Etude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + 4x^3 + 27}$

---

1. Etudions $g = f^2 : x \mapsto x^4 + 4x^3 + 27$, qui est polynomiale. On a $g' : x \mapsto 4\left(x^3 + 3x^2\right) = 4x^2\left(x+3\right)$.
On en déduit les variations de g (qui sont celles de f) :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi par composition avec la fonction racine, f est **définie et continue** sur $\mathbb{R}$, et **dérivable** sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.
On voit aussi que -3 et racine double de g, avec, par division euclidienne de $X^4 + 4X^3 + 27$ par $(X+3)^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 + 4x^3 + 27 = (x+3)^2\left(x^2 - 2x + 3\right)$$

Remarque : on a $f'(0) = \frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0)}} = 0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\left(0, \sqrt{27}\right)$.

2. Branches infinies en $\pm + \infty$: on remarque que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^2$.
On fait donc un développement asymptotique à 4 termes au voisinage de $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{27}{x^4}} \\ &= x^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \left[x^2 + 2x - 2\right] + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 + 2x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.
De plus, comme

$$f(x) - \left[x^2 + 2x - 2\right] \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{4}{x}$$

– Au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{P}$.
– Au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{P}$.

3. Dérivabilité en -3 : on fait un DL de f à l'ordre 2 en 3^+ et 3^- :

$$\begin{aligned} f(-3+h) &= \sqrt{h^2\left((-3+h)^2 - 2(-3+h) + 3\right)} \\ &= |h|\sqrt{18 - 8h + h^2} \\ &= |h|\sqrt{18}\sqrt{1 - \frac{4h}{9} + \frac{h^2}{18}} \\ &= |h|\sqrt{18}\left(1 - \frac{2h}{9} + o(h)\right) \quad \text{pour } h \text{ au voisinage de } 0 \end{aligned}$$

– Pour x au voisinage de -3^+, on a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)\sqrt{18}\left(1 - \frac{2(x+3)}{9} + o(x+3)\right) \\ &= \sqrt{18}(x+3) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(x+3)^2 + o\left((x+3)^2\right) \end{aligned}$$

Donc en particulier

$$\frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \sqrt{18} - \frac{2\sqrt{2}}{3}(x+3) + o(x+3) \underset{x\to-3^+}{\rightarrow} \sqrt{18}$$

Ainsi $f'_d(-3)$ existe et vaut $\sqrt{18}$, $\mathcal{C}_f$ admet une demi tangente T_+ d'équation $y = \sqrt{18}\,(x+3)$ en -3.

De plus

$$f(x) - \sqrt{18}\,(x+3) \underset{x\to -3^+}{\sim} -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,(x+3)^2$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de T_+ au voisinage à droite de -3.

– Pour x au voisinage de -3^-, on a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+3)\sqrt{18}\left(1 - \frac{2(x+3)}{9} + o(x+3)\right) \\ &= -\sqrt{18}\,(x+3) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\,(x+3)^2 + o\left((x+3)^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi $f'_g(-3)$ existe et vaut $-\sqrt{18}$, $\mathcal{C}_f$ admet une demi tangente T_- d'équation $y = -\sqrt{18}\,(x+3)$ en -3.

De plus

$$f(x) - \sqrt{18}\,(x+3) \underset{x\to -3^-}{\sim} \frac{2\sqrt{2}}{3}\,(x+3)^2$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_- au voisinage à gauche de -3.

4. On peut enfin tracer $\mathcal{C}_f$ avec les deux points $(-3,0)$, $\left(0,\sqrt{27}\right)$ et leurs tangentes, ainsi que la parabole $\mathcal{P}$: