A travailler en classe et à rendre par trinôme

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme

$$P = (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n}.$$

1. Développer le polynôme P. Quel est son degré, son coefficient dominant ?

2. Décomposition sur $\mathbb{C}[X]$:

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On donnera les solutions à l'aide de tangentes.

b) En déduire la décomposition de P sur $\mathbb{C}[X]$.

3. Décomposition sur $\mathbb{R}[X]$:

a) Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, quel est le signe de $\tan \dfrac{(2k+1)\pi}{4n}$?

b) En déduire que P se décompose sur $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$P = 2\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}\right).$$

4. Applications : en calculant P pour des valeurs particulières, déterminer les valeurs de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} \quad \text{et de} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}$$

5. On considére les polynômes

$$Q = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X + \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) \quad \text{et} \quad R = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} X^k$$

a) Montrer que $Q\left(X^2\right) = R\left(X^2\right)$, et en déduire que $Q = R$.

b) Montrer alors que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} = n(2n-1)$$

EXERCICE 2

Polynôme de Legendre. On note $P_n = \left(X^2-1\right)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$

1. Montrer que L_n est un polynôme de degré n et déterminer son coefficient dominant.

2. Vérifier que $\left(X^2-1\right) P_n' - 2nXP_n = 0$.

En dérivant $n+1$ fois cette égalité, montrer que $\left(X^2-1\right) L_n'' + 2XL_n' - n(n+1) L_n = 0$.

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note a_k le coefficient d'ordre k de L_n.

Montrer que $a_{n-1} = 0$ et que pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$,

$$a_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{n(n+1) - k(k+1)} a_{k+2}$$

4. Justifier que -1 et 1 sont racines d'ordre exactement n de P_n.

En déduire que -1 et 1 ne sont pas racines de L_n.