Ex 1 Calculer $(1+i)^{25}$ et $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Ex 2 Simplifier $\left(1+i\sqrt{3}\right)^k - \left(1-i\sqrt{3}\right)^k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex 3 Discuter selon les valeurs du réel x l'expression de l'argument principal de $z = 1 + ix$.

Ex 4 Etudier la suite (z_n) définie par récurrence par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(3z_n + 2\overline{z_n}\right)$.

Ex 5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le module et un argument de $Z = \dfrac{1+(\cos\theta + i\sin\theta)^3}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2}$.

Ex 6 Calculer le module et un argument de $e^{i\alpha} + e^{i\beta} \quad \left((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$.

Ex 7 Soient a et b deux complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$: montrer que $Z = \dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$

Ex 8 Soit z un nombre complexe et $Z = \dfrac{1+zi}{1-zi}$. Montrer que $|Z| = 1 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Ex 9 Soient a et b deux réels, $z = a + ib$, $A = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ et $f(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta$.

Calculer $\operatorname{Re}\left(\bar{z}e^{i\theta}\right)$ et en déduire que $\forall\theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = A\cos(\theta - \varphi)$.

Ex 10 Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

Ex 11 Soient z, z', u des nombres complexes vérifiant $zz' = u^2$,et ζ, ζ' des racines carrées de z et z'. Montrer que

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$$

Ex 12 Soit α un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $z = \dfrac{1}{1+i\tan\alpha}$.

a) Calculer le module et l'argument de z.

b) Exprimer $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ en fonction de $\theta = -2\alpha$.

c) En déduire que lorsque α varie, le point M d'affixe z décrit un cercle privé d'un point que l'on précisera.

d) Donner une construction simple du point M_0 d'affixe $z_0 = \dfrac{1}{1+i\tan\frac{7\pi}{8}}$

Ex 13 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $(S)\begin{cases}\cos\theta + \cos(\theta+x) + \cos(\theta+y) = 0\\ \sin\theta + \sin(\theta+x) + \sin(\theta+y) = 0\end{cases}$.

On commencera par montrer à l'aide de l'exponentielle complexe, que $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases}1 + \cos(x) + \cos(y) = 0\\ \sin(x) + \sin(y) = 0\end{cases}$

Ex 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

a) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$ b) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$ c) $z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3} = 0$

Ex 15 Pour tout réel t, on considère l'équation complexe $(E_t) \quad z^2 - 2(1 + 2\cos t + 2i\sin t)z - 3 = 0$

a) Montrer que le discriminant de (E_t) s'écrit $\Delta_t = 16u(t)e^{it}$, où $u(t)$ est un réel à déterminer.

b) Discuter suivant les valeurs de t la forme des solutions de (E_t)

Ex 16 Trouver une solution réelle de l'équation $(E) : iz^3 + (2i-1)z^2 - (i+4)z + 3(2i-1) = 0$, et en déduire ses solutions complexes.

Ex 17 Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)x$.

En déduire $S = \cos^2\dfrac{\pi}{14} + \cos^2\dfrac{3\pi}{14} + \cos^2\dfrac{5\pi}{14}$.

Ex 18 Soit $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Montrer que si $x \neq 0\ [\pi]$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \sin x}$.

On pourra exploiter la relation $\cos(kx) = \operatorname{Re} e^{ikx}$. Qu'en est-il si $x = 0\ [\pi]$?

Ex 19 On considère un complexe z tel que $|z| \leqslant 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1+z}{2}$ et S_n la somme des $n+1$ premiers termes de (u_n), soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) On suppose $|z| < 1$.Montrer que (u_n) converge vers 0, puis que S_n converge vers un complexe S à préciser

b) On suppose $|z| = 1$ et on pose $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \left]-\pi, 0\right[\cup \left]0, \pi\right[$.
Montrer que S_n converge vers un complexe S à préciser, et calculer $\operatorname{Re} S$ et $\operatorname{Im} S$ en fonction de θ.

Ex 20 On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par $\begin{cases} z_0 = i \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|) \end{cases}$

Pour tout entier n, on pose : $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, avec $\rho_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_n \in \left]-\pi, \pi\right]$

a) Sans calculer leurs affixes, représenter dans un repère orthonormal les points A_0, A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 (remarquer que A_{n+1} s'interprète comme un milieu).

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \notin \mathbb{R}$.

c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \rho_{n+1} = \rho_n . \cos\frac{\theta_n}{2} \\ \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \end{cases}$. En déduire l'expression de θ_n en fonction de n.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \rho_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$, puis $\quad \rho_n = \dfrac{1}{2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$.

e) Donner le terme général de la suite (z_n) en fonction de n, puis sa limite.

Ex 21 Soit $z \in \mathbb{C} - \{-1, 0, 1\}$; on considère les points $A(1)$, $B(-1)$, $M(z)$, $M'\left(\dfrac{1}{z}\right)$, et I le milieu de $[MM']$.

Démontrer que (MM') est bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$.

Ex 22 Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points du plan : on dit que ABC est équilatéral direct lorsque $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

a) Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

b) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.