Ex 1 Calculs élémentaires :

a) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ n'est définie que pour $x \geqslant 0$. On peut reconnaitre une forme $u'\sqrt{u}$ ou bien poser

$$\begin{cases} t = \arctan x \geqslant 0 \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \end{cases} \qquad (\arctan \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+))$$

Alors $\forall x \geqslant 0$,

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2} + C$$

Ainsi, $\forall x \geqslant 0$,

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\arctan x\sqrt{\arctan x} + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$

b) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ pour $x > 0$. On peut reconnaitre une forme $u'u^2$ ou poser

$$\begin{cases} t = 1 + \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \end{cases}, \ (x \mapsto 1 + \sqrt{x} \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

Alors $\forall x > 0$,

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 + C$$

$$\boxed{\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$

c) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ pour $x > 0$. On développe et on utilise les exposants fractionnaires : $\forall x > 0$,

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int \left(x^{2/3} - 2x^{1/6} + x^{1/3}\right)\mathrm{d}x = \frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{12x^{7/6}}{7} + \frac{3x^{2/3}}{2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$

d) $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$, définie sur $\mathbb{R}$. On peut reconnaitre une forme $\dfrac{u'}{u^2}$ ou poser

$$\begin{cases} t = x^4 \\ \mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x \end{cases}, \ (x \mapsto x^4 \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R})$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + C$$

$$\boxed{\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^4} + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$

e) $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, définie sur $\mathbb{R}$. On peut reconnaitre une forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ ou poser

$$\begin{cases} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{cases}, \ (x \mapsto x^2 \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R})$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan(t) + C$$

$$\boxed{\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right) + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$

f) $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}\,\mathrm{d}x =$ définie sur $\mathbb{R}$. On peut reconnaitre une forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ ou poser

$$\left\{\begin{array}{l} t = 2^x \\ \mathrm{d}t = \ln(2)\, 2^x \mathrm{d}x \end{array}\right., \; (x \mapsto 2^x \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R})$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 2}\arctan(t) + C$$

$$\boxed{\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\arctan(2^x) + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Ex 2 Soit $K = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt[3]{1+\operatorname{ch}(x)}}\mathrm{d}x$. On peut reconnaitre la forme $\dfrac{u'}{u^{1/3}}$, ou poser le changement

$$\left\{\begin{array}{l} y = 1 + \operatorname{ch} x \\ \mathrm{d}y = \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \quad (x \mapsto 1 + \operatorname{ch} x \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, \ln 2])$$

Ainsi

$$K = \int_2^{1+\operatorname{ch}(\ln 2)} \frac{\mathrm{d}y}{y^{1/3}} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{y^{-2/3}}\right]_2^{1+5/4} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{2/3} - 2^{2/3}\right) = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} - 4^{1/3}\right)$$

Finalement

$$\boxed{K = \frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}}$$

Ex 3 Utilisation des fonctions complexes :

a) Soit $F(x) = \int (x^3-1)\cos x\,\mathrm{d}x = \int (x^3-1)\operatorname{Re}(e^{ix})\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int (x^3-1)\,e^{ix}\mathrm{d}x$. On sait :

$$\exists (a,b,c,d,C) \in \mathbb{C}^4 \;/\; \forall x \in \mathbb{R}, \; \int (x^3-1)\,e^{ix}\mathrm{d}x = (ax^3+bx^2+cx+d)\,e^{ix} + C$$

On calcule la dérivée de $x \mapsto (ax^3+bx^2+cxd)\,e^{ix}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\; \frac{d}{dx}\left[(ax^3+bx^2+cx+d)\,e^{ix}\right] = \left(i\,(ax^3+bx^2+cx+d) + 3ax^2+2bx+c\right)e^{ix}$$

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\; (x^3-1)\,e^{ix} = \left(iax^3 + (3a-ib)\,x^2 + (2b-ic) + (c-id)\right)e^{ix}$$

Ou encore $(e^{ix} \neq 0)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\; x^3 - 1 = iax^3 + (3a-ib)\,x^2 + (2b-ic) + (c-id)$$

On identifie les coefficients des polynômes :

$$\left\{\begin{array}{l} ia = 1 \\ 3a - ib = 0 \\ 2b - ic = 0 \\ c - id = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = -i \\ b = (-3i)/i = -3 \\ c = -6/i = 6i \\ d = (6i+1)/i = 6 - i \end{array}\right.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int (x^3-1)\,e^{ix}\mathrm{d}x &= (-ix^3 - 3x^2 + 6ix + 6 - i)\,e^{ix} + C \\ &= \left((6-3x^2) + i\,(-1+6x-x^3)\right)(\cos x + i\sin x) + C \end{aligned}$$

