Fonctions à valeurs complexes

1. Généralités [I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$]

a) <u>Définition</u> : une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes s'écrit de manière unique :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = f_1(x) + i f_2(x)}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs réelles sur I. On les note $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exemple 1 : si $a = -\lambda + i\omega$ avec $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}_+^*$, comment s'écrit $f : x \mapsto e^{\lambda x}$?

Exemple 2 : $f : x \mapsto ix^3 + (1-2i)\, x^2 + e^{i\frac{\pi}{7}} x + 3 + 4i$ est une fonction (polynôme) à valeurs complexes.

Exemple 3 : soit $x \in \mathbb{R}$. Que valent $\operatorname{ch}(ix)$ et $\operatorname{sh}(ix)$?

b) <u>Continuité</u> : on dira que $\boxed{f \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur } I \text{ lorsque } f_1 \textbf{ et } f_2 \text{ le sont}}$.

On montre que sommes, produits, quotients (à dénominateur non nul) de fonctions continues sont continus.

c) <u>Dérivation</u> : on dira que $\boxed{f \text{ est } \textbf{dérivable} \text{ sur } I \text{ lorsque } f_1 \text{ et } f_2 \text{ le sont}}$, et on pose

$$\boxed{f' = f_1' + i f_2'}$$

Autrement dit

$$\boxed{\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re} f)'} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im} f)'}$$

On montre que sommes, produits, quotients (à dénominateur non nul) de fonctions complexes dérivables sont dérivables et on a les formules suivantes :

1. **Linéarité** : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ (pour λ et μ complexes)
2. **Produit** : $(fg)' = f'g + fg'$
3. **Quotient** : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ si g ne s'annule pas sur I

d) <u>Fonctions de classe C^n</u> : plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, on dira que $f \in C^n(I, \mathbb{C})$ lorsque $f^{(n)}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de classe C^n sur I, et on a

$$\boxed{f^{(n)} = (\operatorname{Re} f)^{(n)} + i\,(\operatorname{Im} f)^{(n)}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} \operatorname{Re}\left(f^{(n)}\right) = (\operatorname{Re} f)^{(n)} \\ \operatorname{Im}\left(f^{(n)}\right) = (\operatorname{Im} f)^{(n)} \end{cases}}$$

Exemples : calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

e) <u>Primitives</u> : on dira que $F : I \to \mathbb{C}$ est **une primitive** de f **sur** I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.

Si $f = f_1 + i f_2$ est continue sur I, et si F_1 et F_2 sont des primitives de f_1 et f_2 sur I, alors $F = F_1 + iF_2$ est une primitive de f sur I. Autrement dit

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + i\int f_2(x)\,dx} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right) = \displaystyle\int \operatorname{Re} f(x)\,dx \\ \operatorname{Im}\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right) = \displaystyle\int \operatorname{Im} f(x)\,dx \end{cases}}$$

Exemples : calculer $\displaystyle\int e^{(1+i)x} dx$, $\displaystyle\int (2x-3i)^2\,dx$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-i)^3}$ et $\displaystyle\int \frac{dx}{x-i}$

2. Fonction exponentielle complexe : $t \mapsto e^{at},\ a \in \mathbb{C}^*$

a) **Dérivée :** on pose $a = \lambda + i\omega,\ (\lambda, \omega) \in \mathbb{R}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$e^{at} = e^{\lambda t} e^{i\omega t} = e^{\lambda t} \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right)$$

La fonction $t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at}} \quad \text{(comme sur } \mathbb{R}\text{)}$$

Remarque 1 : on a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{d^2}{dt^2} e^{at} = a^2 e^{at}$. En particulier $\dfrac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$.

Plus généralement, la dérivée n-ième de f est $\dfrac{d^n}{dt^n}\left(e^{at}\right) = a^n e^{at}$

Remarque 2 : $\boxed{\int e^{at} dt = \dfrac{e^{at}}{a} + C}$. En particulier $\int e^{i\omega t} dt = \dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega} + C = -\dfrac{i}{\omega} e^{i\omega t} + C$.

Exemple 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées n-ièmes de la fonction $\sin$

Exemple 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées n-ièmes de $f : x \mapsto e^x \cos x$ puis $g : x \mapsto x e^x \cos x$.

Exemple 3 : soit $f(x) = x^{1+i}\ \ (x > 0)$. Calculer $\operatorname{Re} f'(x)$.

b) **Etude de $t \mapsto \operatorname{Re}(e^{at}) = e^{\lambda t} \cos(\omega t)$ pour $\omega > 0$ et $\lambda < 0$:** (oscillation amorties) :

(i) La fonction $t \mapsto e^{i\omega t}$ est T-périodique, avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

La fonction $t \mapsto e^{\lambda t} \cos(\omega t)$ n'est pas périodique.

Les points d'annulations de $t \mapsto e^{\lambda t} \cos(\omega t)$ sont espacés de $\dfrac{T}{2}$ (on parle parfois de "pseudo période" T)

Remarque : ces points d'annulations sont $t_k = \dfrac{T}{4} + k\dfrac{T}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Courbe : la courbe de $t \mapsto \operatorname{Re}(e^{at})$ est "comprise" entre les courbes d'équations $y = e^{\lambda t}$ et $y = -e^{\lambda t}$.