**EXERCICE 1**

On note $E=\mathbb{R}^2$, que l'on identifiera au plan muni de la base orthonormée $(e_1,e_2)$ (canonique)

**1.** On considère les vecteurs $X_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $Y_0=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, et on note $F=\mathbb{R}X_0$ et $G=\mathbb{R}Y_0$ :

Montrons que $E=F\oplus G$ : si $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on cherche une décomposition unique de la forme

$$X=X_F+X_G,\ X_F=\lambda X_0\in F,\ X_G=\mu Y_0\in G$$

Cela s'écrit

$$X=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda-2\mu=x\\2\lambda+\mu=y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{1}{5}\left(x+2y\right)\\\mu=\dfrac{1}{5}\left(-2x+y\right)\end{array}\right.$$

On a donc bien la décomposition unique

$$X=\frac{1}{5}\left(x+2y\right)X_0+\frac{1}{5}\left(-2x+y\right)Y_0$$

**2.** Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}$.

Comme $\det A=-6\neq 0$, $A$ est inversible, donc $f$ aussi. de plus $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&2\\2&1\end{pmatrix}$, donc

$$\forall X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E,\ f^{-1}\left(X\right)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2x+2y\\2x+y\end{pmatrix}$$

**3.** On pose $g=f-3\,\mathrm{id}_E$ et $h=f+2\,\mathrm{id}_E$ .

a) Calcul des noyaux

$*$ $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\ker g\Leftrightarrow f\left(X\right)-3X=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4x+2y=0\\2x-y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow y=2x$

Le noyau de $g$ est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ :

$$\ker g=\text{Vect}\left(X_0\right)=F\quad\text{(droite vectorielle)}$$

$*$ $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\ker h\Leftrightarrow f\left(X\right)+2X=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2y=0\\2x+4y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-2y$

Le noyau de $h$ est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}-2y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ :

$$\ker h=\text{Vect}\left(Y_0\right)=G\quad\text{(droite vectorielle)}$$

b) Ainsi, si $X\in F$, on a $g\left(X\right)=0$, c'est-à-dire

$$\underline{f\left(X\right)=3X}$$

**4.** Soit $X\in E$. On décompose $X$ sous la forme $X=X_F+X_G$ où $(X_F,X_G)\in F\times G$.

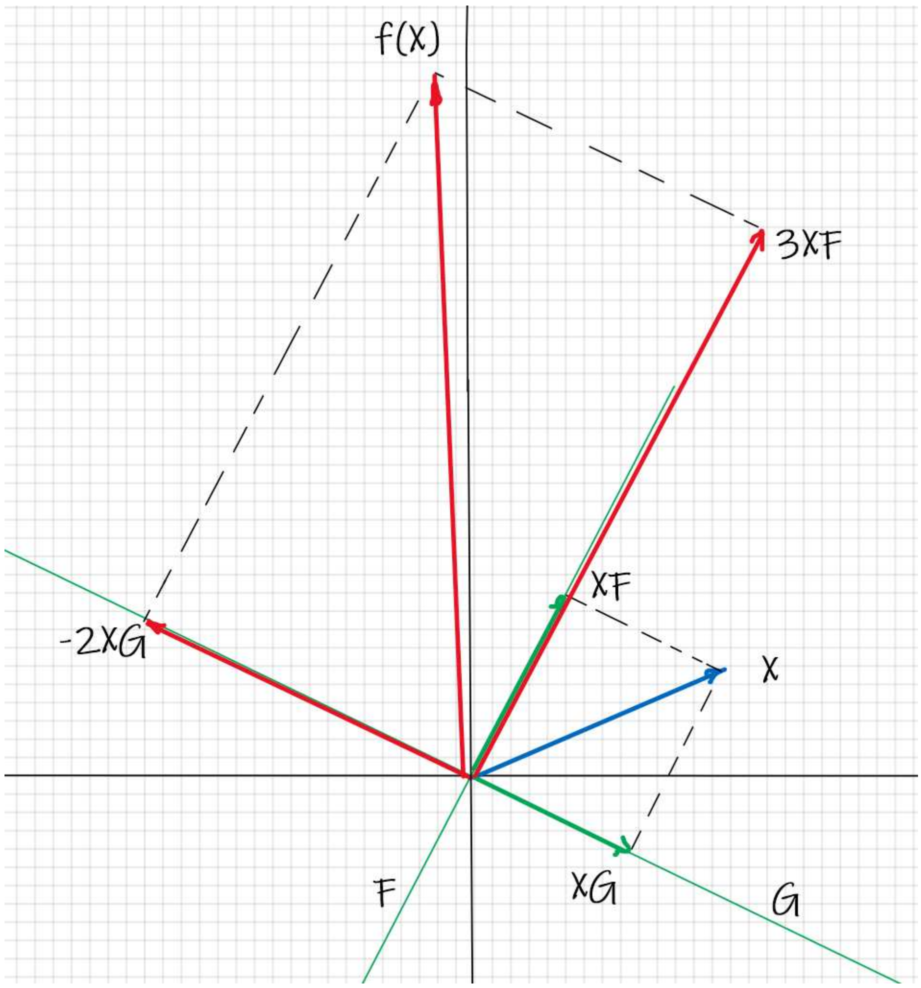
a) Par linéarité, on a

$$f\left(X\right)=f\left(X_F\right)+f\left(X_G\right)$$

Or, par définition $X_f\in F$ et $X_G\in G$. La question précédente entraine alors :

$$f\left(X\right)=3X_F-2X_G$$

b) Pour $X$ donné il suffit donc de construire les projetés $p\left(X\right)=X_F$ et $X_G=q\left(X\right)$ pour construire $f\left(X\right)$ par cette dernière formule :



Construction de $f(X)$

**EXERCICE 2**

Soit $a$ un réel non nul. On veut montrer (**sans résoudre de système de quatre équations à quatre inconnues**) que pour tout quadruplet de réels $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ , il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(-a)=\alpha,\ P'(-a)=\beta,\ P(a)=\gamma et P'(a)=\delta$$

et donner une construction effective de $P$.

A cet effet, on considère l'application $\varphi:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\quad \varphi(P)=(P(-a),P'(-a),P(a),P'(a))$$

On note

$$e_1=(1,0,0,0),\ e_2=(0,1,0,0),\ e_3=(0,0,1,0),\ e_4=(0,0,0,1)$$

la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

**1.** Montrons que $\varphi$ est est linéaire et injective.

– Linéarité : $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_3[X]^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\lambda P+\mu Q)=\begin{pmatrix}(\lambda P+\mu Q)(-a)\\(\lambda P+\mu Q)'(-a)\\(\lambda P+\mu Q)(a)\\(\lambda P+\mu Q)'(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda P(-a)+\mu Q(-a)\\\lambda P'(-a)+\mu Q'(-a)\\\lambda P(a)+\mu Q(a)\\\lambda P'(a)+\mu Q'(a)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}P(-a)\\P'(-a)\\P(a)\\P'(a)\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}Q(-a)\\Q'(-a)\\Q(a)\\Q'(a)\end{pmatrix}$$

Finalement $\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$ CQFD.

– Injectivité : si $P\in\ker\varphi$, alors $P(-a)=P'(-a)=0$ et $P(a)=P'(a)=0$, donc $a$ et $-a$ sont racines au moins doubles de $P$. Autrement dit $P$ est divisible par $(X-a)^2(X+a)^2=\left(X^2-a^2\right)^2$.

Mais comme $\deg P\le 3$, on en déduit $P=0$.

Ainsi $\ker\varphi=\{0\}$ et $\varphi$ est injective.

**2.** a) Soit $P$ un antécédent de $e_1$ par $\varphi$ : on a donc $\varphi(P)=e_1$, soit $P(-a)=1$, $P'(-a)=P(a)=P'(a)=0$.

Posons $R(X)=P(-X)$ : alors $R'(X)=-P'(-X)$ . d'où

$$R(-a)=P(a)=0,\ R'(-a)=-P'(a)=0,\ R(a)=P(-a)=1 \text{ et } R'(a)=-P'(-a)=0$$

i.e. $\varphi(R)=(0,0,1,0)=e_3$ : $R$ est antécédent de $e_3$ par $\varphi$.

b) Soit $Q$ un antécédent de $e_2$ par $\varphi$ : on a donc $\varphi(Q)=e_2$, soit $Q'(-a)=1$, $Q(-a)=Q(a)=Q'(a)=0$.

