Nombres complexes

1. Rappels et généralités

1.1. Définitions

$$\mathbb{C} = \left\{z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}, \text{ où le complexe } i \text{ vérifie } i^2 = -1$$

a) <u>**Condition d'égalité :**</u> pour a, a', b, b' **réels**, on a $\boxed{a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')}$.

Cela signifie que l'écriture d'un complexe z sous la forme $z = a + ib$ est unique.

Les nombres **réels** $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$ sont donc uniques, et définissent parfaitement z, de sorte que :

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z).$$

Ce résultat permet ainsi d'**identifier** parties réelles et parties imaginaires en cas d'égalité de deux complexes.

Remarque : sous ensembles de $\mathbb{C}$: • <u>les réels</u> : on a : $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,z = 0 \Longleftrightarrow z = \mathrm{Re}\,z$

• <u>les imaginaires purs</u> : on a $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \,/\, z = ix \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\,z = 0$

Exercice : soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathrm{Re}\,(z^n)$ et $\mathrm{Im}\,(z^n)$ en fonction de x et y.

b) <u>**Opérations :**</u> soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (a, a', b, b' réels)

(i) <u>Addition</u> : la somme de z et z' est définie par $\boxed{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$

(ii) <u>Multiplication</u> : le produit de z et z' est défini par $\boxed{zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)}$

(iii) <u>Inverse</u> : si z est non nul, il admet l'inverse $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}}$

Remarque 1 : ces opérations coïncident avec l'addition, la multiplication et l'inversion sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2 : une factorisation importante : $\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z^2 + z'^2 = (z + iz')(z - iz')}$

Attention : on évitera, dans les démonstrations, d'écrire systématiquement un complexe z sous sa forme algébrique $a + ib$, ce qui alourdit souvent les calculs.

1.2. Conjugaison

a) <u>**Définition :**</u> si $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $\boxed{\overline{z} = a - ib}$, de sorte que $\boxed{\overline{z} = \mathrm{Re}\,z - i\,\mathrm{Im}\,z}$

b) <u>**Propriétés élémentaires :**</u> si z et z' sont deux complexes, alors :

(i) $\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ (ii) $\boxed{\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}}$

(iii) $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$ (si $z' \neq 0$) (iv) $\boxed{\overline{(z^n)} = \overline{z}^n}$ pour tout entier n

(v) $\boxed{z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z}$ (vi) $\boxed{z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z}$

c) <u>**Formules importantes :**</u> de $\begin{cases} z = \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z \\ \overline{z} = \mathrm{Re}\,z - i\,\mathrm{Im}\,z \end{cases}$, on tire $\boxed{\begin{cases} \mathrm{Re}\,z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ \mathrm{Im}\,z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases}}$

1.3. Module

a) **<u>Définition</u> :** si $z = a + ib$, alors $z\,\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ est un réel positif. On pose

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_+}$$

Le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

b) **<u>Propriétés élémentaires</u> :** si z et z' sont deux complexes, alors

(i) $\boxed{|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0}$ (ii) $\boxed{|-z| = |\overline{z}| = |z|}$

(iii) $\boxed{|zz'| = |z|\,|z'|}$ (iv) $\boxed{\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}}$ (si $z' \neq 0$)

(v) $\boxed{|\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|}$

A RETENIR : $\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$ qui permet de travailler avec les modules sans passer par la forme algébrique $a + ib$ et l'expression lourde $\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque : si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ $\left(\textbf{cf}.\ \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}\right)$

c) **<u>Inégalité triangulaire</u> :** soient z et z' deux nombres complexes. Alors

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

Avec **égalité** si et seulement si les vecteurs d'affixes z et z' sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \ / \ z' = kz$$

Attention : en changeant z' en $-z'$, on obtient $\boxed{|z - z'| \leqslant |z| + |z'|}$

2ème inégalité triangulaire : on a la **minoration** : $\boxed{|z - z'| \geqslant \big||z| - |z'|\big|}$

1.4. Représentation des complexes

le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) **<u>Complexes et vecteurs/points du plan</u> :** soient a et b deux réels.

