Ex 1 Calculs de limites :

a) On a $\dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(7x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(3x)^2/2}{(7x)^2/2} = \dfrac{9}{49}$, d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(7x)} \text{ existe et vaut } \dfrac{9}{49}}$

b) On a $\dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^2\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2 \times x^2}{x^3} = \dfrac{x}{2}$, d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^2\tan(x)} \text{ existe et vaut } 0}$

c) On a $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2 \times x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$ et par composée de limites

$$\boxed{\lim_{x\to 0} e^{\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}} \text{ existe et vaut } \sqrt{e}}$$

d) On a $\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x\times x}{x^2} = -1$, donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \text{ existe et vaut } -1}$

e) On a $\dfrac{3^x-1}{2^x-1} = \dfrac{e^{x\ln 3}-1}{e^{x\ln 2}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x\ln 3}{x\ln 2} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$, donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{2^x-1} \text{ existe et vaut } \dfrac{\ln 3}{\ln 2}}$

f) On a $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x/2} = 2$, donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1} \text{ existe et vaut } 2}$

g) Calcul de $\lim_{x\to 1} \left(x^2+x-2\right)\tan\dfrac{\pi x}{2}$:
On pose $x = 1+h$. Alors pour x au voisinage de 1, donc h au voisinage de 0 :

$$\left(x^2+x-2\right)\tan\frac{\pi x}{2} = \left((1+h)^2+(1+h)-2\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right) = -\frac{3h+h^2}{\tan\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{3h}{\pi h/2} = -\frac{6}{\pi}$$

Ainsi la limite cherchée existe, et

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \left(x^2+x-2\right)\tan\frac{\pi x}{2} = -\lim_{h\to 0}\frac{3h+h^2}{\tan\left(\frac{\pi h}{2}\right)} = -\frac{6}{\pi}}$$

h) Calcul de $\lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\tan(2x)$:
On pose $x = \frac{\pi}{2}+h$. Alors pour x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, donc h au voisinage de 0 :

$$\tan(x)\tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\tan(\pi+2h) = -\frac{\tan(2h)}{\tan(h)} \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{2h}{h} = -2$$

Ainsi la limite cherchée existe, et

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\tan(2x) = -\lim_{h\to 0}\frac{\tan(2h)}{\tan(h)} = -2}$$

i) Soient a, b réels tels que $ab \neq 0$. Alors comme $\lim_{x\to 0}\cos(ax) = \lim_{x\to 0}\cos(bx) = 1$ et $\ln y \underset{y\to 1}{\sim} y-1$:

$$\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\cos(ax)-1}{\cos(bx)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(ax)^2/2}{(bx)^2/2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \text{ existe et vaut } \frac{a^2}{b^2}}$$

j) Pour calculer $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(2x)-\ln\pi}{\cos x}$, on pose $x=\frac{\pi}{2}+h$. Alors pour x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\ln(2x)-\ln\pi}{\cos x}=\frac{\ln(\pi+2h)-\ln\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}=\frac{\ln\left(1+\frac{2h}{\pi}\right)}{-\sin h}\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{2h/\pi}{h}=-\frac{2}{\pi}$$

Il en résulte que

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(2x)-\ln\pi}{\cos x}=-\frac{2}{\pi}}$$

k) On met en facteur $e^{1/x}$: $x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)=x^2e^{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}-1\right)$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=0$ et $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$, il vient au voisinage de $+\infty$:

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{x^2}{x(x+1)}\underset{x\to+\infty}{\sim}-1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)\text{ existe et vaut }-1}$$

l) Soient $a>0$ et $b>0$. Pour x au voisinage de 0, on a

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\exp\left(\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}\right)$$

Or en posant $f:x\mapsto\ln(a^x+b^x)$, on a

$$\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}f'(0)$$

Mais on a pour tout x

$$f'(x)=\frac{(\ln a)a^x+(\ln b)b^x}{a^x+b^x}\quad\text{donc}\quad f'(0)=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}$$

En composant les limites, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\sqrt{ab}}$$

m) On factorise :

$$\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{1+x/27}-1}{\sqrt[4]{1+x/16}-1}=\frac{3}{2}\frac{(1+x/27)^{1/3}-1}{(1+x/16)^{1/4}-1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3}{2}\frac{\frac{1}{3}\frac{x}{27}}{\frac{1}{4}\frac{x}{16}}=\frac{32}{27}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}\text{ existe et vaut }\frac{32}{27}}$$

n) Pour calculer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$, remarquons que

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=0$$

Comme $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, on en déduit

$$\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\sqrt{4x}\times\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}}=-2$$

Il vient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)=-2}$$

o) On a

$$\frac{\sqrt{e^x}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}=\frac{e^{x/2}-1}{2\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-2}=\frac{1}{2}\frac{e^{x/2}-1}{\left(1+\frac{x}{8}\right)^{1/3}-1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{8}\right)}=6$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x}-1}{\sqrt[3]{x+8}-2}\text{ existe et vaut }6}$$

p) Calcul de $\lim_{x\to e}(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2e}}$. On pose $x=e+h$. Alors pour x au voisinage de e :

$$\begin{aligned}(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2e}} &= \exp\left(\tan\left(\frac{\pi(e+h)}{2e}\right)\ln(\ln(e+h))\right)\\ &= \exp\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2e}\right)\ln(\ln(e+h))\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\ln(\ln(e+h))}{\tan\left(\frac{\pi h}{2e}\right)}\right)\end{aligned}$$

Or, comme $\lim_{h\to 0}\ln(e+h)=1$ et $\ln u\underset{u\to 1}{\sim}u-1$, on en déduit

$$-\frac{\ln(\ln(e+h))}{\tan\left(\frac{\pi h}{2e}\right)}\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{\ln(e+h)-1}{\frac{\pi h}{2e}}=-2e\frac{\ln(e+h)-\ln e}{\pi h}=-2e\frac{\ln(1+h/e)}{\pi h}\underset{h\to 0}{\sim}-2e\frac{h/e}{\pi h}=-\frac{2}{\pi}$$

En composant les limites, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to e}(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2e}}=e^{-2/\pi}}$$

q) On a pour x au voisinage de 0

$$\mathrm{ch}(x)^{1/\sin(x)^2}=\exp\left(\frac{\ln(\mathrm{ch}\,x)}{\sin^2 x}\right)$$

Comme $\lim_{x\to 0}\mathrm{ch}\,x=1$, on peut écrire

$$\frac{\ln(\mathrm{ch}\,x)}{\sin^2 x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$$

Mais (cf ex 3.b))

$$\mathrm{ch}(x)-1=\frac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1}=\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}(x)+1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}\quad\text{d'où}\quad\frac{\ln(\mathrm{ch}\,x)}{\sin^2 x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{2}$$

Par composition, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\mathrm{ch}(x)^{1/\sin(x)^2}=\sqrt{e}}$$

r) Pour calculer $\lim_{x\to 2}(2^x-3)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$, posons $x=2+h$: alors

$$(2^x-3)^{\tan\frac{\pi x}{4}}=\left(4.2^h-3\right)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)}=e^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)\ln\left(4.2^h-3\right)}$$

Or

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)=-\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi h}{4}\right)}\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{4}{\pi h}$$

D'autre part, puisque $\lim_{h\to 0}4.2^h-3=1$,

$$\ln\left(4.2^h-3\right)\underset{h\to 0}{\sim}4.2^h-3-1=4\left(2^h-1\right)=4\left(e^{h\ln 2}-1\right)\underset{h\to 0}{\sim}4h\ln 2$$

Ainsi

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)\ln\left(4.2^h-3\right)\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{16\ln 2}{\pi},\quad i.e.\quad\lim_{h\to 0}\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)\ln\left(4.2^h-3\right)=-\frac{16\ln 2}{\pi}$$

Par composition de limites,

$$\boxed{\lim_{x\to 2}(2^x-3)^{\tan\frac{\pi x}{4}}=e^{-\frac{16\ln 2}{\pi}}=2^{-\frac{16}{\pi}}}$$

s) Pour calculer $\lim_{x\to\pi}(2+\cos(x))^{\operatorname{cotan}(x)^2}$, on pose $x=\pi+h$. Pour x au voisinage de π,

$$(2+\cos(x))^{\operatorname{cotan}(x)^2}=\exp\left(\operatorname{cotan}^2(\pi+h)\ln(2+\cos(\pi+h))\right)=\exp\left(\frac{\ln(2-\cos h)}{\tan^2 h}\right)$$

Comme $\lim_{h\to 0}(2-\cos h)=1$, on peut écrire

$$\frac{\ln(2-\cos h)}{\tan^2 h}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{1-\cos h}{h^2}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{h^2/2}{h^2}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, par composition de limites, on a

$$\boxed{\lim_{x\to\pi}(2+\cos(x))^{\operatorname{cotan}(x)^2}=\sqrt{e}}$$

t) On a pour tout réel x

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x=\exp\left(x\ln\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)$$

Posons $u=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\underset{x\to+\infty}{\to}1$. Or $\ln u\underset{u\to 1}{\sim}u-1$. On en déduit

$$x\left(\ln\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}-1\right)=\frac{3x^2-4x}{x^2-x+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}3$$

Il vient $\lim_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}=3$ et en composant les limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x=e^3}$$

Ex 2 Encore des limites :

a) Calculons $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x-x^2}{x\left(\sqrt{x+1}-\cos x\right)}$: on a déjà :

$$\sqrt{x+1}-\cos x=\left(\sqrt{x+1}-1\right)+(1-\cos x)$$

Comme

$$\sqrt{x+1}-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{2},\quad 1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}\quad\text{et}\quad\frac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{\ll}\frac{x}{2}$$

on en déduit que

$$1-\cos x\underset{x\to 0}{\ll}\sqrt{x+1}-1\quad\text{donc}\quad\sqrt{x+1}-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\sqrt{x+1}-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{2}$$