Posons $S(X)=-Q(-X)$ : alors $S'(X)=Q'(-X)$ . d'où

$$S(-a)=-Q(a)=0,\ S'(-a)=Q'(a)=0,\ S(a)=-Q(-a)=0 \text{ et } S'(a)=Q'(-a)=1$$

i.e. $\varphi(S)=(0,0,0,1)=e_4$. $S$ est antécédent de $e_4$ par $\varphi$.

**3.** a) Antécédent de $e_1$ : si $\varphi(P)=e_1$, alors

$$P(-a)=1\quad(i),\quad P'(-a)=0\quad(ii),\quad P(a)=0\quad(iii),\quad P'(a)=0\quad(iv).$$

$(ii)$ et $(iv)$ forcent $P'$ à être divisible par $(X+a)(X-a)=X^2-a^2$, soit,puisque $\deg P'\le 2$,

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ P'(X)=\lambda\left(X^2-a^2\right)$$

$P$ est alors nécessairement de la forme

$$P(X)=\lambda\left(\frac{X^3}{3}-a^2X\right)+k,\quad k\in\mathbb{R}$$

$(i)$ et $(iii)$ donnent alors $\left\{\begin{array}{l}-\frac{2a^3}{3}\lambda+k=0\\\frac{2a^3}{3}\lambda+k=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{3}{4a^3}\\k=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ . Nécessairement $P(X)=\dfrac{X^3}{4a^3}-\dfrac{3X}{4a}+\dfrac{1}{2}$.

**Réciproquement**, on pose

$$\boxed{P_1(X) = \frac{X^3}{4a^3} - \frac{3X}{4a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4a^3}(X+2a)(X-a)^2}$$

Il est aisé de vérifier que $P_1$ est un antécédent de $e_1$ par $\varphi$ (il vérifie $(i)$ , $(ii)$,$(iii)$ et $(iv)$).

b) Antécédent de $e_2$ : si $\varphi(P) = e_2$, alors

$$P(-a) = 0 \quad (i), \quad P'(-a) = 1 \quad (ii), \quad P(a) = 0 \quad (iii), \quad P'(a) = 0 \quad (iv).$$

$(i)$ , $(iii)$ et $(iv)$ forcent $P$ à être divisible par $(X+a)(X-a)^2$ ($a$ racine double), soit puisque $\deg P \leq 3$,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ P(X) = \lambda (X+a)(X-a)^2$$

Mais alors $P'(X) = \lambda\left(2(X-a)(X+a) + (X-a)^2\right)$, et $P'(-a) = 4\lambda a^2$

$(ii)$ fournit donc $\lambda = \dfrac{1}{4a^2}$, et $P = \dfrac{X^3}{4a^2} - \dfrac{3X}{8} + \dfrac{1}{2}$.

**Réciproquement**, on pose

$$\boxed{P_2(X) = \frac{1}{4a^2}\left(X^3 - aX^2 - a^2X + a^3\right) = \frac{1}{4a^2}(X+a)(X-a)^2}$$

Il est aisé de vérifier que $P_2$ est un antécédent de $e_2$ par $\varphi$.

c) L'étude du 2. nous assure que les polynômes

$$\boxed{P_3(X) = P_1(-X) = -\frac{X^3}{4a^3} + \frac{3X}{4a} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4a^3}(X-2a)(X+a)^2}$$

$$\boxed{P_4(X) = -P_2(-X) = \frac{1}{4a^2}\left(X^3 + aX^2 - a^2X - a^3\right) = \frac{1}{4a^2}(X-a)(X+a)^2}$$

sont des antécédents de $e_3$ et $e_4$.par $\varphi$.

**4.** Soit $Y = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ par $\varphi$ que l'on exprimera à l'aide de $P_1, P_2, P_3, P_4$.
Considérons le polynôme $P$ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4$$

Alors

$$\begin{cases} P(-a) = \alpha + 0 + 0 + 0 = \alpha \\ P'(-a) = 0 + \beta + 0 + 0 + 0 = \beta \\ P(a) = 0 + 0 + \gamma + 0 = \gamma \\ P'(a) = 0 + 0 + 0 + \delta = \delta \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi(P) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = Y$$

$P$ est un antécédent de $Y$ par $\varphi$.

**5.** Tout élément de $\mathbb{R}^4$ admet ainsi un antécédent par $\varphi$, qui est donc surjective, d'où **bijective**, vu 1.

