Ex 1 Résolution d'équations différentielles du premier ordre :

a) $\left\{\begin{array}{l} y' - 5y = e^{2x} + 8x + \sin x \\ y(0) = -1 \end{array}\right.$: la solution de l'équation homogène est de la forme $\boxed{x \mapsto Ce^{5x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

$*$ On peut chercher une solution de $y' - 5y = e^{2x}$ sous la même forme $y : x \mapsto Ae^{2x}$, avec $A \in \mathbb{R}$.
En reportant dans l'équation, cela s'écrit pour tout x réel :

$$(2A - 5A)\, e^{2x} = e^{2x} \quad \text{soit} \quad A = -\frac{1}{3}$$

$\boxed{y_1 : x \mapsto -\frac{1}{3}e^{2x}}$ est donc solution de $y' - 5y = e^{2x}$.

$*$ On peut chercher une solution de $y' - 5y = 8x$ sous la même forme $y : x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
En reportant dans l'équation, cela s'écrit pour tout x réel :

$$a - 5(ax + b) = 8x \quad \text{soit} \quad -5ax + (a - 5b) = 8x$$

L'identification des coefficients donne facilement $a = -\frac{8}{5}$ et $b = -\frac{8}{25}$

$\boxed{y_2 : x \mapsto -\frac{8}{25}(5x + 1)}$ est donc solution de $y' - 5y = 8x$.

$*$ On peut chercher une solution de $y' - 5y = e^{ix}$ sous la même forme $y : x \mapsto Be^{ix}$, avec $B \in \mathbb{R}$.
En reportant dans l'équation, cela s'écrit pour tout x réel :

$$(i - 5)\, Be^{ix} = e^{ix} \quad \text{soit} \quad B = \frac{1}{i - 5} = -\frac{5 + i}{26}$$

$y_{\mathbb{C}} : x \mapsto -\frac{1}{26}(5 + i)\, e^{ix}$ est donc solution de $y' - 5y = e^{ix}$, et en extrayant la partie imaginaire :
$\boxed{y_3 : x \mapsto -\frac{1}{26}(\cos x + 5 \sin x)}$ est donc solution de $y' - 5y = \sin x$.

$*$ La solution générale de l'équation complète est donc

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{8}{25}(5x + 1) - \frac{1}{26}(\cos x + 5 \sin x) + Ce^{5x}}, C \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = -1$ donne

$$C = -1 + \frac{1}{3} + \frac{8}{25} + \frac{1}{26} = -\frac{601}{1950}$$

L'unique solution du problème est donc

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{25}(5x + 1) - \frac{1}{26}(\cos x + 5 \sin x) - \frac{601}{1950}e^{5x}}$$

b) $\left\{\begin{array}{l} y' + 3y = 6 \\ y(0) = 3 \end{array}\right.$: la solution de l'équation homogène est de la forme $\boxed{x \mapsto Ce^{-3x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

On peut chercher une solution particulière constante que l'on trouve vite égale à 2, puis la condition initiale s'écrit pour $y : x \mapsto 2 + Ce^{-3x}$: $C = 1$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est donc

$$\boxed{y : x \mapsto 2 + e^{-3x}}$$

c) $2y' - 3y = \sin^2(x) : (E)$, qui se ramène après linéarisation à : $2y' - 3y = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$

i. L'équation homogène admet les solutions $x \mapsto Ce^{3x/2},\ C \in \mathbb{R}$.

ii. On trouve facilement une solution de $2y' - 3y = \frac{1}{2}$: la constante $y_1 : x \mapsto 6$

iii. Pour $2y' - 3y = -\frac{\cos(2x)}{2}$, on peut chercher une solution complexe de $2y' - 3y = -\frac{1}{2}e^{2ix}$ sous la forme $y \mapsto Ke^{2ix}$, puis en prendre la partie réelle. On a en reportant dans l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4iKe^{2ix} - 3Ke^{2ix} = -\frac{1}{2}e^{2ix} \quad \text{soit} \quad K = \frac{1}{2}\frac{1}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{50}$$

On obtient alors une solution de $2y' - 3y = -\frac{\cos(2x)}{2}$:

$$y_2 : x \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{1}{50}(3+4i)\,e^{2ix}\right) = \frac{1}{50}\left(3\cos(2x) - 4\sin(2x)\right)$$

iv. La solution générale de l'équation (E) est alors, par superposition, de la forme :

$$\boxed{y : x \mapsto 6 + \tfrac{1}{50}\left(3\cos(2x) - 4\sin(2x)\right) + Ce^{3x/2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

d) $\begin{cases} y' + 2y = \operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

i. L'équation homogène (E_0) admet les solutions $x \mapsto Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}$.

ii. On cherche une solution de $y' + 2y = \frac{e^{2x}}{2}$ sous la même forme $x \mapsto Ae^{2x},\ A \in \mathbb{R}$. L'équation s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (2A + 2A)\,e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1}{8}$$

$\boxed{y_1 : x \mapsto \frac{1}{8}e^{2x}}$ est donc solution de $y' + 2y = \frac{e^{2x}}{2}$.

iii. Puisque $x \mapsto e^{-2x}$ est solution de (E_0) on cherche une solution de $y' + 2y = \frac{e^{-2x}}{2}$ sous la forme

$$y : x \mapsto Axe^{-2x},\ A \in \mathbb{R}$$

Alors $y' : x \mapsto A(1-2x)\,e^{-2x}$, et l'équation s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Ae^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{2} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1}{2}$$

$\boxed{y_2 : x \mapsto \frac{1}{2}xe^{2x}}$ est donc solution de $y' + 2y = \frac{e^{-2x}}{2}$.

iv. La solution générale de l'équation (E) est alors, par superposition, de la forme :

$$\boxed{y : x \mapsto \tfrac{1}{8}e^{2x} + \tfrac{1}{2}xe^{-2x} + Ce^{-2x}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

v. La condition initiale $y(0) = 0$ donne $C = -\frac{1}{8}$. L'unique solution du problème est donc

$$\boxed{y : x \mapsto \tfrac{1}{8}e^{2x} + \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\right)e^{2x}}$$

e) $(E) : y' - xy = 2x - x^3$. On peut la résoudre sur $\mathbb{R}$.

* L'équation homogène $y' - xy = 0$ a des solutions de la forme $\boxed{y_0 : x \mapsto Ce^{x^2/2}}$, où $C \in \mathbb{R}$.
* La fonction $\boxed{y_1 : x \mapsto x^2}$ est clairement solution de (E).
  Remarque : si on ne le voit pas, la méthode de la variation de la constante, longue, la redonne.
* La solution générale de (E) est donc

$$\boxed{y : x \mapsto x^2 + Ce^{x^2/2}},\ C \in \mathbb{R}$$

f) $(1-x)^2\,y' - (2-x)\,y = 0$ sur $I =]-\infty, 1[$ où $(1-x)^2$ ne s'annule pas.
Pour avoir les solutions de cette équation homogène, on calcule pour tout $x \in I$

$$\int \frac{2-x}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$$

d'où les solutions de (E) :

$$\boxed{y_0 : x \mapsto C\frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

g) $(E) : xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0,1[$, où x ne s'annule pas et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ continue.

- L'équation homogène $xy' + 3y = 0$ a des solutions de la forme $\boxed{y_0 : x \mapsto Ce^{-3\ln x} = \dfrac{C}{x^3}}$, où $C \in \mathbb{R}$.

- <u>Recherche d'une solution particulière : méthode de la variation de la constante</u> : on cherche y sous la forme

$$y : x \mapsto \frac{C(x)}{x^3}, \quad \text{avec } C \in D^1(]0,1[)$$

Alors $\forall x \in]0,1[$,

$$y'(x) = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$$

Et (E) devient

$$\frac{C'(x)}{x^2} = \frac{1}{1-x^2} \iff C'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$$

L'intégration n'est pas difficile :

$$C : x \mapsto -x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{convient}$$

D'où la solution de (E) :

$$\boxed{y_1 : x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\ln\frac{1+x}{1-x}}$$

- La solution générale de (E) est ainsi

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\left(C + \ln\frac{1+x}{1-x}\right)} \quad C \in \mathbb{R}$$

h) $y'\cos^2 x + y = \tan x \quad$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

- L'équation homogène $y'\cos^2 x + y = 0$ a des solutions de la forme $\boxed{y_0 : x \mapsto Ce^{-\tan x}}$, où $C \in \mathbb{R}$.

