Ex 1 Parmi les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut envisager les produits :

$$AD = (14), \quad AF = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad BE = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad CE = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad ED = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad EF = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \\ 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad FC = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ex 2 Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul élémentaire donne $AB = BA = 0_{\mathcal{M}_3}$.

Si donc A était inversible, on aurait $AA^{-1} = I_3$ d'où (en multipliant par B) : $BAA^{-1} = B$, soit $B = 0_{\mathcal{M}_3}$.
De même si B était inversible, on aurait $A = 0_{\mathcal{M}_3}$, ce qui contradictoire.

$$\boxed{\text{Ni } A \text{ ni } B \text{ n'est inversible}}$$

Ex 3 Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Notons $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{M}_n}$.
On suppose que $A^p = \mathbb{O}$ et $B^q = \mathbb{O}$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, de sorte que

$$\forall k \geqslant p,\ A^k = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant q,\ B^k = \mathbb{O}$$

Alors, puisque A et B commutent, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ (AB)^k = A^k B^k$. En posant $\underline{r = \max(p, q)}$, on a alors :

$$(AB)^r = A^r B^r = \mathbb{O} \quad i.e. \quad \boxed{AB \text{ est nilpotente}}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la formule du binôme :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Poson $\underline{s = p + q}$. Alors, si $k \in [\![0, s]\!]$:

$$\text{si } k \geqslant p,\ \text{alors } A^k = \mathbb{O}$$

et

$$\text{si } k < p,\ \text{alors } s - k > q \text{ donc } B^{s-k} = \mathbb{O}$$

Par combinaison linéaire, il s'ensuit que :

$$(A + B)^s = \mathbb{O} \quad i.e. \quad \boxed{A + B \text{ est nilpotente}}$$

Ex 4 Si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on note $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a+c & b & -c\\ b & a+2c & -b\\ -c & -b & a+c\end{pmatrix}$ et $\mathcal{A}=\left\{M(a,b,c)\,,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

a) Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on a $M(a,b,c)=aI+bJ+cK$, avec

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3,\quad J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad K=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

Soit alors $(a,b,c,a',b',c',\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^6$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda M(a,b,c)+\mu M(a',b',c') &= \lambda(aI+bJ+cK)+\mu(a'I+b'J+c'K)\\ &= (\lambda a+\mu a')I+(\lambda b+\mu b')J+(\lambda c+\mu c')K\\ &= M(\lambda a+\mu a',\lambda b+\mu b',\lambda c+\mu c')\in\mathcal{A}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{toute combinaison linéaire d'éléments de } \mathcal{A} \text{ est dans } \mathcal{A}}$$

b) Avec les mêmes notations,

$$M(a,b,c)\,M(a',b',c')=(aI+bJ+cK)(a'I+b'J+c'K)$$

est une combinaison linéaires de $I,\ J,\ H,\ J^2,\ JK,\ KJ,\ K^2$. D'après la question précédente, il suffit prouver que chacun de ces 7 matrices est dans $\mathcal{A}$ pour conclure que $M(a,b,c)\,M(a',b',c')$ est dans $\mathcal{A}$.

C'est évidemment le cas des 3 premières. De plus des calculs élémentaires donnent

$$J^2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=K\in\mathcal{A}$$

$$JK=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}=2J\in\mathcal{A}$$

$$KJ=J^3=JK=2J\in\mathcal{A}$$

$$K^2=J^2K=J(JK)=2J^2=2K\in\mathcal{A}$$

On peut finalement conclure par combinaison linéaire :

$$\boxed{\text{tout produit d'éléments de } \mathcal{A} \text{ est dans } \mathcal{A}}$$

Ex 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a) Un calcul facile donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$$

On peut sans crainte conjecturer : $\forall k \geqslant 2,\ \boxed{A^k = A^2}\ [H_k]$

* H_2 est une évidence.
* Si $k \geqslant 2$ et H_k est vraie, alors $A^{k+1} = AA^k \overset{H_k}{=} AA^2 = A^3 = A^2$ CQFD.

b) Montrons que M commute avec A si et seulement si M est combinaison linéaire de I, A et A^2.

* Si M est combinaison linéaire de I, A et A^2, alors $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ / \ M = aI + bA + cA^2$, et

$$AM = aA + bA^2 = cA^3 = MA$$

* Inversement, si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ commute avec A, alors (ce n'est pas fin...) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} ib & 0 & ia+c \\ ie & 0 & id+f \\ ih & 0 & ig+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig & ih & ij \\ ia & ib & ic \\ g & h & j \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} b = g \\ b = h = 0 \\ e = a \\ g = ih \\ ij = ia + c \\ ic = id + f \\ j = ig + j \end{cases} \iff \begin{cases} b = g = h = 0 \\ e = a \\ j = a - ic \\ f = ic - id \end{cases}$$

D'où M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & a & i(c-d) \\ 0 & 0 & a - ic \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & (c-d)+d \\ d & a & i(c-d) \\ 0 & 0 & a - i(c-d) - id \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} + (c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

En factorisant par $-i$

$$\begin{aligned} M &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - id\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i(c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aI - idA - i(c-d)A^2 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Ex 6 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcul des puissances de A. On écrit

$$A = -I + N \quad \text{avec } I = I_3 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente,d'ordre 3 et commute avec $-I$: onpeut donc appliquer la formule du binôme : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (-I)^n + n\,(-I)^{n-1}\,N + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(-I)^{n-2}\,N^2 + 0_{\mathcal{M}_3}$$