Par ailleurs

$$\ln\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\cos x-1\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}\quad\text{car }\lim_{x\to 0}\cos x=1\text{ et }\ln u\underset{u\to 1}{\sim}u-1$$

On en déduit que

$$\ln\cos x-x^2\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{3x^2}{2}$$

En effet le quotient

$$\frac{\ln\cos x-x^2}{x^2}=\frac{\ln\cos x}{x^2}-1\quad\text{tend vers }-\frac{3}{2}\text{ en }0$$

Ainsi, par produit et quotient

$$\frac{\ln\cos x-x^2}{x\left(\sqrt{x+1}-\cos x\right)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-3x^2/2}{x^2/2}=-3$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x-x^2}{x\left(\sqrt{x+1}-\cos x\right)}=-3}$$

Autre méthode : on utilise des techniques de développements limités (avec des "o") :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\cos x - x^2}{x\left(\sqrt{x+1}-\cos x\right)} &= \frac{\left(-x^2/2+o\left(x^2\right)\right)-x^2}{x\left(\left(\sqrt{x+1}-1\right)+(1-\cos x)\right)} \\
&= \frac{-3x^2/2+o\left(x^2\right)}{x\left(\left(x/2+o\left(x\right)\right)+\left(x^2/2+o\left(x^2\right)\right)\right)} \\
&= \frac{-3x^2/2+o\left(x^2\right)}{x^2/2+o\left(x^2\right)+x^3/2+o\left(x^3\right)} \\
&= \frac{-3x^2/2+o\left(x^2\right)}{x^2/2+o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{\sim} -3 \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

b) On a au voisinage de 0^+ :

$$\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x}+\ln(x)-\ln(x+1)$$

Or on sait que $\ln x \underset{x\to 0}{\ll} \dfrac{1}{x}$, et comme $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)=0,\ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\ll} \dfrac{1}{x}$. Ainsi

$$\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x+1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x+1}\right)=+\infty}$$

c) On cherche $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$

* Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, on peut écrire au voisinage de 0 :

$$x^x-1 = e^{x\ln x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$$

* De même $\sin(x)^x - 1 = e^{x\ln(\sin x)}-1$. Or comme $\lim\limits_{x\to 0}\sin x \neq 1$, on peut composer avec $\ln$:

$$x\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\ln x) = 0$, et

$$\sin(x)^x-1 = e^{x\ln(\sin x)}-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\sin(\ln x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$$

Par quotient, il vient

$$\frac{\sin(x)^x-1}{x^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)^x-1}{x^x-1})\text{ existe et vaut } 1}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)\right]^{1/n}-x\right)$: en mettant x en facteur, on a au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right]^{1/n}-x &= x\left(x^{-1}\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)\right)-1\right)\\
&= x\left(\exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(x+k)\right)-\ln x\right)-1\right)\\
&= x\left(\exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(x+k)-n\ln x\right)\right)-1\right)\\
&= x\left(\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(x+k)-\ln x)\right)-1\right)\\
&= x\left(\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right)-1\right)
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)=0$, et $e^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$, donc

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right]^{1/n}-x\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)$$

Mais $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\times\frac{k}{x}=k$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)=k$. Par somme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\left[\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right]^{1/n}-x\right)=\frac{n+1}{2}}$$

Ex 3 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n=\sin\left(2\sqrt{n^2+1}\pi\right)$. On "enlève n tours" : pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(2\sqrt{n^2+1}\pi-2n\pi\right)\\
&= \sin\left(2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\right)
\end{aligned}$$

Or

$$2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim 2n\pi\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{\pi}{n}$$

Il s'ensuite que $\lim\left(2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\right)=0$ et qu'on peut donc écrire (puisque $\sin u\underset{u\to0}{\sim}u$) :

$$u_n\sim 2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim\frac{\pi}{n}$$

Finalement $\boxed{(u_n)\text{ converge vers } 0}$.

Ex 4 Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite de terme général : $u_n = \dfrac{1}{2i}\left(\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n - \left(1-\dfrac{ix}{n}\right)^n\right)$.

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n - \overline{\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n\right)$$

Etudions donc $z_n = \left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n$. En écartant le cas évident où $x=0$, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$|z_n| = \sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}^{\,n} = \left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$$

Or

$$\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}\times\frac{x^2}{n^2} = \frac{x^2}{2n}$$

D'où

$$\lim \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim |z_n| = 1$$

Par ailleurs, l'argument principal de $1+\dfrac{ix}{n}$ est $\arctan\dfrac{x}{n}$ puisque $\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{ix}{n}\right) > 0$ (et l'argument est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$). Ainsi un argument de z_n est

$$\theta_n = n\arctan\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{x}{n} = x \quad \text{donc} \quad \lim\theta_n = x$$

Mais alors

$$u_n = \mathrm{Im}\left(|z_n|\,e^{i\theta_n}\right) = |z_n|\sin\theta_n$$

Par composée et produit, on conclut :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \sin x}$$

Qui reste évidemment vrai pour $x=0$.