- Bricolons une solution de (E) en remarquant que $y = \tan$ vérifie $y'\cos^2 + y = 1 + \tan$.
Après éventuellement quelques essais, on trouve la solution particulière $\boxed{y_1 : x \mapsto \tan x - 1}$

- La solution générale de (E) est ainsi

$$\boxed{y : x \mapsto \tan x - 1 + Ce^{-\tan x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

i) $y' - y\tan x = \sin(2x)$, Exact solution is: $\left\{\dfrac{C_{28}}{\cos x} - \dfrac{1}{3}\cos 2x - \dfrac{1}{3}\right\}$avec $\quad y(0) = 0 \quad$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$

- Comme $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$

$$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\ln\cos x$$

Les solutions de l'équation homogène $y' - y\tan x = 0$ sont de la forme

$$\boxed{y_0 : x \mapsto Ce^{-\ln\cos x} = \frac{C}{\cos x}} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

- <u>Méthode de la variation de la constante</u> : on cherche y sous la forme

$$y : x \mapsto \frac{C(x)}{\cos x}, \quad \text{avec } C \in D^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

Alors $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$,

$$y'(x) = \frac{C'(x)}{\cos x} - \frac{\sin x C(x)}{\cos^2 x}$$

et (E) devient

$$\frac{C'(x)}{\cos x} - \frac{\sin x C(x)}{\cos^2 x} + \frac{\tan x C(x)}{\cos x} = \sin(2x) \iff C'(x) = \cos x \sin(2x) = 2\cos^2 x \sin x$$

On en déduit facilement (forme "$u'u^2$") que

$$C(x) = -\frac{2}{3}\cos^3 x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$*$ Il vient la solution générale de (E) :

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{2}{3}\cos^2 x + \frac{C}{\cos x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

Remarque : on pouvait aussi tester par intuition la fonction $\cos^2$ et ajuster la solution par un facteur multiplicatif.

Ex 2 Résolution du **système différentiel**

$$(S)\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) - z(t) \\ y'(t) = \qquad -y(t) + z(t) \\ z'(t) = \qquad 2z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 3 \end{cases}$$

La troisième ligne et la condition $z(0) = 3$ équivalent à $z : t \mapsto 3e^{2t}$. (S) devient donc

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = 3y(t) - z(t) \\ y'(t) + y(t) = 3e^{2t} \\ z(t) = 3e^{2t} \end{cases}$$

On résout la deuxième ligne $(E_2) : y' + y = 3e^{2t}$ et la condition $y(0) = 0$:

- L'équation homogène a pour solutions $y_0 : t \mapsto Ce^{-t},\ C \in \mathbb{R}$
- Une solution de (E_2) se cherche sous la forme $t \mapsto Ae^{2t}$. On trouve $A = 1$.
- La solution générale $y \mapsto Ce^{-t} + e^{2t}$ et $y(0) = 0$ donnent $C = -1$

Ainsi (S) devient

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = -3e^{-t} \\ y(t) = -e^{-t} + e^{2t} \\ z(t) = 3e^{2t} \end{cases}$$

On résout la première ligne $(E_1) : x' + x = -3e^{-t}$ et la condition $x(0) = 1$:

- L'équation homogène a pour solutions $x_0 : t \mapsto Ce^{-t},\ C \in \mathbb{R}$
- Une solution de (E_1) se cherche sous la forme $t \mapsto Ate^{-t}$. On trouve $A = -3$.
- La solution générale $x \mapsto Ce^{-t} - 3te^{-t}$ et $x(0) = 1$ donnent $C = 1$.

Finalement (S) admet la solution définie pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = e^{-t} - 3e^{-t} \\ y(t) = -e^{-t} + e^{2t} \\ z(t) = 3e^{2t} \end{cases}}$$

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2xy' + y = x^n$ (E)

a) On résout (E) sur $]0, +\infty[$.

- Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_0 : x \mapsto Ce^{-\frac{\ln x}{2}} = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Pour $y : x \mapsto x^n$, le premier membre de (E) donne $(2n+1)\, x^n$.

  Avec un peu d'imagination, on trouve alors la solution particulière de (E) : $y_1 : x \mapsto \dfrac{x^n}{2n+1}$

- La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est donc

$$y : x \mapsto \frac{x^n}{2n+1} + \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) On résout (E) sur $]-\infty, 0[$, et on trouve sans encombre la solution générale

$$y : x \mapsto \frac{x^n}{2n+1} + \frac{C}{\sqrt{-x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) Solutions sur $\mathbb{R}$.

- Analyse : supposons avoir une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$. alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{x^n}{2n+1} + \dfrac{C_1}{\sqrt{x}} \\ \exists C_2 \in \mathbb{R} \ / \ \forall x < 0,\ y(x) = \dfrac{x^n}{2n+1} + \dfrac{C_2}{\sqrt{-x}} \\ y(0) = 0^n \text{ en substituant } 0 \text{ à } x \text{ dans } (E) \end{cases}$$

  Mais alors, si $C_1 \neq 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = \pm\infty$ qui contredit la continuité de y en 0. D'où $C_1 = 0$.

  De même on montre que $C_2 = 0$. Il reste :

$$y : x \mapsto \frac{x^n}{2n+1}$$

- Synthèse : cette dernière fonction est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et vérifie (E) sur $\mathbb{R}$.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } y : x \mapsto \dfrac{x^n}{2n+1}}$$

Ex 4 Soit $(E) : xy' - 2y = 0$ avec la condition initiale $y(1) = 2$ à résoudre sur $\mathbb{R}$.

- Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{2\ln x} = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont de la même forme $x \mapsto= C'x^2,\ C' \in \mathbb{R}$.
- Une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifie donc

$$\begin{cases} \exists C \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > 0,\ y(x) = Cx^2 \\ \exists C' \in \mathbb{R} \ / \ \forall x < 0,\ y(x) = C'x^2 \\ y(0) = 0 \text{ en substituant } 0 \text{ à } x \text{ dans } (E) \end{cases}$$

La condition initiale $y(1) = 2$ entraine immédiatement $C = 2$.

- Inversement, soit $C' \in \mathbb{R}$ et y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ y(x) = 2x^2 \\ \forall x < 0,\ y(x) = C'x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

y est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

* La dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$ est immédiate.
* La dérivabilité en 0 s'étudie par taux de variation :

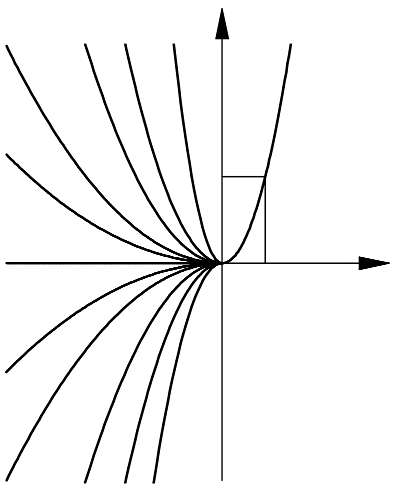
$$\begin{aligned} \forall x &> 0,\ \frac{y(x) - y(0)}{x} = 2x \quad \text{donc } \lim_{x \to 0+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = 0 \\ \forall x &< 0,\ \frac{y(x) - y(0)}{x} = C'x \quad \text{donc } \lim_{x \to 0-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x) - y(0)}{x}$ existe et vaut 0, i.e. $\boxed{y \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } y'(0) = 0}$.

* y vérifie bien (E) pour $x > 0$ (étude initiale), pour $x < 0$ (idem) et pour $x = 0$ (évident).

$$\boxed{\text{Il y a donc une infinité de fonctions solutions sur } \mathbb{R} \text{ de } xy' - 2y = 0 \text{ vérifiant } y(1) = 2}$$

Ce qui montre que dans ces conditions (le coefficient de y' s'annule sur $\mathbb{R}$) le théorème de Cauchy-Lipschitz est en défaut.



Ex 5 Résolution sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $(x\ln x)\,y' - y = -\dfrac{1}{x}\,(\ln(x)+1)$.

Le coefficient $x\ln x$ de y' s'annule en 1, on doit donc séparer les résolutions :

a) On résout (E) sur $I_1 =]1,+\infty[$.

* $*$ Solutions de l'équation homogène (E_0) : $(x\ln x)\,y' - y = 0$: on a

$$\forall x > 1,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln x)$$

D'où les solutions de (E_0) sont de la forme $y_0 : x \mapsto Ce^{\ln\ln x} = C\ln x,\ C \in \mathbb{R}$.

* $*$ La fonction $y_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est assez clairement solution de (E) sur I_1.
* $*$ La solution générale de (E) sur I_1 est donc $y : x \mapsto \dfrac{1}{x} + C\ln x, \quad C \in \mathbb{R}$.

b) On résout (E) sur $I_2 =]0,1[$, et on trouve de même la solution générale $y : x \mapsto \dfrac{1}{x} + C\ln x, \quad C \in \mathbb{R}$.

c) Solutions sur $I =]0,+\infty[$.

* $*$ Analyse : supposons avoir une solution y de (E) sur I. alors y est dérivable sur I et

$$\begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in]0,1[\ \ y(x) = \dfrac{1}{x} + C_1\ln x \\ \exists C_2 \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in]1,+\infty[\,,\ y(x) = \dfrac{1}{x} + C_2\ln x \\ y(1) = 1 \text{ en substituant } 1 \text{ à } x \text{ dans } (E) \end{cases}$$

Alors

$$\forall x > 1,\ \frac{y(x) - y(1)}{x-1} = \frac{1/x - 1}{x-1} + C_2\frac{\ln x}{x-1} = -\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x-1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \ln' 1 = 1$, on obtient

$$y'(1) = -1 + C_2$$

Mais de même on trouve

$$\forall x \in]0,1[\,,\ \frac{y(x) - y(1)}{x-1} = -\frac{1}{x} + C_1\frac{\ln x}{x-1}$$

donc

$$y'(1) = -1 + C_1$$

Il vient donc nécessairement $C_1 = C_2$. Il reste :

$$y : x \mapsto \frac{1}{x} + C_1\ln x$$

* $*$ Synthèse : pour tout réel C, $y : x \mapsto \dfrac{1}{x} + C\ln x$ est évidemment dérivable sur $]0,+\infty[$ et y vérifie (E).
* $*$ Conclusion : les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{1}{x} + C\ln x, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Ex 6 Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1-x)\,y'+y=\dfrac{x-1}{x}$.