Soit

$$\boxed{A^n = (-1)^n \left[I - nN + \frac{n\,(n-1)}{2} N^2\right]}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -an & -an \\ -n & 1 + \frac{1}{2}an\,(n-1) & \frac{1}{2}an\,(n-1) \\ n & -\frac{1}{2}an\,(n-1) & 1 - \frac{1}{2}an\,(n-1) \end{pmatrix}}$$

Voyons si cette formule est valable pour $n \in \mathbb{Z}$: si $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n = (-1)^{-n} \left[I + nN + \frac{n\,(n+1)}{2} N^2\right]$$

Alors

$$\begin{aligned} B_n A^n &= \left[I + nN + \frac{n\,(n+1)}{2} N^2\right]\left[I - nN + \frac{n\,(n-1)}{2} N^2\right] \\ &= I - n^2 N^2 + \frac{n\,(n+1)}{2} N^2 + \frac{n\,(n-1)}{2} N^2 + 0_{\mathcal{M}_3} \\ &= I \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, cela prouve l'inversibilité de A (et $A^{-1} = B_1$). De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = B_n = (-1)^{-n} \left[I + nN + \frac{n\,(n+1)}{2} N^2\right]$$

<u>La formule donne donc bien A^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.</u>

Ex 7 Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) les suites définies par récurrence par $x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 4x_n - 3y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 2y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 3y_n - 2z_n \end{array} \right.$$

a) Calculons les puissances de $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. On a, en notant $I = I_3$ et $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{M}_3}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -A + 2I$$

Le polynôme $P = X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$ annule A. Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \ /\ A^n = a_n A + b_n I \quad (H_n)$$

* H_0 est vraie avec $(a_0, b_0) = (0, 1)$ (et H_1 aussi avec $(a_1, b_1) = (1, 0)$
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n. Alors
$$A^{n+1} = (a_n A + b_n I) A = a_n A^2 + b_n A = a_n (2I - A) + b_n A = (b_n - a_n) A + 2a_n I$$
En posant
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{array} \right.$$
on a bien
$$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$$

Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & b_{n+1} - a_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n \\ b_{n+2} & = & 2a_{n+1} = 2b_n - 2a_n = -b_{n+1} + 2b_n \end{array}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

de polynôme caractéristique $X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$.
Il existe ainsi 4 constantes $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} a_n = \alpha + \beta (-2)^n \\ b_n = \alpha' + \beta' (-2)^n \end{array} \right.$$

Les conditions initiales donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 1 = \alpha - 2\beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1/3 \\ \beta = -1/3 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 = \alpha' + \beta' \\ b_1 = 0 = \alpha' - 2\beta' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = 2/3 \\ \beta' = 1/3 \end{array} \right.$$

Finalement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3} [1 - (-2)^n] A + \frac{1}{3} [2 + (-2)^n] I}$$

ou

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3} [(A + 2I) + (-2)^n (I - A)]}$$

Explicitement

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right]}$$

b) On pose classiquement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{de sorte que } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{n+1} = AX_n$$

On montre alors très facilement par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$$

soit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_n = 2 - (-2)^n \\ y_n = -(-2)^n \\ z_n = 2 - (-2)^n \end{array} \right.}$$

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\boxed{A^3 = A^2 + 2A} \quad (\text{soit} \quad X^3 - X^2 - 2X \text{ annule } A)$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \ / \ A^n = a_n A + b_n A^2 \quad (H_n)$

- H_1 est vraie avec $(a_1, b_1) = (1, 0)$ (et H_2 aussi avec $(a_2, b_2) = (0, 1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n et montrons H_{n+1} : on a

$$A^{n+1} = \left(a_n A + b_n A^2\right) A = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n \left(A^2 + 2A\right) = 2b_n A + (a_n + b_n) A^2$$

En posant

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

on a bien

$$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} A^2 \quad \text{CQFD}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_{n+1} + 2b_n$$

et

$$a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = a_{n+1} + 2a_n$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$$

de polynôme caractéristique $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. Donc

$$\exists \left(\alpha, \beta, \alpha', \beta'\right) \ / \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = \alpha (-1)^n + \beta 2^n \\ b_n = \alpha' (-1)^n + \beta' 2^n \end{cases}$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} a_1 = 1 = -\alpha + 2\beta \\ a_2 = 0 = \alpha + 4\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2/3 \\ \beta = 1/6 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_1 = 0 = -\alpha' + 2\beta' \\ b_2 = 1 = \alpha' + 4\beta' \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = 1/3 \\ \beta' = 1/6 \end{cases}$$

Finalement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \frac{1}{6}\left[-4(-1)^n + 2^n\right] A + \frac{1}{6}\left[2(-1)^n + 2^n\right] A^2}$$

ou

$$\boxed{A^n = \frac{1}{6}\left[(-1)^n \left(-4A + 2A^2\right) + 2^n \left(A + A^2\right)\right]}$$

Explicitement

$$\boxed{A^n = \frac{1}{6}\left[(-1)^n \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]}$$

Ex 9 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On note $\operatorname{tr} A = a + d$ et $\det A = ad - bc$.

