EXERCICE 1 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général :

$$a_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)!}$$

soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$. On définit le polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-1)!} X^{n+k-1} = \frac{y_1}{n!} X^n + \frac{y_2}{(n+1)!} X^{n+1} + \cdots + \frac{y_n}{(2n-1)!} X^{2n-1}$$

1. On connait la formule

$$D\left(\frac{X^p}{p!}\right) = \begin{cases} \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!} \text{ si } p \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } p = 0 \end{cases}$$

Donc

$$D^{\ell}\left(\frac{X^p}{p!}\right) = \begin{cases} \dfrac{X^{p-\ell}}{(p-\ell)!} \text{ si } p \geqslant \ell \\ 0 \text{ si } p < \ell \end{cases}$$

Par linéarité, on a donc, pour $\ell \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} P^{(\ell)} &= \sum_{k=1}^{n} y_k D^{\ell}\left(\frac{X^{n+k-1}}{(n+k-1)!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{X^{n+k-1-\ell}}{(n+k-1-\ell)!} \end{aligned}$$

En évaluant en 1, cela donne

$$P^{(\ell)}(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-\ell-1)!}$$

Or $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$ s'écrit, à la ligne $n-\ell$

$$\sum_{k=1}^{n} [A]_{n-\ell,k}\, y_k = 0 \quad \text{soit} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n-\ell+k-1)!} = 0$$

Ainsi, naturellement

$$\boxed{\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ P^{\ell}(1) = 0}$$

2. Mais de plus

$$P = X^n \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(n+k-1)!} X^{k-1}$$

Donc 1 et 0 sont racines de P d'ordre au moins n chacun. Or $\deg P \leqslant 2n-1$, ce qui assure que

$$\boxed{P = 0}$$

Les coefficients de P sont ainsi nuls, i.e. $y_1 = \cdots = y_n = 0$, soit $Y = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le système $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$ n'admet que la solution nulle, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, la notation f^n désigne l'itérée : $f \circ \cdots \circ f$

On cherche les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\text{(i) } f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{(ii) } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^2(x) = 2f(x) - x \quad (\text{soit } f(f(x)) = 2f(x) - x)$$

On se donne une telle fonction f.

1. Pour pouvoir définir $f(f(x))$, il faut que $f(x) \geqslant 0$: $\boxed{f \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+}$

2. Si x et y positifs vérifient $f(x) = f(y)$, alors $f(f(x)) = f(f(y))$, donc $2f(x) - x = 2f(y) - y$

Il en résulte immédiatement que $x = y$:

$$\boxed{f \text{ est injective}}$$

3. a) Supposons que f ne soit pas strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$.

On aurait alors trois réels positifs $x < y < z$ tels que

$$\begin{cases} f(x) < f(y) \\ f(z) < f(y) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) > f(y) \\ f(z) > f(y) \end{cases} \quad \text{(les inégalités sont strictes car } f \text{ est injective)}$$

Quitte à changer f en $-f$, on ne perd pas de généralités en ne considérant que le premier cas.

Considérons $m = \max(f(x), f(z))$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, m admet un antécédent par f dans $[x, y[$ et un autre dans $]y, z]$. C'est contradictoire avec l'injectivité de f. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est strictement monotone sur } \mathbb{R}_+}$$

b) Etant donné que $f(0) = 0$ et f positive sur $\mathbb{R}_+$, $\underline{f \text{ ne peut être que strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

4. a) Supposons f majorée sur $\mathbb{R}_+$. Alors elle aurait une limite $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$ puisqu'elle est croissante.

Par continuité de f en ℓ, on aurait

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = f(\ell)$$

Mais par ailleurs, $f(f(x)) = 2f(x) - x$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = -\infty$$

C'est contradictoire :

$$\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}_+}$$

b) Ainsi, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Comme f est continue strictement croissante et que $f(0) = 0$,

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } \mathbb{R}_+}$$

5. a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^n(x) - x = n(f(x) - x) \quad H(n)$

* $H(1)$ est vraie car elle s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) - x = f(x) - x$
* $\underline{\text{Soit } n \in \mathbb{N}}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$: si $x \in \mathbb{R}_+$, on applique $H(n)$ au réel $f(x) \geqslant 0$:

$$f^n(f(x)) - f(x) = n(f(f(x)) - f(x))$$

Soit à l'aide de (ii) :

$$f^{n+1}(x) - f(x) = n(f(x) - x)$$

Il vient facilement

$$f^{n+1}(x) - x = (n+1)(f(x) - x) \quad \text{CQFD.}$$

b) Puisque f est positive, on a assez évidemment (petite récurrence?) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^n(x) \geqslant 0$.

