Ex 1 Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble .

- $a \in E$ signifie que a est élément de E, ce qui est vrai.
- $a \subset E$ signifie que a est un sous ensemble de E, ce qui est faux!
- $\{a\} \subset E$ signifie que le singleton $\{a\}$ est un sous ensemble de E, ce qui est vrai.
- $\varnothing \in E$ signifie que $\varnothing$ est un élément de E, ce qui est faux!
- $\varnothing \subset E$ signifie que $\varnothing$ est un sous ensemble de E, ce qui est vrai.
- $\{\varnothing\} \subset E$ signifie que le singleton $\{\varnothing\}$ est un sous ensemble de E, ce qui est faux.

Remarque : on peut écrire que $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(E)$.

Ex 2 Ecritures symboliques :

a) Ensemble E des couples d'entiers relatifs de somme 1 : $E = \left\{(n, p) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ n + p = 1\right\}$

b) Ensemble F des couples d'entiers naturels dont le second est multiple du premier :

$$F = \left\{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \ / \ \exists k \in \mathbb{N} \ / \ p = kn\right\} = \left\{(n, kn)\ ,\ (n, k) \in \mathbb{N}^2\right\}$$

c) Ensemble G des triplets d'entiers naturels de somme paire :

$$G = \left\{(n, p, q) \in \mathbb{N}^3 \ / \ \exists k \in \mathbb{N} \ / \ n + p + q = 2k\right\}$$

d) Ensemble des images par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des éléments de $[-1, 1]$:

$$f([-1, 1]) = \{f(x)\ ,\ x \in [-1, 1]\} = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \exists x \in [-1, 1] \ / \ f(x) = y\}$$

e) Droite D passant par $A(1, 2)$ et de coefficient directeur 3 :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - 2 = 3(x - 1)\right\} = \{(1 + t, 2 + 3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Ex 3 Si $a \in \mathbb{N}$, On note $a\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de a.

a) Pour $a \in \mathbb{N}$, on a $a\mathbb{N} = \{an,\ n \in \mathbb{N}\} = \{p \in \mathbb{N} \ / \ \exists n \in \mathbb{N} \ / \ p = an\}$.

b) Montrons que $6\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$:
Si $p \in 6n$, alors $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ p = 6n$. Mais alors $p = 2(3n) \in 2\mathbb{N}$ puisque $3n \in \mathbb{N}$, CQFD.

c) Montrons que $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = 6\mathbb{N}$:

$\boxed{\supset}$ Montrons que $6\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$:
On a vu que $6\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$, et on montre de même que $6\mathbb{N} \subset 3\mathbb{N}$, d'où $6\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$.

$\boxed{\subset}$ Montrons que $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} \subset 6\mathbb{N}$:
Soit $p \in 2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$: alors $\exists k \in \mathbb{N} \ / \ p = 2k$ et $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ p = 3n$.
Mais alors $p = 3p - 2p = 6k - 6n = 6(k - n) \in 6\mathbb{N}$ puisque $k - n \in \mathbb{Z}$ et $p \geqslant 0$, CQFD.

Par **double inclusion** l'égalité demandée est démontrée.

Ex 4 Soient E un ensemble et A, B, C trois sous ensembles de E. Montrons que : $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

On utilise les règles de calcul sur les ensembles :

$$A \backslash (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) \quad \text{(lois de Morgan)}$$

Par distributivité :

$$A \backslash (B \cap C) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C) \quad \text{CQFD.}$$

Ex 5 Soient E un ensemble et A, B, C trois sous ensembles de E.

On suppose que $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases}$. Montrons que $B \subset C$:

Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, et par hypothèse à $A \cup C$.

- Si $x \notin A$, alors $x \in C$.
- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$, donc par hypothèse $x \in A \cap C$, donc $x \in C$.

Dans les deux cas, $x \in C$, CQFD.

Ex 6 Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E. Montrons que $A \subset B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $A \subset B$. Montrons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$:

Si $X \in \mathcal{P}(A)$ alors par définition $X \subset A$, d'où $X \subset B$ puisque $A \subset B$. Ainsi $X \in \mathcal{P}(B)$ CQFD.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. Montrons que $A \subset B$:

<u>Première méthode</u> : si $x \in A$ alors $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ donc $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ i.e. $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ ou $x \in B$ CQFD.

<u>Deuxième méthode</u> : $A \in \mathcal{P}(A)$ donc $A \in \mathcal{P}(B)$, i.e. $A \subset B$ CQFD.

Par double implication, l'équivalence est établie.