Il vient

$$F(x) = \operatorname{Re}\left[\left((6-3x^2) + i\,(-1+6x-x^3)\right)(\cos x + i\sin x)\right] + C$$

Soit

$$\boxed{F(x) = (6-3x^2)\cos x + (1-6x+x^3)\sin x + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

b) De la même manière $\displaystyle\int \left(x^2+1\right)e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2+1\right)\mathrm{Re}\,e^{(1+i)x}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int \left(x^2+1\right)e^{(1+i)x}\mathrm{d}x.$

Cherchons cette primitive complexe sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int \left(x^2+1\right)e^{(1+i)x}\mathrm{d}x = \left(ax^2+bx+c\right)e^{(1+i)x}+C,\quad (a,b,c,C)\in\mathbb{C}^4$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)e^{(1+i)x} = \left(x^2+1\right)e^{(1+i)x}$ s'écrit

$$\left[(1+i)\left(ax^2+bx+c\right)+(2ax+b)\right]e^{(1+i)x} = \left(x^2+1\right)e^{(1+i)x}$$

Soit puisque $e^{(1+i)x}\neq 0$:

$$\left((1+i)\,ax^2+(2a+(1+i)\,b)\,x+(b+(1+i)\,c)\right) = x^2+1$$

Par identification des coefficients polynomiaux :

$$\begin{cases}(1+i)\,a=1\\ 2a+(1+i)\,b=0\\ b+(1+i)\,c=1\end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}(1-i)\\ b=-\dfrac{1-i}{1+i}=i\\ c=\dfrac{1-i}{1+i}=-i\end{cases}$$

On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int \left(x^2+1\right)e^{(1+i)x}\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}(1-i)\,x^2+ix-i\right)e^{(1+i)x}+C\\ &= \frac{1}{2}e^x\left(x^2-i\left(x^2-2x+2\right)\right)(\cos x+i\sin x)+C\end{aligned}$$

On extrait la partie réelle :

$$\boxed{\int \left(x^2+1\right)e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}e^x\left(x^2\cos x+\left(x^2-2x+2\right)\sin x\right)+C},\quad C\in\mathbb{R}$$

Ex 4 Primitive complexe : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-j} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \int\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x+i\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+i\arctan\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-j} = \ln\sqrt{x^2+x+1}+i\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C}\quad (C\in\mathbb{C})$$

Ex 5 Fractions rationnelles :

a) $F(x) = \displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ est définie pour tout x car le trinôme a un discriminant strictement négatif.

On fait apparaitre la dérivée $2x-2=2(x-1)$ du dénominateur au numérateur : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int\frac{x-1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right)+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+9}\\ &= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right)+\frac{2}{3}\arctan\frac{x-1}{3}+C}\quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

b) $G(x) = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ n'est définie que pour x dans un intervalle I ne contenant pas les racines 1 et 2 du trinôme. Alors, on vérifie :

$$\forall x \in I,\ \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}$$

D'où

$$\boxed{G(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-3| + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

c) $H(x) = \displaystyle\int \frac{1-x}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$ n'est définie que pour x dans un intervalle I ne contenant pas la racine double 2 du trinôme. Alors $\forall x \in I$,

$$H(x) = \int \frac{1-x}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2-x}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$$

Ainsi

$$\boxed{H(x) = -\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Ex 6 Extension des méthodes précédentes :

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x$: le trinôme $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$ s'annule en -1 et en -3, donc la primitive n'existe que sur $]-\infty,-3[$ ou sur $]-1,+\infty[$.

Pour x dans un de ces intervalles, on a alors, en faisant apparaitre la dérivée $2x+4 = 2(x+2)$ au numérateur :

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)^2-1}} \\ &= \sqrt{x^2+4x+3} - 2\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right| + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+4x+3} - 2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right| + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. Le trinôme $-x^2+2x+8 = -(x+2)(x-4)$ s'annule en -2 et 4, donc cette primitive n'existe pour $x \in]-2,4[$, et alors

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-1+2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$$

Il vient

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right) + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Ex 7 Intégrations par parties :

a) $\displaystyle\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ pour $x > -1$. On pose

$$\left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto 1 \\ v : x \mapsto \ln(x+1) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto \boxed{x+1} \\ v' : x \mapsto \frac{1}{x+1} \end{array}\right. : (u,v) \in C^1\left(]-1,+\infty[\right)^2$$