a) Théorème de Cayley-Hamilton pour la dimension 2 : on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{tr} A)\ A = \begin{pmatrix} a^2+da & ab+bd \\ ac+cd & d^2+ad \end{pmatrix}, \quad (\det A)\ I_2 = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Il vient facilement, en notant $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{M}_2}$:

$$\boxed{A^2 - (\operatorname{tr} A)\, A + (\det A)\ I_2 = \mathbb{O}}$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. et $B = \begin{pmatrix} 1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda \\ \lambda-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$., determinant: λ^2 alors

$$\operatorname{tr} B = 1+\lambda^2 \quad \text{et} \quad \det B = \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 - (1-\lambda)\left(\lambda-\lambda^2\right) = \lambda^2$$

D'après le a), on a ainsi, en posant $I = I_2$:

$$B^2 - \left(1+\lambda^2\right) B + \lambda^2\, I = \mathbb{O}$$

Le polynôme $X^2 - \left(1+\lambda^2\right) X + \lambda^2$, dont les racines sont évidemment 1 et λ^2 (cf somme et produit), est annulateur de B. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\exists\, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \ /\ B^n = a_n B + b_n I \quad (H_n)$$

$*$ H_0 est vraie avec $(a_0, b_0) = (0,1)$ (et H_1 aussi avec $(a_1, b_1) = (1,0)$)

$*$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n. Alors

$$B^{n+1} = (a_n B + b_n I)\, B = a_n B^2 + b_n B = a_n \left(\left(1+\lambda^2\right) B - \lambda^2\, I\right) + b_n B = \left(b_n + \left(1+\lambda^2\right) a_n\right) B - \lambda^2 a_n I$$

En posant

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \left(1+\lambda^2\right) a_n \\ b_{n+1} = -\lambda^2 a_n \end{cases}$$

on a bien

$$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$$

Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= b_{n+1} + \left(1+\lambda^2\right) a_{n+1} = \left(1+\lambda^2\right) a_{n+1} - \lambda^2 a_n \\ b_{n+2} &= -\lambda^2 a_{n+1} = -\lambda^2 b_n - \left(1+\lambda^2\right) \lambda^2 a_n = \left(1+\lambda^2\right) b - \lambda^2 b_n \end{aligned}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} - \left(1+\lambda^2\right) u_{n+1} + \lambda^2 u_n = 0$$

de polynôme caractéristique $X^2 - \left(1+\lambda^2\right) X + \lambda^2 = (X-1)\left(X-\lambda^2\right)$.

i. <u>Premier cas : $\lambda \notin \{-1, 1\}$</u>, i.e. $\lambda^2 \neq 1$. Alors il existe ainsi 4 constantes $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \alpha + \beta \lambda^{2n} \\ b_n = \alpha' + \beta' \lambda^{2n} \end{cases}$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 1 = \alpha + \lambda^2 \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{-1}{\lambda^2-1} \\ \beta = \dfrac{1}{\lambda^2-1} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_0 = 1 = \alpha' + \beta' \\ b_1 = 0 = \alpha' + \lambda^2 \beta' \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2-1} \\ \beta' = \dfrac{-1}{\lambda^2-1} \end{cases}$$

Finalement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{B^n = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[-1 + \lambda^{2n}\right] B + \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda^2 - \lambda^{2n}\right] I}$$

ou

$$\boxed{B^n = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\left(\lambda^2 I - B\right) + \lambda^{2n}\left(B - I\right)\right]}$$

Explicitement

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix} + \lambda^{2n}\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 1 - \lambda \\ \lambda - \lambda^2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda + 1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} + \lambda^{2n}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{B^n = \frac{1}{\lambda + 1}\begin{pmatrix} \lambda^{2n+1} + 1 & 1 - \lambda^{2n} \\ -\lambda^{2n+1} + \lambda & \lambda + \lambda^{2n} \end{pmatrix}}$$

ii. <u>Deuxième cas : $\lambda = 1$</u> alors $B = I$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{B^n = I}$$

iii. <u>Troisième cas : $\lambda = -1$</u> alors $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et les suites (a_n) et (b_n) sont de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = (\alpha + n\beta) \\ b_n = \left(\alpha' + n\beta'\right) \end{cases},\ \text{où } \left(\alpha, \beta, \alpha', \beta'\right) \in \mathbb{R}^4$$

On résout encore

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha \\ a_1 = 1 = \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_0 = 1 = \alpha' \\ b_1 = 0 = \alpha' + \beta' \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = 1 \\ \beta' = -1 \end{cases}$$

Finalement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{B^n = nB + (1 - n)\, I}$$

Explicitement

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 1 + 2n & 2n \\ -2n & 1 - 2n \end{pmatrix}}$$

Ex 10 Calculs d'inverses

a) $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. On résout le système (S) : $AX=Y$, avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}(S) &\iff \left\{\begin{array}{l}-y+z=x'\\-x+z=y'\\x+y-z=z'\end{array}\right.\\&\iff \left\{\begin{array}{l}-x+z=y'\\x+y-z=z'\\-y+z=x'\end{array}\right. \quad \text{(permutation)}\\&\iff \left\{\begin{array}{l}-x+z=y'\\y=y'+z'\\-y+z=x'\end{array}\right. \quad (L_2\leftharpoondown L_2+L_1)\\&\iff \left\{\begin{array}{l}x-z=-y'\\y=y'+z'\\z=x'+y'+z'\end{array}\right. \quad (L_3\leftharpoondown L_3+L_2)\end{aligned}$$

