Ex 1 Résolutions simples :

a) $(S_1)\left\{\begin{array}{l} x+4y+3z+t=1 \\ 2x+5y+4z-t=4 \\ x-3y-2z+3t=5 \end{array}\right.$ admet pour matrice augmentée :

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \left\{\begin{array}{l} L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right.$$

Petite étape intermédiaire pour éviter les fractions :

$$\begin{aligned} B &\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \left\{\begin{array}{l} L_3\leftarrow L_3-2L_2 \\ L_2\leftrightarrow L_3 \end{array}\right. \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -27 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } L_3\leftarrow L_3-3L_2 \end{aligned}$$

On termine avec le système (S_1) , compatible, de rang 3, paramétrable par t, et équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+4y+3z= & 1\ -\ t \\ y+z= & -8t \\ z= & 2+27t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\ 3-6t \\ y=-2-19t \\ z=\ 2+27t \\ [t=\qquad t] \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$$

Vectoriellement, les solutions s'écrivent

$$\boxed{X=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \lambda\underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -19 \\ 27 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. du syst. homogène}} \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}}$$

b) $(S_2)\left\{\begin{array}{l} x+y+2z+3t=1 \\ x+y+z-t=2 \end{array}\right.$. (S_2) s'échelonne bien vite avec l'opération $L_2\leftarrow L_2-L_1$:

$$(S_2)\iff\left\{\begin{array}{r} x+y+2z+3t=1 \\ -z-4t=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x+y+\quad -5t=3 \\ z+4t=-1 \end{array}\right. \quad (L_1\leftarrow L_1+2L_2)$$

(S_2) est donc de rang 2, compatible et paramétrable par y et t :

$$(S_2)\iff\left\{\begin{array}{l} x=3-y+5t \\ z=-1\quad -4t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3-y+5t \\ y=\quad y \\ z=-1\quad -4t \\ t=\qquad t \end{array}\right. \quad (y,t)\in\mathbb{R}^2$$

Vectoriellement, les solutions s'écrivent

$$\boxed{X=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} \underbrace{+\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda'\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. du syst. homogène}} \quad \text{avec } \left(\lambda,\lambda'\right)\in\mathbb{R}^2}$$

c) $(S_3)\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z+4t=10 \\ 2x-y+z-t=1 \\ 3x+y+4z+3t=11 \\ -2x+6y+4z+10t=18 \end{array}\right.$ a pour matrice augmentée

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 11 \\ -2 & 6 & 4 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme du pivot :

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -5 & -9 & -19 \\ 0 & -5 & -5 & -9 & -19 \\ 0 & 10 & 10 & 18 & 38 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 9/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \left\{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/5 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/5 & 12/5 \\ 0 & 1 & 1 & 9/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } L_1 \leftarrow L_1-2L_2$$

(S_3) est de rang 2, compatible et paramétrable par z et t :

$$(S_3) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12/5-z-2t/5 \\ y=19/5-z-9t/5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12/5-z-2t/5 \\ y=19/5-z-9t/5 \\ z= \qquad\qquad z \\ t= \qquad\qquad\qquad t \end{array}\right. \quad , \quad (z,t)\in\mathbb{R}^2$$

Vectoriellement, les solutions s'écrivent

$$\boxed{X=\underbrace{\begin{pmatrix} 12/5 \\ 19/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} \underbrace{+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda'\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\text{sol. du syst. homogène}} \quad \text{avec } \big(\lambda,\lambda'\big)\in\mathbb{R}^2}$$

Remarque : on a évité les fractions en posant $\lambda=-z$ et $\lambda'=-t/5$.

d) $(S_4)\left\{\begin{array}{c} 2x+y=8 \\ -6y+7z=-19 \\ -x+z=-2 \\ 4x+7y-z=25 \end{array}\right.$ a pour matrice augmentée

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -6 & 7 & -19 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & -1 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -19 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 7 & -1 & 25 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

On l'échelonne:

$$B \underset{L_3\leftarrow L_3+4L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2+2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -19 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & 17 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3)$$

Puis

$$B \underset{L_4\leftarrow L_4-7L_2}{\overset{L_3\leftarrow L_3+6L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 19 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3/11}{\overset{L_3\leftrightarrow L_4}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & 5 \end{pmatrix} \underset{L_4\leftarrow L_4-19L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne montre que le système (S_4) est incompatible.