Ex 5 Equivalents au voisinage de 0 :

a) $\dfrac{5^x-1}{\sin x} = \dfrac{e^{x\ln 5}-1}{\sin x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x\ln 5}{x} = \boxed{\ln 5}$

b) $\mathrm{ch}\,(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{ch}^2\,(x)-1}{\mathrm{ch}\,(x)+1} = \dfrac{\mathrm{sh}^2\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)+1} \underset{x\to0}{\sim} \boxed{\dfrac{x^2}{2}}$

c) Comme $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$, on a $\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} \boxed{-\dfrac{x^2}{2}}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}} \underset{x\to0}{\sim} \sqrt[5]{\dfrac{x^2/2}{x}} = \boxed{\sqrt[5]{\dfrac{x}{2}} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/5}}$

e) En factorisant : $\tan x - \sin x = \tan x\,(1-\cos x) \underset{x\to0}{\sim} x\times\dfrac{x^2}{2} = \boxed{\dfrac{x^3}{3}}$

f) Comme $x \underset{x\to0}{\ll} \sqrt{x}$, on a $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} \sqrt[4]{\sqrt{x}} = \boxed{\sqrt[8]{x} = x^{1/8}}$

g) Comme $1-\cos x \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, on a $x^3 \underset{x\to0}{\ll} 1-\cos x$. Il s'ensuit :

$$\frac{x^3+1-\cos(x)}{(x^2-2x)\tan(3x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1-\cos(x)}{-2x\tan(3x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2/2}{-6x^2} = \boxed{-\frac{1}{12}}$$

h) Au voisinage de 0 :

$$(\tan(x))^3\left((\cos(x))^{x^2}-1\right)=(\tan(x))^3\left(e^{x^2\ln\cos(x)}-1\right)\underset{x\to 0}{\sim}x^3\left(x^2\ln\cos(x)\right)=x^5\ln\cos(x)$$

puisque $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln\cos x=0$ et $e^u-1\underset{u\to 0}{\sim}u$. Or

$$\ln\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\cos x-1\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$$

Donc

$$\boxed{(\tan(x))^3\left((\cos(x))^{x^2}-1\right)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^7}{2}}$$

Ex 6 a) <u>Equivalent de $\tan x$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$</u> : on pose $x=\frac{\pi}{2}+h$. Alors

$$\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=-\frac{1}{\tan h}\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{1}{h}$$

Il en résulte

$$\boxed{\tan x\underset{x\to\pi/2}{\sim}-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-1}}$$

b) <u>Equivalent de $e^{\sin x}-e$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$</u> : on pose $x=\frac{\pi}{2}+h$. Alors

$$e^{\sin x}-e=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}-e=e^{\cos h}-e=e\left(e^{\cos(h)-1}-1\right)\underset{h\to 0}{\sim}e\times(\cos(h)-1)\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{eh^2}{2}$$

puisque $\lim\limits_{h\to 0}(\cos(h)-1)=0$. Ainsi

$$\boxed{e^{\sin x}-e\underset{x\to\pi/2}{\sim}-\frac{e}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Ex 7 Soit $a\in\mathbb{R}$. Equivalent de $\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ au voisinage de 1. On pose $x=1+h$:

$$\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\left(4+a+(2+a)h+h^2\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)=-\frac{4+a+(2+a)h+h^2}{\tan\frac{\pi h}{2}}$$

– <u>Si $a\neq -4$</u>, alors

$$-\frac{4+a+(2+a)h+h^2}{\tan\frac{\pi h}{2}}\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{4+a}{\frac{\pi h}{2}}=-\frac{8+2a}{\pi h}$$

D'où

$$\boxed{\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\underset{x\to 1}{\sim}-\frac{8+2a}{\pi(x-1)}}$$

– <u>Si $a=-4$</u>, alors

$$-\frac{4+a+(2+a)h+h^2}{\tan\frac{\pi h}{2}}=-\frac{-2h+h^2}{\tan\frac{\pi h}{2}}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{2h}{\frac{\pi h}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

D'où

$$\boxed{\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{4}{\pi}}$$

Ex 8 <u>Equivalent en 1 de $\arccos$</u> : on connait la formule : $\forall x\in[-1,1],\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.
Or $\lim\limits_{x\to 1}\arccos x=0$, donc $\sin(\arccos x)\underset{x\to 1}{\sim}\arccos x$, soit $\arccos x\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{1-x^2}$. Mais

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

Finalement, on a l'équivalent simple :

$$\boxed{\arccos x\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$$

Ex 9 Equivalents au voisinage de $+\infty$

a) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$: on a $\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, et on peut ajouter ici les équivalents

$$x+\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$$

(pour s'en convaincre, considérer le quotient). Mais la limite de cette dernière expression n'est pas égale à 1, donc on peut composer avec le logarithme :