**6.** Application : on prend $a = 2$. Puisque $\varphi$ est bijective, il existe un unique polynôme $P$ de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(-2) = 4 \quad P'(-2) = 2 \quad P(2) = -4 \quad P'(2) = 10$$

Ce polynôme est $\varphi^{-1}(4, 2, -4, 10)$, qui vaut, d'après 4. : $P = 4P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 10P_4$. Or

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{X^3}{32} - \dfrac{3X}{8} + \dfrac{1}{2} \\ P_2 = \dfrac{X^3}{16} - \dfrac{X^2}{8} - \dfrac{X}{4} + \dfrac{1}{2} \\ P_3 = -\dfrac{X^3}{32} + \dfrac{3X}{8} + \dfrac{1}{2} \\ P_4 = \dfrac{X^3}{16} + \dfrac{X^2}{8} - \dfrac{X}{4} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{P(X) = X^3 + X^2 - 6X - 4}$$

**EXERCICE 3**

On considère l'application $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

On définit les polynôme de Newton définis par $N_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

**1.** Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $N_k$ est de degré $k$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$.
La famille $(N_0, \dots, N_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ est donc étagée en degrés, donc elle est libre. Comme elle admet $n+1$ vecteurs, ce qui est précisément la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, on en déduit que

$$\boxed{(N_0, \dots, N_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X]}$$

**2.** – Linéarité de $f$ : soient $P$ et $Q$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda$ un réel. Alors

$$\begin{aligned} \underline{f(\lambda P + Q)} &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X)) = \underline{\lambda f(P) + f(Q)} \end{aligned}$$

$f$ est donc linéaire, et c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

– Noyau.de $f$ : $P \in \ker f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(X+1) = P(X)$

Supposons $P$ non constant : alors (théorème de d'Alembert Gauss) $P$ admet une racine $a \in \mathbb{C}$.

Mais alors $P(a+1) = P(a) = 0$, d'où $P(a+2) = P(a+1) = 0, \dots$.

Une récurrence quasi-immédiate nous donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(a+n) = 0.$

$P$ admet donc une infinité de racines, ce qui est contradictoire : $P$ ne peut être que constant.

Comme inversement les polynômes constants $P(X) = \lambda$ vérifient $f(P) = \lambda - \lambda = 0$, on en déduit

$$\boxed{\ker f = \mathbb{K}_0[X]} \text{ (ensemble des polynômes constants)}$$

**3.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

– Si $\deg P \leqslant 0$, alors $\Delta(P) = 0$.

– Si $\deg P = n \geqslant 1$, alors si $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

On constate que $\deg \Delta\left(X^k\right) = k - 1$ si $k \geq 1$ (coefficient dominant $\binom{k}{k-1} = k$).

Posons alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$ : par linéarité, $\Delta(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \Delta\left(X^k\right)$.
Chacun des $\Delta\left(X^k\right)$ ayant pour degré $k-1$, on en déduit, puisque $a_n \neq 0$, que

$$\boxed{\deg \Delta(P) = n - 1 = \deg P - 1}$$

*Remarque* : le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est $n a_n$.
Tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$ a donc une image par $\Delta$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, ce qui entraine que $\Delta$ induit une application linéaire $\widetilde{\Delta}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

**4.** Calcul $\Delta(N_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

– Si $k=0$, alors $\Delta(N_0)=0$

– Si $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\Delta(N_k) &= \frac{(X+1)X\cdots(X-k+2)}{k!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)\left[(X+1)-(X-k+1)\right]}{k!} \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)\,k}{k!} \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-(k-1)+1)}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\Delta(N_k) = N_{k-1}}$$

*Remarque* : y aurait-il un rapport avec les coefficient du binôme?..