Ex 2 Soit (S) le système linéaire $AX=B$, avec

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

a) A est échelonnée réduites par lignes (les colonnes à pivot, C_2, C_4, C_5 ne contiennent que des zéros hormis le pivot 1). L'inconnue est un sextuplet $X=(x_1,\dots x_6)\in\mathbb{R}^6$. Nous l'écrirons en colonne.

b) Le système (S) se paramètre par x_1, x_3 et x_6, et s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{c} x_2-2x_3+3x_6=5 \\ x_4+2x_6=0 \\ x_5+x_6=7 \\ 0=\lambda \end{array}\right.$$

* Si $\lambda\neq 0$, (S) est incompatible
* Si $\lambda=0$, alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{l} x_2=5+2x_3-3x_6 \\ x_4=\quad -2x_6 \\ x_5=7\quad -x_6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1=\quad x_1 \\ x_2=5\quad +2x_3-3x_6 \\ x_3=\quad x_3 \\ x_4=\quad -2x_6 \\ x_5=7\quad -x_6 \\ x_6=\quad x_6 \end{array}\right. \quad \text{avec } (x_1,x_3,x_6)\in\mathbb{R}^3$$

Vectoriellement, les solutions sont de la forme :

$$X=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t''\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{solutions du système homogène } AX=0} \quad \text{avec } (t,t',t'')\in\mathbb{R}^3$$

Ex 3 Soit $(m,a,b,c,d)\in\mathbb{R}^5$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&m-2&0&1&1\\0&0&0&m+1&1\\0&0&0&0&m^2-m-2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$

a) Rang de A : remarquons que $m^2-m-2=(m+1)(m-2)$.

* Si $m\notin\{2,-1\}$ alors A est échelonnée, et $\boxed{\operatorname{rg} A=4}$.
* Si $m=-1$, alors

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-3&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

A est échelonnée et $\boxed{\operatorname{rg} A=3}$

* Si $m=2$, alors

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad L_3\leftarrow L_3-3L_2$$

Cette dernière matrice est échelonnée, donc $\boxed{\operatorname{rg} A=3}$.

b) Si $\operatorname{rg} A=4$, le systèmes (S) : $AX=Y$, avec $X=(x,y,z,t,u)$ est compatible (pas de ligne nulle).
On prend pour inconnues principales x,y,t,u, et z comme paramètre. (S) admet une infinité de solutions.
On prend $m=1$, $a=1$, $b=2$, et $c=d=4$: alors

$$(S)\iff\begin{cases}x+y+z+t+u=1\\ \quad -y\quad +t+u=2\\ \quad 2t+u=4\\ \quad -2u=4\end{cases}\iff\begin{cases}x=1-z\\y=-1\\t=3\\u=-2\end{cases}\iff\begin{cases}x=1\ -z\\y=-1\\ [z=\qquad z]\\t=3\\u=-2\end{cases}$$

Vectoriellement

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\lambda\in\mathbb{R}}$$

c) Pour $m\in\{-1,2\}$on a $\operatorname{rg} A=3$

* Si $m=-1$, alors

$$(S)\iff\begin{cases}x+y+z+t+u=a\\ \quad -3y\quad +t+u=b\\ \quad u=c\\ \quad 0=d\end{cases}$$

· Si $d\neq 0$ $\boxed{(S)\text{ est incompatible}}$.
· Si $d=0$, on résout en x,y,u en passant z et t en paramètres :

$$(S)\iff\begin{cases}x=\dfrac{3a+b-4c}{3}-z-\dfrac{4t}{3}\\ y=\dfrac{c-b}{3}+\dfrac{t}{3}\\ u=c\end{cases},\ (z,t)\in\mathbb{R}^2$$

Remarque : il est plus judicieux ici de choisir y et z pour paramètres :

$$(S) \iff \begin{cases} x = a - b - 4y - z \\ t = b - c + 3y \\ u = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b - 4y - z \\ [y = \quad\quad y] \\ [z = \quad\quad\quad z] \\ t = b - c + 3y \\ u = c \end{cases}, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

Vectoriellement, les solutions sont de la forme :

$$\boxed{X = \underbrace{\begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ 0 \\ b-c \\ c \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solutions du système homogène}} \quad \text{avec } (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2}$$

* Si $m = 2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z + t + u = a \\ t + u = b \\ 3t + u = c \\ 0 = d \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = a - b \\ t + u = b \\ -2u = c - 3b \\ 0 = d \end{cases}$$

· Si $d \neq 0$ $\boxed{(S) \text{ est incompatible}}$.