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(2x) = \ln x + \ln 2$$

Finalement

$$\boxed{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x}$$

b) De $y \underset{y\to+\infty}{\ll} y^2$ et $y^{1/3} \underset{y\to+\infty}{\ll} y^{1/2}$ on tire $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} \ln(x)^2$ et $\sqrt[3]{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\ll} \sqrt{\ln(x)}$, donc

$$\frac{\ln(x)+\ln(x)^2}{\sqrt{\ln(x)}+\sqrt[3]{\ln(x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)^2}{\sqrt{\ln(x)}} = \boxed{\ln(x)^{3/2}}$$

c) Au voisinage de $+\infty$, on a

$$e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-1\right)$$

or $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc

$$e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Comme $\sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$, on peut ici ajouter les équivalents : ainsi

$$\boxed{e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$$

d) Au voisinage de $+\infty$, on a

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x+1)}{x+1}} - e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{\ln x}{x}}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{\ln x}{x}\right)$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{\ln x}{x} = 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$. Ainsi, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$,

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x+1)-(x+1)\ln x}{x(x+1)} = \frac{x\ln\frac{x+1}{x}-\ln x}{x(x+1)}$$

Mais

$$x\ln\frac{x+1}{x} = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \underset{x\to+\infty}{\ll} \ln x$$

Ainsi

$$\boxed{(x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln x}{x^2}}$$

Ex 10 Equivalents au voisinage de 0 et de $+\infty$

a) $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x}+x^2}$.

* $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

* $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} = x}$

b) $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

* $x + \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$. Mais alors

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim} = x^{1/4}$$

Finalement

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x^{1/4}} = x^{1/8}}$$

* $x + \sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ donc $\sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x}$. Mais alors $x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ donc

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x}}$$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

* Au voisinage de 0, $\ln(x+1) \underset{x \to 0}{\ll} 1 \underset{x \to 0}{\ll} \ln x$, donc $\ln(x+1) - \ln(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$.

De même $\sqrt{x} \underset{x \to 0}{\ll} 1 \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x+1}$, donc $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x+1} \underset{x \to 0}{\sim} 1$

Par quotient il vient

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln x}$$

* Au voisinage de $+\infty$, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

De plus $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (cf quotient). Il en résulte :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}}$$

d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x + x + \ln(|x|)}{x + \sqrt{|x|}}$

* Au voisinage de $+\infty$, on a $e^x + x + \ln(|x|) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x$ et $x + \sqrt{|x|} \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, donc

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}}$$

* Au voisinage de $-\infty$ on a $e^x + x + \ln(|x|) \underset{x \to -\infty}{\sim} x$ (puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$), et $x + \sqrt{|x|} \underset{x \to -\infty}{\sim} x$, donc

$$\boxed{f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} 1}$$

* Au voisinage de 0, $e^x + x + \ln(|x|) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(|x|)$ et $x + \sqrt{|x|} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{|x|}$, donc

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\ln(|x|)}{\sqrt{|x|}}}$$

e) On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto \dfrac{1 + x^\alpha}{x^\beta}$.

* Au voisinage de 0 :

  · Si $\alpha > 0$, alors $1 + x^\alpha \underset{x \to 0}{\sim} 1$ donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta} = x^{-\beta}}$

  · Si $\alpha < 0$, alors $1 + x^\alpha \underset{x \to 0}{\sim} x^\alpha$, donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^{\alpha - \beta}}$

  · Si $\alpha = 0$, alors $1 + x^\alpha = 2$, donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^\beta}}$

* <u>Au voisinage de $+\infty$</u> :

  · <u>Si $\alpha < 0$</u>, alors $1 + x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta} = x^{-\beta}}$

  · <u>Si $\alpha > 0$</u>, alors $1 + x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\alpha-\beta}}$

  · <u>Si $\alpha = 0$</u>, alors $1 + x^\alpha = 2$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x^\beta}}$

f) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

* <u>Au voisinage de 0</u> :

  · <u>Si $\alpha > 0$</u>, alors $\ln(1 + x^\alpha) \underset{x\to0}{\sim} x^\alpha$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} = x^{\alpha-\beta}}$

  · <u>Si $\alpha < 0$</u>, alors $1 + x^\alpha \underset{x\to0}{\sim} x^\alpha \nrightarrow 1$ donc $\ln(1 + x^\alpha) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$, et $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\alpha \ln x}{x^\beta}}$

  · <u>Si $\alpha = 0$</u>, alors $1 + x^\alpha = 2$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x^\beta}}$

* <u>Au voisinage de $+\infty$</u> :

  · <u>Si $\alpha < 0$</u>, alors $\ln(1 + x^\alpha) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\alpha-\beta}}$

  · <u>Si $\alpha > 0$</u>, alors $1 + x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \nrightarrow 1$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha \ln x}{x^\beta}}$

  · <u>Si $\alpha = 0$</u>, alors $1 + x^\alpha = 2$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x^\beta}}$

Ex 11 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$. On écrit subtilement $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\frac{n(n+1)+1}{n+1}\pi\right) \\ &= \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) \\ &= (-1)^n \sin\frac{\pi}{n+1} \\ &\sim (-1)^n \frac{\pi}{n+1} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{u_n \sim (-1)^n \frac{\pi}{n}}$$

Ex 12 Montrons que $\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$, c'est-à-dire $\lim \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = 1$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}$$

La majoration

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} \leqslant (n-1)\,\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n-1}{n}$$

est insuffisante pour conclure à la limite nulle. Affinons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{1}{n} \\ &\leqslant (n-2)\,\frac{1}{n\,(n-1)} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} - 1 \leqslant \frac{n-2}{n\,(n-1)} + \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes assure alors que $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} - 1 = 0$, d'où notre résultat.

