Ex 1 Soient $n \geqslant 1$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $I_n = \displaystyle\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n \,\mathrm{d}x$

– Première intégration par parties : on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto (x-a)^n \\ v : x \mapsto (b-x)^n \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} \\ v' : x \mapsto -n(b-x)^{n-1} \end{array}\right. , \quad (u,v) \in C^1([a,b])$$

Alors

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n+1}\Big[(x-a)^{n+1}(b-x)^n\Big]_a^b + \frac{n}{n+1}\int_a^b (x-a)^{n+1}(b-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{n+1}\int_a^b (x-a)^{n+1}(b-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \quad \text{puisque } n \geqslant 1 \end{aligned}$$

– Si $n \geqslant 2$, on intègre par parties une deuxième fois, avec

$$\left\{\begin{array}{l} f' : x \mapsto (x-a)^{n+1} \\ g : x \mapsto (b-x)^{n-1} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} f : x \mapsto \frac{1}{n+2}(x-a)^{n+2} \\ g' : x \mapsto -(n-1)(b-x)^{n-2} \end{array}\right. , \quad (f,g) \in C^1([a,b])$$

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n+2}\Big[(x-a)^{n+2}(b-x)^{n-1}\Big]_a^b + \frac{n-1}{n+2}\int_a^b (x-a)^{n+2}(b-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_a^b (x-a)^{n+2}(b-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x \quad \text{puisque } n \geqslant 2 \end{aligned}$$

– On montrerait par récurrence que si $k \leqslant n$, on obtient à la k-ième intégration par parties :

$$I_n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\int_a^b (x-a)^{n+k}(b-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$$

– A la n-ième étape, on a donc :

$$I_n = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\int_a^b (x-a)^{2n}(b-x)^0\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{(2n)!/n!}\int_a^b (x-a)^{2n}\,\mathrm{d}x$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement :

$$I_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{2n+1}\Big[(x-a)^{2n+1}\Big]_a^b$$

Et finalement

$$\boxed{I_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}}$$

Ex 2 Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x$ et $J(p,q) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \cos^{2q+1} t \,\mathrm{d}t$

a) On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ \mathrm{d}x = 2\cos t \sin t \,\mathrm{d}t \end{array}\right. \quad \left(\varphi : t \mapsto \sin^2 t \in C^1\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)\right)$$

Alors

$$\begin{aligned} \boxed{J(p,q)} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} t \cos^{2q} t \cos t \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t\right)^p \left(1-\cos^2 t\right)^q \sin t \cos t \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x \\ &= \boxed{\frac{1}{2} I(p,q)} \end{aligned}$$

b) Faisons le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sin t \\ \mathrm{d}y = \cos t \, \mathrm{d}t \end{array} \right. \qquad \left(\sin \in C^1\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}
J(p,q) &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \cos^{2q} t \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \left(1 - \sin^2 t\right)^q \cos t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 y^{2p+1} \left(1 - y^2\right)^q \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^{2p+1} \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k y^{2k} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k y^{2p+1} y^{2k} \mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 y^{2p+2k+1} \mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 y^{2p+2k+1} \mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 \left[\frac{y^{2p+2k+2}}{2p+2k+2}\right]_0^1 \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Au total

$$\boxed{J(p,q) = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{2p+2k+2}}$$

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n-1} \ln(1+x) \, \mathrm{d}x$, $\quad$ et $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Soit $x \neq -1$. On sait (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$), que

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \cdots - x^{2n-1} = \frac{1 - (-x)^{2n}}{1 - (-x)} = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x}$$

Il vient :

$$\boxed{\frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k} \qquad (*)$$

Par ailleurs, une intégration par parties dans I_n donne (avec les fonctions C^1 $x \mapsto x^{2n-1}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$) :

$$I_n = \frac{1}{2n}\left[x^{2n} \ln(1+x\right]_0^1 - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\left(\ln 2 - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} \mathrm{d}x\right)$$

