Continuité

Ex 1 Ecrivons comme composées de fonctions élémentaires :

a) $a : x \mapsto \sqrt{1-\ln(x)}$ est la composée de $a_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ et de $a_2 : x \mapsto 1-x$ et de $\ln$:

$$a = a_1 \circ a_2 \circ \ln$$

b) $b : x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(x)}$ est la composée de $b_1 : x \mapsto \sqrt{x}$, de $b_2 : x \mapsto 1+x^2$ et de $\sin$:

$$b = b_1 \circ b_2 \circ \sin$$

c) $c : x \mapsto 1 - e^{2-x^2}$ est la composée de $c_1 : x \mapsto 1-x$ de $\exp$ et de $c_2 : x \mapsto 2-x^2$:

$$c = c_1 \circ \exp \circ c_2$$

d) $\delta : x \mapsto \cos\left(3x^2-1\right)$ est la composée de $\cos$ et de $\varphi : x \mapsto 3x^2-1$:

$$\delta = \cos \circ \varphi$$

e) $\varepsilon : x \mapsto \dfrac{1}{1-e^x}$ est la composée de $\operatorname{inv} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, de $\psi : x \mapsto 1-x$ et de $\exp$:

$$\varepsilon = \operatorname{inv} \circ \psi \circ \exp$$

f) $f : x \mapsto \dfrac{a\sqrt[3]{x}+b}{c\sqrt[3]{x}+d}$ est la composée de $f_1 : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et de $f_2 : x \mapsto \sqrt[3]{x}$:

$$f = f_1 \circ f_2$$

Ex 2 Continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$:

– Par somme et composée, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ ($x \mapsto \lfloor x \rfloor$ l'est).

– Soit $k \in \mathbb{Z}$. On sait que $\lim\limits_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k = \lfloor k \rfloor$ et $\lim\limits_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1$. Donc

* $f(k) = k$
* $\lim\limits_{k+} f = k + \sqrt{k-k} = k = f(k)$
* $\lim\limits_{k-} f = k-1+\sqrt{k-(k-1)} = k-1+1 = k = f(k)$

On en déduit que f est continue en k.

$\boxed{\text{Finalement } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

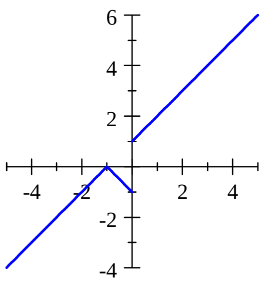
Ex 3 Prolongements par continuité en 0 :

a) $f : x \mapsto x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$. On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{x}{|x|}|x+1|$. Alors :

* $\forall x > 0,\ f(x) = x+1$, d'où $\lim\limits_{0+} f = 1$
* $\forall x \in \left]-1, 0\right[,\ f(x) = -(x+1)$, d'où $\lim\limits_{0-} f = -1$

$\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0}$.

Remarque : la courbe de f est une

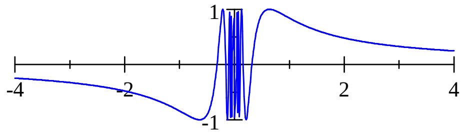


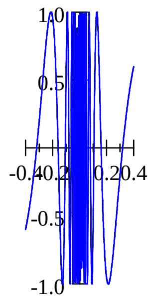
b) $f : x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$

- $*$ La suite de terme général $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ converge vers 0 et $f\left(x_n\right) = 0$.
- $*$ La suite de terme général $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ converge vers 0 et $f\left(x'_n\right) = 1$.

Cela nie le critère séquentiel et montre que f n'a pas de limite en 0, et n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Remarque : la courbe de f est "pathologique" au voisinage de 0 :



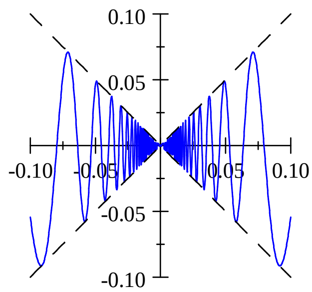


c) $f : x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$. On peut écrire pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left|f(x)\right| = |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$$

Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut 0.