Ex 13 Branches infinies de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2\,(x-3)}$:

- On a $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^3} = x$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique de pente 1 en $\pm\infty$.
- Alors au voisinage de $+\infty$:

  $$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} - 1\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{x}\right)\right) = -1$$

  Il en résulte que $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = -1$ et que

  $$\boxed{D : y = x - 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } \pm\infty}$$

Ex 14 Comparaisons à l'infini des suites 0.5^n, $n^{1/9}$, n^n, $\ln^3 n$, $\frac{1}{n^{15}}$, $n!$, 2^n, e^{2n}, $e^{-n/2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, 1. Le cours assure :

$$0.5^n \ll e^{-n/2} \ll \frac{1}{n^{15}} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll 1 \ll \ln^3 n \ll n^{1/9} \ll 2^n \ll e^{2n} \ll n! \ll n^n$$

En effet $2^n = e^{n\ln 2} \ll e^{2n}$ car $\ln 2 \leqslant 2$ et $0.5^n = e^{-n\ln 2} \ll e^{-n/2}$ car $-\ln 2 \leqslant -\frac{1}{2}$

Ex 15 a) On a au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{x^3(\ln x)^4 e^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^4(\ln x)^3 e^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^5(\ln x)^3 e^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^3(\ln x)^3 3^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2(\ln x)^2 e^{2x}}$$

En effet :

$*$ $\dfrac{x^3(\ln x)^4 e^x}{x^4(\ln x)^3 e^x} = \dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc $x^3(\ln x)^4 e^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^4(\ln x)^3 e^x$.

$*$ $\dfrac{x^4(\ln x)^3 e^x}{x^5(\ln x)^3 e^x} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc $x^4(\ln x)^3 e^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^5(\ln x)^3 e^x$.

$*$ $\dfrac{x^5(\ln x)^3 e^x}{x^3(\ln x)^3 3^x} = x^2e^{(1-\ln 3)x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, puisque $x^2 \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{(\ln 3-1)x}$. Donc $x^5(\ln x)^3 e^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^3(\ln x)^3 3^x$.

$*$ $\dfrac{x^3(\ln x)^3 3^x}{x^2(\ln x)^2 e^{2x}} = x\ln x e^{(\ln 3-2)x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2e^{(\ln 3-2)x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, puisque $x^2 \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{(2-\ln 3)x}$.

Donc $x^3(\ln x)^3 3^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2(\ln x)^2 e^{2x}$, ce qui achève notre preuve.

b) Soient a, b, c, a', b', c' dans $\mathbb{R}_+^*$. Comparons les suites $(\ln n)^a n^b c^n$ et $(\ln n)^{a'} n^{b'} c'^n$: on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(\ln n)^{a'} n^{b'} c'^n}{(\ln n)^a n^b c^n} = (\ln n)^{a'-a} n^{b'-b} e^{n\left(\ln c'-\ln c\right)}$$

$*$ Si $c' < c$, alors $\ln c - \ln c' > 0$, et

$$(\ln n)^{a'-a} n^{b'-b} \ll n \times n^{b'-b} = n^{b'-b+1} \ll e^{n\left(\ln c-\ln c'\right)}$$

Il en résulte

$$\lim\, (\ln n)^{a'-a} n^{b'-b} e^{n\left(\ln c'-\ln c\right)} = 0, \quad \text{soit} \quad (\ln n)^{a'} n^{b'} c'^n \ll (\ln n)^a n^b c^n$$

$*$ Si $c = c'$, alors

- Si $b' < b$, alors $b - b' > 0$ et on a $(\ln n)^{a'-a} \ll n^{b-b'}$ soit $\lim\, (\ln n)^{a'-a} n^{b'-b} = 0$. Ainsi on a encore

$$(\ln n)^{a'} n^{b'} c'^n \ll (\ln n)^a n^b c^n$$

- Si $b' = b$, alors $(\ln n)^{a'-a} n^{b'-b} e^{n\left(\ln c'-\ln c\right)} = (\ln n)^{a'-a}$ qui converge vers 0 si et seulement si $a' < a$.

