Ex 1 Soit E un ensemble de n personnes qui ne sont nées ni un 29 février ni un 31 avril.
Soit A l'évènement : "deux personnes de E ont le même anniversaire".
Le cas où $n > 365$ est évident (lemme des tiroirs) : la probabilité est 1.
Soit $n \leqslant 365$. L'univers Ω est l'ensemble des n-uplets de l'ensemble D des dates possibles ($\#D = 365$) : $\#\Omega = 365^n$. On suppose que les dates d'anniversaires sont équiprobables et indépendantes.
$\overline{A}$ est l'ensemble des listes d'éléments distincts de D, i.e. des n-arrangements de D. Donc

$$\#\overline{A} = A_{365}^n = \frac{365!}{(365-n)!}$$

Il s'ensuit que la probabilité cherchée est

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}}$$

Ce qui s'écrit aussi, pour le calcul pratique,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365-k}{365} = 1 - \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right)$$

Application numérique : Pour $n = 22$, on obtient $\mathbb{P}(A) \approx 47,5\%$ à 10^{-1}près.
Pour $n = 23$, on obtient $\mathbb{P}(A) \approx 50,7\%$ à 10^{-1}près.
Pour $n = 48$, on obtient $\mathbb{P}(A) \approx 96\%$ à 10^{-1}près.

Ex 2 On joue au poker (main de 5 cartes) avec un jeu de 52 cartes.
L'univers est l'ensemble des parties à 5 éléments du jeu J, soit $\Omega = P_5(J)$, avec équiprobabilité :

$$\#\Omega = \binom{52}{5} = 2598960$$

a) Soit A l'événement : "obtenir un carré". Pour construire un élément de A :

* On choisit la hauteur du carré : il y a 13 choix possibles.
* On choisit la cinquième carte : $52 - 4 = 48$ choix possibles.

Il vient $\#A = 13 \times 48$, et par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13 \times 48}{\binom{52}{5}} \approx 0.024\% \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

b) Soit B l'événement : "obtenir une double paire". Pour construire un élément de B :

* On choisit les deux hauteurs de la double paire : il y a $\binom{13}{2}$ choix possibles.
* On choisit la première paire dans une couleur : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités, puis la deuxième : 6 possibilités.
* On choisit la cinquième carte : $52 - 2 \times 4 = 44$ choix possibles.

Il vient $\#B = \binom{13}{2} \times 6^2 \times 44$, et par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{13}{2} \times 6^2 \times 44}{\binom{52}{5}} \approx 4.75\% \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Ex 3 Un sac opaque contient trois cartes indiscernables au toucher. La première a ses deux faces rouges, la deuxième ses deux faces noires, et la troisième a une face noire et une face rouge. On tire au hasard une carte et on la pose sur la table. La face apparente est noire.
Numérotons les faces noires de la carte noire n_1 et n_2 (celle de la carte mixte sera notée n_0). Idem pour les rouges.
L'univers étant constitué des 6 faces possibles et équiprobables $\Omega = \{n_0, n_1, n_2, r_0, r_1, r_3\}$
Si on note N l'événement "la face visible est noire", alors $N = \{n_0, n_1, n_2\}$ et $\mathbb{P}(N) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.
Si N' : "la face cachée est noire", alors $N' = \{r_0, n_1, n_2\}$, mais $N \cap N' = \{n_1, n_2\}$ et $\mathbb{P}(N \cap N') = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.
Alors

$$\mathbb{P}_N(N') = \frac{\mathbb{P}(N \cap N')}{\mathbb{P}(N)} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{La probabilité pour que la face cachée soit noire aussi est ainsi de 2 chances sur 3}}$.

Ex 4 Problème de Galilée : on lance trois dés indiscernables.

a) On discerne les dés pour plus de commodité, et on choisit l'univers des triplets $\Omega = [\![1,6]\!]^3$ muni de l'équiprobabilité.

* A : "obtenir 3 six" est le singleton $\{(6,6,6)\}$, de probabilité $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6^3}$
* B : "obtenir 2 cinq et 1 un" est $\{(5,5,1),(5,1,5),(1,5,5)\}$, de probabilité $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6^3}$
* C : "obtenir 4, 2 et 1" est $\{(1,2,4),(1,4,2),\dots\}$ (les six permutations de $1,2,4$), de probabilité $\mathbb{P}(C) = \frac{6}{6^3}$

Autrement dit, la probabilité de sortit a,b,c est $\dfrac{n}{6^3}$, où n est le nombre d'anagrammes de abc.

b) La somme 9 peut être obtenue par

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$

Donc par partition, et en utilisant le a), la probabilité pour que la somme des dés vale 9 est

$$p_1 = 3 \times \frac{6}{6^3} + 2 \times \frac{3}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{25}{216}$$

De même, 10 peut être obtenu par

$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$$

Donc la probabilité pour que la somme des dés vale 9 est

$$p_2 = 3 \times \frac{6}{6^3} + 3 \times \frac{3}{6^3} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

La constatation de Galilée est donc justifiée ($p_2 > p_1$), et vient du fait que 9 peut s'obtenir par un triple (moins fréquent) alors que 10 ne le peut pas.