En intégrant l'égalité de $(*)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k \mathrm{d}x \\
&= \ln 2 - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \ln 2 - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \mathrm{d}x = \ln 2 - S_n
\end{aligned}$$

On en déduit donc en reportant dans l'expression de I_n : $\boxed{I_n = \dfrac{1}{2n} S_n}$

Ex 4 Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} t \,\mathrm{d}t$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Calcul de I_0 :

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \left(1+\tan^2 t\right) \,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}t = [\tan t]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Convergence : on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leqslant \tan t \leqslant 1$, d'où

$$0 \leqslant \tan^{2n+2} t \leqslant \tan^{2n} t \leqslant 1$$

Par intégration sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^{\pi/4} \left(\tan^{2n+2} t + \tan^{2n} t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} t \left(1+\tan^2 t\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{\tan^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2n+1} \qquad (*)$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2n+1} = I_n + I_{n-1} \geqslant 2I_n \quad \text{(d'après la question a))}$$

Il s'ensuit donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{4n+2}}$$

et (théorème des gendarmes) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

c) L'égalité $(*)$ s'écrit aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^k I_{k-1} + (-1)^k I_k = (-1)^k I_k - (-1)^{k-1} I_{k-1}$$

Par sommation sur k, on obtient une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k I_k - (-1)^{k-1} I_{k-1}\right) = (-1)^n I_n - I_0$$

Le membre de gauche n'est autre que S_n privé de son terme d'indice 0, c'est-à-dire $S_n - 1$, d'où

$$\boxed{S_n = 1 - I_0 + (-1)^n I_n = 1 - \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_n}$$

Connaissant $\lim I_n$, on en déduit aisément :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}}$$

Ex 5 Soit f une bijection de classe C^1 de $[0,a]$ sur $[0,a]$ telle que $f'>0$ sur $[0,a]$.

Soit $x\in[0,a]$. Calculons $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$

Remarquons que f étant strictement croissante sur $[0,a]$ et $f([0,a])=[0,a]$, on a nécessairement

$$f(0)=0 \text{ et } f(a)=a$$

La régularité de la fonction f permet de faire le changement de variable $\begin{cases} t=f(u) \\ \mathrm{d}t=f'(u)\,\mathrm{d}u\end{cases}$ dans la deuxième intégrale :

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(f(x))} f^{-1}(f(u))\,f'(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x uf'(u)\,\mathrm{d}u$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x (f(t)+tf'(t))\,\mathrm{d}t \\ &= [tf(t)]_0^x\end{aligned}$$

Finalement

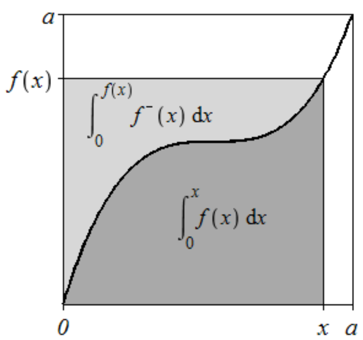
$$\boxed{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=xf(x)}$$

Remarque : on pouvait aussi intégrer par parties dans $\displaystyle\int_0^x uf'(u)\,\mathrm{d}u$.

Interprétation géométrique : le terme $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la surface du domaine D défini par $\begin{cases} 0\leqslant t\leqslant x \text{ et} \\ 0\leqslant y\leqslant f(t)\end{cases}$.

Le terme $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ est la surface du domaine D' défini par $\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant f(x) \text{ et} \\ 0\leqslant t\leqslant f^{-1}(y)\end{cases}$.

La somme de ces deux aires est l'aire du rectangle de côtés x et $f(x)$.



Ex 6 Soit f une fonction continue 2π-périodique.