Le coefficient $(1-x)$ de y' s'annule en 1, on doit donc séparer les résolutions :

a) On résout (E) sur $I_1=\,]1,+\infty[$.

- $*$ Les solutions de l'équation homogène $(1-x)\,y'+y=0$ sont de la forme
$$y_0 : x\mapsto Ce^{\ln(x-1)}=C\,(x-1)\,,\ C\in\mathbb{R}$$
- $*$ Méthode de la variation de la constante : on cherche y sous la forme
$$y : x\mapsto C\,(x)\,(x-1)\,,\ C \text{ dérivable sur } I_1$$
Alors
$$y' : x\mapsto C'\,(x)\,(x-1)+C\,(x)$$
et (E) s'écrit pour tout $x\in I_1$:
$$-C'\,(x)\,(x-1)^2=\frac{x-1}{x},\quad \text{soit}\quad C'\,(x)=-\frac{1}{x\,(x-1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$$
Qui revient à :
$$C\,(x)=\ln\frac{x}{x-1}+C_0,\ C_0\in\mathbb{R}$$
- $*$ La solution générale de (E) sur I_1 est donc $y : x\mapsto (x-1)\ln\dfrac{x}{x-1}+C\,(x-1)\,,\quad C\in\mathbb{R}.$

b) On résout (E) sur $I_2=\,]0,1[$, et on trouve de même $y : x\mapsto (x-1)\ln\dfrac{x}{1-x}+C\,(x-1)\,,\quad C\in\mathbb{R}.$

c) <u>Solutions sur $I=\,]0,+\infty[$.</u>

- $*$ <u>Analyse</u> : supposons avoir une solution y de (E) sur I. alors y est dérivable sur I et
$$\begin{cases} \exists C_1\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in\,]0,1[\ \ y\,(x)=(x-1)\ln\dfrac{x}{1-x}+C_1\,(x-1) \\ \exists C_2\in\mathbb{R}\ /\ \forall x\in\,]1,+\infty[\,,\ y\,(x)=(x-1)\ln\dfrac{x}{x-1}+C_2\,(x-1) \\ y\,(1)=0 \text{ en substituant } 1 \text{ à } x \text{ dans } (E) \end{cases}$$
Alors
$$\forall x>1,\ \frac{y\,(x)-y\,(1)}{x-1}=\ln\frac{x}{x-1}+C_2=\ln x-\ln\,(x-1)+C_2$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{y\,(x)-y\,(1)}{x-1}=+\infty$$
qui contredit la dérivabilité de y en 1.
- $*$ <u>Conclusion</u> : $\boxed{(E) \text{ n'admet aucune solution sur }]0,+\infty[}$

Ex 7 On considère l'équation différentielle $\quad (E) \quad |x|\, y' - y = x^2$.

a) Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

* $*$ Sur $]0,+\infty[$ (E) s'écrit $xy' - y = x^2$
  - $\cdot$ L'équation homogène admet les solutions $y_0 : x \mapsto Ce^{\ln x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$.
  - $\cdot$ On remarque subtilement que $y_1 : x \mapsto x^2$ est solution de (E) .
  - $\cdot$ La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $y : x \mapsto x^2 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$.
* $*$ Sur $]0,+\infty[$ (E) s'écrit $xy' + y = -x^2$
  - $\cdot$ L'équation homogène admet les solutions $y_0 : x \mapsto Ce^{-\ln x} = \dfrac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
  - $\cdot$ En ajustant, on trouve $y_2 : x \mapsto -\dfrac{x^2}{3}$ solution particulière de (E) .
  - $\cdot$ La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $y : x \mapsto -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$.

b) Analyse : soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R} \,/\, \forall x > 0,\ y(x) = x^2 + C_1 x \\ \exists C_2 \in \mathbb{R} \,/\, \forall x < 0,\ y(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_2}{x} \\ y(0) = 0 \text{ en substituant } 0 \text{ à } x \text{ dans } (E) \end{cases}$$

* $*$ La continuité en 0_- force C_2 à être nul (sinon $\lim\limits_{x \to 0-} y(x) = \pm\infty$)
* $*$ Mais alors la dérivabilité en 0 donne

$$\lim_{x \to 0+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{y(x) - y(0)}{x}$$

soit

$$\lim_{x \to 0+} x + C_1 = \lim_{x \to 0-} -\frac{x}{3}$$

Il vient aussi $C_1 = 0$, et donc

$$y : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Synthèse : cette dernière fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (les taux de variations en 0 tendent vers 0), vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ d'après le a), et aussi en 0. On peut donc conclure :

$$\boxed{y : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x^2}{3} & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ est l'unique solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Ex 8 Résolution d'équations différentielles du deuxième ordre :

a) $(E) : y'' + 4y' + 4y = e^x$.

* $*$ L'équation homogène $(E_0) : y'' + 4y' + 4y = 0$ a pour équation caractéristique $(ec) : r^2 + 4r + 4 = 0$ qui admet la solution double -2. D'où les solutions de (E_0)

$$y_0 : x \mapsto (ax+b)\, e^{-2x},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

* $*$ Comme 1 n'est pas solution de (ec) , on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$y : x \mapsto Ke^x,\ \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} y' : x \mapsto Ke^x \\ y'' : x \mapsto Ke^x \end{array} \right.$$

(E) devient pour tout réel x : $9Ke^x = e^x$, d'où $K = \frac{1}{9}$.

* $*$ La solution générale de (E) est

$$\boxed{y : x \mapsto \tfrac{1}{9}e^x + (ax+b)\, e^{-2x},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2}$$

b) $(E) : y'' - \omega^2 y = \lambda$ et $y(0) = y'(0) = 0$, où $\omega > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

* $*$ L'équation homogène $(E_0) : y'' - \omega^2 y = 0$ a pour équation caractéristique $(ec) : r^2 - \omega^2 r = 0$ qui admet les solutions $\pm\omega$. D'où les solutions de (E_0)

$$y_0 : x \mapsto C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* $*$ On trouve vite une solution particulière constante de (E), $y_1 : x \mapsto -\frac{\lambda}{\omega^2}$.
* $*$ La solution générale de (E) est

$$y : x \mapsto -\frac{\lambda}{\omega^2} + C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* $*$ Une telle solution vérifie

$$y' : x \mapsto C_1 \omega e^{\omega x} - C_2 \omega e^{-\omega x}$$

Donc les conditions initiales s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda}{\omega^2} + C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\omega - C_2\omega = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2C_1 = \frac{\lambda}{\omega^2} \\ C_1 = C_2 \end{array} \right.$$

Ainsi l'unique solution du problème proposé est

$$y : x \mapsto -\frac{\lambda}{\omega^2} + \frac{\lambda}{2\omega^2} e^{\omega x} + \frac{\lambda}{2\omega^2} e^{-\omega x}$$

soit

$$\boxed{y : x \mapsto \tfrac{\lambda}{\omega^2}\left(\operatorname{ch}(\omega x) - 1\right)}$$

c) $(E): y'' + y = \cos^2 x$, et $y(0) = y'(0) = 0$.

* Tout le monde sait que l'équation homogène a pour solutions $y_0 : x \mapsto C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
* On linéarise : $(E) \iff y'' + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

  · L'équation $y'' + y = \frac{1}{2}$ admet la solution $y_1 : x \mapsto \frac{1}{2}$

  · L'équation $y'' + y = \frac{1}{2}e^{2ix}$ admet une solution de la forme $y : x \mapsto Ke^{2ix}$. Elle devient alors

  $$-3Ke^{2ix} = \frac{1}{2}e^{2ix} \quad \text{soit} \quad K = -\frac{1}{6}$$

  L'équation $y'' + y = \frac{1}{2}\cos(2x)$ admet donc la solution $y_2 : x \mapsto \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{6}e^{2ix}\right) = -\frac{1}{6}\cos(2x)$

* Après superposition, la solution générale de (E) est de la forme

$$y : x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* Une telle fonction admet la dérivée $y' : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(2x) - C_1 \sin x + C_2 \cos x$, donc les conditions initiales s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = 0 \end{array}\right.$$

L'unique solution du problème de cauchy est ainsi,

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos x}$$

d) $(E): y'' + 2y' + 5y = 10, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 + 2\sqrt{3}$

* L'équation homogène $(E_0): y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour équation caractéristique $(ec): r^2 + 2r + 5 = 0$ qui admet les solutions complexes $-1 \pm 2i$. D'où les solutions complexes de (E_0) :

$$x \mapsto C_1 e^{(-1+2i)x} + C_2 e^{(-1-2i)x} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

et les solutions **réelles** :

$$y_0 : x \mapsto e^{-x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* On trouve vite une solution particulière constante de (E), $y_1 : x \mapsto 2$.
* La solution générale de (E) est

$$y : x \mapsto 2 + e^{-x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* Une telle solution vérifie

$$y' : x \mapsto e^{-x}\left(-2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)\right) - e^{-x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right)$$