Par symétrie des rôles de a, b, c et de a', b', c', on obtient ainsi

$$\boxed{(\ln n)^{a'} n^{b'} c'^n \ll (\ln n)^a n^b c^n \iff \begin{cases} c' < c \text{ ou} \\ c' = c \text{ et } b' < b \text{ ou} \\ c' = c,\ b' = b \text{ et } a' < a \end{cases}}$$

Ex 16 Comparaison de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 : le rapport

$$\frac{1/\sqrt{x}}{\ln(x)/x} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

admet évidemment pour limite 0 en 0, donc

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\ll} \frac{\ln(x)}{x}}$$

Ex 17 On a pour tout réel $x > 0$

$$\frac{x^{\ln x}}{x^x} = x^{\ln x - x} = e^{(\ln x - x)\ln x}$$

– <u>Au voisinage de $+\infty$</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = -\infty$ puisque $\ln x \underset{x\to+\infty}{\ll} x$. D'où, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{x^x} = 0$:

$$\boxed{x^{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\ll} x^x}$$

– <u>Au voisinage de 0</u> : $\lim\limits_{x\to0} \ln x - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} (\ln x - x)\ln x = +\infty$. Ainsi par composée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{x^x} = 0$$

soit

$$\boxed{x^x \underset{x\to0}{\ll} x^{\ln(x)}}$$

Ex 18 On a $\ln y \underset{y\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(y)$. En posant $y = \ln x$, comme $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$, on déduit $\boxed{\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(\ln(x))}$.

Alors

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left(\ln(\ln(x)) - \ln x\right)\right)$$

D'après la question précédente,

$$\frac{\ln(\ln(x)) - \ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x}, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\ln(\ln(x)) - \ln x\right) = 0$$

En composant les limites, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = 1}$$

Ex 19 Au voisinage de $+\infty$:

a) $\boxed{(x^x)^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{(x^x)}}$. En effet,

$$\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = x^{x^2 - x^x} = e^{\left(x^2 - e^{x\ln x}\right)\ln x}$$

Mais

$$\forall x \geqslant e,\ 0 \leqslant \frac{x^2}{e^{x\ln x}} \leqslant \frac{x^2}{e^x} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x\ln x}} = 0 \quad (\text{gendarmes et } x^2 \underset{x\to+\infty}{\ll} e^x)$$

On en déduit que

$$\left(x^2 - e^{x\ln x}\right)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^{x\ln x}\ln x$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - e^{x\ln x}\right)\ln x = -\infty$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$, CQFD.

b) $\boxed{\text{Si } 1 < a < b, \text{ alors } b^{(a^x)} \underset{x\to+\infty}{\ll} a^{(b^x)}}$. En effet

$$\frac{b^{(a^x)}}{a^{(b^x)}} = e^{a^x\ln b - b^x\ln a}$$

Or $a^x \underset{x\to+\infty}{\ll} b^x$, donc $a^x\ln b - b^x\ln a \underset{x\to+\infty}{\sim} -b^x\ln a \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$ car $b > 1$ et $\ln a > 0$. En composant,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^{(a^x)}}{a^{(b^x)}} = 0 \text{ CQFD}$$

c) $\boxed{\text{Si } 1 < a, \text{ alors } x^{(x^a)} \underset{x\to+\infty}{\ll} a^{(a^x)}}$. En effet

$$\frac{x^{x^a}}{a^{a^x}} = e^{x^a \ln x - a^x \ln a}$$

Or $x^a \ln x \underset{x\to+\infty}{\ll} a^x$, puisque

$$\frac{x^a \ln x}{a^x} = \frac{x^a \ln x}{e^{x \ln a}} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{x^{a+1}}{e^{x \ln a}} \quad \text{et} \quad x^{a+1} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{x \ln a} \quad (\ln a > 0)$$

Il s'ensuit que $x^a \ln x - a^x \ln a \underset{x\to+\infty}{\sim} -a^x \ln a \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$ car $a > 1$ et $\ln a > 0$. En composant

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^a}}{a^{a^x}} = 0 \text{ CQFD}$$

Ex 20 Soit $f : x \mapsto (2x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - 2$

a) Les équivalents permettent d'écrire

$$(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x \times \left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2$ et par somme $\boxed{\lim_{+\infty} f = 0}$

b) Pour montrer que $\forall t \geqslant 0, \quad t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}$, on peut commencer par encadrer la dérivée :

$$\forall t \geqslant 0, \begin{cases} 1 - t + t^2 - t^3 = \dfrac{1-t^4}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{1+t} \\ 1 - t + t^2 = \dfrac{1+t^3}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$$

Donc

$$\forall t \geqslant 0,\ 1 - t + t^2 - t^3 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + t^2$$

et en intégrant entre 0 et $x \geqslant 0$:

$$\forall x \geqslant 0,\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{CQFD}$$

Soit $x > 0$. En substituant $\dfrac{1}{x} > 0$ à t, on obtient :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$$

On multiplie par $2x+1 \geqslant 0$: en ordonnant par importance décroissante en $+\infty$,

$$2 + \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{4x^4} \leqslant (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant 2 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{3x^3}$$

et ainsi

$$\forall x > 0, \boxed{\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{4x^4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{3x^3}}$$

c) L'intuition nous dicte tout de suite que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}}$$

Pour le montrer, on encadre le quotient : puisque $\dfrac{1}{6x^2} > 0$, on a

$$\forall x > 0,\ 1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} \leqslant \frac{f(x)}{1/6x^2} \leqslant 1 + \frac{2}{x}$$

Le théorème des gendarmes assure alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/6x^2} = 1 \quad \text{CQFD}$$