– On suppose que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont 2π périodiques. Soit F l'une d'entre elles. Alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=F(2\pi)-F(0)=0$$

– Réciproquement, on suppose que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=0$. Soit F une primitive de F sur $\mathbb{R}$: alors$\forall x\in\mathbb{R}$

$$F(x+2\pi)-F(x)=\int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\overset{2\pi-\text{périodicité}}{=}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

D'où $F(x+2\pi)=F(x)$, et F est 2π-périodique.

On a ainsi montré :

$$\boxed{\text{les primitives de } f \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques si et seulement si } \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t=0}$$

Ex 7 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $\forall x\in[a,b]\,,\ f(a+b-x)=f(x)\ \ (*)$.

On a fait le changement de variable affine $u=a+b-x$ dans $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a(a+b-u)\,f(a+b-u)\,\mathrm{d}u\overset{(*)}{=}\int_a^b(a+b-u)\,f(u)\,\mathrm{d}u$$

Ainsi, en sommant (les variables sont muettes) :

$$2\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(a+b-x)\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il vient facilement :

$$\boxed{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Ex 8 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit Φ une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout réel x non nul on a

$$F(x)=\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x}$$

On reconnait le taux de variations de la fonction dérivable Φ. d'où $\lim\limits_{x\to0}F=\Phi'(0)=f(0)$. Ainsi

$$\boxed{F\text{ se prolonge par continuité en 0 en posant }F(0)=f(0)}$$

Ex 9 Soit $x\in\mathbb{R}$. Calcul de $F(x)=\displaystyle\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t+\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t$

– Réduisons l'intervalle d'étude de F :

  * $\underline{F\text{ est }\pi\text{-périodique}}$ puisque $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}F(x+\pi)&=\int_0^{\cos^2(x+\pi)}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t+\int_0^{\sin^2(x+\pi)}\arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t+\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t=F(x)\end{aligned}$$

  On réduit donc l'intervalle d'étude à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

  * $\underline{F\text{ est paire}}$ puisque $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{\cos^2(-x)}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t+\int_0^{\sin^2(-x)}\arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t+\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t=F(x)\end{aligned}$$

  On étudie donc F sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

– La fonction $f:t\mapsto\arccos\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Soit Φ une primitive de f sur $[0,1]$. Alors

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t=\Phi\left(\cos^2(x)\right)-\Phi\left(\cos^2(0)\right)$$

Donc par composée, $x\mapsto\displaystyle\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\Phi'\left(\cos^2(x)\right)=-2\sin x\cos x\arccos\left(|\cos(x)|\right)$$

Mais comme $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $|\cos(x)|=\cos x$ et $\arccos(\cos(x))=x$. Il vient

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x$$

De la même manière $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t = 2\sin x\cos x \arcsin\left(|\sin x|\right)$$

Soit, comme $|\sin(x)| = \sin x$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$ puisque $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t = 2x\sin x\cos x$$

Par somme, on en déduit que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$F'(x) = 0$$

Il s'ensuit que F est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, de valeur

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t + \int_0^{1/2} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t = \int_0^{1/2}\left(\arccos\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$$

Une formule de troigonométrie réciproque connue donne donc

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2}\frac{\pi}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

– Ainsi, on a $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Par parité, cela reste vrai sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, et par p-périodicité sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}}$$

Remarque : on peut aussi faire le changement de variable $\begin{cases} t = \cos^2 u \\ \mathrm{d}t = -2\sin u\cos u\mathrm{d}u \end{cases}$ dans la première intégrale :

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t = -2\int_{\pi/2}^{x} \arccos\sqrt{\cos^2 u}\cos u\sin u\mathrm{d}u \overset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{=} 2\int_x^{\pi/2} u\cos u\sin u\mathrm{d}u$$

et $\begin{cases} t = \sin^2 u \\ \mathrm{d}t = 2\sin u\cos u\mathrm{d}u \end{cases}$ dans la seconde :

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{x} \arcsin\sqrt{\sin^2 u}\cos u\sin u\mathrm{d}u \overset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{=} 2\int_0^{x} u\cos u\sin u\mathrm{d}u$$