Ex 5 Problème du chevalier de Méré :

a) On lance 4 dés, que l'on discerne, et on pose A : "on obtient au moins un six".

i. Méthode par dénombrement. L'univers est $\Omega = [\![1,6]\!]^4$ muni de l'équiprobabilité. $\#\Omega = 6^4$.
L'événement $\bar{A}$: "on n'obtient aucun six" est $[\![1,6]\!]^4$. $\#\bar{A} = 5^4$. Ainsi par équiprobabilité

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 51.8\% \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$

ii. Méthode probabiliste. si S_i est l'événement "le dé i fait un six" ($i \in [\![1,4]\!]$) de probabilité $\frac{1}{6}$, alors

$$\bar{A} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}$$

On suppose les résultats des quatre dés indépendants, donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\overline{S_1}) \cap \mathbb{P}(\overline{S_2}) \cap \mathbb{P}(\overline{S_3}) \cap \mathbb{P}(\overline{S_4}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

b) On lance 24 fois 2 dés, et l'on pose B : "obtenir au moins un double six".

i. Méthode par dénombrement. L'univers est $\Omega = \left([\![1,6]\!]^2\right)^{24}$ (ensemble des listes de 24 couples de $[\![1,6]\!]$), muni de l'équiprobabilité. $\#\Omega = 6^{48}$.
L'événement $\bar{B}$: "on n'obtient aucun double six" est $\left([\![1,6]\!]^2 \setminus (6,6)\right)^{24}$, et son cardinal est 35^{24}. Donc

$$\mathbb{P}(\bar{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49.1\% \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$$

ii. Méthode probabiliste. Si S_i : "la paire de dés fait un double six au lancer i" de probabilité $\frac{1}{36}$, alors

$$\bar{B} = \bigcap_{i=1}^{24} \overline{S_i}$$

et par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(\bar{B}) = \prod_{i=1}^{24} \mathbb{P}(\overline{S_i}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$\underline{A \text{ est ainsi plus probable que } B}$.

Ex 6 Soit une famille ayant deux enfants (on suppose le sexe équiprobable)
Pour $i \in \{1, 2\}$, on note G_i : "l'enfant i est un garçon". G_1, G_2 sont indépendants de probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Soit A : "les deux enfants soient des garçons". Alors $A = G_1 \cap G_2$ donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{4}}$

b) On calcule la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | G_1) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_1)}{\mathbb{P}(G_1)} = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{La probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon est } \frac{1}{2}}$.

c) On calcule la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | G_1 \cup G_2) = \frac{\mathbb{P}((G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \cup G_2))}{\mathbb{P}(G_1 \cup G_2)}$$

Or $(G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \cup G_2) = G_1 \cap G_2$, donc

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | G_1 \cup G_2) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) - \mathbb{P}(G_1 \cap G_2)} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{La probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon est } \frac{1}{3}}$

Ex 7 Quatre exercices de mathématiques sont répartis entre cinq élèves d'un pentanôme P de PCSI 1 par tirage au sort (avec remise). Pour tout $e \in P$, on note A_e l'événement : "l'élève e ne reçoit aucun exercice".
Le tirage au sort se fait avec remise, donc les événements E_i : "l'exercice i est attribué à l'élève e", pour $i \in [\![1, 4]\!]$ et $e \in P$ fixé, sont indépendants et de probabilité $\frac{1}{5}$. Alors

$$A_e = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4} \Rightarrow \mathbb{P}(A_e) = \left(\frac{4}{5}\right)^4$$

Mais si $e' \in P$ est un autre élève, et E'_i : "l'exercice i est attribué à l'élève e'", alors

$$A_e \cap A_{e'} = \left(\overline{E_1} \cap \overline{E'_1}\right) \cap \left(\overline{E_2} \cap \overline{E'_2}\right) \cap \left(\overline{E_3} \cap \overline{E'_3}\right) \cap \left(\overline{E_4} \cap \overline{E'_4}\right)$$

Or si $i \in [\![1, 4]\!]$, $\left(\overline{E_i} \cap \overline{E'_i}\right)$ est l'événement "l'exercice i est attribué à l'un des trois autres élèves". Ces événements sont indépendants et de probabilité $\frac{3}{5}$, donc

$$\mathbb{P}(A_e \cap A_{e'}) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \neq \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \mathbb{P}(A_e)\mathbb{P}(A_{e'})$$

$\boxed{\text{Les événements } (A_e)_{e \in P} \text{ ne sont donc pas indépendants}}$.