· Si $d = 0$, on résout en x, t, u en passant y et z en paramètres :

$$(S) \iff \begin{cases} x = a - b - y - z \\ t = \dfrac{c-b}{2} \\ u = \dfrac{3b-c}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b - y - z \\ [y = \quad\quad y] \\ [z = \quad\quad\quad z] \\ t = \dfrac{c-b}{2} \\ u = \dfrac{3b-c}{2} \end{cases}, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

Vectoriellement, les solutions sont de la forme :

$$\boxed{X = \underbrace{\begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{c-b}{2} \\ \dfrac{3b-c}{2} \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solutions du système homogène}} \quad \text{avec } (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2}$$

d) Dans le cas où $m = 2$, calculons la réduite de Gauss-Jordan de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{2} L_3$ on obtient la réduite :

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ex 4 Résolution de (S) : $\left\{\begin{array}{c} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y=1 \\ 2x+3y=a \end{array}\right.$, a paramètre réel. La matrice augmentée est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & a-2 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3 \end{array}\right.$$

- <u>Si $a \neq 2$</u> alors $\boxed{(S) \text{ est incompatible}}$.
- <u>Si $a = 2$</u>, alors

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+z=1 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right.}$$

Remarque : on peut traiter cet exercice sans passer par le pivot, en exploitant les particularités du système : ici

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y=1 \\ z=-y \\ x+y=1 \\ 2x+3y=a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \\ 2=a \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

On retrouve la condition de compatibilité et la solution.

On peut aussi résoudre le système formé par les deux dernières équations et reporter la solution dans les deux premières.

Ex 5 Résoudre en discutant sur a, b, c le système $(S)\left\{\begin{array}{lllll} 3x & -5y & +2z & +4t & = a \\ 7x & -4y & +z & +3t & = b \\ 5x & +7y & -4z & -6t & = c \end{array}\right.$

Pour éviter les fractions, on peut opérer sur la matrice augmentée $\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & a \\ 7 & -4 & 1 & 3 & b \\ 5 & 7 & -4 & -6 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & a \\ 1 & 6 & -3 & -5 & b-2a \\ -1 & 17 & -8 & -14 & c-2a \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & b-2a \\ -1 & 17 & -8 & -14 & c-2a \\ 3 & -5 & 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & b-2a \\ 0 & 23 & -11 & -19 & b+c-4a \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 7a-3b \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 & b-2a \\ 0 & 23 & -11 & -19 & b+c-4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-2b+c \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

– Si $\underline{3a-2b+c \neq 0}$, le système $\boxed{(S) \text{ est incompatible}}$

– Si $\underline{3a-2b+c = 0}$, (S) est compatible, de rang 2 paramétrable par z et t :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{l} x + 6y - 3z - 5t = b - 2a \\ 23y - 11z - 19t = b + c - 4a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = b - 2a - \frac{6}{23}\left(b + c - 4a + 11z + 19t\right) + 3z + 5t \\ 23y = b + c - 4a + 11z + 19t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} x = & \frac{-22a+17b-6c}{23} & + \frac{3}{23}z & + \frac{1}{23}t \\ y = & \frac{b+c-4a}{23} + & \frac{11}{23}z & + \frac{19}{23}t \\ [z = & & z] & \\ [t = & & & t] \end{array}\right. \qquad (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

Vectoriellement, les solutions s'écrivent, en posant $\lambda = \frac{z}{23}$ et $\lambda' = \frac{\tau}{23}$:

$$\boxed{X = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-22a+17b-6c}{23} \\ \frac{b+c-4a}{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}}_{\text{sol. du syst. homogène}} \quad \text{avec } \left(\lambda, \lambda'\right) \in \mathbb{R}^2}$$

Remarque : ce système se traite mieux (avec moins de calculs) avec des outils d'algèbre linéaire.

Ex 6 Résolution de (S) : $\left\{\begin{array}{l} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{array}\right.$ avec m paramètre réel : on a

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+my=1 \\ mx+y=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+my=1 \\ \left(1-m^2\right)y=1-m \end{array}\right. \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - mL_1)$$

- $\underline{\text{Si } m \notin \{-1,1\}}$, alors (S) est de rang 2 et

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\dfrac{m}{1+m} \\ y=\dfrac{1}{1+m} \end{array}\right.$$

  (S) admet l'unique solution :

$$\boxed{\left(\frac{1}{1+m}, \frac{1}{1+m}\right)}$$

- $\underline{\text{Si } m=-1}$, alors (S) est de rang 1 et $\boxed{\text{incompatible}}$ (deuxième ligne : $0=2$).
- $\underline{\text{Si } m=1}$, alors (S) est de rang 1 et compatible. Il équivaut à

$$x+y=1 \Longleftrightarrow x=1-y \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-y \\ y=\quad\quad y \end{array}\right. \qquad y \in \mathbb{R}$$

  (S) admet les solutions

$$\boxed{(1-\lambda, \lambda)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ex 7 Résolution de (S) : $\left\{\begin{array}{l} x - y + z - t = 1 \\ 3x - 2y + z \quad\quad = 5 \\ 2x + 2y - 6z + 3t = 3 \\ \quad\quad 3y - 6z + 2t = \alpha \end{array}\right.$ avec α paramètre réel. On échelonne la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & \alpha - 6 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_4/7 \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}\right.$$

- Si $\alpha \neq -1$, alors (S) est $\boxed{\text{incompatible}}$.
- Si $\alpha = -1$, alors (S) est compatible, de rang 3, et paramétrable par z :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \quad z \\ y = -1 + 2z \\ [z = \quad\quad z] \\ t = 1 \end{array}\right. \quad z \in \mathbb{R}$$

Vectoriellement, les solutions s'écrivent :

$$\boxed{X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. du syst. homogène}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ex 8 Résolution de (S) : $\begin{cases} x+2y+t=0 \\ x+\lambda y+\lambda z+t=0 \\ 2x+2y+(\lambda+1)\,z+2t=0 \\ x+y+z+\lambda t=0 \end{cases}$ avec λ paramètre réel. On échelonne la matrice de (S) :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda & 0 \\ 0 & -2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & -2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$A \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4\leftarrow L_4+(\lambda-1)L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2\,(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 2\,(\lambda-1) & (\lambda-1)\,(\lambda-2) \end{pmatrix} \underset{L_4\leftarrow L_4-2L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2\,(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)\,(\lambda+2) \end{pmatrix}$$

- 1er cas : $m\in\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$: le système est de rang 4, donc de Cramer, et admet une unique solution. Comme il est homogène, cette solution est le vecteur nul $\boxed{(0,0,0,0)}$
- 2ème cas : $m=-2$: le système est de rang 3, compatible (il est homogène), et paramétrable par t :

$$(S)\iff\begin{cases} x+2y=-t \\ -y+z=3t \\ -3z=-6t \end{cases}\iff\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t \\ [t=t] \end{cases}\iff\boxed{X=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}}$$

- 3ème cas : $m=1$: le système est de rang 2, compatible, et paramétrable par z et t :

$$(S)\iff\begin{cases} x+2y=-t \\ -y+z=0 \end{cases}\iff\begin{cases} x=-2z-t \\ y=\ z \\ [z=z] \\ [t=\qquad t] \end{cases}\iff\boxed{X=z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad (z,t)\in\mathbb{R}^2}$$

Ex 9 Résolution de (S) : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+(m-1)\,z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$ avec m paramètre réel.