Alors par intégration par parties

$$\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1) - \int \mathrm{d}x = \boxed{(x+1)\ln(x+1) - x + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Soit $I = \displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.On pose

$$\left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto 1 \\ v : x \mapsto \ln^2(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto x \\ v' : x \mapsto \frac{2\ln x}{x} \end{array}\right. : (u,v) \in C^1([1,2])$$

Alors par intégration par parties

$$I = \left[x\ln^2 x\right]_1^2 - 2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 2 - 2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$$

On pose encore

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' : x \mapsto 1 \\ v_1 : x \mapsto \ln x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 : x \mapsto x \\ v_1' : x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}\right. : (u_1,v_1) \in C^1([1,2])^2$$

et par intégration par parties à nouveau :

$$I = 2\ln^2(2) - 2\left(\left[x\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{d}x\right)$$

Finalement

$$\boxed{I = 2\ln^2(2) - 4\ln 2 + 2 = 2(\ln 2 - 1)^2}$$

c) Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int \operatorname{sh} x \sin x\,\mathrm{d}x$. On intègre par parties en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} u' = \operatorname{sh} \\ v = \sin \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{ch} \\ v' = \cos \end{array}\right. : (u,v) \in C^1(\mathbb{R})^2$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \operatorname{ch} x \sin x - \int \operatorname{ch} x \cos x\,\mathrm{d}x$$

On intègre à nouveau par parties, dans le même sens pour ne pas revenir en arrière :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' = \operatorname{ch} \\ v_1 = \cos \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \operatorname{sh} \\ v_1' = -\sin \end{array}\right. : (u_1,v_1) \in C^1(\mathbb{R})^2$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x - \int \operatorname{sh} x \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x - F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x) + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

d) $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$ pour $x>0$. On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2} \\ v : x \mapsto \ln x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto -\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)} \\ v' : x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}\right. : (u,v) \in C^1\left(\mathbb{R}_+^*\right)$$

En intégrant par parties, on a $\forall x>0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\ln x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+x^2-x^2\right)}{x\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \quad \text{\# ruse pour les fractions rationnelles} \\
&= -\frac{\ln x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) + C
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\ln x}{2\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

e) Soit $I = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\mathrm{d}x$. On pose

$$\left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto 1 \\ v : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x-2}{3}\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto \boxed{x-2} \\ v' : x \mapsto \dfrac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}} \end{array}\right. : (u,v) \in C^1\left(\left[\tfrac{1}{2},2\right]\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I &= \left[(x-2)\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]_{1/2}^{2} - \int_{1/2}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \left[\sqrt{9-(x-2)^2}\right]_{1/2}^{2} \quad \text{\# } u'/2\sqrt{u} \\
&= -\frac{\pi}{4} + 3 - \sqrt{9-\frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{4} + 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}}$$

Ex 8 Pour tout $x>0$ calculons $F_\alpha(x) = \displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Si $\alpha \neq -1$, alors on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto x^\alpha \\ v : x \mapsto \ln x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \\ v' : x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}\right. : (u,v) \in C^1\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$$

Alors $\forall x>0$

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1}\ln x - \int x^\alpha \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) + C$$

$$\boxed{F_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Si $\alpha = -1$, alors $\forall x>0$ calculons $F_{-1}(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$, de la forme "$u'u$" :

$$\boxed{F_{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Ex 9 a) Trouvons $a,\ b,\ c$ réels tels que : $\forall x \neq -1,\ \dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}\ \ (*)$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3+1 = (x+1)\left(x^2-x+1\right).$

Avec les méthodes usuelles de décomposition des fractions rationnelles, peu rigoureuses a priori :

* on multiplie $(*)$ par $x+1$ puis on substitue -1 à x : on obtient $a = \frac{1}{3}$.
* En substituant alors 0 à x dans $(*)$, il vient alors $c = \frac{2}{3}$
* Enfin, en multipliant $(*)$ par x et en passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient directement $b = -\frac{1}{3}$

