Ex 1 Soient I et J deux intervalles et f une bijection de I sur J.

a) Montrer que si f est strictement monotone, alors f^{-1} est strictement monotone de même sens.

b) Montrer que si f est impaire, alors f^{-1} l'est aussi (en supposant que $x \in I \Rightarrow -x \in I$). Cas où f est paire?

Ex 2 Soit $f : [2, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $\forall x \geqslant 2,\ f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Montrer que f est une bijection et calculer sa réciproque. Tracer les courbes de f et de f^{-1}.

Ex 3 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus(-2)$ dans un ensemble à déterminer et calculer sa réciproque. Tracer les courbes de f et de f^{-1}.

Ex 4 Montrer que $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ est une bijection dont on donnera la réciproque.

Ex 5 Exponentielles et logarithmes de base a. On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$

a) Etudier la fonction $\exp_a : x \mapsto \exp_a(x) = a^x$ en discutant sur les valeurs de a.

b) Montrer que si $a \neq 1$ $\exp_a$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ dont on note $\log_a$ la réciproque.
Calculer l'expression de $\log_a(x)$ pour $x > 0$, et montrer que les propriétés algébriques de $\log_a$ sont les mêmes que celles de $\ln$.

c) Calculer directement $\log_2(128)$, $\log_3\left(\dfrac{1}{81}\right)$, $\log_{10}(1000000)$, $\log_{10}\left(10^{-6}\right)$ $\log_2\left(\sqrt{32}\right)$, $\log_{10}(500)$.
Le logarithme en base 10 s'appelle logarithme décimal, et est très utilisé.

Ex 6 Fonctions hyperboliques réciproques :

a) Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et calculer l'expression de sa réciproque, que l'on notera argsh. Calculer la dérivée de argsh.

b) Même question pour la fonction ch de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ (fonction notée argch).

c) Même question pour la fonction th de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ (fonction notée argth).

Ex 7 Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ et $f : x \mapsto \sqrt[3]{g(x)}$

a) Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de g et f, leurs ensembles de dérivabilité et l'expression de la dérivée de g.
En déduire le tableau de variations de g puis celui de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ et calculer sa bijection réciproque.
Que peut-on en déduire sur la courbe de f ?

Ex 8 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2-1)}$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{35}{12}\right) = \dfrac{1}{2}$, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{35}{12}\right)$.

Ex 9 Soient a et b deux réels positifs. Montrer que : $\sqrt{a + \sqrt[3]{a^2 b}} + \sqrt{b + \sqrt[3]{ab^2}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3}$.

(On pourra factoriser par $a^{2/3}$ et $b^{2/3}$ dans les premières racines).

Ex 10 Soit $A = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\dfrac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\dfrac{152}{27}}}$. Montrer que $A^3 + 5A \in \mathbb{N}$.