On applique l'algorithme du pivot : $L_2\leftarrow L_2-mL_1$, $L_3\leftarrow L_3-L_1$, puis $L_3\leftarrow L_3+L_2$

$$(S)\iff\begin{cases} x\ +\ y\ +\ z\ \ =1 \\ \quad(1-m)\,y-z=0 \\ \quad(m-1)\,y\qquad=0 \end{cases}\iff\begin{cases} x\ +\ y\ +\ z\ \ =1 \\ \quad(1-m)\,y-z=0 \\ \qquad\qquad z=0 \end{cases}$$

- 1er cas : $m\neq1$: le système est de rang 3 et admet l'unique solution

$$\boxed{(x,y,z)=(1,0,0)}$$

- 2ème cas : $m=1$: le système est de rang 2, et se paramètre par y :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases}\iff\begin{cases} x\ =1-y \\ z=0 \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme

$$\boxed{(x,y,z)=(1-\lambda,\lambda,0)\,,\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Ex 10 Soient m, a, b, c, d cinq réels. On considère le système (Σ)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ mx & + & y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & (m+1)\,y & + & z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & (m+2)\,z & + & t & = & d \end{array}\right.$$

On note A la matrice de (Σ) , B sa matrice augmentée.

a) Appliquons un début d'algorithme du pivot à la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m+2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$*$ Supposons que $m \notin \{-1, 0, 1\}$. Alors on peut diviser chaque ligne :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc dans ce cas $\boxed{\operatorname{rg} A = 4}$.

$*$ Supposons $m = 0$. Alors

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Donc } \boxed{\operatorname{rg} A = 3}$$

$*$ Supposons $m = -1$. Alors

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Donc } \boxed{\operatorname{rg} A = 3}$$

$*$ Supposons $m = 1$ Alors

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Donc } \boxed{\operatorname{rg} A = 3}$$

b) Dans le cas où $\operatorname{rg} A = 4$, (Σ) est un **système de Cramer** et admet donc **une unique solution**.

c) Cas où $m = 0$: on a alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 2 & 1 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a \end{pmatrix}$$

$\boxed{(\Sigma) \text{ n'est compatible que si } a = c}$, et alors

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{c} x+y+z+t = a \\ y+z+t = b \\ t = d-a \end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{ll} x = a-b & \\ y = a+b-d-z & \\ t = d-a & \\ z = \qquad\qquad z & \end{array}\right. , \ z \in \mathbb{R}}$$

Ex 11 Calculs de rangs :

a) $A=\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\\0&2&1&1\\4&3&2&4\end{pmatrix}$. On commence par échanger L_1 et L_2, puis on échelonne :

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\2&1&1&3\\0&2&1&1\\4&3&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&2&1&1\\0&3&6&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&0&-5&-5\\0&0&-3&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&0&1&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

[opérations : $\begin{cases}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_4\leftarrow L_4-4L_1\end{cases}$ puis $\begin{cases}L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4-3L_2\end{cases}$ puis $\begin{cases}L_3\leftarrow -L_3/5\\L_4\leftarrow L_4+3L_3\end{cases}$]

$$\boxed{\operatorname{rg}A=4}$$

b) $B=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\1&1&2&-1&0\\2&-2&3&-1&2\\4&-2&6&-3&3\end{pmatrix}$ Idem :

$$B\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&2&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&2&2&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&2&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&2&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

[opérations : $\begin{cases}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1\\L_4\leftarrow L_4-4L_1\end{cases}$ puis $L_4\leftarrow L_4-L_2$ puis $L_4\leftarrow L_4-L_3$]

$$\boxed{\operatorname{rg}B=3}$$

c) $C=\begin{pmatrix}1&-a&1&-1&1\\a&-1&1&-1&1\\-1&1&0&a&1\\a&-1&1&-1&1\end{pmatrix}$. On commence par $\begin{cases}L_2\leftarrow L_2-aL_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4-aL_1\end{cases}$ puis $L_4\leftarrow L_4-L_2$ puis $L_2\leftrightarrow L_3$:

$$C\sim\begin{pmatrix}1&-a&1&-1&1\\0&a^2-1&1-a&a-1&1-a\\0&1-a&1&a-1&2\\0&a^2-1&1-a&a-1&1-a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-a&1&-1&1\\0&1-a&1&a-1&2\\0&(a-1)(a+1)&1-a&a-1&1-a\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$*$ Si $a\neq 1$, alors

$$C\sim\begin{pmatrix}1&-a&1&-1&1\\0&a+1&-1&1&-1\\0&1-a&1&a-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-a&1&-1&1\\0&2&0&a&1\\0&a+1&-1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-a&1&-1&1\\0&2&0&a&1\\0&0&-1&b&c\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

On a posé $b=1-\frac{1}{2}a\,(a+1)$ et $c=-1-\frac{1}{2}\,(a+1)$.

