EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme

$$P = (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n}$$

1. La formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} P &= (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(1 + (-1)^k\right) \binom{2n}{k} X^k \quad (\text{car } (-1)^{2n-k} = (-1)^k) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} X^{2k} \quad (\text{les termes d'indice impair s'annulant}) \\ &= 2 \left(X^{2n} + \binom{2n}{2n} X^{2n-2} + \cdots + \binom{2n}{2} X^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\deg P = 2n, \text{ et le coefficient dominant de } P \text{ est } 2}$$

2. Décomposition sur $\mathbb{C}[X]$:

a) L'équation $P(z) = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} (1+z)^{2n} = -(1-z)^{2n} &\iff (1+z)^{2n} = e^{i\pi} (1-z)^{2n} \\ &\iff (1+z)^{2n} = \left(e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)^{2n} (1-z)^{2n} \\ &\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \ / \ 1 + z = e^{\frac{i\pi}{2n}} (1-z)\, e^{\frac{ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \ / \ \left(e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} + 1\right) z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} - 1 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{2k+1}{2n} \notin \mathbb{Z}$, donc $e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} \neq -1$. On peut ainsi diviser, et

$$P(z) = 0 \iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \ / \ z = \frac{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} - 1}{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} + 1}$$

On obtient donc les $2n$ racines

$$\alpha_k = \frac{2i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4n} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4n}}}{2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4n}}}, \quad k \in [\![0, 2n-1]\!]$$

soit

$$\boxed{\alpha_k = i \tan \frac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k \in [\![0, 2n-1]\!]}$$

Elles sont bien distinctes car

$$0 \leqslant k \leqslant 2n-1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{4n} \leqslant \frac{(4n-1)\pi}{4n} < \pi$$

et $\tan$ est injective sur $[0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

b) Comme $\deg P = 2n$, on en déduit la décomposition de P sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{P = 2 \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - i \tan \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right)}$$

3. Décomposition sur $\mathbb{R}[X]$:

a) Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$0 \leq 2k+1 < 2n-1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{(2k+1)\,\pi}{4n} < \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

D'où

$$\tan\frac{(2k+1)\,\pi}{4n} > 0$$

b) P étant un polynôme réel, on sait que ses racines non réelles sont deux à deux conjuguées. Or d'après a)

$$\forall k \in [\![0, \underline{n-1}]\!]\,,\ \operatorname{Im}\alpha_k > 0$$

Ainsi, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ ne peuvent être conjuguées, et leur nombre est n. On en déduit que

$$P = 2\prod_{k=0}^{n-1}(X-\alpha_k)\prod_{k=0}^{n-1}(X-\overline{\alpha_k}) = 2\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - i\tan\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}\right)\left(X - i\tan\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}\right)$$

$$\boxed{P = 2\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}\right)}$$

4. Applications : la valeur de P en 0 donne alors

$$P(0) = 2 = 2\prod_{k=0}^{n-1}\tan^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}$$

i.e.

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\tan^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n} = 1}$$

En 1 :

$$P(1) = 2^n = 2\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \tan^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}\right) = 2\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\cos^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}}$$

d'où

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n} = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

5. On considére les polynômes

$$Q = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X + \tan^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}\right) \quad \text{et} \quad R = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}X^k$$

a) Il est clair que

$$Q\left(X^2\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2\frac{(2k+1)\,\pi}{4n}\right) = \frac{1}{2}P(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}X^{2k} = R\left(X^2\right)$$

Mais alors $\forall x \in \mathbb{R},\ Q\left(x^2\right) - R\left(x^2\right) = 0$, ce qui signifie que $Q - R$ s'annule pour tout réel positif.