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 0}$$



d) $f : x \mapsto \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{1/x} = \exp \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x}$. En notant $g : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, on a

$$\forall x \neq 0, \ \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x} = g'(0)$. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

il en résulte que $g'(0) = 1$, et en composant les limites $\boxed{\lim\limits_{0} f = e}$

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = e}$$

Ex 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(0)=0 \quad$ et $\quad \forall x \neq 0,\ f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

Les fonctions $\mathrm{inv}: x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$, donc $f=\varphi\times(\exp\circ\,\mathrm{inv})$ l'est aussi.

– En posant $y=\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, on a pour $x>0$: $f(x)=y^2e^y$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} y^2e^y=+\infty$

– De même $y=-\frac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\to} +\infty$, et pour $x<0$: $f(x)=y^2e^{-y}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y^2}{e^y}=0=f(0)$

Ainsi $\underline{f \text{ est continue à gauche en } 0, \text{ mais non continue à droite}}$.

Ex 5 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$: si $a\in\mathbb{R}$, alors $\forall h\in\mathbb{R}$

$$f(a+h)\overset{(*)}{=} f(a)+f(h)$$

Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=f(0)\overset{\text{(i)}}{=}0$, d'où $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$, qui assure la continuité de f en a.

Ex 6 Trouvons toutes les fonctions continues en 0 vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x) \quad (*)$.

On a l'intuition que seules les constantes conviennent. Prouvons-le.

Analyse : supposons que f soit solution du problème, et fixons un réel x.

La relation $(*)$ s'écrit aussi, en substituant $\frac{x}{2}$ à x :

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Mais alors $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{4}\right)\dots$ Montrons par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad H(n)$$

– $H(0)$ est une évidence.

– Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $H(n)$ est vraie, alors $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\overset{(*)}{=} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, d'où $H(n+1)$ est vraie.

On passe alors à la limite quand $n\to+\infty$: comme $\left(\dfrac{x}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la continuité de f en 0 donne :

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)$$

f est donc constante égale à $f(0)$.

Synthèse : il est clair que les fonctions constantes répondent au problème.

Conclusion : $\boxed{\text{seules les fonctions constantes répondent au problème}}$.

Dérivabilité

Ex 7 Calcul de dérivées :

a) $f : x \mapsto \sqrt[3]{\operatorname{th} x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ seulement (puisque $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0).

Par composition :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\operatorname{th}'(x)}{3\sqrt[3]{(\operatorname{th} x)^2}} = \frac{1}{3\operatorname{ch}^2(x)\sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}}} = \boxed{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ch}^6 x \operatorname{sh}^2 x}}}$$

b) $f : x \mapsto \ln(1+\sqrt[6]{x})$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $x \mapsto \sqrt[6]{x}$ n'est pas dérivable en 0).

Comme $\forall x > 0,\ \dfrac{d\sqrt[6]{x}}{dx} = \dfrac{dx^{1/6}}{dx} = \dfrac{1}{6}x^{-5/6}$, on en déduit

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{6x^{5/6}(1+\sqrt[6]{x})} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[6]{x})} = \boxed{\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}+x}}$$

c) $f : x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$ est définie pour tout réel x tel que $x^3 \neq 1$, soit sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Comme $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0, f est dérivable en tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ tel $x^3 \neq -1$, soit sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

On commence par dériver $\varphi : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \varphi'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

En composant avec $R : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et en notant $g = R\circ\varphi : x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ g'(x) &= -\frac{2}{(x-1)^2}\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}} \\
&= -\frac{2}{3(x-1)^2}\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \\
&= -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}}
\end{aligned}$$

En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f(x) = g(x^3)$, il vient par composition encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f'(x) = -\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^4(x^3+1)^2}}$$