Donc les conditions initiales s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} 2 + C_1 = 1 \\ 2C_2 - C_1 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ainsi l'unique solution du problème proposé est

$$y : x \mapsto 2 + e^{-x}\left(-\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x)\right)$$

soit

$$\boxed{y : x \mapsto 2 + 2e^{-x}\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

e) $(E) : y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

- L'équation homogène $(E_0) : y'' + 2y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique $(ec) : r^2 + 2r + 2 = 0$ qui admet les solutions complexes $-1 \pm i$. D'où les solutions complexes de (E_0) :

$$x \mapsto C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

et les solutions **réelles** :

$$y_0 : x \mapsto e^{-x} \left(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\right), \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- On cherche une solution particulière constante de $(E_{\mathbb{C}}) : y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ sous la forme

$$y : x \mapsto Kxe^{(1+i)x}, \quad K \in \mathbb{C} \text{ à déterminer}$$

car $1+i$ est solution (simple) de l'équation caractéristique. Alors

$$\begin{cases} y' : x \mapsto K\left((1+i)x + 1\right) e^{(1+i)x} \\ y'' : x \mapsto K\left((1+i)^2 x + 2(1+i)\right) e^{(1+i)x} = K\left(2ix + 2(1+i)\right) e^{(1+i)x} \end{cases}$$

L'équation $(E_{\mathbb{C}})$ s'écrit alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$2iKe^{(1+i)x} = e^{(1+i)x} \quad \text{soit} \quad K = \frac{1}{2i}$$

On a donc la solution de (E)

$$y_1 : x \mapsto \operatorname{Im}\left(-\frac{i}{2} xe^{(1+i)x}\right) = -\frac{1}{2} xe^x \operatorname{Im}\left(ie^{ix}\right) = -\frac{1}{2} xe^x \cos x$$

- La solution générale de (E) est

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{2} xe^x \cos x + e^{-x}\left(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\right)} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

f) $(E) : y'' + 4y' + 4y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{3}{2}$

- L'équation homogène $(E_0) : y'' + 4y' + 4y = 0$ a pour équation caractéristique $(ec) : r^2 + 4r + 4 = 0$ de solution double -2. D'où les solutions de (E_0) :

$$x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{-2x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- On trouve vite une solution particulière constante de (E), $y_1 : x \mapsto \frac{1}{2}$.
- La solution générale de (E) est

$$y : x \mapsto \frac{1}{2} + (C_1 x + C_2) e^{-2x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Une telle solution vérifie

$$y' : x \mapsto \left(C_1 - 2(C_1 x + C_2)\right) e^{-2x}$$

Donc les conditions initiales s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi l'unique solution du problème proposé est

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{1}{2}\left(1 + (1-x) e^{-2x}\right)}$$

g) $(E) : y'' + y' + y = 8e^x \cos^3 x$

La linéarisation de $\cos^3$ donne

$$(E) \Longleftrightarrow y'' + y' + y = 2e^x \left(3\cos x + \cos(3x)\right) \Longleftrightarrow y'' + y' + y = 6e^x \cos x + 2e^x \cos(3x)$$

* L'équation homogène $(E_0) : y'' + y' + y = 0$ a pour équation caractéristique $(ec) : r^2 + r + 1 = 0$ qui admet les solutions complexes $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. D'où les solutions complexes de (E_0) :

$$x \mapsto C_1 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

et les solutions **réelles** :

$$y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* On cherche une solution particulière constante de $\left(E_{\mathbb{C}}^1\right) : y'' + y' + y = 6e^{(1+i)x}$ sous la forme

$$y : x \mapsto Ke^{(1+i)x}, \quad K \in \mathbb{C} \text{ à déterminer}$$

car $1+i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. L'équation $\left(E_{\mathbb{C}}^1\right)$ s'écrit alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$K\left((1+i)^2 + (1+i) + 1\right) e^{(1+i)x} = 6e^{(1+i)x} \quad \text{soit} \quad K = \frac{6}{2+3i} = \frac{6}{13}(2-3i)$$

On a donc la solution de $(E_1) : y'' + y' + y = 6e^x \cos x$:

$$\begin{aligned} y_1 : x \mapsto\ & \operatorname{Re}\left(\tfrac{6}{13}(2-3i)\, e^{(1+i)x}\right) \\ & = \tfrac{6}{13} e^x \operatorname{Re}\left((2-3i)\, e^{ix}\right) \\ & = \tfrac{6}{13} e^x (2\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

* On cherche une solution particulière constante de $\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) : y'' + y' + y = 2e^{(1+3i)x}$ sous la forme

$$y : x \mapsto Ke^{(1+3i)x}, \quad K \in \mathbb{C} \text{ à déterminer}$$

car $1+i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. L'équation $\left(E_{\mathbb{C}}^2\right)$ s'écrit alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$K\left((1+3i)^2 + (1+3i) + 1\right) e^{(1+3i)x} = 2e^{(1+3i)x} \quad \text{soit} \quad K = \frac{2}{-6+9i} = -\frac{2}{3 \times 13}(2+3i)$$

On a donc la solution de $(E_2) : y'' + y' + y = 2e^x \cos(3x)$:

$$\begin{aligned} y_2 : x \mapsto\ & \operatorname{Re}\left(-\tfrac{2}{3\times 13}(2+3i)\, e^{(1+3i)x}\right) \\ & = -\tfrac{2}{3\times 13} e^x \operatorname{Re}\left((2+3i)\, e^{3ix}\right) \\ & = \tfrac{1}{13} e^x \left(-\tfrac{4}{3}\cos(3x) + 2\sin(3x)\right) \end{aligned}$$

* En superposant, on a la solution générale de (E) :

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{e^x}{13}\left(12\cos x + 18\sin x + 2\sin(3x) - \frac{4}{3}\cos(3x)\right) + e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)}$$

h) $y'' + y' - 2y = \cos x + e^x$ et $y(0) = y'(0) = 0$

* L'équation homogène (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$ a pour équation caractéristique (ec) : $r^2 + r - 2 = 0$, de solutions 1 et -2. D'où les solutions de (E_0) :

$$x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* On cherche une solution particulière constante de $(E_{\mathbb{C}})$: $y'' + y' - 2y = e^{ix}$ sous la forme

$$y : x \mapsto K e^{ix}, \quad K \in \mathbb{C} \text{ à déterminer}$$

car i n'est pas solution de l'équation caractéristique. Alors $(E_{\mathbb{C}})$ devient pour tout réel x :

$$K(-1 + i - 2) e^{ix} = e^{ix} \quad \text{soit} \quad K = \frac{1}{i-3} = -\frac{3+i}{10}$$

On a donc la solution de (E_1) : $y'' + y' - 2y = \cos x$:

$$y_1 : x \mapsto \operatorname{Re}\left(-\frac{3+i}{10} e^{ix}\right) = -\frac{1}{10} \operatorname{Re}\left((3+i) e^{ix}\right) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$$

* On cherche une solution particulière constante de (E_2) : $y'' + y' - 2y = e^x$ sous la forme

$$y : x \mapsto K x e^x, \quad K \in \mathbb{R} \text{ à déterminer}$$

car 1 est solution de l'équation caractéristique. Alors

$$\begin{array}{rcl} y' & : & x \mapsto K(x+1) e^x \\ y'' & : & x \mapsto K(x+2) e^x \end{array}$$

(E_2) devient pour tout réel x :

$$3Ke^x = e^x \quad \text{soit} \quad K = \frac{1}{3}$$

d'où la solution $y_2 : x \mapsto \frac{1}{3} x e^x$ de (E_2).

* La solution générale de (E) est

$$y : x \mapsto \frac{1}{3} x e^x + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

* Une telle solution vérifie

$$y' : x \mapsto \frac{1}{3} e^x + \frac{1}{3} x e^x + \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) + C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$$

Donc les conditions initiales s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{10} + C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + C_1 - 2C_2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{18} \\ C_2 = \frac{11}{45} \end{array} \right.$$

Ainsi l'unique solution du problème proposé est

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{1}{3} x e^x + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) + \frac{1}{18} e^x + \frac{11}{45} e^{-2x}}$$

Ex 9 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 6y' + 9y = x^3 e^{-3x}$: on pose

$$y : x \mapsto z(x)\, e^{-3x}, \quad \text{soit} \quad z : x \mapsto y(x)\, e^{3x}$$

On a donc

$$\begin{array}{lcl} y' & : & x \mapsto (z'(x) - 3z(x))\, e^{-3x} \\ y'' & : & x \mapsto (z''(x) - 6z'(x) + 9z(x))\, e^{-3x} \end{array}$$

En reportant dans (E), celle-ci devient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} z''(x)\, e^{-3x} & = & x^3 e^{-3x} \Longleftrightarrow z''(x) = x^3 \\ & \Longleftrightarrow & \exists C_1 \in \mathbb{R} \,/\, z'(x) = \dfrac{x^4}{4} + C_1 \\ & \Longleftrightarrow & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R} \,/\, z(x) = \dfrac{x^5}{20} + C_1 x + C_2 \end{array}$$

Ainsi la solution générale de (E) est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{20} x^5 e^{-3x} + (C_1 x + C_2)\, e^{-3x}}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ex 10 Discuter suivant $a \in \mathbb{R}$ le solutions de l'équation différentielle (E_a) : $y'' - 2ay' + \left(1 + a^2\right) y = \sin x$

a) Résolution de l'équation homogène : $y'' - 2ay' + \left(1 + a^2\right) y = 0 \ \ (H_\alpha)$.