Finalement, on a l'unique solution :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{l}x=x'+z'\\y=y'+z'\\z=x'+y'+z'\end{array}\right.$$

A est donc inversible d'inverse

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$$

b) $B=\begin{pmatrix}1+i&1&i\\0&-i&1\\2-i&1&0\end{pmatrix}^{-1}=$. On résout le système (S) : $BX=Y$, avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$:

Le pivot de Gauss n'est pas bien pratique ici, utilisons une méthode *had hoc.*

En multipliant la deuxième ligne par i :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{l}(1+i)\,x+y+iz=x'\\y+iz=iy'\\(2-i)\,x+y=z'\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}(1+i)\,x=x'-iy'\\y+iz=iy'\\(2-i)\,x+y=z'\end{array}\right.$$

Avec $\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}(1-i)$, il vient

$$\begin{aligned}(S)&\iff\left\{\begin{array}{l}x=\frac12(1-i)\,x'-\frac12(1+i)\,y'\\y+iz=iy'\\y=-(2-i)\left[\frac12(1-i)\,x'-\frac12(1+i)\,y'\right]+z'\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{l}x=\frac12(1-i)\,x'-\frac12(1+i)\,y'\\y=-\frac12(1-3i)\,x'+\frac12(3+i)\,y'+z'\\iz=iy'-\left[-\frac12(1-3i)\,x'+\frac12(3+i)\,y'+z'\right]\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{l}x=\frac12(1-i)\,x'-\frac12(1+i)\,y'\\y=-\frac12(1-3i)\,x'+\frac12(3+i)\,y'+z'\\z=\frac12(-i-3)\,x'-\frac12(-3i-1)\,y'+iz'\end{array}\right.\end{aligned}$$

Finalement B est inversible et :

$$\boxed{B^{-1}=\frac12\begin{pmatrix}1-i&-1-i&0\\-1+3i&3+i&2\\-3-i&1+3i&2i\end{pmatrix}}$$

Ex 11 Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ (**trace** de A)

a) Soient A,B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. En notant a_{ij} et b_{ij} les termes généraux de A et B, on a

$$\mathrm{tr}(\lambda A+\mu B)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+\mu b_{ii})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\mu\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$$

soit

$$\boxed{\mathrm{tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\,\mathrm{tr}(A)+\mu\,\mathrm{tr}(B)}$$

b) Avec les notations précédentes, le terme (i,i) de AB est $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$ et celui de BA est $\sum_{\ell=1}^{n}b_{i\ell}a_{\ell i}$. Donc

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{ki}\quad\text{et}\quad\mathrm{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{n}b_{i\ell}a_{\ell i}=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}a_{\ell i}b_{i\ell}$$

Les lettres en jeu dans ces doubles sommes sont muettes, et on en déduit donc

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)}$$

c) Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P\in GL_n(\mathbb{K})$, on a d'après le b), en écrivant $PAP^{-1}=(PA)P^{-1}$

$$\mathrm{Tr}\left((PA)P^{-1}\right)=\mathrm{Tr}\left(P^{-1}(PA)\right)=\mathrm{Tr}(I_nA)$$

soit

$$\boxed{\mathrm{Tr}\left(PAP^{-1}\right)=\mathrm{Tr}(A)}$$

Ex 12 a) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P\in GL_n(\mathbb{K})$, et $B=P^{-1}AP$. Alors si $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}B^k&=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)\\&=P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{B^k=P^{-1}A^kP}$$

Cette méthode éclaire le calcul mais manque un peu de rigueur. On montre le résultat par récurrence :

* $B^0=I_n$ et $P^{-1}A^0P=PI_nP^{-1}=PP^{-1}=I_n$, d'où le résultat à l'ordre 0.
* Si $k\in\mathbb{N}$ et Calculer $B^k=P^{-1}A^kP$, alors

$$B^{k+1}=B^kB=P^{-1}A^kPP^{-1}AP=P^{-1}A^kAP=P^{-1}A^{k+1}P\quad\text{CQFD}$$

b) Application : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .On pose $D = P^{-1}AP$.

$*$ Commençons par calculer P^{-1} en appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

P est donc bien inversible et

$$P^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$*$ Alors un petit calcul donne

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Comme $A = PDP^{-1}$, la question précédente assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3^n}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Après calcul, on obtient finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{3^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 5 + (-1)^n & -1 + (-1)^n & 2 - 2(-1)^n \\ -1 + (-1)^n & 5 + (-1)^n & 2 - 2(-1)^n \\ 2 - 2(-1)^n & 2 - 2(-1)^n & 2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}}$$

ou

$$\boxed{A^n = \frac{3^n}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(-3)^n}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

Ex 13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$, et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.
On note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_{ij}}$. Alors, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}
\left[A\overline{A}\right]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{kj}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{-(k-1)(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)-(k-1)(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(i-j)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{i-j}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{i-j}\right)^{k}
\end{aligned}$$

Si $i = j$, alors

$$\left[A\overline{A}\right]_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Si $i \neq j$, alors comme $-(n-1) \leqslant i-j \leqslant n-1$ et $i-j \neq 0$, on a $\omega^{i-j} \neq 1$, d'où

$$\left[A\overline{A}\right]_{ij} = \frac{1-\left(\omega^{i-j}\right)^n}{1-\omega^{i-j}} = \frac{1-\left(\omega^{n}\right)^{i-j}}{1-\omega^{i-j}} = \frac{1-1}{1-\omega^{i-j}} = 0$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\left[A\overline{A}\right]_{ij} = n\delta_{ij}}$$

soit

$$A\overline{A} = nI_n = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{pmatrix}$$

Mais alors $A\left(\dfrac{1}{n}\overline{A}\right) = I_n$, d'où A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}}$$

Ex 14 Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, $D = \mathrm{Diag}\,(a_1, \dots, a_n)$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes valent 1.