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$ est définie sur $]1,+\infty[$ (on doit avoir $\ln x > 0$). Elle y est dérivable et en écrivant

$$\forall x > 0,\ f(x) = (\ln x)^{-1/2}$$

on a

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{2x}(\ln x)^{-3/2} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{1}{x\ln(x)\sqrt{\ln(x)}}}$$

e) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $cd\neq 0$ et $a\neq 0$. $f:x\mapsto\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ est définie pour tout réel x tel que $\dfrac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0$, ce qui revient à $(ax+b)(cx+d)\geqslant 0$ et $x\neq -\frac{d}{c}$.

* <u>Pour $ac>0$</u>, f est donc définie sur "à l'extérieur" de $-\frac{d}{c}$ et $-\frac{b}{a}$, sans $-\frac{d}{c}$
* <u>Pour $ac<0$</u>, f est définie sur "à l'intérieur" de $-\frac{d}{c}$ et $-\frac{b}{a}$, sans $-\frac{d}{c}$

f est dérivable sur le même ensemble, privé du point $-\frac{b}{a}$ (car $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0).
En notant $\mathcal{D}$ cet ensemble de dérivabilité, on a

$$\forall x\in\mathcal{D},\ \frac{d}{dx}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(cx+d)-cax+b}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

donc

$$\forall x\in\mathcal{D},\ \boxed{f'(x)=\frac{1}{2}\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\sqrt{\frac{cx+d}{ax+b}}}$$

f) $f:x\mapsto\dfrac{ax^n+b}{cx^n+d}$ (mêmes hypothèses sur a,b,c,d) est définie pour tout réel x tel que $x^n\neq-\frac{d}{c}$

* Si n est pair et $\frac{d}{c}>0$, f est définie sur $\mathbb{R}$.
* Si n est pair et $\frac{d}{c}<0$, f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt[n]{-\frac{d}{c}},-\sqrt[n]{-\frac{d}{c}}\right\}$
* Si n est impair, f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt[n]{-\frac{d}{c}}\right\}$

Rationnelle, f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$, et en utilisant le calcul du e), on a par composée :

$$\forall x\in\mathcal{D},\ \boxed{f'(x)=nx^{n-1}\frac{ad-bc}{(cx^n+d)^2}}$$

g) $f:x\mapsto\sin(\cos(\sin(x)))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par composition :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)&=\frac{d}{dx}\cos(\sin(x))\times\cos(\cos(\sin(x)))\\&=\cos x\times(-\sin(\sin x))\times\cos(\cos(\sin(x)))\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=-\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))}$$

h) $f:x\mapsto\left(x^2+1\right)^2\left(x^3-1\right)^2$ est polynomiale, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, et par produit et composition :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)&=4x\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)^2+\left(x^2+1\right)^2\left(6x^2\right)\left(x^3-1\right)\\&=2x\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)\left[2\left(x^3-1\right)+3x\left(x^2+1\right)\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=2x\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)\left(5x^3+3x-2\right)}$$

i) $f:x\mapsto\sqrt[3]{\arcsin x}$ est définie sur $[-1,1]$, mais $\arcsin$ n'est pas dérivable en -1 et 1. De plus $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0, et $\arcsin$ s'annule en 0. On en déduit sue f est dérivable seulement sur $\mathcal{D}=]-1,0[\cup]0,1[$. De plus par composition :

$$\forall x\in\mathcal{D},\ \boxed{f'(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{\arcsin^2 x}}}$$

j) $f:x\mapsto\arctan(\operatorname{th}x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions qui le sont, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{\operatorname{th}'(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}=\boxed{\frac{1-\operatorname{th}^2(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}}$$

k) $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (puisque $\operatorname{ch} \geqslant 1$), et

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \left(\frac{1}{x}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x^2}\right)\exp\left(\frac{\ln \operatorname{ch} x}{x}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x\right)\operatorname{ch}(x)^{1/x}}$$

l) $f : x \mapsto (x+2)e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composée et produit, et

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = e^{1/x} - \frac{x+2}{x^2}e^{1/x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2 - x - 2\right)e^{1/x}}$$

m) $f : x \mapsto x^{\ln(x)} = e^{\ln^2(x)}$ est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{2\ln x}{x}e^{\ln^2(x)} = 2\frac{\ln x}{x}x^{\ln(x)}$$

$$\boxed{f'(x) = 2\ln(x)\, x^{\ln(x)-1}}$$

n) $f : x \mapsto x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x} = e^{e^{x\ln x}\ln x}$ est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$.

