Comparaisons locales

1. Propriétés locales

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, et on appelle :

- **voisinage de** $a \in \mathbb{R}$ tout intervalle de la forme $\mathcal{V} = [a - \alpha, a + \alpha]$, où $\alpha > 0$.
- **voisinage de** $+\infty$ tout intervalle de la forme $\mathcal{V} = [A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$.
- **voisinage de** $-\infty$ intervalle de la forme $\mathcal{V} =]-\infty, A]$, où $A \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on dira qu'une propriété $P(x)$ est vraie **au voisinage de** $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque il existe un voisinage $\mathcal{V}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{V},\ P(x) \text{ est vraie}$$

Exemple 1 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ lorsque signifie :

Exemple 2 : f admet un **maximum local** en $a \in \mathbb{R}$ signifie :

Propriété : si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.

2. Equivalence locale

a) <u>Définition</u> : soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g des fonctions définies au voisinage de a

On dit que f **est équivalente à** φ **en** a lorsque $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Remarque : on peut écrire au voisinage de a : $f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Attention : $f \underset{a}{\sim} 0$ N A AUCUN SENS.

Exemples : $x^2 - 2x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$; $x^2 - 2x \underset{x \to 0}{\sim} 2x$; $x^2 - 2x \underset{x \to -1}{\sim} 3$.

Propriété : deux fonctions équivalentes en a ont même signe au voisinage de a.

b) <u>Lien avec les limites</u> :

(i) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_a g = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_a f = \ell$

La réciproque est évidemment fausse (x et x^2 ont même limite en $+\infty$, mais ne sont pas équivalentes!).

(ii) $f \underset{a}{\sim} \ell \in \mathbb{R}^* \iff \lim\limits_a f = \ell$: très utile pour les calculs de limites.

Remarque : si $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \alpha \neq 0$, alors $f \underset{a}{\sim} \alpha g$.

Attention : $f \underset{a}{\sim} g$ ne signifie en aucun cas que $\lim\limits_a (f - g) = 0$.

Contre exemple : $f : x \mapsto x^2 + x$ et $g : x \mapsto x^2$ au voisinage de $+\infty$.

c) <u>Equivalents usuels</u> :

(i) <u>Equivalents en 0</u> : ♡♡♡

$\boxed{\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x}$ $\boxed{\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x}$ $\boxed{\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$ $\boxed{\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x}$ $\boxed{\operatorname{th} x \underset{x \to 0}{\sim} x}$

On a aussi

$$e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{mais} \quad \boxed{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

et de même si $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{mais} \quad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

En particulier ($\alpha = 1/2$)

$$\boxed{\sqrt{x+1} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}}$$

Enfin

$$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{mais} \quad \boxed{\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

(ii) Un équivalent en 1 : $\boxed{\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1}$

(iii) Cas général : $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) \neq 0, \text{ alors } f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)}$

Exemple : équivalent en 1 de $\arctan x - 1$

(iv) Equivalents en $+\infty$: $\boxed{\text{un polynôme est équivalent en } \pm\infty \text{ à son terme de plus haut degré}}$

$$\boxed{\text{si } a_n \neq 0, \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0 \underset{x\to +\infty}{\sim} a_n x^n}$$

(v) A connaitre aussi : $\boxed{\operatorname{ch} x \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{sh} x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}}$

d) Opérations sur les équivalents :

(i) Transitivité : $\boxed{\text{si } f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h \text{ alors } f \underset{a}{\sim} h}$

(ii) Produits, quotients, puissances : $\boxed{\text{si } f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2, \text{ alors } f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2,\ \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2} \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha}$

Remarque : avec $\alpha = \frac{1}{2}$, cela donne $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$

Exemple : calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5x+2}}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}$ et d'un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{2x^5+2x^4-3x^2-1}{-x^6+x^3+1}$

(iii) Changement de variable : $\boxed{\text{si } f(y) \underset{y\to a}{\sim} g(y) \text{ et } \lim\limits_{x\to b} u(x) = a, \text{ alors } f(u(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(u(x))}$

Exemple : équivalents de $e^{\sin x} - 1$ en 0, de $\ln \cos x$ en 0 et de $\sin \ln x$ en 1

e) Hérésies classiques : dans le doute, **toujours revenir à la définition** (le quotient tend vers 1)

(i) **On n'ajoute ni ne retranche jamais des équivalents**

Contre exemple : $f(x) = x - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ et $g(x) = x + x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$. Mais $f(x) + g(x)$?

Remarque : on ne peut pas non plus "passer dans l'autre membre" :
$1 + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$, mais en retranchant 1? Que dire de $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{7}$

Deux cas particuliers : ★ $\boxed{\text{Si } g \underset{a}{\sim} \alpha f,\ h \underset{a}{\sim} \beta f \text{ et } \alpha+\beta \neq 0, \text{ alors } g+h \underset{a}{\sim} (\alpha+\beta) f}$

★ $\boxed{\text{Si } f \underset{a}{=} o(g) \text{ alors } f+g \underset{a}{\sim} f}$ (voir plus loin)

(ii) **On ne compose jamais des équivalents** (on n'"applique" pas h à $f(x) \sim g(x)$)

Contre exemple : $f : x \mapsto x + x^2$ et $g : x \mapsto x^2$. On a $f \underset{+\infty}{\sim} g$. A-t-on $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$?