Par Chasles, il vient pour $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$F(x) = 2\int_0^{\pi/2} u\cos u\sin u\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} u\sin(2u)\,\mathrm{d}u$$

Une intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{-1}{2}\left[u\cos(2u)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin(2u)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ CQFD (par parité et périodicité)} \end{aligned}$$

Ex 10 Soit $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

a) Montrons que F est impaire : pour tout réel x

$$F(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\overset{u=-x}{=}-\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u)^4+(-u)^2+1}}=-\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+u^2+1}}=-F(x)$$

b) Variations de F : $f : t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc y admet une primitive Φ. Alors $\forall x\in\mathbb{R}$

$$F(x)=\Phi(2x)-\Phi(x)$$

Par composée et somme on en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x)=2f(2x)-f(x)=\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

On résout sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $F'(x)\geqslant 0$ (I) :

$$\begin{aligned}(I)\quad&\iff\quad\sqrt{16x^4+4x^2+1}\leqslant 2\sqrt{x^4+x^2+1}\\&\iff\quad 16x^4+4x^2+1\leqslant 4\left(x^4+x^2+1\right)\\&\iff\quad 12x^4-3\leqslant 0\\&\iff\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

On a ainsi le tableau de variations de F :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$-F\left(1/\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F\left(1/\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	0

c) Calcul de $\lim\limits_{+\infty}F$. On encadre F en espérant trouver la limite nulle. Puisque $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour $x\geqslant 0$:

$$\forall t\in[x,2x]\,,\ 0\leqslant\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

Par intégration

$$0\leqslant F(x)\leqslant\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\int_x^{2x}\mathrm{d}t=\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

Il est facile de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=0$, et le théorème des gendarmes permet d'affirmer

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}F(x)=0}\quad\text{(par parité)}$$

Ex 11 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)\cos t \, \mathrm{d}t$.

Le changement de variable affine $u = x + t$ $(\mathrm{d}u = \mathrm{d}t)$ donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x+2\pi} f(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{x+2\pi} f(u)(\cos(u)\cos x + \sin u \sin x)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x \int_x^{x+2\pi} f(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u + \sin x \int_x^{x+2\pi} f(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos(x)\,C(x) + \sin(x)\,S(x) \end{aligned}$$

en ayant posé $C(x) = \int_x^{x+2\pi} f(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$ et $S(x) = \int_x^{x+2\pi} f(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u$.

Mais $f_1 : t \mapsto f(t)\cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive F_1 sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = F_1(x+2\pi) - F_1(x)$$

D'où C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C'(x) &= f(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - f(x)\cos(x) \\ &= \cos(x)\,(f(x+2\pi) - f(x)) \end{aligned}$$

On montre de même que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= f(x+2\pi)\sin(x+2\pi) - f(x)\sin(x) \\ &= \sin(x)\,(f(x+2\pi) - f(x)) \end{aligned}$$

Par somme et produit de fonctions dérivables, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x)\,C'(x) - \sin(x)\,C(x) + \sin(x)\,S'(x) + \cos(x)\,S(x) \\ &= \cos^2 x\,(f(x+2\pi) - f(x)) + \sin^2 x\,(f(x+2\pi) - f(x)) - \sin x C(x) + \cos x S(x) \\ &= f(x+2\pi) - f(x) - \sin x \int_x^{x+2\pi} f(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u + \cos x \int_x^{x+2\pi} f(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= f(x+2\pi) - f(x) + \int_x^{x+2\pi} f(u)(\cos x \sin u - \sin x \cos u)\,\mathrm{d}u \\ &= f(x+2\pi) - f(x) + \int_x^{x+2\pi} f(u)\sin(u-x)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = x + t$ permet le retour à une forme plus simple :

$$\boxed{g'(x) = f(x+2\pi) - f(x) + \int_x^{x+2\pi} f(x+t)\sin(t)\,\mathrm{d}t}$$