On pose
$$A = J + D = \begin{pmatrix} 1+a_1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$, alors calculer ${}^tXX$ **est un réel**, qui vaut (naïvement) :
$${}^tXX = \left[{}^tXX\right]_{11} = \sum_{k=1}^{n} \left[{}^tX\right]_{1k} [X]_{k1} = \sum_{k=1}^{n} [X]_{k1} [X]_{k1}$$

Soit
$$\boxed{{}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

De la même manière ${}^tXAX$ **est aussi un réel**, et :
$${}^tXAX = \left[{}^tXAX\right]_{11} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \left[{}^tX\right]_{1k} [A]_{k\ell} [X]_{\ell 1} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [X]_{k1} [A]_{k\ell} [X]_{\ell 1}$$

Autrement dit
$${}^tXAX = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [A]_{k\ell}\, x_k x_\ell$$

Le terme général de A est $[A]_{ij} = 1 + a_i\delta_{ij}$, donc
$$\begin{aligned} {}^tXAX &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (1 + a_k\delta_{k\ell})\, x_k x_\ell \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k x_\ell + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_k \delta_{k\ell} x_k x_\ell\Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 \quad \text{(car } \delta_{k\ell} \text{ s'annule sauf pour } \ell = k) \end{aligned}$$

Montrons que A est inversible : il suffit de voir que si $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Or si $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors
$${}^tXAX = 0 \quad \text{soit} \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 = 0$$

Comme $\forall k \in [\![1, k]\!]\ a_k > 0$, les deux termes du membre de gauche de cette égalité sont positifs, ce qui entraîne
$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 = 0$$

qui à son tour entraîne (somme de termes positifs) :
$$\forall k \in [\![1, k]\!]\,,\ a_k x_k^2 = 0$$

et on en déduit donc que $x_1 = \cdots x_n = 0$ CQFD. On peut conclure :

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

Ex 15 On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes valent 1.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et σ la somme de tous les coefficients de A. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$[JAJ]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [J]_{ik}\,[A]_{k\ell}\,[J]_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [A]_{k\ell} = \sigma$$

La matrice JAJ a donc un terme général constant égal à σ, i.e.

$$\boxed{JAJ = \sigma J}$$

En particulier si $\underline{A = I_n}$, alors $\sigma = n$, donc, comme $J^2 = JI_nJ$:

$$\boxed{J^2 = nJ}$$

b) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ définie par : $\left\{\begin{array}{ll} a_{ij} = 0 & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 1 & \text{sinon} \end{array}\right.$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I, \quad \text{où } I = I_n$$

De $J^n = nJ$ on tire

$$\begin{aligned} (A+I)^2 = n(A+I) &\iff A^2 + (2-n)A = (n-1)I \\ &\iff \frac{1}{n-1}(A + (2-n)I)A = I \end{aligned}$$

Donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A + (2-n)I) = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}}$$

Remarque : on a ainsi, pour $n = 2$ et $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex 16 Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$. On note $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{M}_n}$

Le terme général de N est, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]$:

$$[N]_{ij} = \delta_{i+1,j}$$

Calculons celui de N^2 :

$$\left[N^2\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i+1,k}\delta_{k+1,j}$$

Dans cette somme, pour avoir un terme non nul il faut un entier k tel que $i+2 = k+1 = j$. Autrement dit

$$\left[N^2\right]_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i+2=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

soit

$$\left[N^2\right]_{ij} = (\delta_{i+2,j})$$

Ainsi

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

On conjecture que pour tout entier p, le terme général de N^p est $\delta_{i+p,j}$. Montrons-le par récurrence :

- C'est évident pour $p=0$ ($N^0 = I_n$ de terme général δ_{ij}).
- Si la formule est valable pour $p \in \mathbb{N}$, alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

  $$\left[N^{p+1}\right]_{ij} = [N^p N]_{ij} \overset{\text{HDR}}{=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{i+p,k}\delta_{k+1,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i+p+1=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  soit

  $$\left[N^{p+1}\right]_{ij} = (\delta_{i+p+1,j})$$

En particulier,

$$\begin{cases} \text{Si } p = n-1 : N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = E_{1n} \neq \mathbb{O} \\ \text{Si } p = n : N^n = \mathbb{O} \end{cases}$$

$$\boxed{N \text{ est nilpotente d'ordre } n}$$

Ex 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre $p \geqslant 1$. On pose $B = I_n - A$.

On connait la formule :

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n - A^p = I_n$$

Il s'ensuit que B est inversible et que

$$\boxed{(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k}$$

Application : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a (cf. ex précédent) :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = 0_{\mathcal{M}_4}$$

Comme $A = I - N$, on en déduit que $A \in GL_4$ et

$$\boxed{A^{-1} = I_4 + N + N^2 + N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ex 18 Lemme d'Hadamard : soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à diagonale strictement dominante, i.e. vérifiant

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrons que A est inversible : par l'absurde, sinon le système $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$ aurait une solution X non nulle.