Ex 7 Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E.

On appelle **différence symétrique** de A et B l'ensemble : $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

a) On montre que : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ à l'aide des règles de calcul sur les ensembles :

$$\begin{array}{rcll}
A \triangle B & = & (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) & \\
 & = & (A \cup (B \cap \overline{A})) \cap (\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})) & \\
 & = & ((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cap ((\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) & \text{\#distributivité} \\
 & = & ((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cap ((\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) & \text{\#distributivité} \\
 & = & ((A \cup B) \cap E) \cap (E \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) & \\
 & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) & \\
 & = & (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} & \text{\#lois de Morgan} \\
 & = & (A \cup B) \setminus (A \cap B) &
\end{array}$$

Remarque : $x \in A \triangle B$ signifie $x \in A$ **ou exclusif** $x \in B$. En particulier $A \triangle B \subset A \cup B$

b) Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

- $*$ La définition de $A \triangle B$ montre clairement que $\boxed{A \triangle B = B \triangle A}$
- $*$ On a : $A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) \cap \overline{(A \cap \varnothing)} = A \cap \overline{\varnothing} = A \cap E = \boxed{A}$
- $*$ De plus : $A \triangle A = (A \backslash A) \cup (A \backslash A) = \varnothing \cup \varnothing = \boxed{\varnothing}$.
- $*$ Enfin $\boxed{\overline{A} \triangle \overline{B}} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \overset{\text{Morgan}}{=} \overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B) = \boxed{A \triangle B}$

c) Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que $A \triangle C = B \triangle C \Longleftrightarrow A = B$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $A \triangle C = B \triangle C$. Montrons que $A = B$:

<u>Soit $x \in A$</u>. Alors :

- Si $x \notin C$, alors $x \in A \triangle C$, d'où par hypothèse : $x \in B \triangle C$.
  En particulier $x \in B \cup C$, mais puisque $x \notin C$, il vient <u>$x \in B$</u>.
- Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$, donc $x \notin A \triangle C = B \triangle C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$
  Or $x \in B \cup C$, on peut donc en déduire que $x \in B \cap C$, donc <u>$x \in B$</u>.

Dans les deux cas <u>$x \in B$</u>, ce qui prouve l'inclusion $A \subset B$.

Par symétrie des rôles, on a aussi $B \subset A$, ce qui finalement nous assure de l'égalité <u>$A = B$</u>.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, si $A = B$, alors il est évident que $A \triangle C = B \triangle C$

Par double implication, l'équivalence est établie.

Ex 8 a) Soit $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$. On pressent que $I = [0,1[$ ...

* $*$ Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[0,1-\frac{1}{n}\right] \subset [0,1[$, on a par réunion $I \subset [0,1[$.
* $*$ Inversement, montrons que $[0,1[\subset I$:
  Soit $x \in [0,1[$: alors $\exists n \in \mathbb{N}^* \ /\ x \leqslant 1 - \frac{1}{n}$: en effet,

$$x \leqslant 1 - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant 1-x \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{1}{1-x} \text{ puisque } 1-x>0$$

  L'entier non nul $n = \left\lceil \frac{1}{1-x} \right\rceil$ convient donc. Par conséquent $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ et donc $x \in I$ CQFD.

Par double inclusion, on a bien $\boxed{I = [0,1[}$

b) Soit $J = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right[$. On pressent que $I = \{0\}$ ...

* $*$ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \{0\} \subset \left]-\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right[$, donc $\{0\} \subset J$
* $*$ Inversement, montrons que $J \subset \{0\}$:
  Soit $x \in J$: par l'absurde, supposons $x \neq 0$. alors $\exists n \in \mathbb{N}^* \ /\ x \geqslant \frac{1}{n}$: en effet,

$$x \geqslant \frac{1}{n} \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{1}{x} \text{ puisque } x > 0$$

  L'entier non nul $n = \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$ convient donc. Mais alors $x \notin \left]-\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right[$ contradiction.
  Il s'ensuit que $x = 0$, CQFD.

Par double inclusion, on a bien $\boxed{J = \{0\}}$

Ex 9 Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de $\mathcal{P}(E)$ telles que : $\forall i \in I,\ A_i \cup B_i = E$.

Montrons que : $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i\in I} B_i = E$.

– Première méthode : l'inclusion $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i\in I} B_i \subset E$ est une banalité.
  Il nous faut prouver que $E \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i\in I} B_i$: soit $x \in E$.

