PARTIE 1: **généralités**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non trivial. On notera id l'application identité de E et $\mathbb{O}$ l'application nulle.

On considère un endomorphisme f de E vérifiant :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}) \quad (*)$$

1. L'ensemble des endomorphismes de E vérifiant $(*)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, puisque l'endomorphisme nul ne vérifie pas $(*)$!

2. Une homothétie de E est une application de la forme $f = \lambda\,\mathrm{id}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour une telle application, $(*)$ s'écrit

$$\lambda^2\,\mathrm{id}^2 = \frac{1}{2}(\lambda\,\mathrm{id} + \mathrm{id}) \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)\mathrm{id} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{\text{Les seules homothéties vérifiant } (*) \text{ sont id et } -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{id}}$$

(1 et $-\dfrac{1}{2}$ sont les racines de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$)

On supposera désormais que f n'est pas une homothétie.

3. D'après $(*)$, on a

$$2f^2 - f = \mathrm{id} \Rightarrow f \circ (2f - \mathrm{id}) = (2f - \mathrm{id}) \circ f = \mathrm{id}$$

Donc f est inversible, et

$$\boxed{f^{-1} = 2f - \mathrm{id}}$$

4. Démontrons que $E = \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \oplus \ker(f - \mathrm{id})$:

Soit $x \in E$. Cherchons $y \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$ et $z \in \ker(f - \mathrm{id})$ tels que $x = y + z$

– Analyse : supposons les avoir trouvés : alors en appliquant f à $x = y + z$, on obtient par linéarité

$$f(x) = f(y) + f(z) = -\frac{1}{2}y + z \quad \text{puisque} \quad \begin{cases} y \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \Longleftrightarrow f(y) = \frac{1}{2}y \\ z \in \ker(f - \mathrm{id}) \Longleftrightarrow f(z) = z \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = y + z \\ f(x) = -\frac{1}{2}y + z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}(x - f(x)) \\ z = \frac{1}{3}(2f(x) + x) \end{cases}$$

– Synthèse : soient donc $\boxed{\begin{cases} y = \frac{2}{3}(x - f(x)) \\ z = \frac{1}{3}(2f(x) + x) \end{cases}}$

  * On a évidemment $x = y + z$
  * $y \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$: en effet

$$f(y) = \frac{2}{3}\left(f(x) - f^2(x)\right) \overset{(*)}{=} \frac{2}{3}\left(f(x) - \frac{1}{2}(f(x) + x)\right) = \frac{1}{3}(f(x) - x) = -\frac{1}{2}y$$

  * $z \in \ker(f - \mathrm{id})$: en effet

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(2f^2(x) + f(x)\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}(f(x) + x + f(x)) = \frac{1}{3}(2f(x) + x) = z$$

– Conclusion : les espaces proposés sont supplémentaires.

5. On note $p=\dfrac{2}{3}\Big(f+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}\Big)$ et $q=-\dfrac{2}{3}\left(f-\mathrm{id}\right)$

a) Calculons p^2 :

$$p^2=\frac{4}{9}\left(f^2+f+\frac{1}{4}\,\mathrm{id}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\left(f+\mathrm{id}\right)+f+\frac{1}{4}\,\mathrm{id}\right)=\frac{2}{9}\left(3f+\frac{3}{2}\,\mathrm{id}\right)=\frac{2}{3}\left(f+\frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)=p$$

p est donc un projecteur

Par ailleurs, $p+q=\mathrm{id}$, donc $q=\mathrm{id}-p$ est le projecteur associé à p.

De plus, l'espace de projection de p (et direction de q) est $\boxed{\operatorname{Im}p=\ker q=\ker\left(f-\mathrm{id}\right)}$

La direction de p (et espace de projection de q) est $\boxed{\ker p=\operatorname{Im}q=\ker\left(f+\frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)}$

(Rappelons que si $f\in\mathcal{L}\left(E\right)$ et $\lambda\in\mathbb{K}^*$, alors $\quad\operatorname{Im}\left(\lambda f\right)=\operatorname{Im}f\quad$ et $\quad\ker\left(\lambda f\right)=\ker f$)

b) Or, une propriété fondamentale des projecteurs dit que $E=\ker p\oplus\operatorname{Im}p$
On en déduit donc une autre démonstration du résultat de la question 4. :

$$\boxed{E=\ker\left(f+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)\oplus\ker\left(f-\mathrm{id}\right)}$$

c) On a $f=\dfrac{3}{2}p-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}=\dfrac{3}{2}p-\dfrac{1}{2}\left(p+q\right)=p-\dfrac{1}{2}q.$

Comme p et q commutent ($p\circ q=q\circ p=\mathbb{O}$), on peut appliquer la formule du binôme : $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$f^n=\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-k}p^k\circ q^{n-k}$$

Or pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, $p^k\circ q^{n-k}=p\circ q=\mathbb{O}$. Il reste

$$f^n=p^n+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^nq^n$$

soit

$$\boxed{f^n=p+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^nq}$$

Relation qui est évidemment vraie aussi pour $n=0$.