On aurait donc $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = 0 \\ \qquad \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j = 0 \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$$

$\boxed{\text{On considère un entier } i_0 \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } |x_{i_0}| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)}$

Alors $x_{i_0} \neq 0$ sinon X serait nul. On a donc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \Longleftrightarrow a_{i_0 i_0}x_{i_0} = -\sum_{j \neq i} a_{i_0 j}x_j$$

Par inégalité triangulaire et majoration de $|x_j|$ par $|x_{i_0}|$:

$$|a_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i_0 j}|\,|x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j \neq i} |a_{i_0 j}|$$

En simplifiant par $|x_{i_0}| > 0$:

$$|a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i_0 j}|$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, d'où notre résultat.

Ex 19 Matrices élémentaires : si $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on considère la matrice $E_{k\ell}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls hormis le terme d'indice (k,ℓ) qui vaut 1. On rappelle que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Il est facile d'exprimer le terme général de $E_{k\ell}$: pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\boxed{[E_{k\ell}]_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}}$$

b) On a alors, pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la décomposition

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}}$$

En effet, on a bien pour $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}\right]_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,[E_{ij}]_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik}\delta_{j\ell} = a_{k\ell} = [A]_{k\ell}$$

c) Soit $(k,\ell,p,q) \in [\![1,n]\!]^4$. Calculons $E_{k\ell}E_{pq}$: si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[E_{k\ell}E_{pq}]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} [E_{k\ell}]_{ir}\,[E_{pq}]_{rj} = \sum_{r=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{r\ell}\delta_{rp}\delta_{jq} = \delta_{ik}\delta_{jq}\sum_{r=1}^{n}\delta_{r\ell}\delta_{rp}$$

Comme $\delta_{r\ell}$ n'est non nul que pour $r = \ell$, il vient

$$[E_{k\ell}E_{pq}]_{ij} == \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{\ell p} = \delta_{\ell p}\,[E_{kq}]_{ij}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{E_{k\ell}E_{pq} = \delta_{\ell p}E_{kq}}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \text{Si } \ell = p,\ E_{k\ell}E_{pq} = E_{kq} \\ \text{Si } \ell \neq p,\ E_{k\ell}E_{pq} = \mathbb{O} \end{cases}$$

d) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

* Calculons $E_{k\ell}A$. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a comme au c) :

$$[E_{k\ell}A]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} [E_{k\ell}]_{ir}\,[A]_{rj} = \sum_{r=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{r\ell}a_{rj} = \delta_{ik}\sum_{r=1}^{n}\delta_{r\ell}a_{rj} = \delta_{ik}a_{\ell j}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } i = k,\ [E_{k\ell}A]_{ij} = a_{\ell j} \\ \text{si } i \neq k,\ [E_{k\ell}A]_{ij} = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{E_{k\ell}A \text{ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne } k \text{ qui est la ligne } \ell \text{ de } A}$$

* Calculons $AE_{k\ell}$. De même pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$[AE_{k\ell}]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{ir}\,[E_{k\ell}]_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\delta_{rk}\delta_{j\ell} = \delta_{j\ell}\sum_{r=1}^{n}\delta_{rk}a_{ir} = \delta_{j\ell}a_{ik}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } j = \ell,\ [AE_{k\ell}]_{ij} = a_{ik} \\ \text{si } j \neq \ell,\ [AE_{k\ell}]_{ij} = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{AE_{k\ell} \text{ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne } \ell \text{ qui est la colonne } k \text{ de } A}$$

e) Soit $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$. Multiplions A à gauche de par $I_n + \lambda E_{k\ell}$

$$(I_n + \lambda E_{pq})\,A = A + \lambda E_{k\ell}A$$

D'après le calcul du d),

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Si } i \neq k\text{, la ligne } i \text{ de } \lambda E_{k\ell}A \text{ est nulle, donc celle de } A+\lambda E_{k\ell}A \text{ est celle de } A\\ \text{La ligne } k \text{ de } E_{k\ell}A \text{ est la ligne } \ell \text{ de } A\text{, donc celle de } A+\lambda E_{k\ell}A \text{ est celle de } A \text{ augmentée de } \lambda \text{ fois la ligne } \ell \text{ de } A\end{array}\right.$$

Ainsi

$$\boxed{\text{la multiplication à gauche de } A \text{ par } I_n + \lambda E_{k\ell} \text{ opère } L_k \leftarrow L_k + \lambda L_\ell}$$

Ex 20 On cherche toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA$$

- **Analyse** : si A convient, alors en particulier, elle commute avec toutes les matrices élémentaires E_{ij}

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ E_{ij}A = AE_{ij}$$

où (cf. ex précédent) :

$$E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{j\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$$

En notant a_{ij} le terme général de A, celà s'écrit, pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}[E_{k\ell}]_{ir}[A]_{rj} = \sum_{r=1}^{n}[A]_{ir}[E_{k\ell}]_{kj} &\iff \delta_{ik}\sum_{r=1}^{n}\delta_{r\ell}a_{rj} = \delta_{j\ell}\sum_{r=1}^{n}\delta_{rk}a_{ir}\\ &\iff \delta_{ik}a_{\ell j} = \delta_{j\ell}a_{ik}\end{aligned}$$

$*$ En fixant $i = k$, on a donc pour tout couple (ℓ, j) tel que $\ell \neq j$: $\boxed{a_{\ell j} = 0}$. <u>A est diagonale</u>.

