**Ex 1** Résoudre les systèmes suivants :

a) $(S_1)\left\{\begin{array}{c} x+4y+3z+t=1 \\ 2x+5y+4z-t=4 \\ x-3y-2z+3t=5 \end{array}\right.$ b) $(S_2)\left\{\begin{array}{c} x+y+2z+3t=1 \\ x+y+z-t=2 \end{array}\right.$

c) $(S_3)\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z+4t=10 \\ 2x-y+z-t=1 \\ 3x+y+4z+3t=11 \\ -2x+6y+4z+10t=18 \end{array}\right.$ c) $(S_4)\left\{\begin{array}{c} 2x+y=8 \\ -6y+7z=-19 \\ -x+z=-2 \\ 4x+7y-z=25 \end{array}\right.$

**Ex 2** Soit $(S)$ le système linéaire $AX=B$, avec

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

a) $A$ est-elle échelonnée par lignes? Echelonnée réduite par lignes? Qui est l'inconnue $X$?

b) En discutant sur le réel $\lambda$, résoudre $(S)$

**Ex 3** Soit $(m,a,b,c,d)\in\mathbb{R}^5$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^2-m-2 \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

a) Pour quelles valeurs de $m$ a-t-on $\operatorname{rg} A=4$? Combien de solutions le système $AX=Y$ admet-il de solutions?

b) Résoudre $AX=Y$ lorsque $m=1$, $a=1$, $b=2$, et $c=d=4$.

c) Pour quelles valeurs de $m$ a-t-on $\operatorname{rg} A<4$?

Pour chacune de ces valeurs de $m$, résoudre le système $AX=Y$ en discutant sur les valeurs de $a,b,c,d$.

d) Dans le cas où $m=2$, donner la réduite de Gauss-Jordan de $A$

**Ex 4** Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{c} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y=1 \\ 2x+3y=a \end{array}\right.$ en discutant sur $a$.

**Ex 5** Résoudre en discutant sur $a,b,c$ le système $(S)\left\{\begin{array}{lllll} 3x & -5y & +2z & +4t & =a \\ 7x & -4y & +z & +3t & =b \\ 5x & +7y & -4z & -6t & =c \end{array}\right.$

**Ex 6** Discuter sur $m$ les solutions de $(S)\left\{\begin{array}{c} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{array}\right.$

**Ex 7** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x-y+z-t=1 \\ 3x-2y+z=5 \\ 2x+2y-6z+3t=3 \\ 3y-6z+2t=\alpha \end{array}\right.$ (discuter sur $\alpha\in\mathbb{R}$).

**Ex 8** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x+2y+t=0 \\ x+\lambda y+\lambda z+t=0 \\ 2x+2y+(\lambda+1)z+2t=0 \\ x+y+z+\lambda t=0 \end{array}\right.$ (discuter sur $\lambda\in\mathbb{R}$).

**Ex 9** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{array}\right.$ (discuter sur $m\in\mathbb{R}$).

**Ex 10** Soient $m, a, b, c, d$ cinq réels. On considère le système $(\Sigma)$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ mx & + & y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & (m+1)\,y & + & z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & (m+2)\,z & + & t & = & d \end{array}\right.$$

On notera $A$ la matrice de $(\Sigma)$ , $B$ sa matrice augmentée.

a) Discuter sur les valeurs de $m$ le rang de la matrice $A$.

b) Dans le cas où $\operatorname{rg} A = 4$, combien $(\Sigma)$ admet-il de solutions?

c) Résoudre $(\Sigma)$ dans le cas où $m = 0$, en discutant sur les valeurs de $a, b, c, d$.

**Ex 11** Calculer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ex 12** En discutant sur les valeurs de $a, b, c$ voire $d$ (complexes), calculer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & a+c & ac \\ 1 & a+b & ab \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

**Ex 13** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver les réels $\lambda$ pour lesquels la matrice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

est de rang $< 3$, et pour chacun de ces réels, résoudre le système $A$

$$X = \lambda X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Ex 14** Soient $A_1, \dots, A_n$ $n$ points du plan muni d'un repère. On cherche des points $B_1, B_2, \dots, B_n$ tels que $A_i$ soit milieu de $[B_i B_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en posant $B_{n+1} = B_1$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les abscisses des points $A_1, \dots, A_n$ et $x_1, \dots, x_n$ celles des points $B_1, \dots, B_n$.

a) Ecrire le système vérifié par $x_1, \dots, x_n$. Quel est celui vérifié par les ordonnées $y_1, \dots, y_n$ de $B_1, \dots, B_n$ ?

b) Résoudre le système pour $n = 3$ et $n = 4$.
Donner une interprétation géométrique du résultat (donner la construction du polygone $B_1 \dots B_n$).

c) Résoudre le système dans le cas général.

d) A quelle condition la matrice du système est-elle inversible ? Sinon quel est son rang ?