On remarque que si f est 2π-périodique, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_x^{x+2\pi} f(x+t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Ex 12 **Lemme de Riemann-Lebesgue** : soit $f \in C^1([a,b])$. Montrons que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On intègre par parties (f et $t \mapsto \cos(\lambda t)$ sont C^1 sur $[a,b]$). Pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt &= \frac{1}{\lambda}\left[-f(t)\cos(\lambda t)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(f(a)\cos(\lambda a) - f(b)\cos(\lambda b) + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right)\end{aligned}$$

d'où (inégalité triangulaire, et généralisée) :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)\cos(\lambda a)| + |f(b)\cos(\lambda b)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\right|dt\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)\cos(\lambda a)| + |f(b)\cos(\lambda b)| + \int_a^b |f'(t)\cos(\lambda t)|\,dt\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right)\end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes permet donc de conclure à :

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0}$$

Ex 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$1 \leqslant 1 + x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$1 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en substituant $t^n \geqslant 0$ à x, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \leqslant \sqrt{1+t^n} \leqslant 1 + \frac{t^n}{2}$$

Par intégration, il vient

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \left(1 + \frac{t^n}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Soit

$$1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2(n+1)}$$

Le théorème des gendarmes montre alors facilement que

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge } 1}$$

Ex 14 On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^k\, t}$.

a) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante : en effet pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \frac{dt}{\mathrm{ch}^k\, t} - \int_0^n \frac{dt}{\mathrm{ch}^k\, t} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{\mathrm{ch}^k\, t} > 0$$

b) Pour tout réel t, on a

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\, t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} \leqslant \frac{2}{e^t} = 2e^{-t} \quad \text{(puisque } e^t + e^{-t} > e^t > 0$$

c) On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\mathrm{ch}^k\, t} \leqslant 2^k e^{-kt}$$

Par intégration

$$I_k(n) \leqslant 2^k \int_0^n e^{-kt} dt = -\frac{2^k}{k} \left[e^{-kt}\right]_0^n$$

Ainsi

$$u_n \leqslant \frac{2^k}{k}\left(1 - e^{-nt}\right) \leqslant \frac{2^k}{k} \quad \text{(puisque } e^{-nt} > 0)$$

(u_n) est donc majorée et croissante, donc converge.

Ex 15 Soit $I = \displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$. Intégrons I par parties, avec

$$\begin{cases} u' = \sin \\ u = -\cos \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} v : x \mapsto \frac{1}{x} \\ v' : t \mapsto \frac{-1}{x^2} \end{cases} \qquad ((u,v) \in C^1([100\pi, 200\pi])$$

Alors

$$I = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_{100\pi}^{200\pi} - \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100\pi} - \frac{1}{200\pi} - \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{200\pi} - \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Encadrons l'intégrale :

$$\left|\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{100\pi}^{200\pi} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_{100\pi}^{200\pi} = \frac{1}{200\pi}$$

Il vient

$$\frac{-1}{200\pi} \leqslant \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{200\pi} \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant \frac{1}{200\pi} - \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{200\pi} + \frac{1}{200\pi}$$

Finalement

$$\boxed{0 \leqslant I \leqslant \frac{1}{100\pi}}$$

Ex 16 On pose, pour $x > 0$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad g\left(x\right) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos t}{\left(t+x\right)^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Soit $x > 0$. Alors

$$\forall t \in [0, \pi]\,,\ 0 \leqslant \sin t \leqslant 1,\ \text{d'où} \quad 0 \leqslant \frac{\sin t}{t+x} \leqslant \frac{1}{t+x} \quad (\text{car } t+x > 0)$$

