A rendre par trinôme

PROBLEME 1

Matrices stochastiques

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des matrices $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ à coefficients tous positifs ou nuls et vérifiant

$$\forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ \sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1$$

- On dira qu'une suite de matrice $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque chacun de ses coefficients converge.
- On dira qu'une matrice A est idempotente lorsque $A^2 = A$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_p$ est dans $\mathcal{S}_p$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_p$.

a) Montrer que : $\exists X_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,\ldots,0)\}\ /\ MX_0 = X_0$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $X \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,\ldots,0)\}\ /\ MX = \lambda X$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$
(si $X = (x_1,\ldots,x_p)$, on pourra considérer $k \in [\![1,p]\!]\ /\ |x_k| = \max(|x_1|,\ldots,|x_p|)$).

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$

a) Trouver un polynôme P du second degré annulateur de A.

b) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ (on montrera que A^n s'écrit $a_nA + b_nI_2$ et on déterminera a_n et b_n)

c) Montrer que A^n admet une limite A_0 lorsque n tend vers l'infini, et que A_0 est idempotente.

4. Soit $B = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 4/10 & 3/10 & 3/10 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3$

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence : $\big(\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{0\}\ /\ BX = \lambda X\big) \Longleftrightarrow (B - \lambda I_3$ n'est pas inversible$)$.

b) Montrer que $B - \lambda I_3$ est non inversible uniquement pour trois valeurs $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ que l'on déterminera.

c) Montrer que $\forall i \in \{1,2,3\}$, le système $BX - \lambda_i X$ admet une unique solution notée X_i dont la troisième composante vaut 1.

d) On pose $P = \mathrm{Mat}(X_1, X_2, X_3)$ (concaténation des trois colonnes X_1, X_2 et X_3)
Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}, puis $\Delta = P^{-1}BP$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer Δ^n et en déduire B^n.

f) Montrer que B^n admet une limite B_0 lorsque n tend vers l'infini, et que B_0 est idempotente.

5. Soit $p > 2$. On note $I = I_p$ et J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On étudie l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{aI + bJ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par combinaisons linéaires et par produits.

b) Déterminer un polynôme annulateur de $A = aI + bJ$ de degré 2, et en déduire que A est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $(a + bp) \neq 0$. Montrer qu'alors $A^{-1} \in \mathcal{E}$.

c) Montrer qu'il existe un réel γ tel que $P = \gamma J$ soit idempotente.

d) On pose $Q = I - P$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $A = aI + bJ$ comme combinaison linéaire de P et de Q.

e) Calculer P^kQ^ℓ pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, et en déduire, pour $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de P et Q.

f) Montrer que sous les conditions du b), la formule précédente est valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

g) On suppose que $b \neq 0$ et que $A = aI + bJ \in \mathcal{S}_p$. Quelles conditions doivent vérifier a et b ?
Montrer qu'alors $-1 < a < 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.