[opérations : puis $L_2\leftarrow L_2+L_3$ puis $L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{2}\,(a+1)\,L_2$].

$$\boxed{\operatorname{rg}C=3}$$

$*$ Si $a=1$, alors

$$C\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\operatorname{rg}C=2}$$

Ex 12 Calculs de rangs :

a) $A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}$. On a, en retranchant la première ligne aux autres :

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & (b-a)(b+a)\\ 0 & c-a & (c-a)(c+a)\end{pmatrix}$$

* 1[er] cas : a,b,c sont distincts : on peut diviser les lignes par $b-a$ et $c-a$, puis $c-b$:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 1 & c+a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & c-b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:\boxed{\operatorname{rg}A=3}$$

* 2[ème] cas : $c=a\neq b$: alors

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:\boxed{\operatorname{rg}A=2}$$

Par permutation des lignes, on est dans le même cas lorsque $b=a\neq c$ et $a\neq b=c$.

* 3[ème] cas : $a=b=c$: alors

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:\boxed{\operatorname{rg}A=1}$$

On peut conclure pour résumer

$$\boxed{\operatorname{rg}A=\operatorname{card}\{a,b,c\}}$$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & b+c & bc\\ 1 & a+c & ac\\ 1 & a+b & ab\end{pmatrix}$. Même méthode :

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & b+c & bc\\ 0 & a-b & c(a-b)\\ 0 & a-c & b(a-c)\end{pmatrix}$$

* 1[er] cas : a,b,c sont distincts : on peut diviser les lignes par $a-b$ et $a-c$, puis $b-c$:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & b+c & bc\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & a & bc\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & b-c\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & a & bc\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:\boxed{\operatorname{rg}A=3}$$

* 2[ème] cas : $c=a\neq b$: alors

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & a & bc\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:\boxed{\operatorname{rg}A=2}$$

Par permutation des lignes, on est dans le même cas lorsque $b=a\neq c$ et $a\neq b=c$.

* 3[ème] cas : $a=b=c$: alors

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & b+c & bc\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:\boxed{\operatorname{rg}A=1}$$

On peut conclure pour résumer

$$\boxed{\operatorname{rg}B=\operatorname{card}\{a,b,c\}}$$

c) $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\a&b&c&d\end{pmatrix}$. On échelonne encore : $\left\{\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1\\L_4\leftarrow L_4+aL_1\end{array}\right.$ puis $\left\{\begin{array}{l}L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4+(b-2a)\,L_2\end{array}\right.$

$$C\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&b-2a&c-3a&d-4a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&a-2b+c&2a-3b+d\end{pmatrix}$$

Finalement

$$C\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&a-2b+c&2a-3b+d\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- $*$ <u>Si $a-2b+c\neq 0$</u>, alors $\boxed{\operatorname{rg} C=3}$
- $*$ <u>Si $a-2b+c=0$ et $2a-3b+d\neq 0$</u>, alors $\boxed{\operatorname{rg} C=3}$
- $*$ <u>Si $a-2b+c=2a-3b+d=0$</u>, alors $\boxed{\operatorname{rg} C=2}$

Ex 13 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I_3$$

On échelonne $A(\lambda)$, après un échange des deux premières lignes (et une multiplivcation par -1 :

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1-2\lambda-\lambda^2 & 2+\lambda \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - (2+\lambda) L_1$$

A nouveau

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-2\lambda-\lambda^2 & 2+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 6\lambda-\lambda^3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \left(1-2\lambda-\lambda^2\right) L_2$$

- Si $6\lambda - \lambda^3 \neq 0$, i.e. $\lambda \notin \left\{0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\right\}$ alors $\operatorname{rg} A(\lambda) = 3$.
- Si $\lambda \in \left\{0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\right\}$ alors $\operatorname{rg} A(\lambda) = 2$. Pour ces valeurs, le système (S) :

$$AX = \lambda X \iff AX - \lambda X = 0 \iff (A - \lambda I_3) X = 0 \iff A(\lambda) X = 0$$

admet une infinité de solutions (système homogène, donc compatible, un paramètre, z).