En effet, si $x > 0$, on a

$$Q(x) - R(x) = Q\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) - R\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) = 0$$

Ayant une infinité de racines, $Q - R$ est donc le polynôme nul, et donc $Q = R$.

b) Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} X^k = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X + \tan^2 \frac{(2k+1)\,\pi}{4n} \right)$$

La somme de ses n racines $\left(\beta_k = -\tan^2 \dfrac{(2k+1)\,\pi}{4n},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right)$ vaut donc :

$$-\frac{\dbinom{2n}{2n-2}}{\dbinom{2n}{2n}} = \frac{2n\,(2n-1)}{2} = -n\,(2n-1)$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\,\pi}{4n} = n\,(2n-1)}$$

EXERCICE 2

Polynôme de Legendre. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P_n = \left(X^2-1\right)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$

1. De $\deg P_n = 2n$ on déduit $\deg L_n = 2n - n = n$.

De plus le terme dominant de P_n est X^{2n}, dont la dérivée n-ième vaut $\dfrac{(2n)!}{n!}X^n$.

$$\boxed{\deg L_n = n \text{ et le coefficient dominant de } L_n \text{ est} \dfrac{(2n)!}{n!}}$$

2. On a

$$\left(X^2-1\right)P_n' - 2nXP_n = 2nX\left(X^2-1\right)\left(X^2-1\right)^{n-1} - 2nX\left(X^2-1\right)^n = 0$$

Dérivons $n+1$ fois cette égalité : la formule de Leibniz donne

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}D^{(k)}\left(X^2-1\right)P_n^{(n+2-k)} - 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}D^{(k)}\left(X\right)P_n^{(n+1-k)} = 0$$

Soit, les dérivées d'ordre supérieur à 2 de X^2-1 s'annulant, de même que celles d'ordre supérieur à 1 de X :

$$\tbinom{n+1}{0}\left(X^2-1\right)P_n^{(n+2)} + \tbinom{n+1}{1}(2X)P_n^{(n+1)} + \tbinom{n+1}{2}2P_n^{(n)} - 2n\left(\tbinom{n+1}{0}XP_n^{(n+1)} + \tbinom{n+1}{1}P_n^{(n)}\right) = 0$$

En simplifiant,

$$\left(X^2-1\right)L_n'' + 2(n+1)XL_n' + n(n+1)L_n - 2n\left(XL_n' + (n+1)L_n\right) = 0$$

Au total

$$\boxed{\left(X^2-1\right)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0}$$

3. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note a_k le coefficient d'ordre k de L_n.

Ecrivons la relation précédente avec $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k,\ L_n' = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1},\ L_n'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2}$:

$$\left(X^2-1\right)\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2} + 2\sum_{k=1}^{n}ka_kX^k - n(n+1)\sum_{k=0}^{n}a_kX^k = 0$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_kX^k - \sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2} + \sum_{k=0}^{n}2ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n}n(n+1)a_kX^k = 0$$

Ou encore

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_kX^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k + \sum_{k=0}^{n}2ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n}n(n+1)a_kX^k = 0$$

Le coefficient de X^n vaut

$$\left(n(n-1) + 2n - n(n+1)\right)a_n = 0$$

Celui de X^{n-1}

$$\left((n-1)(n-2) + 2n - 2 - n(n+1)\right)a_{n-1} = -2na_{n-1}$$

En regroupant tous les autres termes, on obtient finalement

$$-2na_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\left(k(k-1) + 2k - n(n+1)\right)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2}\right)X^k = 0$$

Par identification des coefficients

$$\boxed{a_{n-1} = 0}$$

et $\forall k \in [\![0,n-2]\!]$:

$$\left(k(k-1) + 2k - n(n+1)\right)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

i.e.

$$\boxed{a_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{n(n+1) - k(k+1)}\, a_{k+2}}$$

4. P_n s'écrit $P_n = (X-1)^n (X+1)^n$, qui est la décomposition de P_n sur $\mathbb{R}[X]$, ce qui prouve que -1 et 1 sont racines d'ordre exactement n de P_n.On peut donc dire que

$$P_n(1) = P_n'(1) = \cdots = P_n^{(n-1)}(1) = 0 \text{ et } P_n^{(n)}(1) \neq 0, \quad i.e. \quad L_n(1) \neq 0$$

Ainsi 1 n'est pas racine de L_n, de même que -1.