2 = a_0a_1 + a_1a_0 = 2,\ S_2 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 5 \\ S_3 &= a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 14 \end{aligned}$$

On peut conjecturer : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}$... puisque $\boxed{S_0 = a_1,\ S_1 = a_2,\ S_2 = a_3 \text{ et } S_3 = a_4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le changement d'indice $k' = n - k$ donne immédiatement $T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_{n-k} a_k$.

On a alors

$$T_n = n\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k - \sum_{k=0}^{n} k a_{n-k} a_k = nS_n - T_n$$

Il vient bien

$$\boxed{2T_n = nS_n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $(n+2)\, a_{n+1}$:

$$(n+2)a_{n+1} = \frac{(n+2)\,(2n+2)!}{(n+2)\times((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)^2\,(n!)^2} = \frac{2\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)\,(n!)^2}$$

Finalement

$$\boxed{(n+2)a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\, a_k a_{n+1-k}$$

Isolons le premier terme puis tranlatons l'indice :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, a_k a_{n+1-k} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k}$$

En utilisant la question précédente

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2\,(2k+1)\, a_k a_{n-k} = a_{n+1} + 2\,(2T_n + S_n)$$

On a montré que $2T_n = nS_n$, donc en remplaçant

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(nS_n + S_n)$$

Soit

$$\boxed{T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n}$$

Alors, comme $2T_{n+1} = (n+1)\,S_{n+1}$, on a $T_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+3}{2} S_{n+1}$, d'où

$$\boxed{\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n}$$

5. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) :\ S_n = a_{n+1}$

– $P(0)$ est vraie, nous l'avons vu en première question

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$: la dernière égalité donne d'après $P(n)$
$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)\, a_{n+1}$$
Or la formule de la question 3. appliquée à $n+1$ donne : $(n+3)a_{n+2} = 2\,(2n+3)\, a_{n+1}$. Il s'ensuit sans trop de difficulté que
$$aS_{n+1} = a_{n+2} \quad \text{CQFD.}$$
- Par principe de récurrence, notre prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier n.

$\boxed{\textbf{EXERCICE 3}}$

On se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs, et on suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2$$

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $x_n = n$.

Considérons à cet effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat $H(n) : \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ x_k = k$.

- Initialisation : puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{1} x_k\Big)^2$, on a $x_1^3 = x_1^2$. Comme $x_1 > 0$, il vient $x_1 = 1$, *i.e.* $H(1)$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$, et prouvons $H(n+1) : \forall k \in [\![1, n+1]\!]\,,\ x_k = k$

  Puisque par hypothèse de récurrence $\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ x_k = k$, il suffit de montrer que $x_{n+1} = n + 1$.

  Partons de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big)^2$, c'est-à-dire

  $$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + x_{n+1}^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\Big)^2$$

  ou, d'après l'hypothèse faite sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

  $$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 + x_{n+1}^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 + 2x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}^2$$

  Il vient

  $$x_{n+1}^3 = 2x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}^2$$

  Or par hypothèse de récurrence $\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ x_k = k$, et donc $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$. Il en résulte

  $$x_{n+1}\left(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)\right) = 0 \overset{x_{n+1}>0}{\Rightarrow} x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0$$

  L'équation du second degré $x^2 - x - n(n+1) = 0$ admet assez évidemment les racines $-n$ et $n + 1$.

  Comme $x_{n+1} > 0$, on peut conclure à

  $$x_{n+1} = n + 1 \quad \text{CQFD.}$$

- Conclusion : le principe de récurrence valide donc $H(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraine en particulier

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n}$$

Remarque : on n'a pas supposé pour l'hérédité que $x_n = n$, mais $x_k = k$ pour **tous les** k **inférieurs à** n.
On dit que l'on a fait une **récurrence forte.**

EXERCICE 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, ..., a_n des réels strictement positifs. On pose

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(k-1)/k}$$

On fixe un réel λ strictement supérieur à 1 et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_k : x \mapsto x^{(k-1)/k} - \lambda x$

1. Dans cette question on fixe que $k \geqslant 2$

a) $\frac{k-1}{k}$ n'étant pas un entier, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par somme d'usuelles)

b) Etudions les variations de f_k sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x > 0$, $f_k'(x) = \dfrac{k-1}{k} x^{-1/k} - \lambda$.