On peut aussi réduire au même dénominateur et "identifier les coefficients". L'essentiel est de trouver, (et de vérifier) que

$$\boxed{\forall x \neq -1,\ \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)}$$

b) Posons $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. On a alors

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\right)\\
&= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{6}\left[\ln\left(x^2-x+1\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4}\\
&= \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\
&= \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Posons alors $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^2}$. Une intégration par parties dans I, avec

$$\left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3} \\ v' : x \mapsto 1 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto \dfrac{-3x^2}{(1+x^3)^2} \\ v : x \mapsto x \end{array}\right. \quad , \quad (u,v) \in C^1([0,1])^2,$$

conduit à

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{x}{1+x^3}\right]_0^1 + 3\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^3)^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2} + 3\int_0^1 \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2} + 3\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} - 3\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^2}\\
&= \frac{1}{2} + 3I - 3J
\end{aligned}$$

D'où

$$J = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 2I\right)$$

et finalement

$$\boxed{J = \frac{1}{6} + \frac{2\ln 2}{9} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}}$$

Ex 10 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Soit $n \geqslant 1$. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} u : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \\ v' : x \mapsto 1 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} u' : x \mapsto \dfrac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ v : x \mapsto x \end{array}\right. \quad , \quad (u,v) \in C^1\left([0,1]\right)^2 ,$$

Alors par intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\left(\int_0^1 \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\right) \quad \#\text{"} +1-1\text{"} \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$\boxed{2nI_{n+1} = \frac{1}{2^n} + (2n-1)\,I_n}$$

D'autre part on a

$$\boxed{I_1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}}$$

Avec $n=1$, la formule précédente donne donc

$$2I_2 = \frac{1}{2} + I_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}}$$

et avec $n=2$

$$4I_3 = \frac{1}{4} + 3I_2 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_3 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}}$$

b) Posons $\left\{\begin{array}{l} x = \tan\theta \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \end{array}\right.$ $\quad (\tan : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to [0,1]$ de classe C^1). De la formule $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ on tire

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\left(1+\tan^2\theta\right)^n}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\pi/4} \cos^{2n}\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$$

Soit

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta}$$

On retrouve alors

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \overset{\text{linéarisation}}{=} \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)$$

Soit

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

et

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} \cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta \overset{\text{linéarisation}}{=} \frac{1}{8}\int_0^{\pi/4} (\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\,\mathrm{d}\theta$$

Soit

$$I_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\left[\sin(4\theta)\right]_0^{\pi/4} + 2\left[\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$$

Ex 11 Soients $I = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{-x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ et $K = \displaystyle\int_0^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x.$

a) On utilise la forme canonique du trinôme :

$$J = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-1)^2}} == \left[\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_0^2$$

$$\boxed{J = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\frac{-1}{2} = \frac{\pi}{3}}$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} K - 4J &= \int_0^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^2 \sqrt{-x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\boxed{K - 4J = -I.}$$

b) Intégrons K par parties, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} u' : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} \\ v : x \mapsto x-1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u : x \mapsto -\sqrt{-x^2+2x+3} \\ v' : x \mapsto 1 \end{array} \right. \qquad (u,v) \in C^1([0,2])$$

D'où

$$K = -\left[(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}\right]_0^2 + \int_0^2 \sqrt{-x^2+2x+3}\mathrm{d}x = -\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) + I.$$

$$\boxed{K = I - 2\sqrt{3}}$$

Les deux questions précédentes donnent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} K + I = 4J = \dfrac{4\pi}{3} \\ K - I = -2\sqrt{3} \end{array} \right. \iff \boxed{\left\{ \begin{array}{l} I = \dfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \\ K = \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \end{array} \right.}$$

Ex 12 Changements de variables.

a) Soit $I=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+\ln t\right)^3}$. "$\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$" nous oriente vers le changement de variable

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+\ln t \\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{array}\right. \quad \left(1+\ln\in C^1\left(\left[e,e^2\right]\right)\right)$$

Alors

$$I=\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_2^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{I=\frac{5}{72}}$$

b) $\displaystyle\int\left(x^2-1\right)^7x\mathrm{d}x$. On pose évidemment $u=x^2,\ \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\int\left(x^2-1\right)^7x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(u-1\right)^7\mathrm{d}u=\frac{1}{16}\left(u-1\right)^8+C$$

Finalement

$$\boxed{\int\left(x^2-1\right)^7x\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\left(x^2-1\right)^8+C}\quad C\in\mathbb{R}$$

c) Soit $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ En posant $t=\sqrt{e^x-1}$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ \mathrm{d}x=\dfrac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}\end{array}\right. ,\ \varphi:t\mapsto\ln\left(1+t^2\right)\text{ de classe } C^1 \text{ de } [0,1] \text{ dans } [0,\ln 2]$$

on a

$$I=2\int_0^1\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2}\overset{"+1-1"}{=}2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=2-2\left[\arctan t\right]_0^1$$

