Formule du binôme de Newton

1. Coefficients du binôme

a) <u>Définition</u> : on fixe $n \in \mathbb{N}$.

(i) <u>Si $0 \leqslant k \leqslant n$</u> , on pose $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

(ii) <u>Autre expression</u> : on a $\binom{n}{0} = 1$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}} \quad \text{(il y a } \underline{k \text{ facteurs}}\text{).}$$

Exemple : calculer $\binom{10}{4}$

A savoir :

$$\boxed{\begin{array}{l} \binom{n}{0} = 1 \\ \binom{n}{1} = n \\ \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{array}} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

(iii) <u>Extensions</u> : on pose $\boxed{\binom{n}{-1} = 0}$ (convention pratique) et pour $k > n$, $\boxed{\binom{n}{k} = 0}$ (naturel)

(iv) <u>Triangle de Pascal</u> :

$n\backslash k$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	3	1	0	0	0	0
4	0	1	4	6	4	1	0	0	0
5	0	1	5	10	10	5	1	0	0
6	0	1	6	15	20	15	6	1	0
7	0	1	7	21	35	35	21	7	1

b) <u>Symétrie</u> : $\forall k \in [[0, n]]$, $\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$

En particulier

$$\boxed{\begin{array}{l} \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \qquad (n \geqslant 1) \end{array}} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

c) <u>Propriété fondamentale</u> : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant -1$, $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

d) <u>Conséquence</u> : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [[0, n]]$, $\boxed{\binom{n}{k} \in \mathbb{N}}$

e) **Une formule utile :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},$ $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$

2. Formule du binôme

a) **Formule :** soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$$\boxed{(a+b)^n = \tbinom{n}{n}a^n + \tbinom{n}{n-1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{1}ab^{n-1} + \tbinom{n}{0}b^n}$$

soit

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \tfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n}$$

Remarque : on l'écrit à l'envers. En fait

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemples : $(x+2)^4 =$

$(x-1)^6 =$

b) **Cas particuliers :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{C},$

$$\boxed{(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = x^n + nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \cdots + nx + 1}$$

$$\boxed{(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k = x^n - nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}nx + (-1)^n}$$

Exemples : $(x+1)^3 =$

$(x+1)^4 =$

$(x+1)^5 =$

Application : avec $x = 1$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0}$$