- Au complexe $z = a + ib$, on associe le vecteur $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ appelé **vecteur image** de z.
  Inversement, au vecteur $\vec{v}\binom{a}{b}$ on associe le complexe $z = a + ib$, appelé **affixe** de $\vec{v}$, et noté $\operatorname{aff}(\vec{v})$.
- De la même manière au complexe $z = a + ib$, on associe le point $A\binom{a}{b}$, appelé **point image** de z.
  Inversement, au point $A\binom{a}{b}$ on associe le complexe $z = a + ib$, appelé **affixe** de A, et noté $\operatorname{aff}(A)$.

Remarque 1 : on notera souvent $\vec{v}\,(z)$ (resp. $A\,(z)$) pour : "$\vec{v}$ (resp. A) ayant pour affixe z"

Remarque 2 : l'affixe de A est aussi l'affixe de $\overrightarrow{OA}$

Propriété 1 : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous <u>réels</u> λ et μ, $\boxed{\operatorname{aff}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \operatorname{aff}(\vec{u}) + \mu \operatorname{aff}(\vec{v})}$

Propriété 2 : si $A\,(z_A)$ et $B\,(z_B)$, alors $\boxed{\operatorname{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A}$

Remarque 3 : si $A(z)$, le point image de $\overline{z}$ est le symétrique de A par rapport à la droite (Ox) .

b) **<u>Module</u> :** soit $z = a + ib$ un complexe ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$).

- Si $\vec{v}$ est le vecteur d'affixe z, alors $\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \|\vec{v}\|}$
- Si A est le point d'affixe z, alors $\boxed{|z| = OA}$
- On en déduit que si $A\,(z_A)$ et $B\,(z_B)$ sont deux points alors $\boxed{AB = |z_B - z_A| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$

A RETENIR : on interprète toujours les modules comme des normes et des distances.

Remarque : l'inégalité triangulaire $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ s'interprète alors comme :

$$\boxed{\text{La norme de la somme de deux vecteurs est inférieure à la somme de leurs normes}}$$

Plus géométriquement, "un côté d'un triangle est inférieur à la somme des deux autres", et plus banalement, "le plus court chemin entre deux point est la ligne droite".

2. Exponentielle complexe

2.1. Notation $e^{i\theta}$

a) **<u>Définition</u> :** si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Exemples : A SAVOIR ♡♡♡♡

$\boxed{e^0 = e^{2i\pi} = 1}$ $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ $\boxed{e^{i\pi/2} = i}$

$\boxed{e^{i\pi/4} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$ $\boxed{e^{i\pi/3} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}}$ $\boxed{e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}}$ $\boxed{e^{2i\pi/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$

Remarque : on a $\boxed{e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 0\ [2\pi]}$

b) **<u>Complexes de module 1</u> :** on note $\mathbb{U}$ l' ensemble des complexes de module 1, soit

$$\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}}$$

Géométriquement, $\mathbb{U}$ correspond au **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}(O, 1)$.

- Pour tout réel θ, $e^{i\theta}$ est de module 1, c'est-à-dire $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
- Inversement, tout complexe z de module 1 peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{U}\text{, ensemble des complexes de module } 1\text{, est aussi l'ensemble des complexes de la forme } e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}}$$

Remarque : on a : $\boxed{z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}}$

2.2. Propriétés de l'exponentielle

On fixe θ et θ' dans $\mathbb{R}$.

a) <u>Propriété fondamentale</u> : $\boxed{e^{i\left(\theta+\theta'\right)} = e^{i\theta}e^{i\theta'}}$

Cas particuliers : $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$ et $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = ie^{i\theta}$ (**Cf.** formules d'angles associés).

b) <u>Formule de de Moivre ♡</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

c) <u>Conjugaison</u> : $\boxed{\overline{\left(e^{i\theta}\right)} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}}$

d) <u>Formules d'Euler ♡</u> : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{array}\right.}$

2.3. Forme trigonométrique d'un complexe non nul

a) <u>Théorème</u> :

> Tout complexe z **non nul** peut s'écrire sous la forme :
> $$z = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} \rho > 0 \\ \theta \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Nécessairement $\rho = |z|$ et $\theta = \arg z = \widehat{(\vec{i}, \vec{v})}\ [2\pi]$ où $\vec{v}$ est le vecteur image de z.

b) <u>Unicité</u> : soient ρ et ρ' deux réels **strictement positifs** et θ, θ' deux réels. Alors

$$\boxed{\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \left\{\begin{array}{l} \rho = \rho' \\ \theta = \theta'\ [2\pi] \end{array}\right.}$$

Remarque 1 : l'unique valeur d'$\arg z$ dans $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal, parfois noté $\operatorname{Arg} z$.

