Ensembles finis, dénombrement

1. Cardinaux

a) Equipotence :

(i) $\boxed{\text{Soient } E \text{ et } F \text{ deux ensembles. On dit que } E \text{ est } \textbf{équipotent} \text{ à } F \text{ lorsqu'il existe une bijection de } E \text{ sur } F}$

Exemple : $[\![1,n]\!]$ est équipotent à $[\![0,n-1]\!]$ par $\varphi : x \mapsto$

(ii) $\boxed{\text{La relation d'équipotence } E \simeq F \text{ est une relation d'équivalence}}$

(iii) Théorème : $\boxed{\text{si } n \neq m, \text{ alors } [\![1,n]\!] \text{ n'est pas équipotent à } [\![1,m]\!]}$

Lemme : soient E et F des ensembles équipotents, non vides et non réduits à un singleton.
Si $a \in E$ et $b \in F$, alors $E \backslash \{a\}$ et $F \backslash \{b\}$ sont équipotents.

b) Cardinal :

(i) Théorème et définition : soit E un ensemble non vide.

on dit que E est **fini** lorsque il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit équipotent à $[\![1,n]\!]$
n est unique et appelé **cardinal** de E, et noté $\operatorname{card} E$ ou $\#E$.
Par convention, on pose $\operatorname{card} \varnothing = 0$

Si $\operatorname{card} E = n$, on a donc $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ bijective. En posant $a_i = \varphi(i)$, cela signifie qu'on peut "numéroter" les éléments de $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$. On dit que φ est une **énumération de** E.

Exemple 1 : si $E = \{a,b,c\}$, on a la bijection φ définie par $\begin{cases} \varphi(1) = a = a_1 \\ \varphi(2) = b = a_2 \\ \varphi(3) = c = a_3 \end{cases}$ et $\operatorname{card} E = 3$.

Exemple 2 : si $0 \leqslant p \leqslant q$, alors $\operatorname{card} [\![p,q]\!] = p + q - 1$ par $\varphi : k \mapsto$

Exemple 3 : si $\operatorname{card} E = n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in E$, montrer que $E \backslash \{a\}$ est fini et $\#E \backslash \{a\} = n - 1$

(ii) Sous ensembles : soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et A un sous ensemble de E. Alors

$$\boxed{A \text{ est fini, } \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E, \text{ et } \operatorname{card} A = \operatorname{card} E \iff A = E}$$

(iii) Principe fondamental (mise en bijection) : soient E et F deux ensembles finis :

$$\boxed{\text{si } f : E \to F \text{ est bijective alors } \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)} \quad \text{[réciproque vraie]}$$

(iv) Variantes : soient E et F deux ensembles finis :

$$\boxed{\text{si } f : E \to F \text{ est injective alors } \operatorname{card}(E) \leqslant \operatorname{card}(F) \text{ avec égalité si et seulement si } f \text{ est bijective}} \quad (1)$$

$$\boxed{\text{si } f : E \to F \text{ est surjective alors } \operatorname{card}(E) \geqslant \operatorname{card}(F) \text{ avec égalité si et seulement si } f \text{ est bijective}} \quad (2)$$

Remarque : la contraposée de (1) est connue sous le nom de "principe des tiroirs" :
Si $\operatorname{card} E > \operatorname{card} F$, alors f n'est pas injective, autrement dit il existe un élément de F ayant au moins 2 antécédents par f. Par exemple si 5 pulls sont rangés dans 3 tiroirs, l'un des tiroirs aura au moins deux pulls (f : *pull* $\mapsto$ tiroir où il est rangé)

Corollaire : si $\#E = \#F$ et $f : E \to F$, alors $\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}}$

c) **Union-intersection :** soit E un ensemble fini. et A, B deux parties finies de E. Alors

(i) Réunion disjointe : si $A \cap B = \varnothing$ alors on notera $A \cup B = A \sqcup B$. On a dans ce cas

$$\boxed{\text{card}\,(A \sqcup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B}$$

(ii) Complémentaire : de l'égalité $A = (A \backslash B) \sqcup (A \cap B)$, on déduit

$$\boxed{\text{card}\,(A \backslash B) = \text{card}\,(A) - \text{card}\,(A \cap B)}$$

En particulier

$$\boxed{\text{card}\,(\complement_E A) = \text{card}\,\overline{A} = \text{card}\,E - \text{card}\,A}$$

(iii) Réunion : $\boxed{\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)}$

(iv) Partition : on rappelle qu'une **partition de** E est une famille $A_1, \ldots, A_n$ de parties finies de E vérifiant :

$$\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

On note alors $E = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, et on a

$$\boxed{\text{card}\,E = \sum_{k=1}^{n} \text{card}\,A_i}$$

Exemple : si $f : E \to F$ est une application, alors $\boxed{\text{card}\,E = \sum_{y \in F} \text{card}\left(f^{-1}\langle\{y\}\rangle\right)}$

(v) Principe des bergers : on suppose que $(A_1, \ldots, A_n)$ est une partition de E vérifiant

$$\exists q \in \mathbb{N},\ /\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \text{card}\,(A_i) = q$$

(les A_i ont tous même cardinal). Alors q divise card E et

$$\boxed{nq = \text{card}\,E}$$

d) **Produit cartésien :** soit E et F des ensembles finis card $(E) = n$, card $(F) = p$. Alors

$$\boxed{\text{card}\,(E \times F) = np}$$

On rappelle que $E \times F = \{(x; y),\ x \in E,\ y \in F\}$

Remarque : **principe du produit** : on considère une situation à deux étapes E_1 et E_2.
Supposons que le nombre de situation possibles de E_1 est n_1 et qu'indépendamment de la situation E_1 le nombre de situations possibles de E_2 est n_2. Alors le nombre de situations possibles est $n_1 \times n_2$.
Ce résultat se généralise à p étapes
Par exemple, combien y a-t-il de plaques d'immatriculation du type AA 999 AA?