Ex 8 On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit dans ce meuble est p.
On cherche la probabilité qu'il soit dans le septième tiroir sachant qu'on a examiné les six premiers sans succès?
On pose :

M : "l'objet est dans le meuble" : $\mathbb{P}(M) = p$
A : "l'objet est dans les six premiers tiroirs": $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|M)\,\mathbb{P}(M) = \frac{6}{7}p$
B : "l'objet est dans le septième tiroir" : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|M)\,\mathbb{P}(M) = \frac{1}{7}p$

On cherche $\mathbb{P}\left(B|\overline{A}\right)$. comme $B \subset \overline{A}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(B|\overline{A}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{p/7}{1 - 6p/7} = \frac{p}{7 - 6p}$$

Ex 9 L'inspecteur chargé d'une enquête est convaincu à 60% de la culpabilité d'un suspect.
Une nouvelle pièce à conviction permet soudain d'affirmer que le criminel est gaucher. Or 7% des individus dans la population sont gauchers.
On pose C : le suspect est coupable ($\mathbb{P}(C) = 0,6$) et G : le suspect est gaucher, et on cherche la nouvelle probabilité que le suspect soit coupable, soit $\mathbb{P}(C|G)$
D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(C|G) = \frac{\mathbb{P}(G|C) \times \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(G)}$$

Et en utilisant la formule des probabilités totales pour déterminer $\mathbb{P}(G)$:

$$\mathbb{P}(C|G) = \frac{\mathbb{P}(G|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(G|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(G|\overline{C})(1 - \mathbb{P}(C))}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(G|C) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G|\overline{C}) = 0,07$$

donc

$$\mathbb{P}(C|G) = \frac{1 \times 0,6}{1 \times 0,6 + 0,07 \times 0,4} = \frac{600}{628} \approx \boxed{95\%}$$

Ex 10 Dans un lycée lointain, il y a deux classes de PCSI : la PCSI 1 a 46 élèves et un élève y a 65% de chances d'avoir la moyenne au prochain devoir de chimie. La PCSI 2 a 45 élèves et un élève y a 40% de chances d'avoir la moyenne au prochain devoir de chimie.
Si $i \in \{1, 2\}$, on pose P_i :"l'élève est en PCSI i" et M : "l'élève a eu la moyenne en chimie".
On cherche $\mathbb{P}_M(P_2)$ .La formule de Bayes assure que :

$$\mathbb{P}_M(P_2) = \frac{\mathbb{P}_{P_2}(M)\,\mathbb{P}(P_2)}{\mathbb{P}(M)}$$

Et la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}_{P_1}(M)\,\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{P_2}(M)\,\mathbb{P}(P_2) = 0,65 \times \frac{46}{91} + 0,4 \times \frac{46}{91}$$

Il vient

$$\mathbb{P}_M(P_2) = \frac{0,4 \times \dfrac{46}{91}}{0,65 \times \dfrac{46}{91} + 0,4 \times \dfrac{46}{91}} \approx \boxed{38\%}$$

Ex 11 Dans une population, une personne sur 10000 souffre d'une certaine maladie.
Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test de dépistage de cette maladie.
Celui-ci est positif à 99% sur les personne malades, mais aussi faussement positif sur $0,1\%$ des personnes saines.
Un individu passe le test, qui se révèle positif.
On pose M : "l'individu est malade" et P : "le test est positif". On cherche $\mathbb{P}_P(M)$. Bayes fournit

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}_M(P)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}$$

La formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}_M(P)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\bar{M}}(P)\,\mathbb{P}\left(\bar{M}\right) = 0,99 \times \frac{1}{10000} + 0,001 \times \frac{99}{10000}$$

Donc

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{0,99 \times \frac{1}{10000}}{0,99 \times \frac{1}{10000} + 0,001 \times \frac{99}{10000}} = \frac{0,99}{0,99 + 0,001 \times 99} \approx \boxed{9\%}$$

Ce test ne vaut rien!