Cas du logarithme : $\boxed{\text{si } \lim_a g \neq 1, \text{ et } f \underset{a}{\sim} g, \text{ alors } \ln|f| \underset{a}{\sim} \ln(|g|)}$

f) <u>**Exemples :**</u> calcul des limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(x/2)\tan 3x}{e^x(1-\cos x)}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\ln(\cos x)\sqrt{\sin x}$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

3. Prépondérance

a) <u>**Définition :**</u> soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g des fonctions définies au voisinage de a

On dit que f **est négligeable devant** g **en** a lorsque $\displaystyle\lim_a \frac{f}{g} = 0$. On note $f \underset{a}{\ll} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$.

Remarque : on peut écrire au voisinage de a : <u>$f(x) = g(x)\varepsilon(x)$</u> avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

Notation de Landau : $f \underset{a}{\ll} g$ se note aussi $\boxed{f \underset{a}{=} o(g)}$. Notation des développements limités.

Exemples : $\ln x \underset{x\to+\infty}{\ll} x$ et $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$, $x^3 + x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$

Remarque importante : $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\ll} 1 \text{ (ou } f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)) \text{ équivaut à } \lim_a f = 0}$

On dit alors que f est un **infiniment petit** au voisinage de a

b) <u>**Lien avec l'équivalence :**</u>

(i) $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g \underset{a}{\ll} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)}$. Par exemple $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ s'écrit <u>$\sin x = x + o(x)$</u>

(ii) $\boxed{\text{Si } g \underset{a}{\ll} f, \text{ alors } f+g \underset{a}{\sim} f}$: on peut négliger l'influence de g dans le comportement local de $f+g$

c) <u>**Propriétés :**</u>

(i) <u>Transitivité</u> : $\boxed{\text{si } f \underset{a}{\ll} g \text{ et } g \underset{a}{\ll} h \text{ alors } f \underset{a}{\ll} h}$ et $\boxed{\text{si } f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\ll} h \text{ alors } f \underset{a}{\ll} h}$

(ii) <u>Sommes, produits, puissances, inverses</u> :

– $\boxed{\text{Si } f_1 \underset{a}{\ll} g \text{ et } f_2 \underset{a}{\ll} g, \text{ alors } f_1+f_2 \underset{a}{\ll} g}$ (soit "$o(g) + o(g) = o(g)$")

– $\boxed{\text{Si } f_1 \underset{a}{\ll} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\ll} g_2, \text{ alors } f_1 f_2 \underset{a}{\ll} g_1 g_2}$ (soit"$o(g_1)\, o(g_2) = o(g_1 g_2)$")

– $\boxed{\text{On suppose } f > 0 \text{ et } g > 0 \text{ au voisinage de } a. \text{ Si } f \underset{a}{\ll} g \text{ et } \alpha > 0, \text{ alors } f^\alpha \underset{a}{\ll} g^\alpha}$

– $\boxed{\text{On suppose } f > 0 \text{ et } g > 0 \text{ au voisinage de } a. \text{ Si } f \underset{a}{\ll} g \text{ , alors } \frac{1}{g} \underset{a}{\ll} \frac{1}{f}}$

(iii) <u>Changement de variable</u> : $\boxed{\text{si } f(y) \underset{y\to a}{\ll} g(y) \text{ et } \lim_{x\to b} u(x) = a, \text{ alors } f(u(x)) \underset{b}{\ll} g(u(x))}$

d) Comparaisons de référence en $+\infty$:

(i) <u>Puissances</u> : $\boxed{\text{si } a < b, \text{alors } x^a \underset{x\to+\infty}{\ll} x^b}$. En particulier

$$\underbrace{\frac{1}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\ll} \cdots \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{infiniments petits}} \underset{x\to+\infty}{\ll} 1 \underset{x\to+\infty}{\ll} \underbrace{\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2 \underset{x\to+\infty}{\ll} \cdots \underset{x\to+\infty}{\ll} x^n}_{\text{infiniments grands}}$$

(ii) <u>Exponentielles</u> : $\boxed{\text{si } a < b, \text{alors } e^{ax} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{bx}}$

(iii) <u>Logarithmes/puissances/exponentielles</u> : $\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3$, $\boxed{(\ln x)^a \underset{x\to+\infty}{\ll} x^b \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{cx}}$

Remarque 1 : en passant aux inverses, on a $\forall (b,c) \in]0,+\infty[^2$, $\boxed{e^{-cx} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^b}}$

Remarque 2 : en posant $y = -x$, on obtient aussi $\forall \lambda > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{e^{\lambda x} \underset{x\to-\infty}{\ll} \frac{1}{x^n}}$ (à refaire!)

e) Comparaisons de référence en 0 :

