Ex 1 Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble . Peut-on écrire les affirmations suivantes ?

$$a \in E,\ \varnothing \in E,\ a \subset E,\ \varnothing \subset E,\ \{a\} \subset E,\ \{\varnothing\} \subset E,\ \{a\} \in \mathcal{P}(E),\ \varnothing \in \mathcal{P}(E)$$

Ex 2 Ecrire symboliquement les ensembles suivants :

a) Ensemble des couples d'entiers relatifs de somme 1.

b) Ensemble des couples d'entiers naturels dont le second est multiple du premier.

c) Ensemble E des triplets d'entiers naturels de somme paire.

d) Ensemble des images par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des éléments de $[-1, 1]$.

e) Droite D passant par $A(1, 2)$ et de coefficient directeur 3.

Pour les deux derniers, utiliser l'écriture en compréhension, puis paramétrée.

Ex 3 Si $a \in \mathbb{N}$, On note $a\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de a.

a) Pour $a \in \mathbb{N}$, écrire l'ensemble $a\mathbb{N}$ en langage symbolique, de deux manières différentes.

b) Montrer que $6\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$.

c) Montrer que $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = 6\mathbb{N}$.

Ex 4 Soient E un ensemble et A, B, C trois sous ensembles de E. Montrer que : $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Ex 5 Soient E un ensemble et A, B, C trois sous ensembles de E. Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right. \Rightarrow B \subset C$.

Ex 6 Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E. Montrer que $A \subset B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Ex 7 Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E.

On appelle **différence symétrique** de A et B l'ensemble : $A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

a) Montrer que : $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$ et $A \bigtriangleup B = \overline{A} \bigtriangleup \overline{B}$

c) Calculer $A \bigtriangleup \varnothing$, $A \bigtriangleup E$ et $A \bigtriangleup A$.

d) Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que : $A \bigtriangleup C = B \bigtriangleup C \Longleftrightarrow A = B$.

Ex 8 Déterminer les ensembles $I = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \tfrac{1}{n}\right]$ et $J = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\tfrac{1}{n}\, \tfrac{1}{n}\right[$

Ex 9 Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de $\mathcal{P}(E)$ telles que : $\forall i \in I,\ A_i \cup B_i = E$.

Montrer que : $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \cup \bigcap_{i \in I} B_i = E$.

Ex 10 Soient E un ensemble, n un entier non nul, et $A_1, \ldots, A_n$ des sous ensembles de E vérifiant

$$\varnothing = A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E$$

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \backslash A_{k-1}$. Montrer que $B_1, \ldots, B_n$ est une partition de E.