On a dans un premier temps

$$\forall x > 0,\ \frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = (1+\ln x)\,e^{x\ln x}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x \ln x &= (1+\ln x)\,e^{x\ln x}\ln x + \frac{x^x}{x}\\ &= (1+\ln x)\,x^x \ln x + x^{x-1}\\ &= \left[(1+\ln x)\ln x + x^{-1}\right]x^x\end{aligned}$$

Ainsi par composition

$$\forall x > 0,\ \boxed{f'(x) = \left[(1+\ln x)\ln x + \frac{1}{x}\right]x^x x^{(x^x)}}$$

Ex 8 Soit $f : x \mapsto 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

a) Le signe de $\varphi : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est le même que celui de $x \mapsto (1-x)(1+x)$, soit positif sur $]-1,1]$.
Comme $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$, $f(x)$ est définie pour tout x tel que $\sin x \neq -1$, soit sur la réunion des intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{D}_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$$

Par composition ($2\arctan \circ R \circ \varphi \circ \sin$, où R est la fonction racine), f est continue sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$.
De plus $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{\varphi(x)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -1^+} 2\arctan\left(\sqrt{\varphi(x)}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Par composition avec $\sin$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+2k\pi} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

On peut prolonger f par continuité en $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ en posant $f\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \dfrac{\pi}{2}$, et obtenir une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
En revanche, R n'étant pas dérivable en 0, f ne l'est pas partout où $\varphi\circ\sin$ s'annule, c'est-à-dire pour tout x tel que $\sin x \neq 1$, soit tout réel x de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$. Il en résulte que f est dérivable sur

$$\mathcal{D}' = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$$

b) Si $k\in\mathbb{Z}$, posons $I_k = \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et calculons f' sur I_k :
Remarquons dans un premier temps que pour $x \in]-1,1]$, $\varphi(x) = -1 + \dfrac{2}{1+x}$, donc $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$.
Ainsi par composée avec R, pour x dans $]-1,1[$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{2}{(1+x)^2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

et en recomposant par $\arctan$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} &= -\frac{2}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} \\
&= -\frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{1+x+1-x} \\
&= -\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

qui est la dérivée de $g = 2\arctan\circ R\circ\varphi$. On compose enfin à droite par $\sin$ (car $f = g\circ\sin$) :

$$\forall x\in I_k,\ f'(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x\in I_k,\ f'(x) = -\operatorname{signe}(\cos x)}$$

c) Or si $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in I_k$, on a $\operatorname{signe}(\cos x) = (-1)^k$, de sorte que $\forall x\in I_k,\ f'(x) = -(-1)^k$.
On en déduit qu'il existe une constante C_k telle que

$$\forall x\in I_k,\ f(x) = -(-1)^k x + C_k$$

On calcule la valeur en $k\pi\in I_k$: $f(k\pi) = 2\arctan\sqrt{1} = \dfrac{\pi}{2}$. Mais aussi $f(k\pi) = C_k - (-1)^k k\pi$.

Ainsi $C_k = \dfrac{\pi}{2} + (-1)^k k\pi$ et pour tout $x \in I_k$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + (-1)^k k\pi - (-1)^k x$$

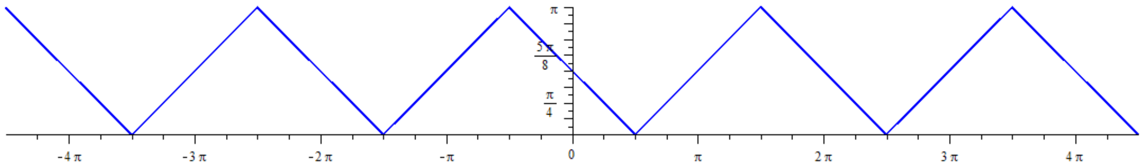
soit

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - (-1)^k (x - k\pi)}$$

Pour avoir l'allure de la courbe de f, remarquons que f est 2π-périodique, et qu'on a établi :

$$\begin{array}{rcl} \forall x & \in & I_0 = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \ f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x \\ \forall x & \in & I_1 = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[, \ f(x) = \dfrac{\pi}{2} + (x - \pi) = x - \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

Par continuité, ces expressions restent vraies aux bornes de ces intervalles, et on a f sur la période $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$:



d) Retrouvons l'expression de f sur $I_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ directement : on passe par "l'angle moitié" :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} \cos^2 \theta = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \\ \sin^2 \theta = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \end{cases}$$

donc si $x \in I_0$:

$$\begin{array}{rcl} 1 + \sin x & = & 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) \\ 1 - \sin x & = & 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2\arctan\sqrt{\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)}} \\ & = & 2\arctan\sqrt{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)} \\ & = & 2\arctan\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right| \end{array}$$

Or $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc on peut simplifier la valeur absolue, puis l'arctangente :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right) \\ & = & 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) \\ & = & \dfrac{\pi}{2} - x \quad \text{CQFD.} \end{array}$$

Ex 9 a) Montrons que $\forall x\in\mathbb{R},\ |\arctan[\mathrm{sh}(x)]|=\arccos\big[\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\big]$

Les deux membres sont pairs, il suffit donc de montrer cette égalité sur $\mathbb{R}_+$, soit

$$\forall x\geqslant 0,\ \arctan(\mathrm{sh}(x))=\arccos\Big(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\Big)$$

Soient f et g les fonctions que définissent le membre de gauche et le membre de droite de cette égalité.

f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$ par composition, et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\arccos$ n'est pas dérivable en 1 et $\frac{1}{\mathrm{ch}\,0}=1$).

Alors pour tout réel $x>0$:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{ch}\,x}{1+\mathrm{sh}^2 x}=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}=\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$$

et

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}\frac{1}{\sqrt{1-1/\mathrm{ch}^2 x}}\\&=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 x-1}}\quad(\text{car }\ \mathrm{ch}\,x>0)\\&=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 x}}\\&=\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\quad(\text{car }\forall x>0,\ \mathrm{sh}\,x>0)\end{aligned}$$

Ainsi f' et g' sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f et g diffèrent d'une constante sur cet intervalle :

$$\exists C\in\mathbb{R}\ /\ \forall x>0,\ f(x)=g(x)+C$$

En passant à la limite en 0 on a par continuité de f et g : $f(0)=g(0)+C$.

Or $f(0)=\arctan 0=0$ et $g(0)=\arccos 1=0$. d'où $C=0$: ainsi

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ coïncident sur } \mathbb{R}_+ \text{ et sur } \mathbb{R} \text{ par parité, CQFD}}$$

b) Montrons que $\forall x\in\mathbb{R},\ \arcsin(\mathrm{th}(x))=\arctan(\mathrm{sh}(x))$

Notons f et g les fonctions que définissent le membre de gauche et le membre de droite de cette égalité. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ (g évidemment et f car th prend ses valeurs dans $]-1,1[$), et dérivables. De plus $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{1-\mathrm{th}^2 x}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}}=\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 x}}\overset{\mathrm{ch}\,x>0}{=}\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$$

$$g'(x)=\frac{\mathrm{ch}\,x}{1+\mathrm{sh}^2 x}=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}^2 x}=\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$$

Il en résulte que f et g diffèrent d'une constante sur $\mathbb{R}$. Or $f(0)=g(0)=0$, d'où

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)\,,\text{CQFD}$$

Ex 10 Soit f une fonction dérivable en a. On cherche $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

Pour tout $h\neq 0$ suffisamment proche de a, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}&=\frac{1}{2}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]\end{aligned}$$

Or par hypothèse $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et vaut $f'(a)$.