L'équation caractéristique $X^2 - 2aX + 1 + a^2 = 0$ admet le discriminant -4 donc les racines complexes conjuguées $a + i$ et $a - i$. Les solutions (réelles) de (H_a) sont donc de la forme

$$\boxed{y_0 : x \mapsto e^{ax} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)}, \ C_1, C_2 \text{ réels}$$

b) Solution générale on pose l'équation complexe $y'' - 2ay' + \left(1 + a^2\right) y = e^{ix} \ \ (E_\mathbb{C})$

i. Si $a = 0$, l'équation $(E_\mathbb{C})$ s'écrit alors $y'' + y = e^{ix}$.

i est solution de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution de $(E_\mathbb{C})$ sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = kxe^{ix} \quad \text{avec } k \text{ complexe à déterminer.}$$

Alors pour tout réel x

$$y'(x) = k(ix + 1)e^{ix} \quad \text{et} \quad y''(x) = k(-x + 2i)e^{ix}$$

$(E_\mathbb{C})$ devient

$$2ike^{ix} = e^{ix}$$

qui donne en fin de compte $k = -i/2$. Ainsi

$$y_{1,\mathbb{C}} : x \mapsto -\frac{ix}{2} e^{ix} \quad \text{est solution de } (E_\mathbb{C})$$

Sa partie imaginaire y_1 est solution de l'équation (E_0), soit

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{2} x \cos x}$$

La solution générale de (E_0) s'écrit alors

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{2} x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x}, \ C_1, C_2 \text{ réels}$$

ii. Si $a \neq 0$, i n'est pas solution de l'équation caractéristique : on cherche une solution de $(E_\mathbb{C})$ sous forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = ke^{ix}$$

Alors pour tout réel x

$$y'(x) = kie^{ix} \quad \text{et} \quad y''(x) = -ke^{ix}$$

$(E_\mathbb{C})$ devient donc

$$k\left(a^2 - 2ai\right) e^{ix} = e^{ix}$$

qui donne en fin de compte

$$k = \frac{1}{a(a - 2i)} = \frac{a + 2i}{a(a^2 + 4)}$$

Ainsi

$$y_{1,\mathbb{C}} : x \mapsto \frac{a + 2i}{a(a^2 + 4)} e^{ix} \quad \text{est solution de } (E_\mathbb{C})$$

Sa partie imaginaire y_1 est solution de l'équation (E_a), soit

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{1}{a(a^2 + 4)} (2 \cos x - a \sin x)}$$

La solution générale de (E_a) s'écrit alors

$$y : x \mapsto \frac{1}{a(a^2 + 4)} (2 \cos x - a \sin x) + e^{ax} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right), \ C_1, C_2 \text{ réels}$$

soit

$$\boxed{y : x \mapsto \left(\frac{2}{a(a^2 + 4)} + C_1 e^{ax}\right) \cos x + \left(\frac{1}{a^2 + 4} + C_2 e^{ax}\right) \sin x}$$

Ex 11 On considère l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$: $xy''+2(2x+1)y'+(5x+4)y=8\sin x \quad (E)$

a) On pose $z : x\mapsto xy(x)$. Alors $\forall x>0$,

$$y(x)=\frac{z(x)}{x},\quad y'(x)=\frac{z'(x)}{x}-\frac{z(x)}{x^2}\quad \text{et}\quad y''(x)=\frac{z''(x)}{x}-\frac{2z'(x)}{x^2}+\frac{2z(x)}{x^3}$$

L'équation (E) devient alors successivement

$$\left(z''(x)-\frac{2z'(x)}{x}+\frac{2z(x)}{x^2}\right)+2(2x+1)\left(\frac{z'(x)}{x}-\frac{z(x)}{x^2}\right)+\frac{5x+4}{x}z(x)=8\sin x$$

$$z''(x)-\frac{2}{x}z'(x)+\frac{2}{x^2}z(x)+2\left(2+\frac{1}{x}\right)z'(x)-2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)z(x)+\left(5+\frac{4}{x}\right)z(x)=8\sin x$$

$$z''(x)+4z'(x)+5z(x)=8\sin x$$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si z est solution de

$$\boxed{z''+4z'+5z=8\sin x \quad (E')}$$

<u>Résolution de (E')</u>

i. L'équation caractéristique de (E') est $x^2+4x+5=0$, dont les solutions complexes cojuguées sont

$$-2+i \quad \text{et} \quad -2-i$$

Les solutions **réelles** de l'équation homogène associée à (E') sont donc les fonctions de la forme

$$z_0 : x\mapsto e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)\quad (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

ou

$$z_0 : x\mapsto Ce^{-2x}\cos(x-\varphi)\quad C\geqslant 0 \text{ et } \varphi\in\,]-\pi,\pi]$$

ii. Cherchons une solution particulière de l'équation

$$z''+4z'+5z=8e^{ix}\quad (E_{\mathbb{C}})$$

sous la forme ($i\notin\{-2+i,-2-i\}$) :

$$z : x\mapsto Ke^{ix}\quad (K\in\mathbb{C}),\quad \text{d'où}\quad z' : x\mapsto iKe^{ix}\quad \text{et}\quad z'' : x\mapsto -Ke^{ix}$$

En reportant dans $(E_{\mathbb{C}})$, $\forall x>0$,

$$4(1+i)Ke^{ix}=8e^{ix}$$

On en déduit

$$K=\frac{2}{1+i}=1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

On a donc une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$

$$z_{\mathbb{C}} : x\mapsto \sqrt{2}e^{-i\pi/4}e^{ix}=\sqrt{2}e^{i(x-\pi/4)}$$

D'où une solution particulière de (E') :

$$z_1 : x\mapsto \operatorname{Im} z_c(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

iii. Au total, les solutions de (E') sont les fonctions de la forme

$$\boxed{z : x\mapsto \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+Ce^{-2x}\cos(x-\varphi)}\quad C\geqslant 0 \text{ et } \varphi\in\,]-\pi,\pi]$$

Et celles de (E) sur $]0,+\infty[$ de la forme

$$\boxed{y : x\mapsto \frac{\sqrt{2}}{x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{C}{x}e^{-2x}\cos(x-\varphi)}\quad C\geqslant 0 \text{ et } \varphi\in\,]-\pi,\pi]$$

b) Considérons les conditions initiales $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Alors

$$z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{et} \quad z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,y'\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Or $\forall x > 0$

$$z(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Ce^{-2x}\cos(x - \varphi)$$

et

$$z'(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Ce^{-2x}\left(2\cos(x-\varphi) + \sin(x-\varphi)\right)$$

Les conditions s'écrivent donc

$$\begin{cases} C\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \\ \sqrt{2} - Ce^{-\pi/2}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \\ Ce^{-\pi/2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = \sqrt{2} \end{cases}$$

C'est à dire (C ne peut être nul)

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \\ Ce^{-\pi/2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \varphi = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ Ce^{-\pi/2} = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{4} \\ C = \sqrt{2}e^{\pi/2} \end{cases}$$

Car si $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = -1$, alors $C < 0$. On obtient donc pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} z(x) &= \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}e^{\pi/2}e^{-2x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\pi/2-2x}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e^{-2(x-\pi/4)}\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-2(x-\pi/4)}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

L'unique solution de (E) satisfaisant aux conditions demandées est

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{x}\left(1 - e^{-2(x-\pi/4)}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Ex 12 On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = -2(x-1)e^x \qquad (*)$$

Analyse : supposons f solution du problème. L'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x) - 2(x-1)e^x$$

montre que par composée et somme f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = f'(-x) - 2xe^x$$

Or $(*)$ appliquée à $-x$ donne

$$f'(-x) = -f(x) - 2(-x-1)e^{-x}$$

En reportant

$$f''(x) = -f(x) + 2(x+1)e^{-x} - 2xe^x$$

f est donc solution de l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$y'' + y = 2(x+1)e^{-x} - 2xe^x \qquad (E)$$

– Les solutions réelles de l'équation homogène sont évidemment de la forme

$$\boxed{y_0 : x \mapsto A\cos x + B\sin x}\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

– **Hors programme** : on cherche une solution de $y'' + y = -2xe^x$, sous la forme

$$\begin{aligned} y &: x \mapsto (ax+b)e^x \\ y' &: x \mapsto (ax+a+b)e^x \\ y'' &: x \mapsto (ax+2a+b)e^x \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(2ax + 2a + 2b)\, e^x = -2xe^x \iff 2ax + 2a + 2b = -2x \iff \begin{cases} 2a = -2 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$$

On trouve $a = -1$ et $b = 1$, d'où la solution (à vérifier) $\boxed{y_1 : x \mapsto (1 - x)\, e^x}$

– De même on cherche une solution de $y'' + y = 2\,(x + 1)\, e^{-x}$ sous la forme

$$\begin{array}{rcl} y & : & x \mapsto (ax + b)\, e^{-x} \\ y' & : & x \mapsto -(ax - a + b)\, e^{-x} \\ y'' & : & x \mapsto (ax - 2a + b)\, e^{-x} \end{array}$$

