Probabilités sur un univers fini

1. Langage des probabilités

1.1. Expériences et événements aléatoires

a) Univers des possibles : une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue ne peut pas être prédite avec certitude. L'ensemble Ω des résultats possibles de cette expérience est appelé **univers** (des possibles).
Chaque élément $\omega \in \Omega$ est appelé **éventualité**.

b) Evénements : tout sous-ensemble $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est appelé **événement**.
Il peut être ou non réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire.

- $\varnothing$ est **l'événement impossible** et Ω est **l'événement certain.**
- Si $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé **événement élémentaire.**
- Si $A \subset \Omega$ est un événement, l'événement $\overline{A} = \complement_{\Omega} A$ est appelé **événement contraire** de A.
- Si $(A, B) \subset \Omega^2$, $A \cup B$ est l'événement "A ou B" et $A \cap B$ est l'événement "A et B".
- On dit que A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$. Ils ne peuvent être réalisés simultanément.

Remarque : $A \subset B$ signifie que la réalisation de A entraine celle de B.

- Un **système complet d'événements** est une **partition** $(A_i)_{i \in I}$ de Ω, où I un ensemble fini. Cela signifie :

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in I^2 \text{ distincts, } A_i \cap A_j = \varnothing$$

Exemple : on lance un dé deux fois successives. L'univers des possibles est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

$(2, 2)$ est une éventualité, $\{(2, 2)\}$ un événement élémentaire.

Soit A l'événement "la somme des deux tirages est supérieure ou égale à 10. Alors

$$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

L'événement B : "1 est sorti au moins une fois" est incompatible avec A.

Si $i \in [\![1, 6]\!]$ et si A_i est l'événement "le premier tirage est i", alors $(A_i)_{i \in [\![1,6]\!]}$ est un "SCE".

1.2. Espaces probabilisés finis

a) Définitions : soit Ω un univers fini non vide.
On appelle **probabilité** sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant (axiomes de Kolmogorov) :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(ii) Si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

- Pour tout événement $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ est appelé **probabilité de** A.
- Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé fini**.
- On appelle **événement négligeable** tout événement de probabilité nulle

b) **Propriétés élémentaires :** on se donne un espace probabilisé fini.$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors

(i) Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\boxed{\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)}$. En particulier $\boxed{\mathbb{P}(\varnothing) = 0}$

(ii) Si A et B sont deux événements, alors

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ \mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ 2.\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ 3.\ A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \end{array}}$$

(iii) Formule d'additivité finie : si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}$$

En particulier, si $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ et $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$, alors $\underline{p_1 = \cdots + p_n = 1}$

c) **Caractérisation d'une probabilité sur Ω fini :** inversement soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ un ensemble fini

Si $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$$

Autrement dit, la donnée des probabilités élémentaires détermine toute la loi de probabilité.

d) **Probabilité uniforme ou équiprobabilité :** soit Ω un ensemble fini de cardinal n. La loi donnée par

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$$

définit bien une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ pour laquelle tous les événements élémentaires ont même probabilité (on dit qu'ils sont **équiprobables**). Cette probabilité est appelée **probabilité uniforme**, et tout événement A admet alors pour probabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

Autrement dit $\mathbb{P}(A)$ est le quotient du "nombre de cas favorables" par le "nombre de cas possibles"

Exemples : c'est le cas pour tout tirage aléatoire dans un ensemble fini, le jet d'une pièce ou d'un dé, et énormément d'autres situations courantes...

2. Probabilités conditionnelles

On se donne dans tout le paragraphe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

2.1. "Probabilité de A sachant B"

a) **Définition :** soit B un événement non négligeable $(\mathbb{P}(B) > 0)$.

Si A est un événement, on appelle **probabilité de A sachant B** le réel

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

On a alors la proposition suivante : $\boxed{\mathbb{P}_B : A \to \mathbb{P}_B(A) \text{ est une probabilité sur } \Omega}$

En particulier, toutes les propriétés vues plus haut sont vraies pour $\mathbb{P}_B$

Remarque 1 : on a donc $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)}$

Remarque 2 : si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme (Ω fini), alors (réduction des cas possibles)

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}}$$

Exemple : on jette deux fois un dé. Soit A l'événement "la somme des deux lancers vaut 10".
Quelle est la probabilité de A sachant que le premier dé a donné un 3? qu'il a donné un 6?

b) Formule des probabilités composées : (généralise la remarque 1)

On suppose que $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Utilité : pour les répétitions

Exemple : une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules.
Quelle est la probabilité pour que les deux premières soient blanches et la troisième noire?

c) Formule des probabilités totales :

(i) Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements non négligeables, alors pour tout événement B :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

(ii) Autrement dit on a la formule :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(B|A_n)\,\mathbb{P}(A_n)}$$

Utilité : pour les disjonctions de cas

Exemple : on dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires : la première contient 3 noires et 2 blanches, la deuxième 4 noires et 6 blanches et la troisième 1 noire et 4 blanches.
On choisit aléatoirement une urne dans laquelle on tire une boule.
Quelle est la probabilité pour que celle-ci soit blanche?

d) Formule de Bayes[1] :

(i) Inversion des conditionnements : si A et B sont non négligeables, alors

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$$

(ii) Généralisation : soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements non négligeables.
Alors pour tout événement B et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j) \times \mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}}$$

Utilité : inversion des causes des conséquences.

Exemple : un sac contient 10 pièces indiscernables au toucher, mais dont une est truquée. Elle tombe sur "face" avec une probabilité de $\frac{3}{4}$. On tire au hasard une pièce et on la lance n fois de suite. On obtient n fois "face".
Quelle est la probabilité p_n pour que la pièce tirée soit truquée? Que vaut $\lim p_n$? Interpréter.

[1] Révérend Thomas Bayes, mathématicien-pasteur britannique, 1702-1761

2.2. Indépendance en probabilité

a) **Evénements indépendants :** les événements A et B sont dits indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Ce qui revient à dire, si A et B sont non négligeables, que

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)}$$

Exemple 1 : on tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. les événements "tirer une dame" et "tirer un coeur" sont indépendants.

Exemple 2 : on lance deux fois successives un dé. Les événements "le premier lancer donne un six" et "le second lancer donne un six" sont indépendants

Remarque : si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi, de même que A et $\overline{B}$et $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

b) **Familles d'événements indépendants :** soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements.
On dit que les événements A_i sont **mutuellements indépendants** lorsque

$$\boxed{\forall J \subset I, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

Par exemple A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants signifie

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \end{cases} \quad \textbf{ET} \quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

Attention : si les A_i sont **deux à deux** indépendants, ils ne le sont pas forcément **mutuellement**

Dans un énoncé, l'expression "événements indépendants" sous-entendra "mutuellement indépendants"

Exemple : on lance n fois un dé. les événements A_k : "le k-ième lancer donne un six" sont mutuellement indépendants

Contre exemple : on lance deux fois successives un dé. Les événements A_1 : "le premier lancer donne un nombre pair", A_2 : "le second lancer donne un nombre pair" et A_3 : "la somme des deux lancers est paire" sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants

Remarque : si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, et $(B_1, \ldots, B_n)$ une famille d'événements vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \ B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$, alors $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants