On rendra chacun sa copie

EXERCICE 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ et on note :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1. Calculer $\cos^2 z + \sin^2 z$

2. Comparer $\cos(\overline{z})$ et $\overline{\cos(z)}$

3. Calculer les parties réelles puis imaginaires de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de x et y.
On pourra utiliser les fonctions hyperboliques.

4. Calculer les modules de $\cos(z)$ et $\sin(z)$ en fonction de x et y.

5. Si $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, a-t-on $\cos(z + z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$?

6. Déterminer tous les nombres complexes z tels que $\cos(z) \in \mathbb{R}$.

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sin(z) = -2$

EXERCICE 2

Pour tout réel t, on considère l'équation complexe

$$(E_t) \qquad z^2 - 2\left(1 + 2e^{it}\right)z - 3 = 0$$

On notera z_t et z'_t ses solutions (qui dépendent de t).

1. a) Montrer que pour tout réel t, le point P d'affixe $\dfrac{z_t + z'_t}{2}$ est sur un cercle dont on donnera centre et rayon.

b) On suppose que z_t et z'_t sont réels : montrer que $t = 0 \ [\pi]$.

c) Réciproquement, montrer qu'à ces valeurs de t correspondent deux équations distinctes qui admettent chacune effectivement deux solutions réelles que l'on calculera.

2. Montrer que le discriminant de (E_t) s'écrit $\Delta_t = 16u(t)\,e^{it}$, où $u(t)$ est un réel à déterminer.

3. Pour quelles valeurs de t a-t-on $z_t = z'_t$?

4. On suppose dans cette question que $1 + 2\cos t > 0$.

a) Pour quelles valeurs de t cette condition est-elle remplie ?

b) Déterminer un complexe δ_t tel que $\delta_t^2 = \Delta_t$ et en déduire les solutions de (E_t).

c) Montrer que $z_t - 3$ et $z'_t - 3$ peuvent s'écrire $2a(t)\,e^{it/2}$ et $2b(t)\,e^{it/2}$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont des complexes dont on donnera une expression (éventuellement à l'aide de $u(t)$).

d) En déduire que $z_t - 3$ et $z'_t - 3$ ont même module.

5. On suppose dans cette question que $1 + 2\cos t < 0$.

a) Pour quelles valeurs de t cette condition est-elle remplie ?

b) Déterminer un complexe δ_t tel que $\delta_t^2 = \Delta_t$ et en déduire les solutions de (E_t).

c) Montrer que $z_t - 3$ et $z'_t - 3$ peuvent s'écrire $2ic(t)\,e^{it/2}$ et $2id(t)\,e^{it/2}$, où $c(t)$ et $d(t)$ sont des réels dont on donnera une expression (éventuellement à l'aide de $u(t)$).

d) En déduire que $z_t - 3$ et $z'_t - 3$ ont même argument (on commencera par calculer $c(t)\,d(t)$)