En reportant dans l'équation, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(2ax - 2a + 2b)\, e^{-x} = 2\,(x + 1)\, e^{-x} \iff 2ax - 2a + 2b = 2\,(x + 1) \iff \begin{cases} 2a = 2 \\ -2a + 2b = 2 \end{cases}$$

On trouve $a = 1$ et $b = 2$, d'où la solution (à vérifier) $\boxed{y_2 : x \mapsto (x + 2)\, e^{-x}}$

– La solution générale de (E) est ainsi

$$\boxed{y : x \mapsto (x + 2)\, e^{-x} + (1 - x)\, e^x + A\cos x + B\sin x} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Synthèse : soit $f : x \mapsto (x + 2)\, e^{-x} + (1 - x)\, e^x + A\cos x + B\sin x$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -(x + 1)\, e^{-x} - xe^x - A\sin x + B\cos x$$

et

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= -(x + 1)\, e^{-x} - xe^x - A\sin x + B\cos x + (-x + 2)\, e^x + (1 + x)\, e^{-x} + A\cos x - B\sin x \\ &= -2\,(x - 1)\, e^x + (A + B)\cos x - (A + B)\sin x \\ &= -2\,(x - 1)\, e^x + \sqrt{2}\,(A + B)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

f vérifie donc $(*)$ si et seulement si $B = -A$.

Les solutions du problème sont les fonctions de la forme

$$\boxed{f : x \mapsto (x + 2)\, e^{-x} + (1 - x)\, e^x + A\,(\cos x - \sin x)} \quad A \in \mathbb{R}$$

Ex 13 On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Analyse : supposons f solution du problème : alors en posant $k = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = k$$

Autrement dit f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' - y = k$ dont les solutions se calculent vite :

$$y : x \mapsto Ce^x - k \quad (C \in \mathbb{R})$$

La condition initiale $f(0) = 0$ donne alors facilement $C = k$, et donc

$$f : x \mapsto k\,(e^x - 1)$$

Mais alors

$$k = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = k\int_0^1 \left(e^t - 1\right)\mathrm{d}t = k\left(\left[e^t\right]_0^1 - 1\right) = k\,(e - 2)$$

Ce qui entraine $k = 0$. Ainsi la seule solution possible est la fonction nulle.

Synthèse : il est à peu près clair que la fonction nulle convient. On conclut :

$$\boxed{\text{La seule solution du problème est la fonction nulle}}$$

Ex 14 Deux substances **chimiques** A et B entrent en réaction pour donner irréversiblement les produits C et D, toujours molécule par molécule selon la réaction $A+B\to C+D$. A l'instant $t=0$, les concentrations de A et B sont respectivement égales à a et b. On note $c(t)$ la concentration de C à l'instant t. L'expérience montre que

$$c'(t)=k\,(a-c(t))\,(b-c(t))\quad (k \text{ constante réelle})$$

On admet que $c(t)$ n'est jamais égal à a.

a) Soit $f: t\mapsto \dfrac{1}{a-c(t)}$. Alors $f(0)=\dfrac{1}{a-c(0)}=\dfrac{1}{a}$, et $\forall t\geqslant 0$,

$$f'(t)=\frac{c'(t)}{(a-c(t))^2}=\frac{k\,(a-c(t))\,(b-c(t))}{(a-c(t))^2}=k\,\frac{b-c(t)}{a-c(t)}$$

A l'aide des ruses usuelles, on obtient

$$f'(t)=k\,\frac{(b-a)+a-c(t)}{a-c(t)}=k\left(\frac{b-a}{a-c(t)}+1\right)=k+k\,(b-a)\,f(t)$$

f est donc solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{y'-k\,(b-a)\,y=k\quad (E)}\quad \text{avec}\quad \boxed{y(0)=\frac{1}{a}}$$

b) <u>Résolution de (E)</u> :

- <u>1er cas : $a=b$</u>. (E) s'écrit $y'=k$ donc y est de la forme $y(t)=kt+k'$ avec $y(0)=k'=\dfrac{1}{a}$. Ainsi

$$f: t\mapsto kt+\frac{1}{a}\quad \text{et}\quad \boxed{c: t\mapsto a-\frac{1}{kt+1/a}}$$

On a alors clairement $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} c(t)=a}$.

- <u>2ème cas : $a\neq b$</u> alors les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont de la forme

$$y_0: t\mapsto Ye^{k(b-a)t},\quad Y\in\mathbb{R}$$

et une solution particulière de (E) est clairement la fonction constante définie par

$$y_1; t\mapsto \frac{1}{a-b}$$

D'où la solution générale de (E)

$$y: t\mapsto Ye^{k(b-a)t}+\frac{1}{a-b}$$

La condition initiale donne $y(0)=Y+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{a}$, d'où $Y=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a-b}=-\dfrac{b}{a(a-b)}$ Finalement

$$\boxed{f: t\mapsto \frac{1}{a-b}\left(1-\frac{b}{a}\,e^{k(b-a)t}\right)}$$

et

$$\boxed{c: t\mapsto a-\frac{a-b}{1-(b/a)\,e^{k(b-a)t}}}$$

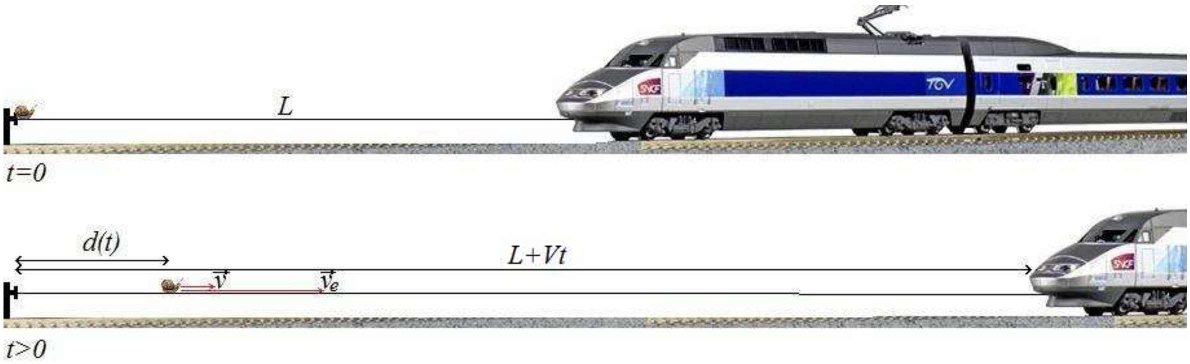
Alors

· <u>Si $a<b$</u>, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{k(b-a)t}=+\infty$, d'où $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{a-b}{1-(b/a)\,e^{k(b-a)t}}=0$ et $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} c(t)=a}$.

· <u>Si $a>b$</u>, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{k(b-a)t}=0$, d'où $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{a-b}{1-(b/a)\,e^{k(b-a)t}}=a-b$ et $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} c(t)=b}$

Dans tous les cas la concentration limite de C est la concentration du premier réactif qui vient à manquer dans la réaction, ce qui semble pour le moins cohérent.

Ex 15 Histoire du gastéropode mégalomane : après la construction en 2095 du TGV Marseille-Tokyo, un escargot décide en gare Saint-Charles de rattraper celui-ci avant son terminus : à cet effet un élastique indéfiniment extensible a été attaché au butoir du quai et relié à la queue du TGV se situant à $L = 100\,\mathrm{m}$ du butoir.
A l'instant $t = 0$, l'escargot, placé au niveau du butoir, s'élance à la vitesse constante et vertigineuse de $v = 0,5\,\mathrm{km/h}$, pendant que le TGV s'ébranle à la vitesse (constante) de $V = 500\,\mathrm{km/h}$.
A l'instant t, on note $d(t)$ la distance parcourue par l'escargot; celui-ci, en plus de sa vitesse propre, reçoit une vitesse d'entraînement proportionnelle à sa position sur l'élastique.



a) Commencons par remarquer qu'à l'instant t la position du train par rapport au butoir est $L + Vt$.
La vitesse $d'(t)$ de l'escargot est la somme de sa vitesse propre v et de sa vitesse d'entrainement $v_e = kd(t)$ d'après l'énoncé.
Or ce facteur de proportionnalité vaut V si l'escargot est sur train (si $d(t) = L + Vt$) : donc $k = \frac{V}{L+Vt}$.
On obtient alors

$$d'(t) = v + \frac{V}{L+Vt} d(t) \quad \text{soit} \quad \boxed{d'(t) - \frac{V}{L+Vt} d(t) = v} \ (E)$$

Résolution de (E) :

i. L'équation homogène admet les solutions $d_0 : t \mapsto Ce^{\int \frac{V dt}{L+Vt}} = Ce^{\ln(L+Vt)} = C(L+Vt)\,, C \in \mathbb{R}$.

ii. Cherchons une solution sous la forme $d : t \mapsto C(t)(L+Vt)$ avec C dérivable sur $\mathbb{R}_+$. (E) s'écrit pour tout $t > 0$
$$C'(t)(L+Vt) = v \quad \text{soit} \quad C'(t) = \frac{v}{L+Vt}$$
On prend $C(t) = \frac{v}{V}\ln(L+Vt)$, d'où une solution de (E) : $d_1 : t \mapsto \frac{v}{V}\ln(L+Vt)(L+Vt)$

iii. La solution générale est $d : t \mapsto \left(C + \frac{v}{V}\ln(L+Vt)\right)(L+Vt)\,,\ C \in \mathbb{R}$.

iv. La condition initiale $d(0) = 0$ donne $\left(C + \frac{v}{V}\ln L\right) L = 0$ soit $C = -\frac{v}{V}\ln L$.