Ex 12 Pour se rendre au lycée, Blaise a le choix entre trois itinéraires.
S'il emprunte le premier, il est sûr d'arriver à l'heure. S'il emprunte le deuxième, il n'a que deux chances sur trois d'arriver à l'heure, et n'a plus qu'une chance sur trois s'il prend le troisième. Tous les matins, il choisit un itinéraire au hasard.

a) Soit H l'événement "Blaise arrive à l'heure", et pour $i \in \{1,2,3\}$, I_i : "Blaise prend l'itinéraire I_i".
(I_1, I_2, I_3) forme un système complet d'événements, donc par probabilités totales, en supposant que les trois itinéraires sont équiprobables :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}_{I_1}(H)\,\mathbb{P}(I_1) + \mathbb{P}_{I_2}(H)\,\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}_{I_3}(H)\,\mathbb{P}(I_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

b) On cherche $\mathbb{P}_H(I_1)$. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_H(I_1) = \frac{\mathbb{P}_{I_1}(H)\,\mathbb{P}(I_1)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{1 \times 1/3}{2/3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ex 13 Dans un beau pays lointain, il pleut trois jours sur dix.

a) La station météorologique M_1 annonce ses prévisions pour la journée avec une fiabilité de 80%.
Posons PB_1 : "M_1 prévoit beau temps ce matin" et B : "il fait beau ce matin".
Cherchons $\mathbb{P}_{PB_1}(B)$. La formule de Bayes donne

$$\mathbb{P}_{PB_1}(B) = \frac{\mathbb{P}_B(PB_1)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(PB_1)}$$

L'énoncé se traduit par $\mathbb{P}_B(PB_1) = 0.8$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{7}{10}$, et la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(PB_1) = \mathbb{P}_B(PB_1)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(PB_1)\,\mathbb{P}\left(\bar{B}\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}_{PB_1}(B) = \frac{\mathbb{P}_B(PB_1)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}_B(PB_1)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(PB_1)\,\mathbb{P}\left(\bar{B}\right)} = \frac{0.8\times 0.7}{0.8\times 0.7 + 0.2\times 0.3} \approx \boxed{90\%}$$

b) La seconde station M_2 est fiable à 90% et ses prévisions sont faites indépendamment de la station M_1.
On cherche $\mathbb{P}_{PB_1\cap\overline{PB_2}}(B)$ où PB_2 : "M_2 prévoit beau temps ce matin".
Toujours avec la formule de Bayes et la formule des probabilités totales:

$$\mathbb{P}_{PB_1\cap\overline{PB_2}}(B) = \frac{\mathbb{P}_B\left(PB_1\cap\overline{PB_2}\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}_B\left(PB_1\cap\overline{PB_2}\right)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}\left(PB_1\cap\overline{PB_2}\right)\mathbb{P}\left(\bar{B}\right)}$$

L'énoncé nous incite à faire l'hypothèse que PB_1 et $\overline{PB_2}$ sont indépendants pour les probabilités $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_{\bar{B}}$ (puisque les prévisions sont faites de façon indépendantes). Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{PB_1\cap\overline{PB_2}}(B) &= \frac{\mathbb{P}_B(PB_1)\,\mathbb{P}_B\left(\overline{PB_2}\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}_B(PB_1)\,\mathbb{P}_B\left(\overline{PB_2}\right)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(PB_1)\,\mathbb{P}_{\bar{B}}\left(\overline{PB_2}\right)\mathbb{P}\left(\bar{B}\right)}\\ &= \frac{0.8\times 0.1\times 0.7}{0.8\times 0.1\times 0.7 + 0.2\times 0.9\times 0.3} \approx \boxed{50\%}\end{aligned}$$

Ex 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une file d'attente de $2n$ personnes, le nombre de femme est un entier aléatoire entre n et $2n$ (il y a équiprobabilité de chaque cas).

a) On choisit une personne au hasard dans la file d'attente.
Soit F : "la personne choisie est une femme", et pour $k \in [\![n, 2n]\!]$, N_k : "il y a k femmes dans la file".
On cherche $\mathbb{P}(F)$. $(N_n, \ldots, N_{2n})$ étant un système complet d'événemnt, on peut écrire la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{k=n}^{2n} \mathbb{P}_{N_k}(F)\,\mathbb{P}(N_k)$$

Or est événements $N_n, \ldots, N_{2n}$ sont équiprobables, donc ont pour probabilité $\dfrac{1}{n+1}$. Comme $\mathbb{P}_{N_k}(F) = \dfrac{k}{2n}$, il vient

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{1}{2n(n+1)} \times (n+1) \times \frac{n+2n}{2}$$

Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = \frac{3}{4}}$$

b) On cherche la probabilité que la file ne soit constituée que de femmes sachant qu'on a choisi une femme, c'est-à-dire $\mathbb{P}_F(N_{2n})$. La formule de Bayes donne directement

$$\mathbb{P}_F(N_{2n}) = \frac{\mathbb{P}_{N_{2n}}(F)\,\mathbb{P}(N_{2n})}{\mathbb{P}(F)} = \frac{1\times\frac{1}{n+1}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{4}{3(n+1)}}$$