  * Pour $\lambda = 0$,

$$(S) \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ [z = z] \end{cases}$$

  Solutions :

$$\boxed{X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}}$$

  * Pour $\lambda = \sqrt{6}$,

$$(S) \iff \begin{cases} x + \sqrt{6}y - z = 0 \\ y + \left(2 - \sqrt{6}\right) z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \left(2\sqrt{6} - 5\right) z \\ y = \left(\sqrt{6} - 2\right) z \\ [z = z] \end{cases}$$

  Solutions :

$$\boxed{X = z \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} - 5 \\ \sqrt{6} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}}$$

  * Pour $\lambda = -\sqrt{6}$,

$$(S) \iff \begin{cases} x - \sqrt{6}y - z = 0 \\ y + \left(2 + \sqrt{6}\right) z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\left(2\sqrt{6} + 5\right) z \\ y = -\left(\sqrt{6} + 2\right) z \\ [z = z] \end{cases}$$

  Solutions :

$$\boxed{X = z' \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} + 5 \\ \sqrt{6} + 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z' \in \mathbb{R}}$$

Ex 14 Soient $A_1, \dots, A_n$ n points du plan muni d'un repère. On cherche des points $B_1, B_2, \dots, B_n$ tels que A_i soit milieu de $[B_iB_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en posant $B_{n+1} = B_1$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les abscisses des points $A_1, \dots, A_n$ et $x_1, \dots, x_n$ celles des points $B_1, \dots, B_n$.

a) La traduction des hypothèses donne les deux systèmes :

$$(S)\left\{\begin{array}{cl} x_1 + x_2 & = 2a_1 \\ x_2 + x_3 & = 2a_2 \\ \vdots & = \ \vdots \\ x_{n-1} + x_n & = 2a_{n-1} \\ x_1 + x_n & = 2a_n \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (S')\left\{\begin{array}{cl} y_1 + y_2 & = 2a'_1 \\ y_2 + y_3 & = 2a'_2 \\ \vdots & = \ \vdots \\ y_{n-1} + y_n & = 2a'_{n-1} \\ y_1 + y_n & = 2a'_n \end{array}\right.$$

en notant $y_1, \dots, y_n$ et $a'_1, \dots, a'_n$ les ordonnées de $B_1, \dots, B_n$ et de $A_1, \dots, A_n$.

b) Pour $n = 3$, , on obtient avec la matrice augmentée du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a_2 \\ 1 & 0 & 1 & 2a_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \quad \left(L_3 \leftarrow \tfrac{1}{2}\left(L_3 + L_2 - L_1\right)\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 + a_2 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$$

Ainsi l'unique solution de (S) est

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = a_1 - a_2 + a_3 \\ x_2 & = a_1 + a_2 - a_3 \\ x_3 & = -a_1 + a_2 + a_3 \end{array}\right.$$

et une solution analogue pour les ordonnées. On a donc vectoriellement :

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2A_3}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_3B_1} = \overrightarrow{A_2A_1}$$

B_1 est donc à l'intersection des droites passant par A_1 parallèle à (A_2A_3) et passant par A_3 parallèle à (A_2A_1) .

Cela permet de construire B_1 si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés.

On trouve de même (par permutation des lettres) :

$$\left\{\begin{array}{l} B_2 \text{ est l'intersection des droites passant par } A_2 \text{ parallèle à } (A_1A_3) \text{ et passant par } A_1 \text{ parallèle à } (A_2A_3)\,. \\ B_3 \text{ est l'intersection des droites passant par } A_3 \text{ parallèle à } (A_1A_2) \text{ et passant par } A_2 \text{ parallèle à } (A_1A_3)\,. \end{array}\right.$$

Pour $n = 4$, on obtient avec la matrice augmentée du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2a_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_4 - 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 \end{pmatrix} \quad (L_4 \leftarrow L_4 - L_3 + L_2 - L_1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_1 + a_2 - a_3 \end{pmatrix} \quad \left(\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}\right.\right)$$

Les systèmes (S) et (S') ne sont compatibles que si $a_4 - a_1 = a_3 - a_2$ (et $a'_4 - a'_1 = a'_3 - a'_2$) soit