Remarque 2 : la forme trigonométrique est une forme **factorisée** :

$$\underbrace{\rho}_{\in\mathbb{R}^+}\underbrace{e^{i\theta}}_{\in\mathbb{U}}$$

Exemples : mettre sous forme trigonométrique les complexes $1+i,\ -1+\sqrt{3}i$ et -3.

c) <u>Liens avec la forme algébrique</u> : soit $z \in \mathbb{C}^*$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $\rho = |z|$, $\theta = \arg z\ [2\pi]$. Alors

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right.} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \qquad \boxed{\tan\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0)}$$

Exercice : soit $x \in \mathbb{R}$. Donner l'argument principal de $z = -1 + ix$ à l'aide des fonctions $\left\{\begin{array}{l} \arccos \\ \arcsin \\ \arctan \end{array}\right.$

2.4. Angles et arguments

a) **Propriétés de l'argument :** soient $(z,z') \in \mathbb{C}^{*2}$

(i) $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ $[2\pi]$	(ii) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z = \arg(\bar{z})$ $[2\pi]$
(iii) $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z$ $[2\pi]$	(iv) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \arg z$ $[2\pi]$

Remarque : $\arg(-z) = \arg z + \pi$ $[2\pi]$

Morale : la forme trigonométrique est mieux adaptée aux produits dans $\mathbb{C}$ que la forme algébrique :

$$\begin{cases} zz' = \rho\rho' e^{i\left(\theta+\theta'\right)} : \text{on multiplie les modules et on ajoute les arguments.} \\ \dfrac{z'}{z} = \dfrac{\rho'}{\rho} e^{i\left(\theta'-\theta\right)} : \text{on divise les modules et on retranche les arguments.} \end{cases}$$

b) **Angles de deux vecteurs :**

(i) Soient $\vec{v}(z)$, et $\vec{v'}(z')$ deux vecteurs non nuls). On a $\boxed{\widehat{(\vec{v},\vec{v'})} = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \ [2\pi]}$

(ii) Soient $A(a),\ B(b),\ C(c),\ D(d)$ quatre points distincts. Alors $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) \ [2\pi]}$

En particulier

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \ [2\pi]}$$

Exemple : on donne $A(1+i), B(2+4i), C(-1+5i)$: calculer $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

2.5. Applications à la trigonométrie

a) **Module et argument de $1+e^{i\theta}$, pour $\theta \in \left]-\pi,\pi\right[$**

(i) Idée : factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$: $\quad 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$, d'où

$$\boxed{1+e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

Interprétation : angle moitié

(ii) Cas général : même question si $\theta \in \mathbb{R}$ est quelconque

(iii) On a de même :

$$\boxed{1-e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

Exercice : calculer le module et un argument de $1-e^{i\theta}$ et de $1-e^{2i\theta}$

b) **Sommes trigonométriques :** soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

c) **Linéarisation :** le **binôme de Newton** appliqué à la **formule d'Euler** permet d'écrire $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ comme combinaison linéaire des $\cos(k\theta)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. On écrit donc :

$$\cos^n(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$$

Exemples : linéarisations de $\sin^4(\theta)$ et $\sin^5(\theta)$

Remarque : applications très nombreuses, notamment pour le calcul des primitives.

d) **Polynômes de Tchébychev :**

(i) La **formule de Moivre** $e^{ni\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ s'écrit : $\boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$

En développant grâce au **binôme de Newton** et en identifiant parties réelles et imaginaires, cela permet d'obtenir $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ à l'aide de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemple : calcul de $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

(ii) Ainsi $\cos(n\theta)$ est un "polynôme en $\cos\theta$". Cela signifie qu'il existe un polynôme T_n vérifiant

$$\boxed{\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)}$$

On montrera plus tard que le n-ième polynôme de Tchébychev T_n est unique.