La solution du problème est donc

$$\boxed{d : t \mapsto \frac{v}{V}(L+Vt)\ln\left(\frac{L+Vt}{L}\right)}$$

b) Existe-t-il un instant où l'escargot rejoint le train, i.e. $d(t) = L + Vt$? l'équation revient à

$$\frac{v}{V}\ln\left(\frac{L+Vt}{L}\right) = 1 \iff 1 + \frac{Vt}{L} = e^{V/v} \iff \boxed{t = \frac{L}{V}\left(e^{V/v} - 1\right)}$$

Cet instant existe bien, et alors la distance parcourue est

$$\boxed{d(t) = L + Vt = Le^{V/v}}$$

Malheureusement l'application numérique donne

$$t = \frac{0.1}{500}\left(e^{1000} - 1\right) \simeq 3.9 \times 10^{430}\,\mathrm{h} \quad \text{et} \quad d(t) = 0.1e^{1000} \simeq 2 \times 10^{433}\,\mathrm{km}$$

Cette distance est assurément supérieure à la distance Marseille-Tokyo, ce qui ne permet à notre gastéropode de ne réaliser son rêve que dans la théorie...

Ex 16 Etude du système différentiel (Σ) : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -kx(t) - \omega y(t) \\ y'(t) = \omega x(t) - ky(t) \end{array}\right. \quad , \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

On suppose que les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont solutions de ce système

a) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = x^2(t) + y^2(t)$. On a

$$\begin{array}{rcl} u' & = & 2xx' + 2yy' \\ & = & 2(x(-kx - \omega y) + y(\omega x - ky)) \quad \text{(d'après } (\Sigma)) \\ & = & -2k\left(x^2 + y^2\right) \\ & = & -2ku \end{array}$$

u est donc solution de l'équation différentielle $y' + 2ky = 0$, avec la condition $u(0) = 1$.

Il est alors quasiment immédiat que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = e^{-2kt}}$$

b) Dérivons la première équation de (Σ) :

$$x'' = -kx' - \omega y' \overset{(\Sigma)}{=} -k(-kx - \omega y) - \omega(\omega x - ky) = \left(k^2 - \omega^2\right)x + 2k\omega y$$

Or toujours d'après (Σ), on a $\omega y = -(x' + kx)$: on en déduit

$$x'' = \left(k^2 - \omega^2\right)x - 2k(x' + kx) = -\left(k^2 + \omega^2\right)x - 2kx'$$

x satisfait donc l'équation différentielle homogène :

$$(E) \ \boxed{x'' + 2kx' + \left(\omega^2 + k^2\right)x = 0}$$

avec les conditions initiales: $x(0) = 1$ et $x'(0) = -k$ (première équation de (Σ)).

c) L'équation caractéristique de (E) est $X^2 + 2kX + \left(\omega^2 + k^2\right) = 0$, de discriminant

$$\Delta = 4\left(k^2 - \left(\omega^2 + k^2\right)\right) = -4\omega^2$$

et donc de solutions $-k + i\omega$ et $-k - i\omega$. On en déduit les solutions réelles de (E_0)

$$\boxed{x : t \mapsto e^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

Mais alors pour tout réel t :

$$x'(t) = -ke^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + e^{-kt}(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)$$

Les conditions initiales s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ -kA + \omega B = -k \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Finalement

$$\boxed{x : t \mapsto e^{-kt}\cos\omega t}$$

La première équation de (Σ) nous donne encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \omega y(t) = -(x' + kx) = -\left(\left(-ke^{-kt}\cos\omega t - \omega e^{-kt}\sin\omega t\right) + ke^{-kt}\cos\omega t\right) = \omega e^{-kt}\sin\omega t$$

Ainsi

$$\boxed{y : t \mapsto e^{-kt}\sin\omega t}$$

Il faut traiter la **réciproque** : on pose

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x : t \mapsto e^{-kt}\cos\omega t \\ y : t \mapsto e^{-kt}\sin\omega t \end{array}\right.}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -ke^{-kt}\cos\omega t - \omega e^{-kt}\sin\omega t = -kx(t) - \omega y(t) \\ y'(t) = -ke^{-kt}\sin\omega t + \omega e^{-kt}\cos\omega t = \omega x(t) - ky(t) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{(x, y) \text{ ainsi défini est donc l'unique couple solution du système } (\Sigma).}$$

Ex 17 Oscillateurs harmoniques : soit (E) $\quad y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = K\cos(\Omega t)$, où $0 < \lambda < \omega_0,\ K > 0$ et $\Omega > 0$.

a) **Régime libre** : (E_0) $\quad y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$

i. Cas général : $0 < \lambda < \omega_0$: "**oscillations amorties**" :

L'équation caractéristique $X^2 + 2\lambda X + \omega_0^2 = 0$ admet le discriminant $\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right) < 0$.

Ses racines sont donc les complexes conjugués

$$-\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{soit} - \lambda \pm i\omega, \text{ en ayant posé :}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

Les solutions complexes de (E_0) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto C_1 e^{(-\lambda + i\omega)t} + C_2 e^{(-\lambda - i\omega)t} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

Les solutions réelles s'expriment elles par :

$$\boxed{y_0 : t \mapsto e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

On sait qu'on peut aussi les écrire

$$\boxed{y_0 : t \mapsto A e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi), \quad A > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}}$$

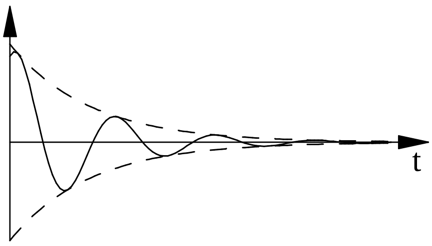
Les courbes intégrales sont "comprises" entre les courbes d'équation $y = Ae^{-\lambda t}$ et $y = -Ae^{\lambda t}$.

La fonction y_0 admet une "pseudo-période" $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, et ses zéros vérifient

$$\omega t - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longleftrightarrow t = \frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} + \frac{k\pi}{\omega},\ k \in \mathbb{Z}$$

En posant $t_0 = \dfrac{\varphi}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega}$, on a donc les zéros de y_0, espacés de $T/2$:

$$\boxed{t_k = t_0 + k\frac{T}{2},\ k \in \mathbb{Z}}$$

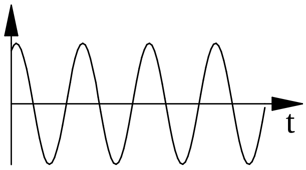


Remarque : on considère souvent le cas où "$\lambda \ll \omega_0$". La pseudo-pulsation ω est alors légèrement inférieure à la pulsation propre ω_0, donc la pseudo-période T est légèrement supérieure à la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$, ce qui est cohérent (le signal est retardé par les "frottements" λ).

ii. Cas particulier : $\lambda = 0$: "**oscillations parfaites**" ("coefficient de frottement nul ou résistance nulle") :

Les racines de l'équation caractéristique sont alors $\pm i\omega_0$ et les solutions de la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y_0 : t \mapsto A\cos(\omega_0 t - \varphi), \quad A > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}}$$



La fonction y_0 est périodique de période T_0.

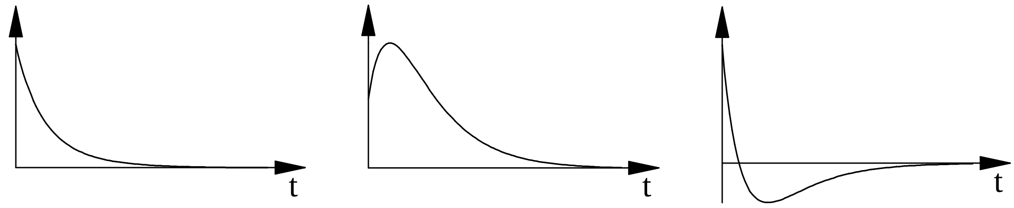
iii. Cas particulier : $\lambda \geqslant \omega_0$: "**régime apériodique**" : le discriminant est alors un réel positif, et en posant

$$\lambda_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0$$

les solutions de (E_0) s'écrivent pour tout réel t :

$$\boxed{y_0 : t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

A partir d'un certain "moment" t_0 dépendant des conditions initiales ces solutions décroissent (ou croissent) et tendent vers 0.



iv. Cas particulier : $\lambda = \omega_0$: "**régime critique**" : le discriminant est alors nul.

