Ex 1 Montrer que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.

Ex 2 Montrer que si $x\notin\mathbb{Z},\quad \lfloor -x\rfloor=-\lfloor x\rfloor-1$

Ex 3 Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor\in\{0,1\}$. En déduire que $\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor$

Ex 4 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left\lfloor\sqrt{n^4+2n^3+3n^2+1}\right\rfloor=n^2+n$

Ex 5 Résoudre l'équation $\lfloor 2x+1\rfloor=\lfloor x+4\rfloor$

Ex 6 Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$: montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{x_k}{a}\right\rfloor\leqslant\left\lfloor\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}x_k\right\rfloor$

Ex 7 Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $M=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lfloor x^k\rfloor}{n}$. Encadrer M, et en déduire que

$$0\leqslant\left\lfloor\frac{1}{n}\frac{1-x^n}{1-x}\right\rfloor-\lfloor M\rfloor\leqslant 1$$

Ex 8 a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

b) En déduire la valeur de $\lfloor A\rfloor$, où $A=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Ex 9 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

Ex 10 Soit $x\in\mathbb{R}$, et pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$. Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Ex 11 Approximations décimales d'un réel à l'ordre n : soit x un réel. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note

$$x_n=\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}\quad\text{et}\quad x'_n=\frac{\lfloor 10^n x\rfloor+1}{10^n}=x_n+10^{-n}$$

et pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$a_n=10^n\left(x_n-x_{n-1}\right)=\lfloor 10^n x\rfloor-10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor$$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\leqslant x<x'_n$. Pour $x=\dfrac{22}{7}$, calculer $x_0,x'_0,x_1,x'_1,x_2x'_2,x_3,x'_3,a_1,a_2$ et a_3.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\in[\![0,9]\!]$ (a_n est un **chiffre**, appelé n-ième décimale de x)

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n=\lfloor x\rfloor+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}$

d) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x

Ex 12 Soit f la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=2\left|x-2\left\lfloor\dfrac{x+1}{2}\right\rfloor\right|$

a) Montrer que f est 2-périodique.

b) Pour tout x réel, déterminer une relation entre $\lfloor x\rfloor$ et $\lfloor -x\rfloor$. (on pourra distinguer $x\in\mathbb{Z}$ et $x\notin\mathbb{Z}$)

c) Soit $x\in\mathbb{R}$. Vérifier que $\dfrac{x+1}{2}\in\mathbb{Z}$ si et seulement si x est un entier impair.

d) A l'aide des questions précédentes, étudier la parité de f.

e) Simplifier l'expression de $f(x)$ si $x\in[0,1]$.

f) Tracer la courbe représentative de f sur $[-4,4]$ en justifiant les construction.