Exemple : calculer $T_1,\ T_2, T_3$ et T_4.

Exercice : calculer une formule générale de $T_n(x)$.

2.6. Exponentielle d'un nombre complexe

a) **Définition :**

(i) soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (a et b réels). On pose $\boxed{e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)}$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Re}(e^{a+ib}) = e^a\cos b \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(e^{a+ib}) = e^a \sin b}$$

(ii) L'écriture $\underbrace{e^a}_{\in\mathbb{R}^+}\underbrace{e^{ib}}_{\in\mathbb{U}}$ est trigonométrique; donc

$$\boxed{|e^z| = e^a = e^{\mathrm{Re}\,z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg(e^z) = b = \mathrm{Im}\,z\ [\pi]}.$$

Exemple : $z = 1 + 2i$ et $t \in \mathbb{R}$: calculer $\mathrm{Re}\left(e^{zt}\right),\ \mathrm{Im}\left(e^{zt}\right),\ |e^{zt}|$ et $\arg\left(e^{zt}\right)$

(iii) Les propriétés algébriques courantes de l'exponentielle restent vraies sur $\mathbb{C}$: pour tous z, z' complexes :

$$\mathbf{1}.\ \boxed{e^{z+z'} = e^z e^{z'}} \qquad \mathbf{2}.\ \boxed{e^{-z} = \frac{1}{e^z}} \qquad \mathbf{3}.\ \boxed{e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}} \qquad \mathbf{4}.\ \boxed{(e^z)^n = e^{nz}}\ (n \in \mathbb{Z})$$

Remarque : on a $\boxed{e^z = 1 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ /\ z = 2ik\pi}$

b) **Existence d'un logarithme complexe :**

$$\boxed{\text{Tout complexe } A \textbf{ non nul} \text{ peut s'écrire sous la forme } A = e^z, \text{ avec } z \text{ complexe.}}$$

Attention : il n'y a pas unicité du complexe z ("logarithme complexe de A").

Tous les $z_k = \ln\rho + i(\theta + 2k\pi)$ conviennent aussi, **ce qui interdit la notation** $\ln$ **dans** $\mathbb{C}$.

Exemples : calculer les logarithmes complexes de $1 + i$ et de -2

3. Racines des nombres complexes

Si A est un complexe A, on appelle racine carrée de A toute solution complexe de l'équation $z^2 = A$
On appelle de même racine cubique de A toute solution complexe de l'équation $z^3 = A$

Exemples : $1 + 2i$ est une racine carrée de $A = -3 + 4i$, et $e^{i\pi/3}$ une racine cubique de -1

3.1. Racines carrées

a) <u>Théorème</u> :

$$\boxed{\text{Tout complexe } A \text{ non nul admet exactement deux racines carrées opposées}}$$

$$\boxed{\text{L'une d'elle est obtenue en prenant la racine carrée du module, et la moitié d'un argument}}$$

Exemples : racines carrées de $A = 1 + i\sqrt{3}$. Racines carrées de i

Remarque : racines carrées de -1

Attention : LA NOTATION $\sqrt{A}$ N A AUCUN SENS LORSQUE A EST COMPLEXE :

En effet il faudrait faire un choix sur l'une des deux racines carrées.

On s'en tiendra impérativement à : "soit a **une** racine carrée de A".

b) <u>Méthode algébrique</u> : (lorsque la forme trigonométrique de A n'est pas "simple")

En écrivant $A = a + ib$ et $z = x + iy$ (a, b, x, y réels) on peut chercher les racines carrées de A de la manière suivante :

$$z^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ |z|^2 = |A| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = |A| \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(|A| + a) \\ y^2 = \frac{1}{2}(|A| - a) \\ 2xy = b \end{cases}$$

La dernière équation détermine si x et y ont même signe, ce qui donne, vu les deux premières équations, deux couples de solutions opposées.

Exemple : racines carrées de $A = 3 - 4i$.

c) <u>Equation du second degré à coefficients complexes</u> :

> L'équation $(E) \quad az^2 + bz + c = 0, \quad$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$ admet deux solutions complexes :
>
> $$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$
>
> où δ est une racine carrée (complexe) du discriminant (complexe) $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemple : résoudre $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

Remarque 1 : dans le cas où $\Delta = 0$, on trouve une unique solution double.