Ex 15 Une urne contient $2n$ boules dont n blanches et n noires. On tire successivement n boules sans remise.
On pose N_k : "on tire une boule noire au k-ième tirage" et B_k : "on tire une boule noire au k-ième tirage

a) Soit A : "on ne tire que des boules noires. Alors $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} N_k$, et par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathbb{P}_{N_1\cap\ldots\cap N_{n-1}}(N_n)$$

Or si k boules noires ont été tirées successivement, il reste dans l'urne $n-k$ boules noires et n boules blanches.
Donc $\mathbb{P}_{N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}}(N_k) = \dfrac{n-k}{2n-k}$, et

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{2n-k} = \frac{n(n-1)\ldots1}{(2n)(2n-1)\ldots(n+1)} = \boxed{\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}}$$

b) On suppose n pair, soit $n = 2p,\ p\in\mathbb{N}^*$, et on pose B : "tirer une alternance de blanches et de noires".
Alors $B = B_1\cap N_2\cap B_3\cap N_4\cap\ldots\cap B_{2p-1}\cap N_{2p}$, et la formule donne

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(N_2)\,\mathbb{P}_{B_1\cap N_2}(B_3)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap N_2\cap\ldots\cap B_{2p-1}}(N_{2p})$$

Or si une alternance $B_1\cap N_2\cap\ldots\cap B_{2k-1}\cap N_{2k}$ a été tirée, il reste $2n-2k$ boules dont $n-k$ blanches et $n-k$ noires. Il vient

$$\mathbb{P}_{B_1\cap N_2\ldots\cap N_{2k}}(B_{2k+1}) = \frac{n-k}{2n-2k} = \frac{1}{2} \quad\text{et}\quad \mathbb{P}_{B_1\cap N_2\ldots\cap N_{2k}\cap B_{2k+1}}(N_{2k+2}) = \frac{n-k}{2n-2k-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \prod_{k=0}^{p-1}\left[\frac{n-k}{2n-2k}\times\frac{n-k}{2n-2k-1}\right]\\
&= \frac{n}{2n}\times\frac{n}{2n-1}\times\frac{n-1}{2n-2}\times\frac{n-1}{2n-3}\cdots\frac{n-p+1}{2n-2p+2}\times\frac{n-p+1}{2n-2p+1}\\
&= \frac{n^2(n-1)^2\cdots(p+1)^2}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{n!\,(n!)^2}{(2n)!\,(p!)^2} = \frac{((2p)!)^3}{(4p)!\,(p!)^2}}$$

c) Soit C : "tirer une seule boule blanche". On partitionne

$$C = \coprod_{k=1}^{n}(C\cap B_k)$$

Or pour $k\in[\![1,n]\!]$, l'événement $C\cap B_k$ est

$$C\cap B_k = N_1\cap N_2\cap\ldots\cap B_k\cap\ldots\cap N_n$$

Toujours avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathbb{P}_{N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_{k-1}}(B_k)\cdots\mathbb{P}_{N_1\cap N_2\cap\ldots\cap B_k\cap\ldots\cap N_{n-1}}(N_n)\\
&= \frac{n}{2n}\times\frac{n-1}{2n-1}\cdots\frac{n-(k-2)}{2n-(k-2)}\times\frac{n}{2n-(k-1)}\times\frac{n-(k-1)}{2n-k}\cdots\frac{2}{n+1}\\
&= \frac{n!\times n\times n!}{(2n)!}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{(n!)^2\,n}{(2n)!} = \frac{n}{\binom{2n}{n}}}$$

Ex 16 On effectue $n > 0$ expériences aboutissant au succès ou à l'échec avec la probabilité p et $q = 1 - p$, où $p \in \,]0, 1[\,$.

a) Soit A l'événement "on obtient au moins un succès". On note S_i : "on obtient un succès à la n-ième expérience", pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}$$

Et par indépendance

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{S_i}\right) = q^n \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - q^n}$$

b) Soit B : "un succès ne soit jamais suivi d'un échec". On pose, si $i \in [\![0, n]\!]$:

$$B_i = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_k} \cap S_{k+1} \cap \ldots \cap S_n$$

avec la convention :

$$B_0 = S_1 \cap \ldots \cap S_n \quad \text{et} \quad B_n = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_n}$$

Les événements $B_0, \ldots, B_n$ sont deux à deux incompatibles, et

$$B = \coprod_{i=0}^{n} B_i$$

Il vient donc par additivité, puis par indépendance des S_i :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=0}^{n} q^k p^{n-k}$$