La solution double de l'équation caractéristique est $-\lambda$ et les solutions de (E_0) s'écrivent pour tout réel t :

$$\boxed{y_0 : t \mapsto (C_1 t + C_2)\, e^{-\lambda t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

Les caractéristiques de courbes sont identiques au cas précédent. C'est "la frontière" entre les deux régimes.

b) **Régime forcé** : $(E) \quad y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = K \cos(\Omega t)$

i. On revient aux conditions générales $0 < \lambda < \omega_0$. On commence par chercher une solution particulière de l'équation complexe

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = K e^{i\Omega t} \quad (E_{\mathbb{C}})$$

sous la forme

$$y : t \mapsto K' e^{i\Omega t} \quad \text{avec } K' \in \mathbb{C}.$$

puisque $i\Omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique ($i\Omega \neq -\lambda \pm i\omega_0$). Alors pour tout réel t

$$y'(t) = iK'\Omega e^{i\Omega t} \quad \text{et} \quad y''(t) = -K'\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

et l'équation $(E_{\mathbb{C}})$ amène à

$$K'\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\lambda\right) = K$$

soit

$$K' = \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\lambda} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\lambda}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}\, K$$

Une solution de $(E_{\mathbb{C}})$ est donc

$$y_{\mathbb{C}} : t \mapsto \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\lambda}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}\, K e^{i\Omega t}$$

dont la partie réelle y_1 est solution de (E) . Telle quelle, l'expression de y_1 n'a pas beaucoup d'intéret.

Appelons $Z = \omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\lambda$, et notons $R = |Z|$ et $\alpha = \operatorname{Arg} Z$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$y_{\mathbb{C}}(t) = \frac{K}{Z} e^{i\Omega t} = \frac{K}{Re^{i\alpha}} e^{i\Omega t} = \frac{K}{R} e^{i(\Omega t - \alpha)}$$

De sorte que l'expression de y_1 se simplifie en

$$\boxed{y_1 : t \mapsto \frac{K}{R} \cos(\Omega t - \alpha)}$$

La "réponse" est du même type que le régime imposé $K \cos(\Omega t)$, mais d'intensité $\dfrac{K}{R}$ et "déphasée" de α.

La solution générale de (E) s'écrit alors :

$$\boxed{y : t \mapsto \frac{K}{R}\cos(\Omega t - \alpha) + Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t - \varphi)}$$

Où R et α dépendent de Ω et du "système" (λ et ω_0) et A et φ dépendent des conditions initiales.

Lorsque t tend vers $+\infty$, le deuxième terme tend vers 0, et il ne reste plus que le "**régime permanent**" y_1. Au début, la somme des deux fonctions donne une fonction peu prévisible, appelé "**régime transitoire**".

ii. Réponse maximale : on a vu que R dépend de Ω. Cherchons pour quelle valeur de cette pulsation imposée Ω l'amplitude $\dfrac{K}{R}$ de la "réponse" est maximale. Rappelons que

$$R = R(\Omega) = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$$

L'amplitude est maximale lorsque $R(\Omega)$ est minimal, ou encore (mieux) $R^2(\Omega)$. Il s'agit donc de chercher le minimum de la fonction du quatrième degré

$$\Omega \mapsto \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2$$

ou en posant $x = \Omega^2$ de la fonction du deuxième degré

$$x \to \left(\omega_0^2 - x\right)^2 + 4\lambda^2 x = x^2 + 2\left(2\lambda^2 - \omega_0^2\right)x + \omega_0^4$$

Ce minimum est (c'est facile) atteint en $x = \omega_0^2 - 2\lambda^2$, soit pour

$$\boxed{\Omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - 2\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

soit pour une valeur légèrement inférieure à la pseudo-pulsation ω. On a alors

$$R(\Omega_{\max}) = \sqrt{\left(-2\lambda^2\right)^2 + 4\left(\omega_0^2 - 2\lambda^2\right)\lambda^2} = \sqrt{4\omega_0^2\lambda^2 - 4\lambda^4} = 2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 2\lambda\omega$$

et la réponse maximale est

$$\boxed{y_1 : t \mapsto \frac{K}{2\lambda\omega}\cos(\Omega t - \alpha)}$$

Remarque : il n'y a donc pas véritablement de résonance pour un oscillateur amorti. Tout au plus une valeur de la pulsation imposée qui maximise la réponse.

iii. Cas de l'oscillateur parfait ($\lambda = 0$) : l'équation complexe $(E_{\mathbb{C}})$ s'écrit

$$y'' + \omega_0^2 y = Ke^{i\Omega t}$$

· Premier cas : $\Omega \neq \omega_0$. $i\Omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique ($i\Omega \neq \pm i\omega_0$).

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y : t \mapsto K'e^{i\Omega t}$$

Un rapide calcul montre que $(E_{\mathbb{C}})$ amène à

$$K' = \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

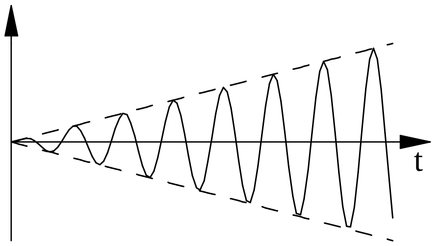
et qu'une solution particulière de (E) est la fonction y_1 définie par

$$\boxed{y_1 : t \mapsto \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t)}$$

La solution générale est de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t) + A\cos(\omega_0 t - \varphi)}, \quad A > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

- Second cas : $\Omega = \omega_0$ (**résonance**). $i\Omega$ est racine de l'équation caractéristique.
On cherche une solution particulière sous la forme
$$y : t \mapsto K' t e^{i\omega_0 t}$$
Le calcul, avec $y'(t) = K'(1 + i\omega_0 t) e^{i\omega_0 t}$ *et* $y''(t) = K'\left(2i\omega_0 - \omega_0^2 t\right) e^{i\omega_0 t}$, donne dans $(E_{\mathbb{C}})$:
$$2i\omega_0 K' = K \Longleftrightarrow K' = \frac{K}{2i\omega_0} = -\frac{iK}{2\omega_0}$$
Une solution particulière de (E) est la fonction y_1 définie par $t \to \operatorname{Re}\left(-\frac{iKt}{2\omega_0} e^{i\omega_0 t}\right)$ soit
$$\boxed{y_1 : t \mapsto \frac{K}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)}$$
La solution générale est de la forme
$$\boxed{y : t \mapsto \frac{K}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) + A\cos(\omega_0 t - \varphi)}, \quad A > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$
La solution y_1 prend le pas pour les grandes valeurs de t, ce qui donne, après un régime transitoire, une réponse pseudo périodique de pseudo-période ω_0 aux oscillations "portées" par les fonctions affines $t \mapsto \frac{K}{2\omega_0} t$ et $t \mapsto -\frac{K}{2\omega_0} t$. On remarquera le déphasage de $\pi/2$ de la réponse.



Ex 18 Complément : changements de variable :

a) Résolution sur $]-1, 1[$ de l'équation $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + y = 0 \quad (E)$
On pose $x = \sin t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (la fonction $\sin : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-1, 1[$ est C^1 bijective).
Alors $\forall x \in]-1, 1[,\ y(x) = y(\sin t)$. On pose alors
$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z(t) = y(\sin t) \quad (\text{soit } z = y \circ \sin)$$
Par composée, z est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\begin{aligned} z'(t) &= \cos t\, y'(\sin t) \quad \text{et} \\ z''(t) &= -\sin t\, y'(\sin t) + \cos^2 t\, y''(\sin t) \\ &= -\sin t\, y'(\sin t) + \left(1 - \sin^2 t\right) y''(\sin t) \end{aligned}$$
Or (E) s'écrit
$$\left(1 - \sin^2 t\right) y''(\sin t) - \sin t\, y'(\sin t) + y(\sin t) = 0$$
i.e.
$$\boxed{z''(t) + z(t) = 0 \quad (E')}$$
La très classique équation (E') admet pour solutions les fonctions de la forme
$$z : t \mapsto A\cos t + B\sin t = A\sqrt{1 - \sin^2 t} + B\sin t, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
en se rappelant que sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos \geqslant 0$. D'où les solutions de (E) sur $]-1, 1[$:
$$\boxed{y : x \mapsto A\sqrt{1 - x^2} + Bx} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

b) Résolution sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(E) : x^2y'' - xy' + y = 0$.

On pose $x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$ (la fonction $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est C^1 bijective).

Alors $\forall x \in]-1,1[\,,\ y(x) = y(\sin t)$. On pose alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y\left(e^t\right) \quad \text{(soit } z = y \circ \exp)$$

Par composée, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^t\, y'\left(e^t\right) \quad \text{et} \\ z''(t) &= e^t\, y'\left(e^t\right) + \left(e^t\right)^2 y''\left(e^t\right) \end{aligned}$$

Or (E) s'écrit

$$\left(e^t\right)^2 y''\left(e^t\right) - e^t\, y'\left(e^t\right) + y\left(e^t\right) = 0 \Longleftrightarrow \left(e^t\right)^2 y''\left(e^t\right) + e^t\, y'\left(e^t\right) - 2e^t\, y'\left(e^t\right) + y\left(e^t\right) = 0$$

soit

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$$

On a donc

$$\boxed{y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow z \text{ solution de } (E') : z'' - 2z + z = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

L'équation caractéristique de cette équation homogène à coefficients constants admettant la racine double 1, les solutions de (E') sont de la forme

$$z : t \mapsto (At + B)\, e^t \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

En revenant à la variable x $(t = \ln x)$, on a les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$:

$$\boxed{y : x \mapsto Ax\ln x + Bx} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$