De même $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{h'\to 0}\frac{f(a+h')-f(a)}{h'}=f'(a)$ grâce au changement de variable $h'=-h$.

Il en résulte :

$$\boxed{\text{la limite cherchée existe et vaut } f'(a)}$$

Ex 11 Montrons que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

– La fonction $r : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sin est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
  Il en résulte que $\underline{f = r \times (\sin \circ r) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

– Dérivabilité en 0 : on a pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

  En posant $y = \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \sin'(0) = 1$. Donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 1}$$

– Continuité de f' en 0 : on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{x}\right) + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} + \cos\left(\sqrt{x}\right)\right]$$

  Le calcul mené plus haut permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1 = f'(0)$:

$$\boxed{f' \text{ est continue en } 0}$$

Bilan : $\boxed{f \text{ est bien de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

Ex 12 Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

$$\forall x \neq 0,\ |f(x)| = x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant x^2$$

Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut 0 :

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 0}$$

– En notant encore f ce prolongement, on a pour tout $x \neq 0$:

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$$

  Le théorème des gendarmes entraine encore $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc $\underline{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ de dérivée nulle}}$.

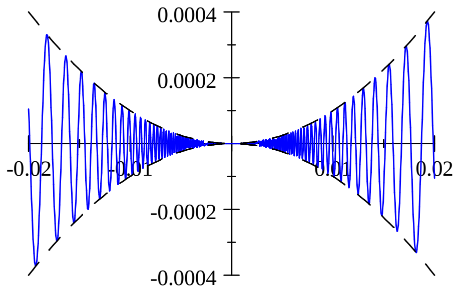
  De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composée, donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

– Mais pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

  Or on a vu que $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. Mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (en posant $y = \frac{1}{x}$, on est ramené à $\sin y$ en $+\infty$). Il s'ensuit que f' n'a pas de limite en 0, et donc qu'elle n'est pas continue en 0. Finalement

$$\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$



Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant |\sin(x)|$. Montrons que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

On remarque immédiatement que, f étant dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_k \cos(kx) \quad \text{donc} \quad f'(0) = \sum_{k=1}^{n} ka_k$$

Or $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ (car $f(0) = 0$). L'hypothèse faite sur f s'écrit donc, en divisant par $|x|$:

$$\forall x \neq 0,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

Le passage à la limite quand $x \to 0$ dans cette inégalité donne alors

$$|f'(0)| \leqslant |\sin'(0)| \quad \text{soit} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} ka_k\right| \leqslant 1 \quad \text{CQFD.}$$

Ex 14 Pour tout paramètre m, on définit $f_m : x \mapsto \frac{x+m}{x^2+1}$ dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_m$.

Calculons la dérivée de f_m :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_m(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x(x+m)}{(x^2+1)^2}$$

a) Si $m \in \mathbb{R}$, la tangente au point d'abscisse 0 à $\mathcal{C}_m$ a pour pente $f'_m(0) = 1$, indépendant de m. Il en résulte que

$$\boxed{\text{toutes les tangentes au point d'abscisse } 0 \text{ aux courbes } \mathcal{C}_m \text{ sont parallèles}}$$

b) La tangente T_m au point d'abscisse 1, puisque $f'_m(1) = \frac{1}{2} - \frac{1+m}{2} = -\frac{m}{2}$ a quant à elle pour équation :

