Matrices et applications linéaires

1. Matrice d'un application linéaire dans des bases données

1.1. Rappels et compléments

a) <u>**Idée fondamentale**</u> **:** soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie .

Pour décrire une application linéaire de E dans F il suffit de connaître les images d'une base de E :

> Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille quelconque d'éléments de F,
> alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in [[1, n]]$, $\quad f(e_k) = y_k$

Exemple : déterminer $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ / $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ f(e_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) <u>**Matrices et application linéaire canoniquement associées**</u> **:** on note $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on sait lui associer canoniquement l'application linéaire $f_A : \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX \end{array}$

On a ainsi alors une application linéaire

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ & A & \longmapsto & f_A \end{array}}$$

Cette application est un isomorphisme et sa réciproque se note

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \mathrm{Mat} : & \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f) \end{array}}$$

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, sa **matrice canoniquement associée** $\mathrm{Mat}(f)$ est la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont

$$\boxed{C_1 = f(e_1), \ldots, C_p = f(e_p)}$$

Morale : il y a équivalence entre la donnée d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et d'une matrice $n \times p$

Remarque 1 : <u>égalité de deux matrices</u> : on a $A = B \Longleftrightarrow \forall X \in \mathbb{K}^p, \ AX = BX$

Remarque 2 : si $C_1, \ldots, C_p$ sont les colonnes de A, alors pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$

Exemple 1 : $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ a pour matrice associée I_n, une homothétie de $\mathbb{K}^n$ de rapport λ a pour matrice λI_n

Exemple 2 : soit $r \in [[1, p]]$. Matrice du projecteur p sur $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_p)$

Exemple 3 : soit $E = \mathbb{R}^2, \ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ Y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}(X_0)$, et $G = \mathrm{Vect}(Y_0)$.

Matrices des projecteurs p et q associés à $E = F \oplus G$, ainsi que de la symétrie s associée (2 méthodes)

1.2. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

a) **<u>Matrice des composantes d'un vecteur</u> :**

Si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ la **colonne de coordonnées** de $x \in E$ dans $\mathcal{B}$

Exemple 1 : $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{2,2}, E_{23})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A) =$

Exemple 2 : $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, $P = X^3 - 2X + 7$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) =$

Remarque 1 : si $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique, alors $\forall X \in E,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} X = X$.

Remarque 2 : on notera parfois $x \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} X$.

b) **<u>Matrice d'une famille de vecteurs</u> :** soient $y_1, \ldots, y_p$ des vecteurs de E.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, \ldots, y_p)$ la matrice dont la colonne k est la colonne de coordonnées de y_k

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, \ldots, y_p)$ est la "concaténation" de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_p)$. Ainsi, si

$$y_1 \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad y_p \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, \ldots, y_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

Exemple 1 : $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $P_1 = X^2 - 2X + 7,\ P_2 = X^2 - 1$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2) =$

Exemple 2 : $E = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{B} = (e_1, e_2)$ canonique, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, avec $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice dans $\mathcal{B}'$ de (e_1, e_2), puis de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1.3. Matrice d'une application linéaire dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n, de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
On se donne une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) **<u>Définition</u> :** on appelle <u>matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$</u> la matrice

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$$

Autrement dit, si $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ ont pour colonnes de coordonnées dans $\mathcal{C}$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, C_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On a ainsi

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \iff \forall j \in [[1, p]],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i}$$

Remarque : si $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de E et F, on retrouve la matrice canoniquement associée à f.

Exemple : soit $E=\mathbb{R}_3[X]$, $F=\mathbb{R}^2$, et $f:E\to F$ définie par $\forall P\in E,\ f(P)=\begin{pmatrix}P(1)\\P'(1)\end{pmatrix}$

Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans les base $\mathcal{B}=\left(1,X,X^2,X^3\right)$ et $\mathcal{C}=(e_1,e_2)$ canonique.