Finalement

$$\boxed{I=2-\frac{\pi}{2}}$$

d) Soit $F:x\mapsto\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\left\{\begin{array}{l} x=t^6 \\ t=x^{1/6}=\sqrt[6]{x} \\ \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t\end{array}\right. \qquad (t\mapsto t^6 \text{ bijection } C^1 \text{ de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans lui même})$$

Alors $\forall x>0$

$$F\left(x\right)=6\int\frac{t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

L'inusable ruse "$+1-1$" donne alors

$$\begin{aligned} F\left(x\right) &= 6\int\frac{t^3+1}{t+1}\,\mathrm{d}t-6\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\ &= 6\int\frac{\left(t+1\right)\left(t^2-t+1\right)}{t+1}\,\mathrm{d}t-6\ln\left(t+1\right) \\ &= 6\int\left(t^2-t+1\right)\mathrm{d}t-6\ln\left(t+1\right) \\ &= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln\left(t+1\right)+C \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{F\left(x\right)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(t+1\right)+C}\quad C\in\mathbb{R}$$

e) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}x}{5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$. On a

$$5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x = 0 \iff \operatorname{th} x = \frac{4}{5} \iff \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{4}{5} \iff e^{2x} = 9 \iff x = \ln 3$$

On calcule F sur un intervalle I ne contenant pas $\ln 3$. On pose $J = \exp(I) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{3\}$ et

$$\begin{cases} t = e^x \in J \\ x = \ln t \\ dx = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \end{cases} \qquad \left(\ln \in C^1(J)\right)$$

Alors pour tout $x \in I$,

$$F(x) = \int \frac{4\mathrm{d}x}{5(e^x - e^{-x}) - 4(e^x + e^{-x})} = 4\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x - 9e^{-x}} = 4\int \frac{1}{t - 9/t}\frac{\mathrm{d}t}{t} = 4\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 9}$$

On sait décomposer la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{2}{3}\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left(\ln|t-3| - \ln|t+3|\right) + C$$

Finalement

$$\boxed{\int \frac{2\mathrm{d}x}{5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x} = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right| + C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

f) Soit $I = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{4 + \sin x}$. On pose

$$\begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \\ x = 2\arctan t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{cases} : \quad \varphi : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ t & \mapsto & 2\arctan t \end{array} \quad \text{est } C^1 \text{ sur } [-1,1]$$

On rappelle qu'alors $\cos t = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin t = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Ainsi

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{-1}^{1} \frac{2\mathrm{d}t}{4 + 4t^2 + 2t} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{t}{2} + 1}$$

En utilisant la forme canonique du trinôme :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{15}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{16}{15}}\left(t + \frac{1}{4}\right)\right)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}}\left[\arctan\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{15}} + \arctan\frac{3}{\sqrt{15}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}}\left(\arctan\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

En se souvenant que pour $x > 0$ on a $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, il vient finalement

$$\boxed{I = \frac{\pi}{\sqrt{15}}}$$

g) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \mathrm{d}x$. Le signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$ donne : F définie sur $]-1,1[$.

i. Première méthode : on pose $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} > 0$, qui revient à

$$(1-x)\, u^2 = (1+x) \Longleftrightarrow \left(1+u^2\right) x = u^2 - 1 \Longleftrightarrow x = \frac{u^2-1}{u^2+1} = 1 - \frac{2}{u^2+1}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_+^* & \to &]-1,1[\\ & u & \mapsto & \dfrac{u^2-1}{u^2+1} \end{array} \text{ est } C^1 \text{ et bijective, et } \mathrm{d}x = \frac{4u}{\left(u^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}u$$

Ainsi $\forall x \in\,]-1,1[$,

$$F(x) = \int \frac{4u^2}{\left(u^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}u = 2 \int u\, \frac{2u}{\left(u^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}u$$

Une intégration par parties avec

$$\left\{ \begin{array}{l} f : u \mapsto u \\ g' : u \mapsto \dfrac{2u}{\left(u^2+1\right)^2} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} f' : u \mapsto 1 \\ v : u \mapsto -\dfrac{1}{u^2+1} \end{array} \right. , \quad (f,g) \in C^1\left(-\mathbb{R}_+^*\right)^2,$$

donne

$$F(x) = -\frac{2u}{u^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = -\frac{2u}{u^2+1} + \arctan u + C$$

En remplaçant et en se souvenant que $\dfrac{2}{u^2+1} = 1-x$, il vient

$$F(x) = -(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C = -\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} + \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

Soit

$$\boxed{F(x) = -\sqrt{1-x^2} + \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

ii. Deuxième méthode : on pose $x = \cos\theta$, $\theta \in\,]0,\pi[$.