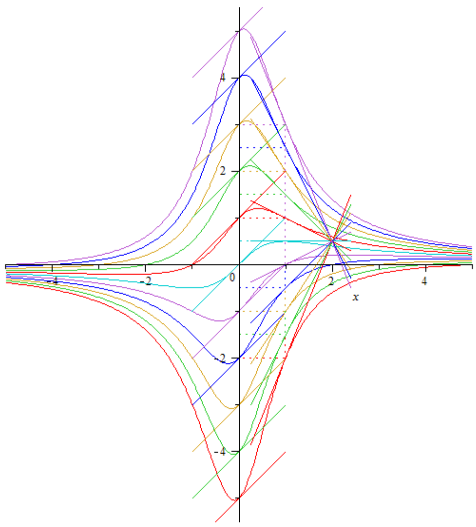
$$y = \frac{1+m}{2} - \frac{m}{2}(x-1)$$

Isolons le paramètre m dans cette équation :

$$y - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}(2-x)$$

On observe alors que si $M(x,y) \in T_m$ et que $x = 2$, alors $y = \frac{1}{2}$. Cela démontre que

$$\boxed{\text{toutes les tangentes au point d'abscisse aux courbes } \mathcal{C}_m \text{ concourent en } A\left(2, \tfrac{1}{2}\right)}$$



Ex 15 Soient $0 < a < b$. et $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudions la monotonie de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

$f(x)$ n'a de sens que si $1 + ax > 0$ et $1 + bx > 0$ *i.e.* $x > -\frac{1}{a}$ et $x > -\frac{1}{b}$, et si $\ln(1+bx) \neq 0$, soit $x \neq 0$.

En particulier f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f'(x) &= \frac{\dfrac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \dfrac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\big(\ln(1+bx)\big)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\big(\ln(1+bx)\big)^2}\end{aligned}$$

avec

$$g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax).$$

A son tour g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= a\,(b\ln(1+bx) + b) - b\,(a\ln(1+ax) + a) \\ &= ab\,(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Car $1 + bx > 1 + ax$ et $0 < a < b$. Il s'ensuit que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ f'(x) \geqslant 0$$

Au total, f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} > 0$, donc $f\left(\frac{1}{a}\right) \geqslant f\left(\frac{1}{b}\right)$, c'est-à-dire :

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)} \geqslant \frac{\ln\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)}{\ln 2}$$

Puis en multipliant chancun des membres par le réel positif $\ln 2 \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, il vient finalement l'inégalité :

$$\boxed{\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2}$$

Ex 16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

– Soient $x \leqslant x'$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f(x) \geqslant f(x')$, donc $f(f(x)) \leqslant f(f(x'))$: $\boxed{f \circ f \text{ est croissante}}$.

  De plus $f(f(f(x))) \geqslant f(f(f(x')))$ donc $\boxed{f \circ f \circ f \text{ est décroissante}}$

– On suppose f dérivable sur $\mathbb{R}$. Redémontrons les résultats précédents.

  * Par composée, $f \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$
    Comme f' est négative sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que $(f \circ f)'$ est positive sur $\mathbb{R}$ et $\underline{f \circ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$.

  * De même pour tout réel x :

    $$(f \circ f \circ f)'(x) = f'(x) \times (f \circ f)'(f(x)) = f'(x) \times f'(f(x)) \times f'(f(f(x))) \leqslant 0$$

    donc $\underline{f \circ f \circ f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}}$.

Ex 17 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x|^\alpha$, où $k > 0$ et $\alpha > 1$.

Fixons x dans I. Alors pour tout $y \in I \setminus \{x\}$,

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant k\,|y - x|^{\alpha - 1}$$

Or comme $\alpha - 1 > 0$, on a $\lim\limits_{y \to x} |y - x|^{\alpha-1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que

$$\lim_{y \to x}\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = 0$$

Autrement dit f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

Cela étant valable pour tout réel $x \in I$, f est ainsi dérivable sur I de dérivée nulle.

Comme I est un intervalle, cela entraine que $\boxed{f \text{ est constante sur } I}$ CQFD.

Ex 18 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \leqslant f(x)$ et $f(0) = 0$.