$*$ En fixant $i = k$ et $\ell = j$, on a donc pour tout couple (i,j) : $\boxed{a_{jj} = a_{ii}}$: la diagonale est constante.

Ainsi, A est nécessairement une <u>matrice scalaire</u>, i.e. de la forme

$$\boxed{\lambda I_n\text{, où } \lambda \in \mathbb{K}}$$

- **Synthèse** : les matrices scalaires commutent avec toutes les autres :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ (\lambda I_n)\,M = M\,(\lambda I_n) = \lambda M$$

- **Conclusion** :

$$\boxed{\text{les matrices qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires}}$$

Ex 21 a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrons que

$$\operatorname{rg} M = 1 \Longleftrightarrow \exists L \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ \exists C \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\ /\ M = LC$$

$*$ Si $M = LC$ avec $L \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $C \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, alors, en posant

$$L = (a,b) \neq (0,0) \quad \text{et } C = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$M = \begin{pmatrix} ca & cb \\ da & db \end{pmatrix}$$

Quitte à échanger les lignes, on peut supposer que $c \neq 0$, et alors, en opérant $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{d}{c} L_1$

$$M \sim \begin{pmatrix} ca & cb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\operatorname{rg} M = 1$ puisque la première ligne de cette matrice échelonnée est non nulle.

$*$ Inversement, si $\operatorname{rg} M = 1$, alors le déterminant de M est nul, soit, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$ad = bc$$

Mais alors les deux lignes de M sont proportionnelles, donc proportionnelles à une même ligne non nulle

$$L = (\alpha, \beta)$$

Donc

$$\exists (k,k') \neq (0,0)\ /\ \begin{cases} (a,b) = (k\alpha, k\beta) \\ (c,d) = (k'\alpha, k'\beta) \end{cases}$$

(si $k = k' = 0$, alors $M = \mathbb{O}$). En posant $C = \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, on a

$$CL = \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} (\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} k\alpha & k\beta \\ k'\alpha & k'\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M \quad \text{CQFD}$$

Dans ce cas, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^n = \underbrace{CLCL \cdots CL}_{n \text{ fois}} = C\underbrace{(LC)(LC) \cdots (LC)}_{n-1 \text{ fois}}L$$

Or

$$LC = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} = \alpha k + \beta k' = a + d = \operatorname{tr} M \in \mathbb{K}$$

Ainsi

$$M^n = C (\operatorname{tr} M)^{n-1} L = (\operatorname{tr} M)^{n-1} CL$$

soit

$$\boxed{M^n = (\operatorname{tr} M)^{n-1} M}$$

Remarque : pour plus de rigueur, on peut faire une récurrence facile. On a de plus $M^0 = I_2$, évidemment.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de l'équation (E) : $M^n = A$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

* **Analyse** : si M est solution, alors $\operatorname{rg} M \in \{0, 1, 2\}$.
  - $M \neq \mathbb{O}$ (matrice nulle) donc $\operatorname{rg} M \neq 0$
  - $M \notin GL_2(\mathbb{C})$ car sinon M^n serait inversible, et donc A le serait, ce qui est faux ($\det A = 0$). Donc $\operatorname{rg} M \neq 2$.

  Ainsi, nécessairement $\operatorname{rg} M = 1$. Mais la question précédente prouve alors qu'il existe une colonne non nulle C et une ligne non nulle L telles que

  $$M = CL$$

  L'équation (E) devient alors, toujours d'après a) :

  $$(\operatorname{tr} M)^{n-1} M = A$$

  Il s'ensuit que M est un multiple de A :

  $$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ / \ M = \lambda A$$

  Mais A est elle aussi de rang 1, et s'écrit

  $$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2, 3), \text{ avec } \operatorname{tr} A = (2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

  Donc (E) devient

  $$\lambda^n A^n = A \iff \lambda^n 8^{n-1} A = A \iff \lambda^n = \frac{1}{8^{n-1}} = \frac{8}{8^n}$$

  Nos connaissances des racines n-ièmes des nombres complexes donnent

  $$\lambda^n = \frac{8}{8^n} \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \lambda = \frac{\sqrt[n]{8}}{8} e^{2ik\pi/n}$$

  Finalement, M s'écrit

  $$M = \frac{\sqrt[n]{8}}{8} e^{2ik\pi/n} A, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

* **Synthèse** : si $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $M = \dfrac{\sqrt[n]{8}}{8} e^{2ik\pi/n} A$, il vient facilement :

  $$M^n = \frac{8}{8^n} A^n = \frac{8}{8^n} 8^{n-1} A = A$$

* **Conclusion** :

  $$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont les matrices de la forme } M = \frac{\sqrt[n]{8}}{8} e^{2ik\pi/n} A, \quad k \in [\![0, n-1]\!]}$$

Ex 22 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = \dfrac{1}{(i+j-1)!}$ soit

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1!} & \dfrac{1}{2!} & \cdots & \dfrac{1}{n!} \\ \dfrac{1}{2!} & \dfrac{1}{3!} & \cdots & \dfrac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{n!} & \dfrac{1}{(n+1)!} & \cdots & \dfrac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$. On définit le polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-1)!} X^{n+k-1} = \frac{y_1}{n!} X^n + \frac{y_2}{(n+1)!} X^{n+1} + \cdots + \frac{y_n}{(2n-1)!} X^{2n-1}$$

a) On connait la formule

$$D\left(\frac{X^p}{p!}\right) = \begin{cases} \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!} \text{ si } p \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } p = 0 \end{cases}$$