$*$ <u>1^{er} cas</u> : $p = q = \frac{1}{2}$. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \boxed{\frac{n+1}{2^n}}$$

$*$ <u>2^{ème} cas</u> : $p \neq q$. Alors d'après une formule bien connue :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}}$$

Ex 17 Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

a) On prélève une "poignée aléatoire de p boules.
Pour $k \in [\![p, n]\!]$ on pose A_k : "le plus grand numéro de la poignée est k".
L'univers Ω est l'ensemble des "poignées", c'est-à-dire $\Omega = \mathcal{P}_p\left([\![1, n]\!]\right)$ (ensemble des p-parties de $[\![1, n]\!]$), muni de l'équiprobabilité. On a $\#\Omega = \binom{n}{p}$.
Pour construire une poignée de A_k, on choisit la boule k (il n'y a qu'un choix) et on lui adjoint $p-1$ boules de numéro inférieur à $k-1$, autrement dit on choisit une $(p-1)$-partie de $[\![1, k-1]\!]$. Il y a $\binom{k-1}{p-1}$ possibilités de le faire, et par équiprobabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A_k\right) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}}$$

Comme $(A_p, A_{p+1}, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements, on en déduit

$$1 = \sum_{k=p}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}}$$

b) On tire successivement et sans remise p boules.
On pose B : " la p-ième boule tirée a un numéro supérieur aux $p-1$ précédents".
On ordonne les tirages, donc l'univers est ici l'ensemble des p-arrangements de $[\![1, n]\!]$, de cardinal $A_n^p = p!\binom{n}{p}$.
On fait une disjonction de cas sur la valeur du dernier tirage : on note T_k : "la p-ième boule a le numéro k".
Alors

$$B = \coprod_{k=1}^{n} \left(B \cap T_k\right) = \coprod_{k=p}^{n} \left(B \cap T_k\right)$$

(pour avoir $B \cap T_k$ il faut que k soit le plus grand numéro des p boules, donc que $k \geqslant p$).
Mais comme au a), pour construire un tirage de $B \cap T_k$, on fixe la dernière boule au numéro k, puis on choisit les précédentes, qui forment un arrangement de $p-1$ boules prises parmi les $k-1$ premiers numéros. Il y a $A_{k-1}^{p-1} = (p-1)!\binom{k-1}{p-1}$ façons de le faire. Ainsi par partition et équiprobabilité des tirages :

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \sum_{k=p}^{n} \mathbb{P}\left(B \cap T_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \frac{(p-1)!\binom{k-1}{p-1}}{p!\binom{n}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}$$

La formule établie au a) nous assure alors que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(B\right) = \frac{1}{p}}$$

Ex 18 On dispose de $n \geqslant 2$ urnes numérotées contenant une boule blanche et une boule noire, sauf la première qui contient deux boules noires et une boule blanche.
On prélève au hasard une boule dans la première urne, qu'on place dans la deuxième. On prélève ensuite au hasard une boule dans la deuxième qu'on place dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on considère l'évènement A_k : "la boule extraite de l'urne k est blanche" et $p_k = \mathbb{P}(A_k)$.

a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\left(A_k, \overline{A_k}\right)$:
$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}_{A_k}(A_{k+1})\,\mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}_{\overline{A_k}}(A_{k+1})\,\mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)$$
Mais si A_k est réalisé, alors l'urne $k+1$ contient 2 blanches et une noire, et inversement sinon. D'où
$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1-p_k)$$
Ainsi, $(p_k)_{k\in[\![1,k-1]\!]}$ satisfait la relation de récurrence arithmético-géométrique :
$$\boxed{p_{k+1} = \frac{p_k+1}{3}}$$

b) Le point fixe de $x \mapsto \frac{1}{3}(x+1)$ est $\ell = \frac{1}{2}$, et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$p_{k+1} - \ell = \frac{1}{3}(p_k - \ell)$$
De cette relation géométrique on déduit l'expression de p_k :
$$p_k = \ell + \frac{1}{3^{k-1}}(p_1 - \ell)$$
Comme l'énoncé indique que $p_1 = \frac{1}{3}$ (il y a une boule blanche et deux boules noires dans l'urne 1), on en déduit
$$p_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 3^k}}$$
Il est alors clair que $\lim p_k = \frac{1}{2}$, ce qui intuitivement signifie qu'au bout d'un grand nombre de tirages, la différence initiale s'est estompée et que les tirages blanc/noir sont équiprobables.

Ex 19 Un fabriquant de chaussures en produit n paires et les assemble au hasard dans des boîtes contenant deux chaussures, sans prendre garde aux pieds droits et gauches.

a) On cherche la probabilité p_n que toutes les boîtes possèdent un pied droit et un pied gauche.
Si on dispose de p paires de chaussures, calculons la probabilité de tirer une simultanément une chaussure droite et une chaussure gauche : il y a $\binom{2p}{2}$ tirages possibles de deux chaussures, et un cas favorable consiste à choisir une chaussure droite (p choix) puis une gauche (p choix). Au total la probabilité cherchée est :
$$\frac{p^2}{\binom{2p}{2}} = \frac{p}{2p-1}$$
On tire successivement n paires. Posons

GD_i : "on tire une chaussure gauche et une droite au i-ème tirage"
A : "toutes les boîtes possèdent une chaussure droite et une gauche"

On a
$$A = GD_1 \cap \ldots \cap GD_n$$
et d'après la formule des probabilités composées
$$p_n = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(GD_1) \times \mathbb{P}_{GD_1}(GD_2) \times \mathbb{P}_{GD_1\cap GD_2}(GD_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{GD_1\cap\ldots GD_{n-1}}(GD_n)$$
d'après le calcul préliminaire, il vient
$$p_n = \frac{n}{2n-1}\times\frac{n-1}{2n-3}\times\frac{n-2}{2n-5}\times\cdots\times\frac{1}{1} = \frac{n!n!2^n}{(2n)}$$
Finalement
$$\boxed{p_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}}$$
Remarque : on pouvait aussi raisonner par dénombrement.

b) Calculons la probabilité q_n que toutes les boîtes soient constituées de deux chaussures du même pied.
Remarquons que si n est impair, cet événement est impossible, car on ne peut pas par exemple grouper les n chaussures gauches par paires. Ainsi, si $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{q_{2k+1} = 0}$.
Posons $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. On ne peut pas raisonner comme au a) puisque les configurations changent suivant qu'on tire une paire de chaussures droites ou une paire de chaussures gauches. On va donc utiliser une méthode par dénombrement :
Numérotons les boîtes de 1 à n. L'expérience consiste à remplir les boîtes de la première à la dernière.

* On remplit la première boîte : il y a $\binom{2n}{2}$ façons de le faire.
* On remplit la deuxième : il y a $\binom{2n-2}{2}$ façons de le faire.
* Ainsi de suite jusqu'à la n-ième boîte : $\binom{2}{2}$ façons de la remplir.

Le cardinal de l'univers Ω est donc

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{(4k)!}{2^{2k}}$$

On fait évidemment l'hypothèse d'équiprobabilité.
Posons B : "toutes les boîtes soient constituées de deux chaussures du même pied". Pour construire un tel événement :

* On choisit les k boîtes qui contiendront deux chaussures gauches : il y a $\binom{2k}{k}$ possibilités.
* On remplit ces k boîtes de chaussures gauches : comme plus haut, il y a $\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \dfrac{(2k)!}{2^k}$ façons de le faire.
* On remplit les k autres boîtes de chaussures droites : il y a $\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \dfrac{(2k)!}{2^k}$ façons de le faire.

Au total le cardinal de B est $\binom{2k}{k}\dfrac{[(2k)!]^2}{2^{2k}}$, et sa probabilité

$$q_{2k} = \binom{2k}{k}\frac{[(2k)!]^2}{2^{2k}} \times \frac{2^{2k}}{(4k)!} = \frac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}$$

c) Montrons $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n}2^{2n-1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$:
Déjà $2^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$. Les termes sont positifs, donc $\dbinom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$. De plus

$$\binom{2n}{n} = \frac{1\times 3\times 5\cdots\times(2n-1)}{n!}2^n = \frac{3\times 5\cdots\times(2n-1)}{(n-1)!}\frac{2^n}{n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k}\frac{2^n}{n} = \frac{2^n}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\frac{1}{k}\right)$$

Il s'ensuit

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^n}{n}\prod_{k=1}^{n-1}2 = \frac{1}{n}2^{2n-1} \quad \text{CQFD.}$$

* Il est alors évident que $0 \leqslant p_n \leqslant \dfrac{n2^n}{2^{2n-1}} = 2n2^{-2n}$, d'où par encadrement $\boxed{\lim p_n = 0}$.
* Pour q_n, on écrit, pour $n = 2k$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{k}2^{2k-1} \leqslant \dbinom{2k}{k} \leqslant 2^{2k} \\ \dfrac{1}{2k}2^{4k-1} \leqslant \dbinom{4k}{2k} \leqslant 2^{4k} \end{array}\right. \Rightarrow 0 \leqslant q_{2k} \leqslant 4k2^{-2k}$$

Donc par encadrement aussi, $\lim q_{2k} = 0$, qui entraine $\boxed{\lim q_n = 0}$ puisque $q_{2k+1} = 0$.

