Langage mathématique, logique et ensembles

1. Rudiments de logique mathématique

1.1. Propositions

a) **<u>Définition</u> :** une **proposition mathématique** P, ou **assertion**, est une "phrase", qui, même écrite en langage symbolique, doit comporter un sujet et un <u>verbe</u>, et qui peut recevoir la valeur **vrai** (V) ou la valeur **faux** (F), exclusivement.

Exemple : P : "le produit de deux réels négatifs est positif" est une proposition vraie
Q : $\pi = 3.14$ est une proposition fausse.

Remarque 1 : "on suppose P" signifie : "on suppose P vraie".

Remarque 2 : en informatique, on parle d'**expression booléenne** (référence au logicien George Boole)

b) **<u>Négation</u> :** si P est une proposition, $\overline{P}$ (ou non$P$) désigne sa **négation** ou **proposition contraire**.

C'est la proposition qui est fausse si P est vraie, et vraie si P est fausse : (tableau de vérité de $\overline{P}$)

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple : si x est un réel, la proposition $P : x \geqslant 0$ a pour négation $\overline{P} : x < 0$.

Remarque : lorsque deux propositions P et Q ont même tableau de vérité, ont dit qu'elles sont équivalentes, et on note parfois $P \equiv Q$. Par exemple, on a pour une proposition P : non(non$P$) $\equiv P$

1.2. Quantificateurs

a) **<u>Prédicats</u> :** une proposition $P(x)$ dépendant d'un élément x d'un ensemble E s'appelle **prédicat**.

Par exemple $P(x)$: $x^2 - x - 1 \geqslant 0$ dépend du réel x. $P(2)$ est une proposition vraie, $P(1)$ est fausse.

Attention : $x^2 - x - 1$ n'est pas une proposition ! (c'est une expression).

b) **<u>Quantificateur universel</u> :** $\boxed{\forall x \in E,\ P(x) \text{ signifie "}\textbf{quel que soit } x \text{ dans } E,\ P(x) \text{ est vraie"}}$

Exemple : "f est positive sur l'intervalle I" se traduit par : $\forall x \in I\ ,\ f(x) \geqslant 0$.

Remarque : la proposition $\forall x \in E\ ,\ P(x)$ ne dépend pas de x. La lettre x est **muette** de sorte que

$$(\forall x \in E\ ,\ P(x)) \equiv (\forall t \in E\ ,\ P(t))$$

c) **<u>Quantificateur existentiel</u> :** $\boxed{\exists x \in E \ /\ P(x) \text{ signifie "}\textbf{il existe } x \text{ dans } E \textbf{ tel que } P(x) \text{ est vraie"}}$

Remarque : "il existe" sous-entend "il existe **au moins**"; on notera $\exists!$ pour "il existe **un seul**".

Exemple 1 : $\exists x \in \mathbb{R} \ /\ x^2 - x - 1 = 0$ se lit : "il existe un réel x **tel que** $x^2 - x - 1 = 0$".

Exemple 2 : le quantificateur $\exists$ s'utilise pour exprimer des phrases du type "...est de la forme..., où...est...".
Par exemple $P(n)$: "n est un entier impair" se traduit par : "n est de la forme $2k+1$, où k est un entier"
$P(n)$ s'écrit "mathématiquement" : $\exists k \in \mathbb{N} \ /\ n = 2k+1$

Remarque : l'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est important :
Si une proposition commence par $\forall x \in E,\ \exists y \in F \ /\ \ldots$, y est conditionné par x, c'est à dire dépend de x.
En revanche, dans $\exists y \in F \ /\ \forall x \in E, \ldots$, y est indépendant de x.

Exemple : "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$

En revanche, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R} \ / \ u_n \leqslant M$ est une banalité : il suffit de prendre $M = u_n$!!

d) **Négations :** $\boxed{\text{la négation de } \forall x \in E,\ P(x) \text{ est } \exists x \in E \ / \ \overline{P}(x)}$

Exemple 1 : P : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ a pour négation $\overline{P}$:

Exemple 2 : Q : " $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" a pour négation : $\bar{Q}$:

1.3. Connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions.

a) **Conjonction, disjonction :**

(i) P et Q, notée aussi $P \wedge Q$, est la proposition qui n'est vraie que lorsque les deux propositions sont vraies.

(ii) P ou Q, notée aussi $P \vee Q$, est la proposition qui n'est vraie que lorsqu'au moins une proposition est vraie.

Exercice : établir les tableaux de vérité de $P \wedge Q$ et $P \vee Q$.

Remarque : le "ou" mathématique est **inclusif**.