d) Montrons que la relation précédente reste vraie pour $n\in\mathbb{Z}$: pour cela, choisissons $n\in\mathbb{N}$, et posons

$$g=p+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-n}q$$

alors

$$\begin{aligned}g\circ f^n&=\left(p+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-n}q\right)\circ\left(p+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^nq\right)\\&=p^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-n}q\circ p+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^np\circ q+q^2\\&=p+q=\mathrm{id}\end{aligned}$$

On a de même $f^n\circ g=\mathrm{id}$, donc g est l'inverse de f^n. f étant inversible, on a donc

$$f^{-n}=\left(f^n\right)^{-1}=p+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-n}q\quad\text{CQFD.}$$

6. a) Si $\ker\left(f+\frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)=E$, cela signifie que

$$\forall x\in E,\ f\left(x\right)+\frac{1}{2}x=0\quad .i.e.\quad f\left(x\right)=-\frac{1}{2}x$$

f est alors une homothétie, ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi

$$\boxed{\ker\left(f+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)\neq E}$$

De la même manière

$$\boxed{\ker\left(f-\mathrm{id}\right)\neq E}$$

b) Mais alors, si $\ker(f - \mathrm{id}) = \{0_E\}$, alors
$$E = \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \oplus \{0_E\} = \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$$
contradiction. Ainsi
$$\boxed{\ker\left(f + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \neq \{0_E\}}$$
et de la même manière
$$\boxed{\ker(f - \mathrm{id}) \neq \{0_E\}}$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: supposons que l'équation $f(x) = \lambda x$ admet une solution $x \neq 0$. Alors
$$f^2(x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$
L'égalité $(*)$ s'écrit dans ces conditions :
$$\lambda^2 x - \frac{\lambda}{2}x - \frac{1}{2}x = 0_E = \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\right)x$$
x étant non nul, on a nécessairement $\lambda^2 - \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$. Necessairement
$$\boxed{\lambda \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}}$$

d) **Réciproquement**, si $\lambda = 1$, on a vu que $\ker(f - \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$, donc
$$\exists x \neq 0_E \ / \ f(x) = x$$
De même si $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) \neq \{0_E\}$, donc
$$\exists x \neq 0_E \ / \ f(x) = -\frac{1}{2}x$$
Dans les deux cas :
$$\boxed{f(x) = \lambda x \text{ admet des solutions non nulles dans } E}$$

PARTIE 2 : **applications**

1. Application 1 : on considère $E = \mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de E associé à la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Un calcul facile donne $A^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(A + I_3)$.

On peut donc dire que $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id})$, puisque $\forall X \in E$,

$$f^2(X) = A^2 X = \frac{1}{2}(A + I_3)X = \frac{1}{2}(AX + X) = \frac{1}{2}(f(X) + X)$$

$\underline{f \text{ vérifie donc la relation } (*)}$.

b) On sait alors que $E = \ker\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}\right) \oplus \ker(f - \mathrm{id})$, et que pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$, la décomposition de X s'écrit

$$X = p(X) + q(X) \quad \text{avec } p = \tfrac{2}{3}\left(f + \tfrac{1}{2}\mathrm{id}\right) \text{ et } q = -\tfrac{2}{3}(f - \mathrm{id})$$

En posant

$$P = \tfrac{2}{3}\left(A + \tfrac{1}{2}I_3\right) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = -\tfrac{2}{3}(A - I_3) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

on a

$$\boxed{p(X) = PX = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x + 3y + z \\ x + 3y + z \\ -x - 3y - z \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{q(X) = QX = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - 3y - z \\ -x - z \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix}}$$

qui sont les deux vecteurs de $F = \ker\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}\right)$ et $G = \ker(f - \mathrm{id})$ de somme X.

c) Les projecteurs sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F sont donc les projecteurs p et q définis à la question 5 partie 1, et associés aux matrices P et Q.

i. L'espace de projection de p est son image, soit l'espace engendré par les colonnes de P : celles-ci sont colinéaires, donc

$$\boxed{F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(Y_0), \quad \text{avec} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \text{ (droite vectorielle)}$$

ii. La direction de p est son noyau. Mais les lignes de P sont égales, donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker p \Longleftrightarrow x + 3y + z = 0 \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - 3y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{G = \ker p = \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2), \text{ avec } Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

Les deux vecteurs Y_1 et Y_2 n'étant pas colinéaires, $\ker p$ est un plan vectoriel.

iii. On sait évidemment que les éléments caractéristiques de q sont G et F calculés en (i) et (ii).

d) On a montré en 5. que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$. On en déduit que

$$A^n = P + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n Q$$

Soit

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3 & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -1+4\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}$$

2. **Application 2** : on considère l'ensemble E des fonctions f de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$2x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \quad (\mathcal{E})$$

Si $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0,\ \varphi(f)(x) = xf'(x)$$

a) $*$ La fonction nulle est dans E (elle est solution de $(\mathcal{E})$)

$*$ De plus si (f,g) sont dans E et λ un réels, alors $\lambda f + g$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{array}{rcl} 2x^2(\lambda f+g)''(x)+x(\lambda f+g)'(x)-(\lambda f+g)(x) & = & \lambda\left(2x^2f''(x)+xf'(x)-f(x)\right)+\left(2x^2g''(x)+xg'(x)-g(x)\right) \\ & = & 0 \quad \text{puisque } f \text{ et } g \text{ vérifient } (\mathcal{E}) \end{array}$$