Comme $-\frac{1}{k} < 0$, f_k' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et s'annule au point $x_k > 0$ vérifiant

$$\frac{k-1}{k} x_k^{-1/k} = \lambda \quad \text{soit} \quad x_k^{-1} = \left(\frac{\lambda k}{k-1}\right)^k \quad \text{ou} \quad \boxed{x_k = \left(\frac{k-1}{\lambda k}\right)^k}$$

f_k est donc croissante sur $]0, x_k[$ et décroissante sur $]x_k, +\infty[$. $\boxed{\text{Elle admet un maximum en } x_k.}$

c) On a alors

$$f_k(x_k) = \left(\frac{k-1}{\lambda k}\right)^{k-1} - \lambda\left(\frac{k-1}{\lambda k}\right)^k = \left(\frac{k-1}{\lambda k}\right)^{k-1}\left(1 - \lambda\frac{k-1}{\lambda k}\right) = \left(\frac{k-1}{\lambda k}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{f_k(x_k) = \frac{1}{\lambda^{k-1}} \times \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}}$$

d) Comme $k \geqslant 2$ (et $k - 1 \geqslant 1$) on en déduit que $0 \leqslant (k-1)^{k-1} \leqslant k^{k-1} \leqslant k^k$. Mais alors

$$\boxed{f_k(x_k) \leqslant \frac{1}{\lambda^{k-1}}}$$

2. Comme $f_k(x_k)$ est maximum pour f, on en déduit : $\forall k \geqslant 2$, $\forall x > 0$, $f_k(x) \leqslant \dfrac{1}{\lambda^{k-1}}$.

Remarquons que cette inégalité est encore valable pour $k = 1$ ($\forall x > 0$, $f_1(x) = 1 - \lambda x \leqslant 1$).

On a ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ f_k(a_k) \leqslant \frac{1}{\lambda^{k-1}} \quad i.e. \quad a_k^{(k-1)/k} - \lambda a_k \leqslant \frac{1}{\lambda^{k-1}}$$

Par sommation

$$T - \lambda S \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{k-1}} \overset{\text{translation}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \overset{\lambda \neq 1}{=} \frac{1 - 1/\lambda^{n+1}}{1 - 1/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\left(1 - 1/\lambda^{n+1}\right)$$

Comme $\lambda > 1$, on a $1 - 1/\lambda^{n+1} > 0$, $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} > 0$, et donc $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1}\left(1 - 1/\lambda^{n+1}\right) \leqslant \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$. Il vient :

$$\boxed{T \leqslant \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda - 1}}$$

3. Pour $x > 1$ on définit $g(x) = xS + \dfrac{x}{x-1}$.

a) L'étude de g sur $]1, +\infty[$ n'est pas difficile : $\forall x > 1$, $g(x) = xS + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ donc $g'(x) = S - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

g' est donc clairement croissante sur $]1, +\infty[$, et s'annule lorsque

$$(x-1)^2 = \frac{1}{S} \iff \left[x = 1 - \frac{1}{\sqrt{S}} < 1 \text{ ou } x = 1 + \frac{1}{\sqrt{S}} = \alpha > 1\right]$$

(rappelons que $S > 0$). Ainsi g est décroissante sur $]1, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$, et atteint un minimum en α. Ce minimum vaut alors

$$g(\alpha) = S\left(1 + \frac{1}{\sqrt{S}}\right) + 1 + \frac{1}{1/\sqrt{S}} = S + \sqrt{S} + 1 + \sqrt{S} = S + 2\sqrt{S} + 1$$

Soit

$$\boxed{g(\alpha) = \left(\sqrt{S} + 1\right)^2}$$

b) On prend alors $\lambda = \alpha$: l'inégalité du 2. s'écrit $T \leqslant g(\lambda) = \left(\sqrt{S} + 1\right)^2$, d'où

$$\boxed{\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S} + 1} \quad \text{(puisque} T > 0 \text{ et } \sqrt{S} + 1 > 0\text{)}$$