(iii) Négations : $\boxed{\text{la négation de } P \textbf{ et } Q \text{ est } \overline{P} \textbf{ ou } \overline{Q}}$ (soit $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$)

Exemple : si $x \in \mathbb{R}$, alors P : $-1 \leqslant x \leqslant 1$ a pour négation :

Remarque : P ou (Q et R) $\equiv$ (P ou Q) et (P ou R)
P et (Q ou R) $\equiv$ (P et Q) ou (P et R).

b) **Implication :**

(i) $\boxed{P \Longrightarrow Q \ (P \textbf{ implique } Q) \text{ est la proposition qui signifie : } \textbf{si } P \text{ est vraie, } \textbf{alors } Q \text{ aussi}}$

Autrement dit la proposition $P \Longrightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

Le tableau de vérité de $P \Longrightarrow Q$ montre que $\boxed{(P \Longrightarrow Q) \equiv \left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)}$

Exemple : $2 = 3 \Longrightarrow 1 = 4$ est une proposition vraie.

(ii) Réciproque : $Q \Longrightarrow P$ est appelée **réciproque** de $P \Longrightarrow Q$, et n'est pas toujours vraie si $P \Longrightarrow Q$ l'est.

Exemple : $x \geqslant 2 \Longrightarrow x^2 \geqslant 4$ est vraie, mais la réciproque $x^2 \geqslant 4 \Longrightarrow x \geqslant 2$ est fausse.

(iii) Négation : $\boxed{\text{la négation de } P \Longrightarrow Q \text{ est } P \textbf{ et } \overline{Q}}$ (soit $\overline{P \Longrightarrow Q} \equiv P \wedge \overline{Q}$)

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant 0)$ a pour négation :

Remarque : pour infirmer une implication, on trouve donc un cas qui valide l'hypothèse et infirme la conclusion. Ceci est utilisé dans les raisonnements par l'absurde.

(iv) Contraposée : la proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

Elle est logiquement équivalente à $P \Rightarrow Q$, donc vraie si et seulement si $P \Rightarrow Q$ l'est :

$$\boxed{(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \equiv (P \Rightarrow Q)}$$

Attention : ne pas confondre avec la réciproque, qui elle n'est pas forcément vraie si $P \Rightarrow Q$ l'est.

Par exemple, "n est multiple de $4 \Rightarrow n$ est pair" a pour contraposée :

et pour réciproque :

c) Equivalence :

$P \Longleftrightarrow Q$ ("P **est équivalente à** Q") est la proposition qui signifie "P est vraie **si et seulement si** Q est vraie"

On a alors

$$\boxed{(P \Longleftrightarrow Q) \equiv (P \Longrightarrow Q \quad \textbf{et} \quad Q \Longrightarrow P)}$$

Lorsque deux propositions P et Q sont équivalentes, on peut remplacer l'une par l'autre "sans perdre d'information".

Exercice : établir la table de vérité de $P \Longleftrightarrow Q$

Exemple 1 : l'équivalence est utilisée comme lien logique lors des routines élémentaires.

Par exemple dans la résolution des équations : $2x + 3 = 0 \Longleftrightarrow 2x = -3 \Longleftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Exemple 2 : elle est aussi utilisée dans les **définitions** : ABC est isocèle en A si et seulement si $AB = AC$

Exemple 3 : elle permet aussi la **caractérisation** d'une propriété :

$$ABC \text{ est rectangle en } A \Longleftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{(Pythagore)}$$

Remarque 1 : les relations $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ sont **transitives** : si $\boxed{P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R, \text{ alors } P \Rightarrow R}$

Cela permet les "chaines" d'équivalences et/ou d'implications

Remarque 2 : **conditions nécessaires et suffisantes**

$P \Longrightarrow Q$ se lit aussi : "pour que P soit vraie, il **faut** que Q soit vraie" (la condition Q est **nécessaire**),

$Q \Longrightarrow P$ se lit aussi : "pour que P soit vraie, il **suffit** que Q soit vraie" (la condition Q est **suffisante**).

Si $P \Longleftrightarrow Q$, on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour que P soit vraie

Remarque 3 : on a la tautologie (proposition toujours vraie) : $[P \text{ et } (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$.

Il s'agit du syllogisme classique : "Si P est vraie alors Q est vraie . Or P est vraie; donc Q est vraie".

2. Ensembles

2.1. Notations des ensembles

a) **Généralités :** les ensembles s'écrivent en général entre accolades.

Appartenance : $x \in A$ signifie que x est **élément** de A (x **appartient à** A).

Inclusion : $A \subset B$ signifie que l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B : tout élément de A est dans B

Autrement dit l'inclusion $A \subset B$ s'exprime par l'**implication** : $\boxed{(x \in A) \Rightarrow (x \in B)}$

Exemples : $*$ L'**ensemble vide** est noté $\varnothing$.

$*$ Un ensemble à un seul élément $E = \{a\}$ est appelé **singleton**.

$*$ Un ensemble à deux éléments distincts $E = \{a, b\}$ est appelé **paire**.