Même question dans les bases $\mathcal{B}'=\left(1,X-1,(X-1)^2,(X-1)^3\right)$ et $\mathcal{C}$ canonique.

b) <u>Effet sur un vecteur</u> : soit x un vecteur de E et $y=f(x)\in F$ son image par f. Alors

$$\boxed{\text{Si }\left\{\begin{array}{l}A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\\X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\\Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y)\end{array}\right.\text{, alors }Y=AX}$$

Soit

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

c) <u>Cas particulier des endomorphismes</u> : on suppose $E=F$, $n=p$, et $\boxed{\mathcal{B}=\mathcal{C}=(e_1\dots,e_n)}$

Alors si $f\in\mathcal{L}(E)$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la <u>matrice de f dans LA base $\mathcal{B}$</u>.

Exemple 1 : dans toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)=I_n$

Exemple 2 : soit $E=\mathbb{R}^2$, $e_1'=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $e_2'=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. On considère la symétrie s par rapport à $\mathbb{R}e_1'$ parallèlement à $\mathbb{R}e_2'$. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'=(e_1',e_2')$

Exemple 3 : soit $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-3&6\\3&5&-6\\3&3&-4\end{pmatrix}$ d'endomorphisme canoniquement associée $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$

On pose $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ canonique, $e_1'=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $e_2'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $e_3'=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Calculer $A'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ dans la base $\mathcal{B}'=(e_1',e_2',e_3')$

Exemple 4 :soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, et $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})&\to&\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\M&\mapsto&AM\end{array}$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$

1.4. Propriétés

a) <u>Linéarité</u> : (même décor qu'au 1.3.) $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}:\mathcal{L}(E,F)\to\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\text{ est un isomorphisme}}$

Conséquence : $\boxed{\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim(E)\times\dim(F)}$ et en particulier $\boxed{\dim\mathcal{L}(E)=(\dim E)^2}$

b) <u>Passage au produit</u> : soient E,F,G trois espaces vectoriels de dimension p,n,m, et de bases $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$.

$$\boxed{\text{Si }\left\{\begin{array}{l}f\in\mathcal{L}(E,F)\\g\in\mathcal{L}(F,G)\end{array}\right.\text{, et si }\left\{\begin{array}{l}A\text{ est la matrice de }f\text{ dans }\mathcal{B},\mathcal{C}\\B\text{ est la matrice de }g\text{ dans }\mathcal{C},\mathcal{D}\\M\text{ est la matrice de }g\circ f\text{ dans }\mathcal{B},\mathcal{D}\end{array}\right.\text{, alors }M=BA}$$

Autrement dit

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)}$$

c) <u>Cas particulier des endomorphismes</u> : on suppose $n=p$, E de dimension n et de base $\mathcal{B}=(e_1\dots e_n)$

(i) Si $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, alors $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f\circ g)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)}$

(ii) On a : f inversible $\Longleftrightarrow\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ inversible, et alors $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}}$

2. Changements de bases

2.1. Matrice de passage

On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n

a) **Exemple d'approche :** soit $E = \mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ sa base canonique.

On considère la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, calculer la colonne de coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de X dans $\mathcal{B}'$.

b) **Définition :** soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$

Autrement dit :

$$\text{si} \quad e'_1 \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, e'_n \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} p_{1n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

c) **Effet sur un vecteur :** soit x un vecteur de E et $\begin{cases} X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \\ X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) \end{cases}$. Alors en notant $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$:

$$\boxed{X = PX'}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet d'exprimer les "anciennes" coordonnées en fonction des "nouvelles".

d) **Inversibilité :** $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$

Exemple 1 : soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique, et $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Ecrire les formules de changement de base.

Exemple 2 : soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\right)$

Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Ecrire les formules de changement de base.