2. Les modèles courants

On se donne un ensemble fini E de cardinal n, et p un entier naturel non nul.

a) **p-listes (ou p-uplets) :** on appelle **p-liste de** E, ou **p-uplet de** E est un élément de $E^p = E \times \cdots \times E$, soit

$$L = (x_1, \ldots x_p), \text{ avec } x_1 \in E, \ldots x_p \in E$$

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = n, \text{ alors le nombre de } p\text{-uplets de } E \text{ est } n^p}$$

Modèle : **tirages avec remise** ou **lancers indépendants**

Exemple : nombre de tirages pour 10 jets consécutifs d'un dé : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

b) **p-Arrangements :** on appelle **p-arrangements de** E toute p-liste L d'éléments **distincts** de E

Le nombre de p-arrangements de E se note A_n^p. Si $p > n = \operatorname{card}(E)$, alors on a $A_n^p = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = n \text{ et } p \leqslant n, \text{ alors le nombre de } p\text{-arrangements de } E \text{ est } A_n^p = n(n-1)(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Modèle : **tirages sans remise** ou **tiercés dans l'ordre**

Exemples : nombre de tiercés dans l'ordre pour dix chevaux :

nombre de façons de placer 48 pcsi sur 50 tables :

c) **Permutations :** une permutation de E est un n-arrangement de E

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = n, \text{ alors le nombre de permutations de } E \text{ est } n!} \quad \text{(i.e. } A_n^n\text{)}$$

Remarque : il revient au même de donner une permutation de E et une bijection de E sur E (cf. 3.a))

Modèle : **mots sur n lettres distinctes**

Exemples : il y a $24 = 4!$ " mots " sur les quatre lettres a, b, c, d : $abcd,\ abdc,\ acbd,\ acdb, \ldots$

nombre de façons de placer 48 pcsi sur 48 tables :

d) **Combinaisons :** on appelle **p-combinaison** (ou **p-partie**) de E un **sous-ensemble** de p éléments de E

Le nombre de p-combinaisons de E se note C_n^p. Si $p > n = \operatorname{card}(E)$, alors on a $C_n^p = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = n \text{ et } p \leqslant n, \text{ alors le nombre de } p\text{-combinaisons de } E \text{ est } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}}$$

Modèle : **tiercés dans le désordre** ou **tirages simultanés**

Exemple : nombre de tiercés dans le désordre pour dix chevaux :

e) **Parties d'un ensemble (ou sous ensembles) :**

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = n, \text{ alors il y a } 2^n \text{ sous ensembles de } E, \text{ soit } \operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E) = \{ \qquad \}$, $\#\mathcal{P}(E) =$

3. Exemples d'utilisation

a) Dénombrement d'applications :

(i) Nombre d'applications de E dans F : $\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = p \text{ et } \operatorname{card}(F) = n, \text{ alors } \operatorname{card} \mathcal{F}(E,F) = n^p}$

(d'où la notation $\mathcal{F}(E,F) = F^E$)

(ii) Nombre d'injections de E dans F : notons $\mathcal{I}(E,F)$ l'ensemble des injections de E dans F alors

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{card}(E) = p \text{ et } \operatorname{card}(F) = n, \text{ alors } \operatorname{card} \mathcal{I}(E,F) = A_n^p}$$

Remarque : si $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F = n$, alors les injections de E dans F sont les bijections. Il y en a $n!$.

En particulier, le nombre de bijections de E sur lui-même (permutations de E) est $n!$

Exemples : nombre de façons de placer 48 pcsi sur 50 tables.

Nombre de façons de placer 48 pcsi sur 48 tables :

Nombre de mots de 5 lettres distinctes utilisant a, b, c, d, e :

(iii) Nombres de parties de E (méthode alternative) : montrer $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{card} E}$ à l'aide de l'application

$$\Psi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E \\ A \to \Psi(A) = \mathbb{1}_A \end{array}$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne l'application caractéristique de A (ou l'indicatrice de A)

b) Trois démonstrations "ensemblistes" :

(i) Formule du binôme de Newton : $\forall a, b, n,$ $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$

Exemple : $(1+x)(1+x)(1+x)(1+x) = (1+x)^4$. Coefficient de x^2 :

(ii) Formule de Pascal : $1 \leqslant p \leqslant n$: $\boxed{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}}$

(iii) La formule de Vandermonde : soient n, p, q trois entiers tels que $n \in [[0, p+q]]$. Alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}}$$

Remarque 1 : on remarquera que beaucoup de termes sont nuls ($0 \leqslant k \leqslant p$ et $0 \leqslant n-k \leqslant q$).

On peut sommer jusqu'à $p+q$

Remarque 2 : si $p = q = n$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.