Quelques suites usuelles

1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0} \qquad (*)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $ac \neq 0$ (sinon on est ramené à des suites géométriques)

Remarque : pour quelles valeurs de λ la suite géométrique (λ^n) vérifie-t-elle $(*)$

a) Théorème :

On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$, et on appelle λ et μ ses deux racines (complexes)

1er cas : si $\lambda \neq \mu$ $\quad\left(b^2 - 4ac \neq 0\right)$: alors les suites vérifiant $(*)$ ont un terme général de la forme

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n, \quad \alpha, \beta \text{ constantes}$$

2d cas : si $\lambda = \mu$ $\quad\left(b^2 - 4ac = 0\right)$: alors les suites vérifiant $(*)$ ont un terme général de la forme

$$u_n = (\alpha n + \beta)\,\lambda^n, \quad \alpha, \beta \text{ constantes}$$

Les constantes α et β sont déterminées de manière unique par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1.

b) Exemples :

1. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \end{cases}$

2. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0 \end{cases}$

3. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \sqrt{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$

4. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0 \end{cases}$

5. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_n \end{cases}$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = 2, \quad u_1 = 2\cos x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2\cos(x)\,u_{n+1} - u_n \end{cases}$

7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = a - b \quad u_1 = a^2 - b^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - (a+b)\,u_{n+1} + abu_n = 0 \end{cases}$
   (discuter sur a, b)

8. **Suite de Fibonacci** : soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$
   Calculer u_n pour tout entier n, puis étudier la limite du rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

2. Suites arithmético-géométriques

On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b} \quad (*)$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 1$ (sinon suite arithmétique) et $b \neq 0$ (sinon suite géométrique)

a) Méthode :

- On calcule le point fixe ℓ solution de l'équation $\boxed{\ell = a\ell + b}$ $\left(\ell = \dfrac{b}{1-a}\right)$
- On considère la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$. On écrit alors pour tout n

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell \quad = a\ell \quad + b \end{array}\right. \Rightarrow u_{n+1} - \ell = a\,(u_n - \ell) \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = av_n}$$

  (v_n) est donc géométrique de raison a, ce qui s'écrit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 a^n$

- Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + (u_0 - \ell)\, a^n}$

b) Exemple :

1. déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{3} \end{array}\right.$
2. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{array}\right.$
3. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a - 2u_n \end{array}\right.$ $(a \in \mathbb{R})$
4. Déterminer l'unique suite (u_n) vérifiant $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 4 + i \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{iu_n + 5}{2} \end{array}\right.$

   Calculer la limite de (u_n) et représenter les premiers termes dans un repère orthonormé
5. Mêmes questions avec $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{1+i}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} u_n + 1 \end{array}\right.$