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_2A_3}$$

* Si $A_1A_2A_3A_4$ n'est pas un parallèlogramme, le problème n'admet pas de solutions.
* Si $A_1A_2A_3A_4$ est un parallèlogramme, alors le système (S) admet l'infinité de solutions paramétrée par x_4

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -x_4 + 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 \\ x_2 & = \ x_4 + 2a_2 - 2a_3 \\ x_3 & = -x_4 + 2a_3 \\ x_4 & = \ x_4 \end{array}\right. \quad , \quad x_4 \in \mathbb{R} \quad \text{(et pareillement pour } (S')\text{)}$$

Ainsi on fixe un point quelconque B_4, on construit B_3 symétrique de B_4 par rapport à A_3, puis B_2 symétrique de B_3 par rapport à A_2, et enfin B_1 symétrique de B_2 par rapport à A_1.
Ce dernier est alors automatiquement le symétrique de B_4 par rapport à A_4.

c) Cas général

* Si n est impair ($n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}$)

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 2a_1 \\ x_2 + x_3 & = 2a_2 \\ \vdots & = \ \vdots \\ x_{2p} + x_{2p+1} & = 2a_{2p} \\ x_1 + x_{2p+1} & = 2a_{2p+1} \end{array}\right.$$

L'opération $L_{2p+1} \leftarrow L_{2p+1} - L_{2p} + \cdots - L_2 + L_1 = \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^{k-1} L_k$ donne (après division par 2) :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 2a_1 \\ x_2 + x_3 & = 2a_2 \\ \vdots & = \ \vdots \\ x_{2p} + x_{2p+1} & = 2a_{2p} \\ x_1 & = a_{2p+1} - a_{2p} + \cdots - a_2 + a_1 \end{array}\right.$$

Puis en remplaçant petit à petit à partir de la ligne 1 :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n \\ x_2 & = \underline{a_1 + a_2} - a_3 + \cdots - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n \\ x_3 & = -a_1 + \underline{a_2 + a_3} - \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n \\ \vdots & = \qquad\qquad \vdots \\ x_{2p} & = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + \underline{a_{n-2} + a_{n-1}} - a_n \\ x_{2p+1} & = -a_1 + a_2 + a_3 - \cdots - a_{n-2} + \underline{a_{n-1} + a_n} \end{array}\right.$$

Autrement dit la matrice A du système (S) est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le problème admet une solution unique, où tous les points $B_1, \ldots, B_n$ sont obtenus comme barycentres de $A_1, \ldots, A_n$ pondérés par de coefficients -1 ou 1.

$*$ Si n est pair ($n = 2p,\ p \in \mathbb{N}^*$)

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 &= 2a_1 \\ x_2 + x_3 &= 2a_2 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{2p-1} + x_{2p} &= 2a_{2p-1} \\ x_1 + x_{2p} &= 2a_{2p} \end{cases}$$

L'opération $L_{2p} \leftarrow L_{2p} - L_{2p-1} + \cdots + L_2 - L_1 = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k L_k$ donne (après division par 2) :

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 &= 2a_1 \\ x_2 + x_3 &= 2a_2 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{2p-1} + x_{2p} &= 2a_{2p-1} \\ 0 &= a_{2p} - a_{2p-1} + \cdots + a_2 - a_1 \end{cases}$$

Le système n'est compatible que si

$$\boxed{a_n - a_{n-1} + \cdots + a_2 - a_1 = 0}$$

et dans ce cas on obtient un sysème échelonné paramétrable par x_n : "en remontant"

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & 2a_1 & -2a_2 & +2a_3 & \cdots & -2a_{n-2} & +2a_{n-1} & -x_n \\ x_2 & = & & 2a_2 & -2a_3 & \cdots & +2a_{n-2} & -2a_{n-1} & +x_n \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & = & & & & & 2a_{n-2} & -2a_{n-1} & +x_n \\ x_{n-1} & = & & & & & & 2a_{n-1} & -x_n \\ x_n & = & & & & & & & x_n \end{array} \right.$$

La matrice A de (S) est ainsi non inversible de rang $n-1$, de réduite de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le problème admet une infinité de solutions. Partant d'un point B_n quelconque, on construit par symétrie des points $B_{n-1}, \ldots B_1$ qui conviennent.