La fonction $\cos :]0,\pi[\to]-1,1[$ est C^1 bijective et $\mathrm{d}x = -\sin\theta\, \mathrm{d}\theta$. Donc $\forall x \in\,]-1,1[$,

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & -\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \\ & = & -\displaystyle\int \sqrt{\frac{\left(1+\cos\theta\right)^2}{1-\cos^2\theta}} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \\ & = & -\displaystyle\int \frac{1+\cos\theta}{\left|\sin\theta\right|} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \\ & = & -\displaystyle\int \left(1+\cos\theta\right)\, \mathrm{d}\theta \quad \text{car } \theta \in\,]0,\pi[\Rightarrow \sin\theta > 0 \\ & = & -\theta - \sin\theta + C \end{array}$$

On se souvient de la formule $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, d'où

$$\boxed{F(x) = -\sqrt{1-x^2} - \arccos x + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Remarque : les deux méthodes donnent évidemment des résultats égaux à une constante près (moyennant un peu de trigonométrie...)

h) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}}$ définie sur l'intervalle $I = \left]0, 2\right[$. On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin^2 u, \ u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} \\ \mathrm{d}x = 4\sin u \cos u \,\mathrm{d}u \end{array} \right. \quad : \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \left]0, 2\right[\\ t & \mapsto & 2\sin^2 t \end{array} \quad \text{est } C^1 \text{ bijective}$$

Alors $\forall x \in I$,

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \displaystyle\int \frac{4\sin u \cos u \,\mathrm{d}u}{\sqrt{4\sin^2 u - 4\sin^4 u}} \\ & = & 2\displaystyle\int \frac{\sin u \cos u \,\mathrm{d}u}{\sin u \sqrt{1 - \sin^2 u}} \quad \# \sin u > 0 \\ & = & 2\displaystyle\int \frac{\sin u \cos u \,\mathrm{d}u}{\sin u \cos u} \quad \# 1 - \sin^2 u = \cos^2 u \text{ et } \cos u > 0 \\ & = & 2\displaystyle\int \mathrm{d}u \\ & = & 2u + C \end{array}$$

Finalement

$$\boxed{F(x) = 2\arcsin\sqrt{\tfrac{x}{2}} + C} \quad C \in \mathbb{R}$$

Remarque 1 : on a aussi $x = 1 - \cos(2u)$, donc $\cos(2u) = 1 - x$ et $u = \dfrac{1}{2}\arccos(1 - x)$, donc

$$F(x) = \arccos(1 - x) + C$$

Remarque 2 : sans changement de variable, on pouvait aussi écrire :

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} = \arcsin(x - 1) + C$$

i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x \,\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x}$. Le changement de variable affine $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, donne

$$I_\alpha = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^\alpha y \,\mathrm{d}y}{\cos^\alpha y + \sin^\alpha y} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\alpha y \,\mathrm{d}y}{\sin^\alpha y + \cos^\alpha y}$$

Puisque les variables sont muettes, on put alors écrire

$$2I_\alpha = I_\alpha + I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x \,\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\alpha x \,\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Il vient

$$\boxed{I_\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

Ex 13 Soient $a > 0$ et $b > 0$. et $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$. La fonction à intégrer est π-périodique, donc

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \end{aligned}$$

Le changement $t = \tan x$ n'est toujours pas possible (il le sera en deuxième année). Rusons, en remarquant

$$I = 4 \lim_{a\to\pi/2-} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

Si $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut poser $t = \tan x$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ et $x = \arctan t$ (bijection C^1 de $[0, a]$ dans $[0, \tan a]$) :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} &= \int_0^a \frac{1}{a^2 + b^2\tan^2 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &= \int_0^{\tan a} \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b^2}\int_0^{\tan a} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + (a/b)^2} \\ &= \frac{1}{ab}\left[\arctan\frac{bt}{a}\right]_0^{\tan a} \\ &= \frac{1}{ab}\arctan\frac{b\tan a}{a} \end{aligned}$$

Il suffit de passer à la limite :

$$I = \frac{4}{ab}\lim_{a\to\pi/2-} \arctan\frac{b\tan a}{a}$$

Soit

$$\boxed{I = \frac{2\pi}{ab}}$$