**5.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré inférieur à $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après la question 1.,

$$\exists!\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \;/\; P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k N_k$$

Mais le calcul précédent et la linéarité de $\Delta$ donnent alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Delta(N_{k+1}) = \Delta\Big(\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k N_{k+1}\right)\Big)$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k N_{k+1}$ est un antécédent de $P$ par $\Delta$ :

$$\boxed{\Delta \text{ est surjective}}$$

**6.** Soit $(p,k) \in [\![0,n]\!]^2$. Une récurrence facile laissée au lecteur donne :

– Si $p>k$, alors $\boxed{\Delta^p(N_k)=0}$

– Si $p \leqslant k$ alors $\boxed{\Delta^p(N_k)=N_{k-p}}$

Soit alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Il s'écrit comme précédemment

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k N_k \quad \text{avec} \quad (\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Appliquons l'application linéaire $\Delta^p$ :

$$\Delta^p(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Delta^p(N_k) = \sum_{k=p}^{n} \lambda_k N_{k-p}$$

En évaluant en $0$, et en remarquant que $N_k(0)=0$ SAUF pour $k=0$ $(N_0(0)=1)$, on obtient :

$$\underline{\Delta^p(P)(0) = \lambda_p}$$

et en reportant, on a la "formule de Taylor discrète" :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)\, N_k}$$

**7.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a vu précédemment comment extraire un antécédent de $P$ : si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k (P)(0) N_k = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k (P)(0) \Delta (N_{k+1}) = \Delta\Big( \sum_{k=0}^{n} \Delta^k (P)(0) N_{k+1}\Big)$$

A partir de l'antécédent $\sum_{k=0}^{n} \Delta^k (P)(0) N_{k+1}$, on obtient tous les autres en ajoutant les éléments du noyau :

$$\boxed{\Delta^{-1} \langle \{P\} \rangle = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} \Delta^k (P)(0) N_{k+1} + C,\ C \in \mathbb{K}\Big\}}$$

**8.** Application :

a) Considérons le polynôme $Q = X^3$. Alors $Q(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \Delta (Q) &= 3X^2 + 3X + 1 \quad \text{et} \quad \Delta (Q)(0) = 1 \\ \Delta^2 (Q) &= 3(2X+1) + 3 = 6X + 6 \quad \text{et} \quad \Delta^2 (Q)(0) = 6 \\ \Delta^3 (Q) &= 6 \quad \text{et} \quad \Delta^3 (Q)(0) = 6 \end{aligned}$$

La formule de "Taylor discrète" s'écrit ici

$$X^3 = Q = 6N_3 + 6N_2 + N_1 = \Delta (6N_4 + 6N_3 + N_2)$$

L'unique polynôme $P$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^3$ est donc

$$\begin{aligned} P &= 6N_4 + 6N_3 + N_2 = \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4} + X(X-1)(X-2) + \frac{X(X-1)}{2} \\ &= \frac{X(X-1)}{4} [(X-2)(X-3) + 4(X-2) + 2] \end{aligned}$$

Après réduction

$$\boxed{P = \frac{X^2 (X-1)^2}{4}}$$

b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} [P(k+1) - P(k)] = P(n+1) - P(0)$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}}$$

**9.** On considère l'application $T : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $T(P) = P(X+1)$

a) De l'égalité $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ T(P) = \Delta (P) + P$ on tire que $T = \Delta + \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}$ est linéaire et que

$$\boxed{\Delta = T - \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}}$$

b) On calcule immédiatement $T^2 (P) = P(X+2), \ldots$ et par récurrence sans malice,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ T^k (P) = P(X+k)}$$

c) Les applications linéaires $T$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}$ commutent, et on peut donc appliquer la formule du binôme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^n = \left(\Delta - \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Delta^k$$

cette égalité d'applications, appliquée au polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, donne ainsi, d'après b) :

$$\boxed{\Delta^n (P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)}$$

**10.** Décomposons $P = X^4$ sur la base $(N_0, N_1, N_2, N_3, N_4)$ à l'aide de la formule précédente :

Pour $k \in [\![0, 4]\!]$ , la coordonnée sur $N_k$ est $\Delta^k (P) (0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P (i)$ , soit

$$\begin{array}{rcl} \Delta^0 (P) (0) & = & 0 \\ \Delta^1 (P) (0) & = & P (1) - P (0) = 1 \\ \Delta^2 (P) (0) & = & P (2) - 2P (1) + P (0) = 14 \\ \Delta^3 (P) (0) & = & P (3) - 3P (2) + 3P (1) - P (0) = 36 \\ \Delta^4 (P) (0) & = & P (4) - 4P (3) + 6P (2) - 4P (1) + P (0) = 24 \end{array}$$

Il en résulte que

$$\boxed{X^4 = 24N_4 + 36N_3 + 14N_2 + N_1}$$