Par intégration,

$$0 \leqslant f\left(t\right) \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{t+x} = \left[\ln\left(t+x\right)\right]_0^\pi = \ln\frac{\pi+x}{x} = \ln\left(1+\frac{\pi}{x}\right)$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{x}\right) = 0$, le théorème des gendarmes nous assure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
De plus

$$\left|g\left(x\right)\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\cos t}{\left(t+x\right)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\left|\cos t\right|}{\left(t+x\right)^2}\,\mathrm{d}t \overset{|\cos t|\leqslant 1}{\leqslant} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+x\right)^2}$$

d'où

$$\left|g\left(x\right)\right| \leqslant -\left[\frac{1}{t+x}\right]_0^\pi = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi} = \frac{\pi}{x\left(x+\pi\right)}$$

Alors

$$\left|x\,g\left(x\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{x+\pi}$$

et le théorème des gendarmes permet encore de conclure à

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\,g(x) = 0} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{g(x) = o\left(\tfrac{1}{x}\right)}$$

b) Intégrons f par parties, avec

$$\left\{\begin{array}{l} u' = \sin \\ u = -\cos \end{array}\right. ,\ \text{et} \left\{\begin{array}{l} v : t \mapsto \frac{1}{t+x} \\ v' : t \mapsto \frac{-1}{(t+x)^2} \end{array}\right. \qquad \left(\left(u,v\right) \in C^1\left(\left[0,\pi\right]\right)\right)$$

Alors si $x > 0$,

$$f\left(x\right) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{\cos t}{t+x}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos t}{\left(t+x\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} - g\left(x\right)$$

Ainsi

$$f\left(x\right) = \frac{2x+\pi}{x\left(x+\pi\right)} - g\left(x\right)$$

Or $\displaystyle\frac{2x+\pi}{x\left(x+\pi\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ et, d'après a), $g(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$. Il en résulte

$$\boxed{f\left(x\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}}$$

c) Soit $x > 0$. L'encadrement de la question a) :

$$-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi}\right) \leqslant g\left(x\right) \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi}$$

nous conduit à :

$$\boxed{\frac{2}{x+\pi} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x}}$$

<u>Autre méthode</u> :

$$\forall t \in [0, \pi]\,,\ \frac{1}{\pi+x} \leqslant \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \frac{\sin t}{\pi+x} \leqslant \frac{\sin t}{t+x} \leqslant \frac{\sin t}{x}$$

L'intégration sur $[0, \pi]$ donne alors (x et $x+\pi$ ne dépendant pas de t) :

$$\frac{1}{\pi+x}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t \leqslant f\left(x\right) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\boxed{\frac{2}{x+\pi} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x}}$$

<u>*Remarque*</u> : on a ainsi, $\forall x > 0$, $\displaystyle\frac{2x}{x+\pi} \leqslant x\,f(x) \leqslant 2$, qui redémontre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 2$.

Ex 17 Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$.

a) Soit $f : t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$:

* $*$ si $x > 0$, alors f est continue sur $[x, 3x] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $F(x)$ existe.
* $*$ Si $x < 0$, alors f est continue sur $[3x, x] \subset \mathbb{R}_-^*$, donc $F(x)$ existe.

Au total $\underline{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$.

b) Parité de F : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t \overset{u=-t}{=} \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-\mathrm{d}u) = \int_x^{3x} \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u = F(x)$$

$\underline{F \text{ est paire}}$.

c) f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée f.
Alors $\forall x > 0, \quad F(x) = \Phi(3x) - \Phi(x)$: F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le même raisonnement sur $\Psi : x \to \displaystyle\int_{-1}^x f$ montre qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus

$$\boxed{\forall x \neq 0, \quad F'(x) = 3\Phi'(3x) - \Phi'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}}$$

d) Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{6}\right]$. Alors $\forall t \in [x, 3x] \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos 3x \leqslant \cos t \leqslant \cos x$, donc

$$\frac{\cos 3x}{t} \leqslant \frac{\cos t}{t} \leqslant \frac{\cos x}{t}$$

Par intégration

$$\cos 3x \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \leqslant \cos x \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Soit

$$\boxed{\ln 3 \cos 3x \leqslant F(x) \leqslant \ln 3 \cos x} \, (*)$$

e) Le théorème des gendarmes assure alors $\lim\limits_{0+} F = \ln 3$. Comme F est paire, le changement de variable $y = -x$ montre que $\lim\limits_{0-} F = \ln 3$.