Donc $\lambda f + g \in E$ et

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^\infty(]0,+\infty[\,,\mathbb{R})}$$

Par ailleurs, il est bien clair que, sous les mêmes conditions, on a pour tout $x > 0$:

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = x(\lambda f+g)'(x) = \lambda xf'(x) + xg'(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$$

D'où $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$ et

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$$

b) Montrons que φ est un endomorphisme de E : pour cela, il faut voir que

$$\text{si } f \in E,\ \text{alors } \varphi(f) \in E,\ \text{c'est-à-dire } \varphi(f) \text{ vérifie } (\mathcal{E})$$

Or en dérivant $(\mathcal{E})$, on obtient $\forall x > 0$

$$2x^2f'''(x) + 4xf''(x) + xf''(x) + f'(x) - f'(x) = 0$$

i.e.

$$2x^2f'''(x) + 5xf''(x) = 0$$

Par ailleurs, en posant $g = \varphi(f)$, on a $\forall x > 0$,

$$\begin{cases} g'(x) = xf''(x) + f'(x) \\ g''(x) = xf'''(x) + 2f''(x) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} 2x^2g''(x) + xg'(x) - g(x) & = & 2x^3f'''(x) + 4x^2f''(x) + x^2f''(x) + xf'(x) - xf'(x) \\ & = & 2x^3f'''(x) + 5x^2f''(x) \\ & = & x\left(2x^2f'''(x) + 5xf''(x)\right) \\ & = & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est donc bien un endomorphisme de } E}$$

c) Soit $f \in E$, et posons $g = \varphi(f)$ alors $\varphi^2(f) = \varphi(g)$, i.e. $\forall x > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^2(f)(x) & = & xg'(x) \\ & = & x(xf'(x))' \\ & = & x(xf''(x) + f'(x)) \\ & = & x^2f''(x) + xf'(x) \end{array}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\varphi^2(f)(x)-\frac{1}{2}\varphi(f)(x)-\frac{1}{2}f(x) &= x^2f''(x)+xf'(x)-\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}f(x)\\ &= x^2f''(x)+\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

puisque f est solution de $(\mathcal{E})$. On peut donc dire que

$$\forall f\in E,\quad \varphi^2(f)-\frac{1}{2}\varphi(f)-\frac{1}{2}f=0_E$$

$i.e.$

$$\boxed{\varphi \text{ vérifie la relation } (*)}$$

d) Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy'-y=0\quad(\mathcal{E}_1)$ sont de la forme

$$y:x\mapsto Ce^{\int\frac{dx}{x}}=Ce^{\ln x}=Cx,\quad C\in\mathbb{R}$$

Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy'+\dfrac{1}{2}y=0\quad(\mathcal{E}_2)$ sont de la forme

$$y:x\mapsto Ce^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}}=Ce^{-\frac{1}{2}\ln x}=\frac{C}{\sqrt{x}},\quad C\in\mathbb{R}$$

e) On note f_1 et f_2 les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ vérifiant $f_1(1)=f_2(1)=1$. On a clairement

$$f_1:x\mapsto x\quad\text{et}\quad f_2:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Il est clair (vérification facile) que ces fonctions sont dans E. De plus

$$\begin{aligned}f\in\ker(\varphi-\mathrm{id}) &\iff \varphi(f)-f=0\\ &\iff \forall x>0,\ xf'(x)-f(x)=0\\ &\iff \exists C\in\mathbb{R}\ /\ \forall x>0,\ f(x)=Cx=Cf_1(x)\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\ker(\varphi-\mathrm{id})=\mathrm{Vect}(f_1)}$$

est une <u>droite vectorielle</u>. De même

$$\begin{aligned}f\in\ker\left(\varphi+\frac{1}{2}\mathrm{id}\right) &\iff \varphi(f)+\frac{1}{2}f=0\\ &\iff \forall x>0,\ xf'(x)+\frac{1}{2}f(x)=0\\ &\iff \exists C\in\mathbb{R}\ /\ \forall x>0,\ f(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}=Cf_2(x)\end{aligned}$$

D'où

$$\ker\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{id}\right)=\mathrm{Vect}(f_2)$$

est une <u>droite vectorielle</u>.

f) Appliquons le résultat de la partie 1, question 3.b) puisque φ vérifie $(*)$, on a

$$E=\ker(\varphi-\mathrm{id})\oplus\ker\left(\varphi+\frac{1}{2}\mathrm{id}\right)=\mathrm{Vect}(f_1)\oplus\mathrm{Vect}(f_2)$$

Cela signifie que tout élément f de E s'écrit de manière unique $f=\lambda f_1+\mu f_2,\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{E \text{ est un plan vectoriel de base } (f_1,f_2)}$$

On a donc établi que les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$ étaient les fonctions de la forme :

$$\boxed{f:x\mapsto\lambda x+\frac{\mu}{\sqrt{x}},\quad\text{avec }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$