Le résultat précédent donne alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) - x = \frac{f^n(x) - x}{n} \geqslant -\frac{x}{n}$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ (à x fixé) on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant x}$$

c) La réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue (car f l'est), et vérifie :

(i) $f^{-1}(0) = 0$ (puisque $f(0) = 0$)

(ii) Si $x \in \mathbb{R}_+$, en appliquant (ii) à $f^{-2}(x) = f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$, on obtient

$$x = 2f^{-1}(x) - f^{-2}(x) \quad \text{d'où} \quad f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = 2f^{-1}(x) - x$$

f^{-1} vérifie ainsi les conditions de l'énoncé.

d) Les résultats précédents s'appliquent donc à f^{-1} : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{-1}(x) \geqslant x$. En composant par f (croissante)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant f(x)}$$

6. On déduit de cette étude :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x}$$

La réciproque pose peu de problèmes donc

$$\boxed{\text{L'unique solution du problème est } \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}}$$

PROBLEME On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la suite $(u_p)_{p\geqslant 1}$ définie par récurrence par

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 2 \\ \forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} = 2 - \dfrac{1}{u_p} \end{array}\right.$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Les premiers termes $u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{4}{3},\ u_4 = \frac{5}{4}$ incitent à conjecturer :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p = \frac{p+1}{p}}$$

Ce résultat se montre alors par une récurrence quasi immédiate.

2. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le terme général de A est :

$$\boxed{[A]_{ij} = -\delta_{i-1,j} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}}$$

3. On définit les matrices $A_1, \ldots, A_n$ par

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = A \\ \forall i \in [\![1,n-1]\!],\ A_{i+1} \text{ se déduit de } A_i \text{ par l'opération } L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} L_i \end{array}\right.$$

a) La ligne 1 de A_2 est inchangée, et sa ligne 2 vaut $L_2 + \dfrac{1}{2} L_1$, soit

$$\left(0, \frac{3}{2}, -1, 0, \ldots, 0\right)$$

Les lignes 1 et 2 de A_3 sont inchangées et sa ligne 3 est alors $L_3 + \dfrac{2}{3} L_2$, soit

$$\left(0, 0, \frac{4}{3}, -1, 0, \ldots, 0\right)$$

On conjecture que si $i \in [[1,n]]$ la ligne i de A_i est $(0, \ldots, 0, u_i, -1, 0, \ldots, 0)$, soit de terme général

$$(u_i \delta_{i,j} - \delta_{i+1,j})_{j \in [[1,n]]}$$

Preuve par récurrence : c'est clair pour $i = 1$. Supposons le pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons le pour $i+1$: La ligne $i+1$ de A_i est celle de A, c'est-à-dire de terme général $-\delta_{i,j} + 2\delta_{i+1,j} - \delta_{i+2,j}$ (pour $j \in [\![1,n]\!]$) Par hypothèse de récurrence, l'opération $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \frac{1}{u_i} L_i$ transforme ce terme général en

$$\begin{aligned} -\delta_{i,j} + 2\delta_{i+1,j} - \delta_{i+2,j} + \frac{1}{u_i}(u_i \delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}) &= \left(2 - \frac{1}{u_i}\right) \delta_{i+1,j} - \delta_{i+2,j} \\ &= u_{i+1} \delta_{i+1,j} - \delta_{i+2,j} \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Ainsi, à la dernière étape, on obtient la matrice triangulaire supérieure A_n :

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

b) La matrice A est ainsi équivalent en ligne à une matrice triangulaire supérieure à diagonale non nulle. Elle est donc inversible

c) A étant symétrique, il vient aisément que A^{-1} est symétrique $\left({}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1} = A^{-1}\right)$

4. Si Y est une colonne de terme général y_i, on définit la colonne Y' de terme général y'_i défini par

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\ y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\ AX = Y \iff A_iX = Y_i$, avec $Y_i = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- Evident pour $i = 1$.
- Supposons le pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, et montrons le pour $i+1$:

  L'opération $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \frac{1}{u_i} L_i$ transforme A_i en A_{i+1} et Y_i en Y_{i+1} (par définition). Donc
  $$AX = Y \iff A_iX = Y_i \iff A_{i+1}X = Y_{i+1} \quad \text{CQFD.}$$

5. On fixe $j \in [\![1, n]\!]$ et on pose Y le vecteur colonne de terme général $y_i = \delta_{ij}$

a) L'unique solution du système $AX = Y$ est $X = A^{-1}Y$.

Y étant le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, X est donc la j-ème colonne de A^{-1} notée Γ_j.

b) Montrons que $\begin{cases} \forall i < j,\ y'_i = 0 \\ \forall i \geqslant j,\ y'_i = j/i \end{cases}$

$*$ Montrons par récurrence que $\forall i < j,\ y'_i = 0$:

· On a bien $y'_1 = y_1 = 0$ (sauf pour $j = 1$, auquel cas il n'y a pas de $i\ /\ i < j$)

· Si $y'_i = 0$ pour $i < j-1$, alors $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i = 0$ par hyp. de récurrence et le fait que $y_{i+1} = 0$

$*$ Montrons par récurrence que $\forall i \geqslant j,\ y'_i = j/i$:

· On a bien $y'_j = y_j + 0 = 1 = j/j$

· Si $y'_i = j/i$ pour $i \in [\![j, n-1]\!]$, alors $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i \overset{\text{HDR}}{=} 0 + \dfrac{i}{i+1}\dfrac{j}{i} = \dfrac{j}{i+1}$

c) Γ_j est la solution de $AX = Y$, i.e. de $A_nX = Y_n$, où Y_n a le terme général y'_i.

Soit alors x_i le terme général de Γ_j : d'après les questions précédentes, on a le système

$$\begin{cases} u_1x_1 - x_2 = y'_1 \\ \vdots \\ u_{n-1}x_{n-1} - x_n = y'_{n-1} \\ u_nx_n = y'_n \end{cases}$$

Pour $i \geqslant j$, la ligne i de ce système est $\dfrac{i+1}{i} x_i - x_{i+1} = \dfrac{j}{i}$, en convenant que $x_{n+1} = 0$

Montrons par récurrence (descendante) que $\forall i \geqslant j,\ x_i = \dfrac{j\,(n+1-i)}{n+1}$ (Ψ_i) :

$*$ On a $x_n = \dfrac{y'_n}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{j}{n} = \dfrac{j}{n+1}$, c'est-à-dire Ψ_n.

$*$ Supposons avoir Ψ_{i+1} pour $i \in [\![j, n-1]\!]$: alors de $\dfrac{i+1}{i} x_i - x_{i+1} = \dfrac{j}{i}$ on tire

$$\frac{i+1}{i} x_i = x_{i+1} + \frac{j}{i} = \frac{j\,(n+1-i-1)}{n+1} + \frac{j}{i} = j\frac{i\,(n+1-(i+1)) + n+1}{i\,(n+1)}$$

En factorisant :

$$\frac{i+1}{i}x_i = j\frac{(i+1)(n+1)-i(i+1)}{i(n+1)} = j\frac{(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)}$$

Finalement

$$x_i = \frac{j(n+1-i)}{n+1} \quad \text{CQFD.}$$

d) On a vu que x_i est la i-ième ligne de la j-ième colonne de A^{-1}. Si b_{ij} est le terme général b_{ij} de A^{-1}, on a donc montré que

$$\boxed{\forall i \geqslant j,\ b_{ij} = \frac{j(n+1-i)}{n+1}}$$

Mais on a montré aussi que A^{-1} était symétrique : donc $\forall i < j$, $b_{ij} = b_{ji}$, soit

$$\boxed{\forall i < j,\ b_{ij} = \frac{i(n+1-j)}{n+1}}$$

e) Cas où $n = 6$: cela donne

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6. La question 2. a montré que par les opérations successives $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \frac{1}{u_i}L_i$, i parcourant $[\![1, n-1]\!]$, on ramenait la matrice A à la matrice triangulaire supérieur $U = A_n$.

En terme matriciels, si l'on pose :

$$\Lambda_i = I_n + \frac{1}{u_i}E_{i+1,i}$$

(matrice I_n à laquelle on a appliqué l'opération $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \dfrac{1}{u_i}L_i$), on a

$$\Lambda_{n-1}\cdots\Lambda_2\Lambda_1 A = U$$

Soit

$$A = LU$$

où

$$L = \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\cdots\Lambda_{n-1}^{-1}$$

Or chaque matrice Λ_i est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

Il en est donc de même de son inverse.

Par produit, on en déduit que L est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1. On conclut :

Il existe une matrice triangulaire inférieure L dont les coefficients diagonaux valent 1 et une matrice triangulaire supérieure U telles que : $A = LU$