Etudions les variations de $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par produit, et

$$\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = (f'(x) - f(x))\, e^{-x}$$

Compte tenu de l'hypothèse $f'(x) \leqslant f(x)$, on a $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) \leqslant 0$. g est donc décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. Mais $g(0) = f(0) = 0$. On en déduit donc :

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_+}$$

Ex 19 a) Montrons que la somme et le produit de deux fonctions de classe C^1 sur I sont de classe C^1 sur I.

Soient donc f et g deux fonctions de classe C^1 sur I. Alors elles sont dérivables sur I, et on sait que leur somme $f + g$ aussi. De plus

$$(f + g)' = f' + g'$$

Or f' et g' sont continues, et on sait que leurt somme aussi. Donc $(f + g)'$ est continue.

Au total, $\underline{f + g \text{ est bien de classe } C^1 \text{ sur } I}$.

b) Montrons que la composée de deux fonctions de classe C^1 l'est aussi.

Soient donc $f \in C^1(I, J)$ et $g \in C^1(J, \mathbb{R})$. On sait que $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Mais g' est continue sur J et f est continue sur I. Par composée, $g' \circ f$ est continue sur I.

De plus f' est continue sur I. Par produit $f' \times (g' \circ f) = (g \circ f)'$ est continue sur I.

Au total $\underline{g \circ f \text{ est bien de classe } C^1 \text{ sur } I}$.

Ex 20

– $\underline{\text{Soit } f \text{ une fonction paire dérivable sur } \mathbb{R}}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. En dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x) \quad \text{soit} \quad f'(-x) = -f'(x)$$

$$\boxed{f' \text{ est impaire}}$$

– $\underline{\text{Soit } f \text{ une fonction impaire dérivable sur } \mathbb{R}}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. En dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x) \quad \text{soit} \quad f'(-x) = f'(x)$$

$$\boxed{f' \text{ est paire}}$$

– $\underline{\text{Soit } f \text{ une fonction } T\text{-périodique dérivable sur } \mathbb{R}}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$. En dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x + T) = f'(x + T)$$

$$\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique}}$$

Ex 21 Soit $f:\begin{array}{ccc} \left]0,\frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sin x}\end{array}$

Inverse d'une fonction strictement positive strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, f est strictement positive strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Comme elle y est continue, elle réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans son intervalle image. Mais $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\sin x}=+\infty$:

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right] \text{ dans } [1,+\infty[}$$

De plus f est définie et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par quotient, et

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\ f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Cette dérivée est strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ mais s'annule en $\frac{\pi}{2}$.
Donc f^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ privé de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, i.e. sur $]1,+\infty[$, et

$$\forall x>1,\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=-\frac{\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Mais par définition $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, soit $\frac{1}{\sin f^{-1}(x)}=x$, ou $\sin\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{x}$.
Par ailleurs on peut écrire $\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)=1-\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)$, avec $f^{-1}(x)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(f^{-1}(x)\right)>0$.
Ainsi

$$\cos\left(f^{-1}(x)\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\overset{x\geq 1}{=}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Finalement, on a la dérivée de f^{-1} :

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\boxed{-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

Remarque : on peut exprimer directement f^{-1} avec la fonction $\arcsin$:

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\ \forall y\in[1,+\infty[,\ f(x)=y\Longleftrightarrow \sin x=\frac{1}{y}\overset{x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Longleftrightarrow} x=\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Donc

$$\forall x\in[1,+\infty[,\ f^{-1}(x)=\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ f^{-1}(x)=-\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Ex 22 On pose $f:x\mapsto x^2+\ln(x)$.

a) Somme de deux fonctions continues strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans son intervalle image $\mathbb{R}$. En effet il est clair que $\lim\limits_{0} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.
On note g la réciproque de f.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f':x\mapsto 2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
Un théorème affirme donc que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\boxed{\frac{g(x)}{1+2g^2(x)}}$$