Donc

$$D^\ell\left(\frac{X^p}{p!}\right) = \begin{cases} \dfrac{X^{p-\ell}}{(p-\ell)!} \text{ si } p \geqslant \ell \\ 0 \text{ si } p < \ell \end{cases}$$

Par linéarité, on a donc, pour $\ell \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} P^{(\ell)} &= \sum_{k=1}^{n} y_k D^\ell \left(\frac{X^{n+k-1}}{(n+k-1)!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{X^{n+k-1-\ell}}{(n+k-1-\ell)!} \end{aligned}$$

En évaluant en 1, cela donne

$$P^{(\ell)}(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-\ell-1)!}$$

Or $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$ s'écrit, à la ligne $n-\ell$

$$\sum_{k=1}^{n} [A]_{n-\ell,k}\, y_k = 0 \quad \text{soit} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n-\ell+k-1)!} = 0$$

Ainsi, naturellement

$$\boxed{\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ P^\ell(1) = 0}$$

b) Mais de plus

$$P = X^n \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-1)!} X^{k-1}$$

Donc 1 et 0 sont racines de P d'ordre au moins n chacun. Or $\deg P \leqslant 2n-1$, ce qui assure que

$$\boxed{P = 0}$$

Les coefficients de P sont ainsi nuls, i.e. $y_1 = \cdots = y_n = 0$, soit $Y = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le système $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$ n'admet que la solution nulle, donc

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

Ex 23 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Montrons que sur chaque colonne de A, il y a un unique terme non nul :

Appelons a_{ij} et b_{ij} les termes généraux de A et de son inverse B.

Pour tous i, j distincts, de $[AB]_{ij} = 0$ on tire

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$$

Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si ses termes sont nuls, donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{ik} b_{kj} = 0$$

Soit k un entier entre 1 et n : par inversibilité de B, on peut choisir sur la ligne k de B un élément non nul soit

$$b_{kj} \neq 0, \quad \text{où } j \in [\![1, n]\!]$$

Alors pour tout i différent de j, on a $a_{i,k} = 0$.

Cela démontre que la colonne k admet $n-1$ zéros au moins c'est-à-dire $n-1$ exactement par inversibilité.

Ex 24 Une méthode hors programme de calcul de puissances : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) On note $I = I_3$ et $\mathbb{O} = 0_{\mathcal{M}_3}$.On calcule facilement

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3A - 2I$$

Donc $A^2 - 3A + 2I = \mathbb{O}$. $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est donc un polynôme annulateur de A.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le reste R de la division euclidienne de X^n par P est de degré inférieur à 1, donc s'écrit

$$R = aX + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

On a donc l'existence d'un unique polynôme Q tel que

$$(DE) : X^n = \left(X^2 - 3X + 2\right) Q + aX + b$$

En substituant successivement 1 et 2 à X (les racines de P) dans (DE), il vient :

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Ainsi on a l'identité polynômiale

$$\boxed{X^n = \left(X^2 - 3X + 2\right) Q + (2^n - 1) X + (2 - 2^n)}$$

c) On montre (c'est la difficulté qui fait que cette méthode n'est pas au programme) que cette identité reste vraie lorsque l'on substitue la **matrice** A à l'indéterminée X. Alors

$$A^n = \left(A^2 - 3A + 2I\right) Q(A) + (2^n - 1) A + (2 - 2^n) I$$

D'où puisque $A^2 - 3A + 2I = \mathbb{O}$:

$$\boxed{A^n = (2^n - 1) A + (2 - 2^n) I}$$

soit

$$\boxed{A^n = 2^n (A - I) + (2I - A)}$$

ou encore

$$\boxed{A^n = 2^n \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

d) Procédons de même avec $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$: en posant $I = I_2$,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 28 & -16 \\ 36 & -20 \end{pmatrix} = -4B - 4I$$

Le polynôme $P = X^2 + 4X + 4 = (X+2)^2$ est annulateur de B.
Si $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par P est de degré inférieur à 1, donc s'écrit

$$R = aX + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

On a donc l'existence d'un unique polynôme Q tel que

$$(DE) : X^n = (X+2)^2 Q + aX + b$$

En substituant -2 à X on obtient $(-2)^n = -2a + b$.
En dérivant (DE) puis en substituant -2 à X, on obtient

$$nX^{n-1} = 2(X+2)Q + (X+2)^2 Q' + a$$

d'où $\underline{n(-2)^{n-1} = a}$, ce qui fournit alors $\underline{b = (-2)^n - n(-2)^n = (1-n)(-2)^n}$.
Ainsi on a l'identité polynômiale :

$$\boxed{X^n = \left(X^2 + 4X + 4\right) Q + n(-2)^{n-1} X + (1-n)(-2)^n}$$

On substitue (par magie) la matrice B à l'indéterminée X pour obtenir

$$\boxed{B^n = n(-2)^{n-1} B + (1-n)(-2)^n I}$$

soit

$$\boxed{B^n = (-2)^{n-1}\left(n(B+2I) - 2I\right)}$$

Explicitement

$$\boxed{B^n = (-2)^{n-1}\left[n\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = (-2)^{n-1}\begin{pmatrix} -6n-2 & 4n \\ -9n & 6n-2 \end{pmatrix}}$$