On rendra seulement une copie par trinôme de colle.

EXERCICE 1 On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x/2)} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que g est continue sur $[0,\pi]$

2. Montrer que g est dérivable en 0, en précisant $g'(0)$.

3. Montrer que $g \in C^1([0,\pi])$. On pourra écrire par exemple $\forall x \in]0,\pi]$, $g'(x) = \dfrac{2x}{\sin(x/2)} - \dfrac{x^2\cos(x/2)}{2\sin^2(x/2)}$.

EXERCICE 2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et étudier sa dérivabilité.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}\left(1 - \text{signe}\left(1-x^2\right)\right)$.

3. Simplifications

a) On suppose que $x \in]-1,1[$. Déduire de la question précédente une expression simple de $f(x)$

b) On suppose que $x \in]1,+\infty[$. Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$.

c) On suppose que $x \in]-\infty,-1[$. donner une expression simple de $f(x)$.

4. Donner l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé

5. On pose $\theta = \arctan x$

a) Montrer que $f(x) = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{4}\arcsin(\sin 2\theta)$.

b) En distinguant trois cas, simplifier $\arcsin(\sin 2\theta)$ et retrouver le résultat de la question 3.

PROBLEME On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$$

1. Etude des variations de f

a) Etudier la continuité à gauche et à droite en 0, la dérivabilité à gauche et à droite en 0, de la fonction f.

b) Etudier les limites et les variations de f. Construire un tableau de variations. Préciser les branches infinies.

2. Dérivées successives de la fonction f et polynômes associés

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-1/x}$$

On montrera au passage la relation $\forall x > 0,\ P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x]P_n(x)\ (*)$

c) Calculer P_n pour $n \in \{0,1,2,3\}$.

d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme constant de P_n.

e) Montrer que le degré de P_n est n et son coefficient dominant est $a_n = (-1)^n(n+1)!$

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la limite à droite en 0 de la fonction $f^{(n)}$.

On admet que cela entraine que f est de classe C^∞ sur $[0,\infty[$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

3. Nouvelles relations entre les polynômes P_n

On considère la fonction g définie sur $]0,\infty[$ par $g(x) = x^2 f(x)$.

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Leibniz sur la relation précédente, démontrer que :

$$\forall x > 0,\ P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x] P_n(x) - n(n+1) x^2 P_{n-1}(x)$$

En déduire $\forall x > 0,\ P_n'(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x)$

4. <u>Facultatif</u> : Etude des racines du polynôme P_n

On admettra qu'un polynôme de degré n admet au maximum n racines réelles, et que si a est racine d'un polynôme P, alors P s'écrit $P(x) = (x-a) Q(x)$ où Q est un polynôme.

a) A l'aide de la relation établie à la question 3.b), montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x > 0$, $P_n(x) \neq 0$ ou $P_{n-1}(x) \neq 0$ (c'est-à-dire : $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ ne peuvent être simultanément nuls).

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, si la fonction polynômiale P_n s'annule en x , alors $P_n'(x) \neq 0$.

En déduire que la fonction change P_n de signe en x .

c) On va montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes dans $]0,+\infty[$

<u>Initialisation</u> : vérifier que cette proposition est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons cette proposition vraie pour un rang $n \geqslant 1$.

On note $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les racines de P_n

i. Déterminer le signe de P_n sur chacun des intervalles $[0, x_1[\,,]x_1, x_2[\,, \ldots,]x_{n-1}, x_n[$.

ii. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que le signe de $P_n'(x_i)$ est $(-1)^i$.

iii. En déduire le signe de $P_{n+1}(x_i)$ (utiliser la relation trouvée à la question 2.b)) .

iv. Etudier la limite de P_{n+1} en $+\infty$ (on distinguera les cas : n pair / n impair. Penser à la question 2.e))

v. En déduire que P_{n+1} admet $n+1$ racines réelles distinctes dans $]0,+\infty[$ et conclure.