Ex 21 Pour tout entier $n > 0$, on note f_n la fonction définie pour $x > 0$ par $f_n(x) = 1 + x^2 - 2x^2(n + \ln x)$.

a) Etudions f_n sur $]0, +\infty[$: elle y est dérivable (donc continue) et

$$\forall x > 0,\ f_n'(x) = 2x - 4x(n + \ln x) - 2x^2 \times \frac{1}{x} = -4x(n + \ln x)$$

De plus $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 + (1-2n)x^2 - 2x^2 \ln x, \quad \text{d'où } \lim_{x\to 0} f_n(x) = 1 \\ f_n(x) &= 1 + x^2(1 - 2n - 2\ln x), \quad \text{d'où } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty \end{aligned}$$

On a ainsi le tableau de variations de f_n :

x	0		e^{-n}		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	1	$\nearrow$	$1+e^{-2n}$	$\searrow$	$-\infty$

Il est donc clair que $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0, e^{-n}]$.

De plus f_n (continue sur $]0, +\infty[$) réalise une bijection de $]e^{-n}, +\infty[$ sur $]-\infty, 1 + e^{-2n}[$ qui contient 0, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n > 0$

b) Calcul de $\lim f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1 + \tfrac{1}{n^2} - \tfrac{2}{n^2}(n - \ln n) = 1 + \tfrac{1}{n^2} - \tfrac{2}{n} + \tfrac{2\ln n}{n^2} \text{ : il vient naturellement } \quad \lim f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1$$

$$f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \tfrac{1}{n} - \tfrac{2}{n}\left(n - \ln\sqrt{n}\right) = -1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{\ln n}{n} \text{ : on en déduit } \quad \lim f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -1$$

Conséquence : il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) > 0 \quad \text{et} \quad f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall n \geqslant n_0,\ \exists x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\ /\ f_n(x) = 0$. Mais x n'est autre que x_n par unicité de celui-ci : ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

c) On déduit de cet encadrement : $\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}x_n \leqslant 1$, donc $\sqrt{n}x_n$ est bornée au voisinage de $+\infty$, et

$$\boxed{x_n = O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

De plus

$$\forall n \geqslant n_0, \quad -\frac{1}{2}\ln n \leqslant \ln x_n \leqslant -\ln n \Rightarrow -\frac{\ln n}{2n} \leqslant \frac{\ln x_n}{n} \leqslant -\frac{\ln n}{2n}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim \frac{\ln x_n}{n} = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\ln x_n = o(n)}$$

d) De la définition $f_n(x_n) = 0$, $\quad i.e. \quad 1 + x_n^2(1 - 2n - 2\ln x_n) = 0$, on tire immédiatement

$$x_n^2 = \frac{1}{2n + 2\ln x_n - 1}, \quad \overset{x_n > 0}{\Rightarrow} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{2n + 2\ln x_n - 1}}$$

Or $\ln x_n \ll n$, donc $2\ln(x_n) - 1 \underset{a\to+\infty}{\ll} 2n$: on en déduit $2n + 2\ln(x_n) - 1 \sim 2n$, et par passage à l'exposant $-1/2$:

$$\boxed{x_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}}$$

Comme $\lim \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0 \neq 1$, on sait qu'on peut "passer au logarithme" dans l'équivalence :

$$\ln x_n \sim \ln\frac{1}{\sqrt{2n}} = -\frac{\ln(2n)}{2} = -\frac{\ln n + \ln 2}{2} \sim -\frac{\ln n}{2}$$

ainsi

$$\boxed{\ln x_n \sim -\frac{\ln n}{2}}$$

Remarque : on peut le prouver directement : $\frac{\ln x_n}{\ln\left(1/\sqrt{2n}\right)} = \frac{\ln\left(\sqrt{2n}x_n\right)+\ln\left(1/\sqrt{2n}\right)}{\ln\left(1/\sqrt{2n}\right)} = 1 + \frac{\ln\left(\sqrt{2n}x_n\right)}{\ln\left(1/\sqrt{2n}\right)}$

Comme $\lim \sqrt{2n}x_n = 1$ et $\lim \ln \frac{1}{\sqrt{2n}} = -\infty$, on en déduit $\lim 1 + \frac{\ln\left(\sqrt{2n}x_n\right)}{\ln\left(1/\sqrt{2n}\right)} = 1$

e) On a au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 = (1+x)^{-1/2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{2}$$

donc

$$x_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n+2\ln x_n - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\ln x_n - 1}{2n}}} - 1\right)$$

Or $\lim \frac{2\ln x_n - 1}{n} = 0$ puisque $2\ln x_n - 1 \ll 2n$. On peut alors écrire par changement de variable

$$x_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim -\frac{1}{\sqrt{2n}} \times \frac{2\ln x_n - 1}{4n} \sim -\frac{1}{\sqrt{2n}} \times \frac{2\ln x_n}{4n} \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{\ln n}{4n}$$

Au total

$$\boxed{x_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \frac{\ln n}{4\sqrt{2n}\sqrt{n}}}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{\ln n}{4\sqrt{2n}\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)}$$