  * $*$ Si $x \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$ alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i\in I} B_i$
  * $*$ Sinon, $\exists i \in I \ /\ x \notin B_i$. Mais si i est un tel indice, par hypothèse $A_i \cup B_i = E$, d'où $x \in A_i$.
    On a alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, et *a fortiori* $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i\in I} B_i$.

  Dans les deux cas, $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \cup \bigcap\limits_{i\in I} B_i$ ce qui démontre notre inclusion, CQFD.

– Deuxième méthode : posons $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Alors par distributivité :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i = A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

  Ainsi (attention à la confusion d'indices)

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} \Big(\bigcup_{j\in I} A_j \cup B_i \Big)$$

  Or si i$\in I$, on a

$$\bigcup_{j\in I} A_j \cup B_i = \Big(\bigcup_{j\in I\setminus\{i\}} A_j \Big) \cup (A_i \cup B_i) \overset{\text{hypothèse}}{=} \Big(\bigcup_{j\in I\setminus\{i\}} A_j \Big) \cup E = E$$

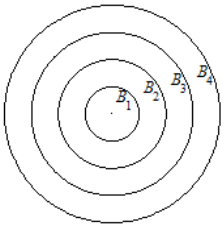
  Il vient

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} E = E \quad \text{CQFD.}$$

Ex 10 Soient E un ensemble, n un entier non nul, et $A_0, \ldots, A_n$ des sous ensembles de E vérifiant

$$\varnothing = A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E$$

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \backslash A_{k-1}$. Montrons que $B_1, \ldots, B_n$ est une partition de E :



Remarquons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $B_k \neq \varnothing$:
En effet $A_{k-1} \subsetneq A_k$ donc il existe un élément x de A_k qui n'est pas dans A_{k-1}, soit $x \in B_k$.

– Première méthode : il faut montrer que pour tout élément x de E, il existe un unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in B_i$.
  Soit donc $x \in E = A_n$. on considère le plus petit indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in A_i$.
  Comme $(A_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est strictement croissante pour l'inclusion, on a

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, i-1]\!] \, , \; x \notin A_k \\ \forall k \in [\![i, n]\!] \, , \; x \in A_k \end{cases}$$

  On peut alors affirmer que $x \in B_i$ ($x \in A_i$ mais $x \notin A_{i-1}$). De plus :
  * Si $k \in [\![0, i-1]\!]$ alors $x \notin B_k$ puisque $x \notin A_k$,
  * Si $k \in [\![i+1, n]\!]$, alors $x \notin B_k$ puisque $x \in A_k$ mais $x \in A_{k-1}$.

  Finalement, i est l'unique indice pour lequel on a $x \in A_i$, CQFD.

– Deuxième méthode :
  * On montre d'abord que $\forall \, (i, j) \in [\![1, n]\!] \, , \; i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing$:
    Supposons par exemple que $i < j$ (par symétrie des rôles). Alors

$$\begin{aligned} B_i \cap B_j &= A_i \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_j \cap \overline{A_{j-1}} \\ &= (A_i \cap A_j) \cap \overline{(A_{i-1} \cup A_{j-1})} \quad \text{\#lois de Morgan} \\ &= A_i \cap \overline{A_{j-1}} \quad (\text{car } A_i \subset A_j \text{ et } A_{i-1} \subset A_{j-1}) \end{aligned}$$

    Or $A_i \subset A_{j-1} \Rightarrow \overline{A_{j-1}} \subset \overline{A_i}$, ce qui entraine $A_i \cap \overline{A_{j-1}} \subset A_i \cap \overline{A_i} = \varnothing$. Il vient donc $\underline{B_i \cap B_j = \varnothing}$

  * On montre que $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

    On pressent une sorte de "télescopage : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \backslash A_{i-1} = A_n \backslash A_0 = A_n$"

    Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = A_k$.

    (i) $\bigcup\limits_{i=1}^{1} B_i = A_1$ s'écrit $B_1 = A_1$ qui est vrai.

    (ii) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = A_k$ et montrons que $\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} B_i = A_k$:

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \cup B_{k+1} \overset{\text{HdR}}{=} A_k \cup B_{k+1} = A_k \cup \left(A_{k+1} \cap \overline{A_k}\right)$$

    Par distributivité, et en utilisant $A_k \cup A_{k+1} = A_{k+1}$ (puisque $A_k \subset A_{k+1}$) :

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = (A_k \cup A_{k+1}) \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right) = A_{k+1} \cap E = A_{k+1}$$

    La récurrence est établie, et en particulier $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = A_n = E$, CQFD.