$$\underline{F \text{ se prolonge donc par continuité en } 0} \text{ en posant } \boxed{F(0) = \ln 3}$$

f) $(*)$ entraîne alors pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

$$\ln 3 \frac{\cos 3x - 1}{x} \leqslant \frac{F(x) - \ln 3}{x} \leqslant \ln 3 \frac{\cos x - 1}{x}$$

On reconnait à droite et à gauche les taux de variation en 0 des fonctions $\varphi : x \to \cos x$ et $\psi : x \to \cos 3x$, dont les limites en 0 sont $\varphi'(0) = 0$ et $\psi'(0) = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 0$, et par parité $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 0$.

$$\underline{F \text{ est donc dérivable en } 0} \text{ et } \boxed{F'(0) = 0}$$

Ex 18 On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$. On se propose d'étudier la fonction F.

a) Existence :

* Si $x \in]0,1[$, alors $0 < x^2 \leqslant x < 1$. f est continue sur $\left[x^2, x\right]$, d'où F existe. De plus

$$\forall t \in \left[x^2, x\right],\ \frac{1}{\ln t} < 0, \text{ donc } \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant 0 \text{ et } F(x) \geqslant 0$$

* Si $x \in]1,+\infty[$, alors $1 < x \leqslant x^2$. f est continue sur $\left[x, x^2\right]$, d'où F existe. De plus

$$\forall t \in \left[x, x^2\right],\ \frac{1}{\ln t} > 0, \text{ donc } \int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \geqslant 0 \text{ i.e. } F(x) \geqslant 0$$

b) Soit Φ une primitive de f sur $]0,1[$: alors $\forall x \in]0,1[,\ F(x) = \Phi\left(x^2\right) - \Phi(x)$

Par composée, F est dérivable sur $]0,1[$, et

$$\forall x \in]0,1[,\ F'(x) = 2x\Phi'\left(x^2\right) - \Phi'(x) = 2xf\left(x^2\right) - f(x) = \frac{2x}{\ln\left(x^2\right)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Un raisonnement analogue permet de conclure à la dérivabilité de F sur $]1,+\infty[$ avec la même dérivée.

Ainsi F est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}}$$

* Si $x \in]0,1[$, comme $x-1<0$ et $\ln x < 0$, on a $F'(x) > 0$.
* Si $x \in]1,+\infty[$, $x-1>0$ et $\ln x > 0$, d'où $F'(x) > 0$. Au total,

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur }]0,1[\text{ et sur }]1,+\infty[}$$

c) Encadrement :

* Soit $x \in]1,+\infty[$: alors, puisque $\ln$ est croissante positive sur $\left[x, x^2\right]$

$$\forall t \in \left[x, x^2\right],\ 0 < \frac{1}{\ln\left(x^2\right)} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x}$$

Par intégration, on en déduit

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}$$

* Soit $x \in]0,1[$: alors, puisque $\ln$ est croissante négative sur $\left[x^2, x\right]$

$$\forall t \in \left[x^2, x\right],\ \frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln\left(x^2\right)} < 0$$

Par intégration, on en déduit

$$\frac{x-x^2}{2\ln x} \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \frac{x-x^2}{\ln x} \quad i.e. \quad \frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}$$

Dans les deux cas, on a bien

$$\boxed{\frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}}$$

d) Il est clair que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{2\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\ln x} = 0$, d'où (gendarmes) : $\boxed{\lim_0 F = 0}$