2.2. Lien entre les matrices d'un A.L dans deux bases différentes

a) **Formule générale :** soient E et F deux espaces de dimension p et n sur $\mathbb{K}$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et on pose

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{np}, \quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}, \quad P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in GL_p, \quad Q = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} \in GL_n$$

Alors

$$\boxed{A = QA'P^{-1}}$$

Autrement dit

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(f) \times P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

Remarque : on a donc $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

b) Cas TRES USUEL des endomorphismes et des matrices carrées : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E = n$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \end{cases}$ et $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in GL_n$, alors

$$\boxed{A = PA'P^{-1}}$$

ou encore

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\,P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

Remarque : on a donc $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

Application aux puissances : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = PA'^nP^{-1}}$ $(*)$

De plus si A est inversible, alors A' aussi et $\boxed{A^{-1} = PA'^{-1}P^{-1}}$: $(*)$ est alors vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$

c) Exemples :

Exemple 1 : soit $E = \mathbb{R}^2$, $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On considère la symétrie s par rapport à $\mathbb{R}e'_1$ parallèlement à $\mathbb{R}e'_2$. Calculer la matrice de s en base canonique par (changement de base).

Exemple 2 : soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ d'application canoniquement associée $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Calcul des puissances de A en diagonalisant dans la base $\mathcal{B}'$ du 1.3.c) ex3.

Exemple 3 : soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}^2$, et $f : E \to F$ définie par $\forall P \in E,\ f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \end{pmatrix}$,

$\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$, $\mathcal{B}' = \left(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\right)$, $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ canonique et $\mathcal{C}' = (e_2, e_1)$

Relier les matrices $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(f)$

3. Compléments sur le rang

3.1. Rang d'une matrice

a) **<u>Définition</u> :** si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose, en notant $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$)

$$\boxed{\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)}$$

On a alors

$$\boxed{\operatorname{rg} A \leqslant \min(n, p)}$$

b) **<u>Proposition</u> :** soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(y_1, \ldots y_p) \in E^p$; alors

$$\boxed{\operatorname{rg}(y_1, \ldots, y_p) = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, \ldots, y_p)}$$

c) **<u>Corollaire</u> :** soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{BC}}(f)$ avec $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de E et F. Alors

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A}$$

3.2. Calcul du rang par la méthode du pivot

a) **<u>Opérations</u> :** on ne change pas le rang d'une famille de vecteurs $(y_1, \ldots, y_p)$ (ni l'espace qu'ils engendrent)

- En ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (cf. lemme technique).
- En multipliant l'un des vecteurs par un scalaire non nul.
- En échangeant deux des vecteurs.

En considérant la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1, \ldots, y_p)$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$, on en déduit que $\operatorname{rg} A$ (et $\operatorname{Im} A$) sont inchangées par les opérations :

- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
- $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$

b) **<u>Algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes</u> :** toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est équivalente en colonnes à une unique matrice échelonnée réduite en colonne, c'est-à-dire une matrice dont la transposée est échelonnée réduite en ligne, soit

$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ * & 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ * & * & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & & & \\ * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = G_c(A)$$

Remarque : on dit que les premières colonnes (non nulles) de $G_c(A)$ sont échelonnées ou étagées.

c) **<u>Rang des matrices échelonnées réduites</u> :**

- $\boxed{\text{Si } G_c \text{ est échelonnée réduite en colonnes, alors } \operatorname{rg} G_c \text{ est le nombre de ses pivots.}}$
- $\boxed{\text{Si } G_\ell \text{ est échelonnée réduite en lignes, alors } \operatorname{rg} G_\ell \text{ est le nombre de ses pivots.}}$

Remarque :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les opérations sur les colonnes de } A \text{ ne modifient ni } \operatorname{Im} A, \text{ ni } \operatorname{rg} A.\\ \text{Les opérations sur les lignes de } A \text{ ne modifient ni } \ker A, \text{ ni } \operatorname{rg} A.\end{array}}$$

Corollaire :

$$\boxed{\text{le rang d'une matrice est le nombre de pivots de sa réduite de Gauss–Jordan en ligne ou en colonne.}}$$

Exemple : dans $E = \mathbb{R}^3$, calcul du rang de X_1, X_2, X_3, X_4, avec :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) **Rang de la transposée :** si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors

$$\boxed{\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg} A}$$

Conséquence : le rang des lignes de A est le même que celui des colonnes.

On peut donc calculer $\operatorname{rg} A$ en opérant sur les lignes et/ou les colonnes de A (méthode du pivot).

Exemple : réduites de Gauss-Jordan (lignes et colonnes) des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$