Remarque 2 : dans le cas où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors $\Delta \in \mathbb{R}$, et on retrouve les formules de terminale :

- <u>Si $\Delta > 0$</u> : on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$ et on a les solutions : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- <u>Si $\Delta < 0$</u> : on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et on a les solutions : $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

3.2. Racines cubiques des nombres complexes

a) Les racines cubiques de l'unité et le nombre j : on pose

$$\boxed{j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}}$$

(i) j vérifie la propriété fondamentale $\boxed{j^3 = 1}$ De plus

$$\overline{j} = e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

donc

$$\boxed{\overline{j} = j^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{j}^3 = 1}$$

On dit que j et $\overline{j}$ sont des **racines cubiques de l'unité**.

(ii) Les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ sont 1, j et $\overline{j}$.

Autrement dit 1, j et j^2 sont les seules racines cubiques de l'unité

(iii) Comme $z^3 - 1 = (z-1)\left(z^2 + z + 1\right)$, on en déduit

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0}$$

Remarque : les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$ sont bien $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

b) Cas général :

$$\boxed{\text{Tout complexe non nul } A \text{ admet exactement trois racines cubiques}}$$

Plus précisément si la forme trigonométrique de A est $A = re^{i\alpha}$ $(r > 0)$, alors ses racines cubiques sont obtenues en prenant **la racine cubique** $\sqrt[3]{r}$ **du module** et **le tiers** $\dfrac{\alpha}{3}$ **de l'argument MODULO** $\dfrac{2\pi}{3}$, soit

$$\boxed{\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\alpha}{3}}, \quad \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}}$$

Enfin,

$$\boxed{\text{si } z_0 \text{ est une racine cubique quelconque de } A, \text{ les deux autres sont } jz_0 \text{ et } j^2 z_0}$$

Remarque : 0 admet l'unique racine cubique 0

Exemple 1 : racines cubiques de $-2 + 2i$

Exemple 2 : racines cubiques de -1 ($-1 = e^{i\pi}$ ou $-1 = e^{3i\pi}$?)

c) Egalité des cubes dans $\mathbb{C}$: pour a et b complexes, on a l'équivalence

$$\boxed{a^3 = b^3 \iff \begin{cases} a = b \text{ ou} \\ a = jb \text{ ou} \\ a = j^2 b \end{cases}}$$

On fera donc extrêmement attention dans les équations complexes de degré 3 à ne pas oublier les deux tiers des solutions!!

3.3. Racines n-ièmes des complexes

a) Racines n-ièmes de l'unité :

(i) Définition :

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Une racine } n\text{-ième de l'unité est un nombre complexe } z \text{ vérifiant } z^n = 1}$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Par exemple $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

(ii) Description : il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, données par l'expression

$$\boxed{z_k = e^{2ik\pi/n},\ k \text{ parcourant } [\![0, n-1]\!]}$$

L'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ peut être remplacé par n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs.

Géométriquement, l'ensemble des points d'affixes $z_0, \dots, z_{n-1}$ forme un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

(iii) Suite géométrique périodique : on pose

$$\boxed{\omega = e^{2i\pi/n} \in \mathbb{U}_n}$$

Alors

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\right\}}$$

La suite $\left(\omega^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est **périodique de période** n, i.e.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \omega^{k+n} = \omega^k}$$

De plus on a

$$\boxed{\frac{1}{\omega^k} = \omega^{n-k} = \overline{\omega^k}}$$

(iv) Somme des racines de l'unité : $\boxed{\text{la somme des racines } n\text{-ièmes de l'unité est nulle}}$, soit

$$\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0}$$

b) Racines d'un nombre complexe non nul :

(i) Définition : soit $A = Re^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$.

$$\boxed{\text{On appelle racine } n\text{-ième de } A \text{ toute solution de l'équation } z^n = A}$$

(ii) Description : tout complexe **non nul** $A = Re^{i\alpha}$ admet exactement n racines n-ièmes, données par

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{R}e^{i(\alpha/n + 2k\pi/n)}}$$

où k parcourt un ensemble de n entiers consécutifs. En particulier UNE racine n-ième de A est

$$\boxed{z_0 = \sqrt[n]{R}e^{i\alpha/n}}$$

(iii) Lien avec $\mathbb{U}_n$: soit a **une** racine n-ième de A (quelconque, dite "particulière") : alors

$$\boxed{\text{les autres racines } n\text{-ièmes de } A \text{ s'obtiennent en multipliant } a \text{ par les racines } n\text{-ièmes de l'}\textbf{unité}}$$

Les racines n-ièmes de A sont donc alors, en posant toujours $\omega = e^{2i\pi/n}$:

$$\boxed{a,\ a\omega, \dots,\ a\omega^{n-1}}$$

(iv) Egalité de puissances : soient a et b des complexes. Alors

$$\boxed{a^n = b^n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\ /\ a = \omega^k b}$$

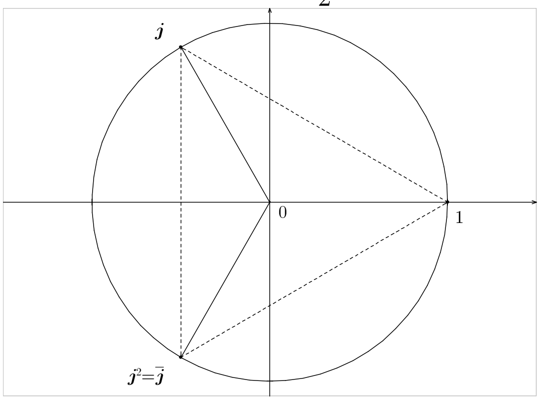
c) Exemples :

(i) **Racines cubiques de l'unité** :

$$\boxed{\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\right\} = \left\{1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\right\} = \left\{1, j, j^2\right\}}$$

avec

$$j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad j^2 = \bar{j} = e^{-2i\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$



$$\boxed{j^3 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{1 + j + j^2 = 0}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{j^{3k} = 1, \quad j^{3k+1} = j, \quad j^{3k+2} = j^2}$$

et

$$\boxed{a^3 = b^3 \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = jb \\ a = j^2 b \end{cases}}$$

(ii) **Racines quatrièmes de l'unité** :

$$\boxed{\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}}$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$

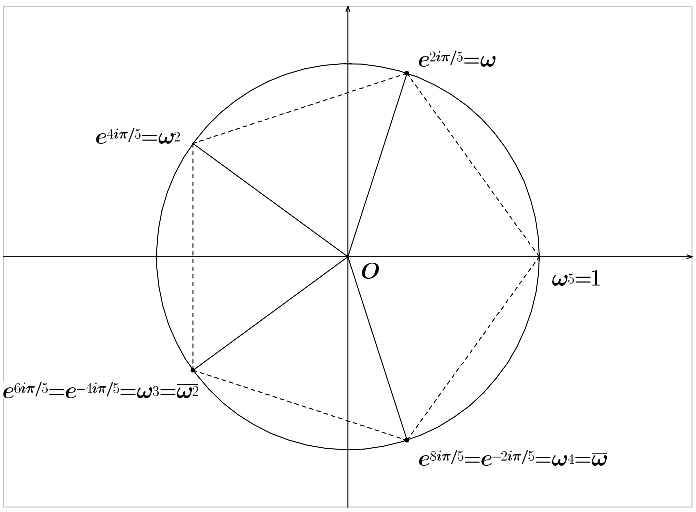
$$\boxed{i^{2k} = (-1)^k, \quad i^{2k+1} = (-1)^k\, i}$$

ët

$$\boxed{a^4 = b^4 \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \\ a = ib \\ a = -ib \end{cases}}$$

(iii) **Racines cinquièmes de l'unité** :

$$\boxed{\mathbb{U}_5 = \left\{1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{-2i\pi/5}, e^{-4i\pi/5}\right\} = \left\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\} \quad \text{avec} \quad \omega = e^{2i\pi/5}}$$



$$\boxed{\omega^5 = 1}$$

$$\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0}$$

$$\boxed{\omega^3 = \overline{\omega^2} \;\text{ et }\; \omega^4 = \overline{\omega}}$$