Comme $\dfrac{x^2-x}{2\ln x} = \dfrac{x^2}{\ln x}\,\dfrac{1-1/x}{2} \underset{x\to\infty}{\to} +\infty$, on a par théorème de domination, $\boxed{\lim_x F = +\infty}$

Ex 19 Intégrale de Wallis : pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$

a) Posons $u = \frac{\pi}{2} - t$ $(\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos^n(u)\,\mathrm{d}u$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t\ \mathrm{d}t$, en posant (LA RUSE)

$$\left\{\begin{array}{l} u' : t \mapsto \sin t \\ v : t \mapsto \sin^n t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : t \mapsto -\cos t \\ v' : t \mapsto n\cos t \sin^{n-1} t \end{array}\right. \quad , \quad (u, v) \in C^1\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)$$

Alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -\left[\cos t \sin^n t\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-1} t\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right)\sin^{n-1} t\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-1} t - \sin^{n+1} t\right)\mathrm{d}t \\ &= nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+1) I_{n+1} = nI_{n-1}$ et donc que

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}} \quad (*)$$

c) On a clairement $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\mathrm{d}t = 1$, et

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

La relation de récurrence $(*)$ établie précédemment nous incite fortement à distinguer les indices pairs et les indices impairs : soit donc $p \in \mathbb{N}$.

La formule $(*)$ appliquée successivement à $2p-1, 2p-3, ..., 3, 1$ donne :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \ldots = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{3}{4} I_2 = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0$$

soit

$$\boxed{I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

De la même manière avec $2p, 2p-2, ..., 2, 0$:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3} = \ldots = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{4}{3} I_3 = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1$$

soit

$$\boxed{I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)}}$$

On peut alors écrire, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2p-2) \times (2p-1) \times (2p)}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p))^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

De la même façon :

$$I_{2p+1} = \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p))^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2p) \times (2p+1)} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

$$\boxed{I_{2p+1}=\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

Remarque : pour être parfaitement rigoureux, il faudrait rédiger des récurrences.

d) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 0\leqslant\sin t\leqslant 1$, donc par produit

$$0\leqslant\sin^{n+1}t\leqslant\sin^n t$$

Par intégration

$$0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc positive, décroissante.

De plus les formules précédentes montrent de plus que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n>0$.

Soit $u_n=nI_nI_{n-1}$. Alors, d'après $(*)$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,u_{n+1}=(n+1)I_nI_{n+1}=(n+1)I_n\frac{n}{n+1}I_{n-1}=nI_nI_{n-1}=u_n$$

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc constante, et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,u_n=u_1=I_1I_0=\frac{\pi}{2}.$$

e) Or, on a vu que (I_n) est décroissante, ce qui entraine

$$\forall n\geqslant 1,\ u_n=nI_nI_{n-1}\geqslant nI_n^2$$

et, vu la question précédente,

$$\forall n\geqslant 1,\ nI_n^2\leqslant\frac{\pi}{2}$$

On sait que (I_n) est strictement positive, donc cette inégalité équivaut à

$$\forall n\geqslant 1,\ 0<I_n\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

f) Pour $n\geqslant 1$, l'inégalité $I_{n+1}\leqslant I_n\leqslant I_{n-1}$ donne (les membres sont positifs)

$$1\leqslant\frac{I_n}{I_{n+1}}\leqslant\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}}\overset{(*)}{=}\frac{n+1}{n}$$

Grâce au théorème des gendarmes, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_n}{I_{n+1}}=1$, soit $I_n\sim I_{n+1}$.

On en déduit alors

$$I_n^2\sim I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2n}$$

I_n étant positive, on conclut

$$\boxed{I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Remarque : cela prouve (avec $n=2p+1$) que

$$\lim_{p\to+\infty}2\,(2p+1)\left(\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2p)}{1\times3\times5\times\cdots\times(2p+1)}\right)^2=\pi$$

Autrement dit une approximation rationnelle de π.