Ex 20 Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement " l'animal est en A (resp. B, C) après son n-ième trajet".
On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n,\ \mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \end{cases}$$

L'énoncé permet donc d'écrire :

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases}}$$

b) En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

Qui donne (avec un petit raisonnement par récurrence) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$$

Or si on pose $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1 et $I = I_3$, on peut écrire $A = \dfrac{1}{2}(J - I)$. En appliquant la formule du binôme aux matrices I et J qui commutent, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{2^n}(J - I)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(-I)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}J^k$$

Or $J^0 = I$, et $\forall k \geqslant 1,\ J^k = 3^{k-1}J$ (récurrence facile, puisque $J^2 = 3J$). Ainsi

$$\begin{aligned} A^n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n I + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}3^{k-1}J \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n I + \frac{1}{3\times 2^n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}3^k\right)J \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n I + \frac{1}{3\times 2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}3^k - (-1)^n\right)J \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme (encore) :

$$A^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n I + \frac{1}{3\times 2^n}\left((3-1)^n - (-1)^n\right)J = \left(-\frac{1}{2}\right)^n I + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)J$$

Finalement

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

La condition initiale $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \boxed{\begin{cases} a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}}$$

Les trois probabilités a_n, b_n, c_n convergent ainsi vers $\frac{1}{3}$, conforme à l'idée qu'au bout d'un grand nombre d'étapes, les trois points d'eau soient devenus quasi équiprobables.

Ex 21 Au moment où chacun possède un tiers du marché de la téléphonie mobile, trois opérateurs A, B, C décident de mettre sur le marché un nouveau type de forfait annuel. A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante :

- Les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante.
- Les clients de la compagnie B lui restent toujours fidèles.
- Les clients de la compagnie C iront chez A (resp. B) avec une probabilité $\frac{1}{12}$ (resp. $\frac{7}{12}$) et resteront avec la probabilité $\frac{1}{3}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n,\ b_n,\ c_n$ les probabilités qu'à l'issue de l'année n, un consommateur décide de s'abonner chez A, B, C pour l'année suivante.

a) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) (A_n : "le consommateur décide de s'abonner chez A à l'issue de l'année n", B_n et C_n analogues) :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\,\mathbb{P}(C_n) \end{array}\right.$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

b) On peut écrire matriciellement

$$X_{n+1} = AX_n, \quad \text{avec } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/12 \\ 1/3 & 1 & 7/12 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 7 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Mais l'étude de A n'est pas aisée avec les outils de première année. On cherche plutôt des relations de récurrences d'ordre 2 : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{12}c_{n+1} \\ & = & \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}c_n\right) \\ & = & \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{12}{3}\left(a_{n+1} - \dfrac{1}{3}a_n\right)\right) \\ & = & \dfrac{2}{3}a_{n+1} - \dfrac{1}{12}a_n \end{array}$$

De même

$$\begin{array}{rcl} c_{n+2} & = & \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{3} \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{12}c_n\right) + \dfrac{1}{3}c_{n+1} \\ & = & \dfrac{1}{3}\left(\left(c_{n+1} - \dfrac{1}{3}c_n\right) + \dfrac{1}{12}c_n\right) + \dfrac{1}{3}c_{n+1} \\ & = & \dfrac{2}{3}c_{n+1} - \dfrac{1}{12}c_n \end{array}$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{12} = 0 \quad \text{de racines } \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{6}$$

Donc $\exists\left(\alpha, \beta, \alpha'\beta'\right) \in \mathbb{R}^2$ / $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{6^n} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{\alpha'}{2^n} + \frac{\beta'}{6^n}$$

Les conditions initiales : $a_0 = c_0 = \frac{1}{3}$ donnent $a_1 = \frac{5}{36}$ et $c_1 = \frac{2}{9}$, d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{1}{3} \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6} = \frac{5}{36} \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/12 \end{pmatrix}$$

De même

$$\begin{cases} \alpha' + \beta' = \frac{1}{3} \\ \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{6} = \frac{2}{9} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

Ainsi pour tout entier n :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{6^n} = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6^{n+1}}}$$

et

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6^n} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}}$$

On constate que ces deux suites convergent vers 0.
Reste à déterminer b_n :

$$\boxed{b_n = 1 - a_n - c_n = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{6^n}}$$

On constate que cette suite converge vers 1, c'est à dire qu'à terme, l'opérateur B aura le monopole, ce qui est cohérent puisqu'il est le seul à garder ses clients.