Ex 1 En revenant à la définition, montrer que $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{x^2-3x+2} = -\infty$

Ex 2 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et telles que $\lim\limits_{a} f = \ell$ et $\lim\limits_{a} g = \ell'$ $(a \in \bar{I})$

On pose, pour tout $x \in I$: $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que $\lim\limits_{a} h = \max(\ell, \ell')$.

Ex 3 Montrer que la fonction $f : x \to \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.

Ex 4 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt$.

Montrer que $\sin$ est 1-lipschitzienne, et en déduire que F est lipschtzienne.

Ex 5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = f(\alpha)$.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in [0,1]$ tel que $f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$.

Indication : considérer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

Ex 6 Un marcheur parcourt 12 km en une heure.

Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il parcourt exactement 6 km.

Ex 7 Soit f continue sur $[a,b]$, et p, q deux réels positifs. ($(p,q) \neq (0,0)$).

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ / $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Ex 8 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue positive sur $[0,+\infty]$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell < 1$.

Montrer qu'il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Ex 9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Que peut-on dire?

Ex 10 Soit f une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Ex 11 Soit f une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ex 12 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$ on pose $m(x) = \sup\limits_{t\in[a,x]} f(t)$.

a) Montrer que m est croissante sur $[a,b]$.

b) Montrer que pour $x \leqslant y$ dans $[a,b]$, on a $m(y) - m(x) \leqslant \sup\limits_{t\in[x,y]} (f(t) - f(x))$.

c) En déduire la continuité de m sur $[a,b]$.

d) On suppose que f est lipschitzienne. Que peut-on dire de m?

Ex 13 Déterminer les fonctions f continues en 0 telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

[Analyse : poser $a = f(1)$ et calculer $f(n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ puis $\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$]

Ex 14 Trouver toutes les fonctions continues en 0 et en 1 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x^2\right) = f(x)$.

Analyse : pour un x donné, il peut être intéressant de considérer la suite de terme général $f\left(x^{1/2^n}\right)$.

Ex 15 On se propose de décrire toutes les fonctions continues en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos x$.

a) Soit f une telle fonction et $x \in \mathbb{R}^*$. Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

En déduire que si $x \notin \{2^p k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Et sinon?

b) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x et $f(0)$. Conclure.

Ex 16 Bijections et continuité

a) Montrer que la réciproque d'une bijection strictement monotone est strictement monotone de même sens.

b) Montrer que si $f : I \to J$ est continue et bijective, alors f est strictement monotone sur I.

c) Montrer que si f est strictement monotone sur I et si $f\langle I\rangle$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

d) En déduire que la réciproque d'une bijection continue de l'intervalle I sur J est continue sur J.

Ex 17 On suppose f continue sur $[a, b]$. On veut établir que f est bornée sur $[a, b]$.

Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, on définit les suites (a_n) et (b_n) de $[a, b]$ par récurrence :

$a_0 = a,\ b_0 = b$ et si $a_n \leqslant b_n$ sont construits, on pose $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = m_n \text{ si } f \text{ et non bornée sur } [a_n, m_n] \\ a_{n+1} = m_n \text{ et } b_{n+1} = b_n \text{ sinon} \end{cases}$$

A l'aide de ces suites, obtenir une contradiction et conclure.