$*$ L'ensemble des chiffres est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = [\![1, 9]\!]$

Ensemble des parties : si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses **parties**, ou **sous ensembles**

Exemple : si $E = \{a, b, c\}$,alors $\mathcal{P}(E) =$

b) **Ensembles définis "en compréhension" :**

$\boxed{A = \{x \in E \;/\; P(x)\}}$ se lit "ensemble A des éléments x de E qui vérifient la proposition $P(x)$ ".

Les éléments de A sont donc caractérisés par : $\boxed{x \in A \Longleftrightarrow P(x) \text{ est vraie}}$

Exemple 1 : décrire en compréhension et en extension l'ensemble S des solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$

Exemple 2 : **intervalles de** $\mathbb{R}$. Pour $a \leqslant b$ réels, décrire en compréhension les huit types d'intervalles :

$[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$

Exemple 3 : **équation d'un ensemble de points** : la droite D d'équation $2x + 3y - 1 = 0$ s'écrit $D =$

c) **Ensembles "indexés" (ou "paramétrés") :** si $a(x) \in E$ est une expression dépendant de x, l'ensemble A des éléments de la forme $a(x)$ où x parcourt l'ensemble I s'écrit :

$$\boxed{A = \Big\{a(x) \,, \quad \underbrace{x \in I}_{\text{"}x\text{ parcourant }I\text{"}} \Big\}}$$

Les éléments de A sont donc caractérisés par : $\boxed{y \in A \Longleftrightarrow \exists x \in I \;/\; y = a(x)}$ (écrire A en compréhension)

Exemple 1 : paramétrer l'ensemble S des solutions de l'équation $\cos x = 0$

Exemple 2 : paramétrer l'ensemble $\mathbb{Q}$

2.2. Opérations sur les ensembles

a) **Réunion-Intersection :** si A et B sont deux parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble E, on note :

$A \cap B = \{x \in E \;/\; x \in A$ **et** $x \in B\}$	(**intersection de** A et B)
$A \cup B = \{x \in E \;/\; x \in A$ **ou** $x \in B\}$	(**réunion de** A et B)
$\complement_E A = \{x \in E \;/\; x \notin A\}$	(**complémentaire de** A, aussi noté $\overline{A}$)
$A \setminus B = \{x \in A \;/\; x \notin B\} = A \cap \overline{B}$	(**différence**)

Exemple 1 : $\complement_{\mathbb{R}} \,]-1; 1[\,=$

Exemple 2 : si p, q sont entiers, on note $\boxed{[\![p, q]\!] = [p, q] \cap \mathbb{Z}}$

Distributivité : $\forall (A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$, $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \bullet\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}}$

Lois de Morgan : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B \\ \bullet\ \complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B \end{array}}$

Remarque 1 : $\boxed{\complement_E (\complement_E A) = A}$

Remarque 2 : $\boxed{\text{si } A \subset B, \text{ alors } \complement_E B \subset \complement_E A}$ et inversement

b) <u>Généralisation</u> : si $A_1, ..., A_n$ sont des sousensembles de E, on note :

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

Plus généralement si les $(A_i)_{i \in I}$ sont des sous ensembles indexés sur l'ensemble I, on note :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ la réunion de tous les } A_i \text{ et } \bigcap_{i \in I} A_i \text{ l'intersection de tous les } A_i$$

Plus précisément :

$$\boxed{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I \ / \ x \in A_i} \quad \text{et} \quad \boxed{x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, \ x \in A_i}$$

Exemple : écrire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la tangente de plus de quatre façons différentes.

Partitions : on dit que $A_1, ..., A_n$ forment une partition de E lorsque :

$$\boxed{\text{les } A_i \text{ sont non vides, disjoints et leur réunion est } E}$$

Ce qui s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} \text{(i) } \forall i \in [\![1,n]\!], \ A_i \neq \varnothing \\ \text{(ii) } \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E \\ \text{(iii) } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}}$$

c) <u>Produit cartésien</u> : le produit cartésien de deux ensembles A et B, noté $A \times B$ (lire A "**croix**" B) est l'ensemble des **couples** (a,b), où a est élément de A, et b élément de B :

$$\boxed{A \times B = \{(a,b) \ , \ a \in A \ , \ b \in B\}}$$

Attention : ne pas confondre **couple** (a,b) et **paire** $\{a,b\}$: $\{a,b\} = \{b,a\}$ mais $(a,b) \neq (b,a)$.

Exemple : on peut écrire : $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

Généralisation 1 : on note de même $A \times B \times C$ l'ensemble des **triplets** (a,b,c), $a \in A, b \in B, c \in C$

Généralisation 2 : l' ensemble des n-**uplets** $(a_{1,...}, a_n)$ d'éléments de A se note A^n :

$$\boxed{A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{n exemplaires}}}$$

Exemple : on **identifiera** l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des couples de réels à un **plan** muni d'un système de coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
De la même manière, l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels sera identifié à l'espace.

Exercice : Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, comment s'interprète graphiquement l'ensemble $R = [a,b] \times [c,d]$?