EXERCICE 1

On note $E=\mathbb{R}^2$, que l'on identifiera au plan muni de la base orthonormée (e_1,e_2) (canonique)

1. On considère les vecteurs $X_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $Y_0=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, et on note $F=\mathrm{Vect}\,(X_0)$ et $G=\mathrm{Vect}\,(Y_0)$.
Montrer que $E=F\oplus G$.
Pour $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, donner l'expression des composantes X_F et X_G de X sur F et G.

2. Soit f l'endomorphisme de E de matrice $A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}$.
Vérifier que f est bijective et donner l'expression de f^{-1}.

3. On pose $g=f-3\,\mathrm{id}_E$ et $h=f+2\,\mathrm{id}_E$.
a) Calculer $\ker g$ et $\ker h$.
b) Que peut-on dire de $g\,(X)$ si $X\in F$? de $h\,(X')$ si $X'\in G$?

4. Soit $X\in E$. On décompose X sous la forme $X=X_F+X_G$ où $(X_F,X_G)\in F\times G$.
a) Calculer $f\,(X)$ en fonction de X_F et X_G.
b) En déduire une construction graphique de $f\,(X)$ lorsque X est donné.

EXERCICE 2

Soit a un réel non nul. On veut montrer (**sans résoudre de système de quatre équations à quatre inconnues**) que pour tout quadruplet de réels $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P\,(-a)=\alpha,\ P'\,(-a)=\beta,\ P\,(a)=\gamma et P'\,(a)=\delta$$

et donner une construction effective de P.

A cet effet, on considère l'application $\varphi:\mathbb{R}_3\,[X]\to\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall P\in\mathbb{R}_3\,[X]\,,\quad \varphi\,(P)=(P\,(-a)\,,P'\,(-a)\,,P\,(a)\,,P'\,(a))$$

On note

$$e_1=(1,0,0,0)\,,\ e_2=(0,1,0,0)\,,\ e_3=(0,0,1,0)\,,\ e_4=(0,0,0,1)$$

la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que φ est est linéaire et injective.

2. a) Soit P un antécédent de e_1 par φ : montrer que $R\,(X)=P\,(-X)$ est antécédent de e_3 par φ.
b) Soit Q un antécédent de e_2 par φ: montrer que $S\,(X)=-Q\,(-X)$ est antécédent de e_4 par φ.

3. a) Déterminer un antécédent P_1 de e_1 par φ (on pourra exploiter les racines de la dérivée).
b) Déterminer un antécédent P_2 de e_2 par φ.
c) En déduire des antécédents P_3 et P_4 de e_3 et e_4.

4. En déduire un antécédent de $Y=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ par φ que l'on exprimera à l'aide de P_1,P_2,P_3,P_4.

5. Conclure sur la bijectivité de φ

6. Application : on prend $a=2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :

$$P(-2)=4\quad P'(-2)=2\quad P(2)=-4\quad P'(2)=10$$

et le déterminer à l'aide des questions précédentes (on donnera le résultat sous forme développée et ordonnée).

EXERCICE 3

On considère l'application $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

On définit les polynôme de Newton définis par $N_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(N_0, \ldots, N_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Montrer que Δ est linéaire et calculer son noyau.

3. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, calculer $\deg \Delta(P)$.
En déduire que Δ induit une application linéaire $\widetilde{\Delta}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$

4. Calculer $\Delta(N_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

5. En déduire que Δ est surjective.

6. Calculer $\Delta^p(N_k)$ pour $(p,k) \in [\![0,n]\!]$ et en déduire que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)\, N_k$$

7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer à l'aide des polynômes de Newton l'ensemble des antécédents de P par Δ.

8. Application :

a) Trouver à l'aide de la méthode précédente l'unique polynôme P vérifiant

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P(X+1) - P(X) = X^3$$

b) En déduire sous forme factorisée l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. On considère l'application $T : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $T(P) = P(X+1)$

a) Montrer que T est linéaire et exprimer Δ à l'aide de T.

b) Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) En déduire la formule $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$$

10. Décomposer X^4 sur la base $(N_0, N_1, N_2, N_3, N_4)$ à l'aide de la formule précédente.