(i) <u>Puissances</u> : $\boxed{\text{si } a > b, \text{alors } x^a \underset{x\to0+}{\ll} x^b}$. En particulier

$$\underbrace{x^n \underset{x\to0}{\ll} \cdots \underset{x\to0}{\ll} x^2 \underset{x\to0}{\ll} x \underset{x\to0}{\ll} \sqrt{x}}_{\text{infiniments petits}} \underset{x\to0}{\ll} 1 \underset{x\to0}{\ll} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{x\to0}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{x\to0}{\ll} \cdots \underset{x\to0}{\ll} \frac{1}{x^n}}_{\text{infiniments grands}}$$

(ii) <u>Logarithmes et puissances</u> : $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2$, $\boxed{|\ln x|^a \underset{x\to0+}{\ll} \frac{1}{x^b}}$

Remarque : on a donc $\boxed{\lim_{x\to0+} x^b |\ln x|^a = 0}$

Exemple 1 : calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{81x^4+5x^3-5x+2}}{\sqrt[3]{8x^6-7x^4+x^3-x+\pi}}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10^{12}}}{e^{0.000000001x}}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} x + 2^x}{e^x + x^7 + \ln^3 x}$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh} x}\right)^x$

Exemple 2 : équivalent simple en $+\infty$ de $\dfrac{2\ln x + \sqrt{\ln x}}{\sqrt{x^2+1} + e^{3x}}$ et en 0 de $\dfrac{\ln(x) + 1/\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sin(x)}$

4. Relation de domination

a) **Définition :** sous les mêmes hypothèses que précédemment, on dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{=} O(g)$, lorsque le quotient $\dfrac{f}{g}$ est borné au voisinage de a. Autrement dit

$$\boxed{f = O(g) \Longleftrightarrow f \text{ s'écrit } \quad f(x) = g(x)\,\delta(x) \quad \delta \text{ bornée au voisinage de } a}$$

Exemples : $x^2 \sin \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{=} O\left(x^2\right)$; $\dfrac{2x^3}{x^4+1} \underset{x \to 0}{=} O\left(x^3\right)$:

Remarque 1 : $f = O(1) \Longleftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a

Remarque 2 : si $f = o(g)$ alors $f = O(g)$. Réciproque fausse.

b) **Propriétés élémentaires :**

(i) Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ alors $f = O(h)$ (ii) Si $f = O(g)$ et $\lim\limits_{a} g = 0$, alors $\lim\limits_{a} f = 0$

(iii) Si $\begin{cases} f_1 = O(g) \\ f_2 = O(g) \end{cases}$ alors $f_1 + f_2 = O(g)$

(iv) Si $\begin{cases} f_1 = O(g_1) \\ f_2 = O(g_2) \end{cases}$ alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ (v) Si $\begin{cases} f_1 = O(g_1) \\ f_2 = o(g_2) \end{cases}$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$

5. Le cas des suites

a) **Définitions :** on suppose (v_n) non nulle à partir d'un certain rang n_0. On définit :

(i) (u_n) est **équivalente** à (v_n) : $\boxed{u_n \sim v_n \text{ lorsque } \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0} \text{ converge vers } 1}$

Cela revient à l'écriture pour n suffisamment grand : $u_n = (1 + \varepsilon_n)\, v_n$, avec ε_n suite de limite nulle.

(ii) (u_n) est **négligeable devant** (v_n) : $\boxed{u_n \ll v_n \text{ ou } u_n = o(v_n) \text{ lorsque } \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0} \text{ converge vers } 0}$

Cela revient à l'écriture pour n suffisamment grand : $u_n = \varepsilon_n v_n$, avec ε_n suite de limite nulle.

(iii) (u_n) est **dominée** par (v_n) : $\boxed{u_n = O(v_n) \text{ lorsque } \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0} \text{ est bornée}}$

Cela revient à l'écriture pour n suffisamment grand : $u_n = \delta_n v_n$, avec δ_n suite bornée.

Remarque 1 : $u_n = o(1)$ signifie : (u_n) converge vers 0 et $u_n = O(1)$ signifie : (u_n) est bornée

Remarque 2 : comme pour les fonctions,

- $\boxed{u_n \sim \ell \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \lim u_n = \ell}$
- $\boxed{\text{si } u_n \ll v_n, \text{ alors } u_n + v_n \sim v_n}$
- $\boxed{u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \ll v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)}$

Exemples : $\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{\ln(n)}{n^2+2n+3} \sim \frac{\ln n}{n}$, $n^2 \sin n = O\left(n^2\right)$, $\displaystyle\sum_{0}^{n} \cos(\alpha k)\, 2^k = O(2^n)$.

Propriétés : ces trois relations de comparaisons sont **transitives**, et compatibles avec le **produit** et les **puissances positives**. Ce qui a été dit sur les fonctions s'adapte sans le moindre problème aux suites.

b) **Equivalents usuels :** $\boxed{\text{on suppose que } (u_n) \text{ converge vers } a \text{ et } f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\,;\text{ alors } f(u_n) \sim g(u_n)}$

Par exemple, si (u_n) est de limite nulle, alors

$$\sin u_n \sim u_n, \quad \arctan u_n \sim u_n, \quad \ln(1+u_n) \sim u_n, \quad \operatorname{sh} u_n \sim u_n, \quad \cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2} \quad \text{etc.}$$

et si (v_n) converge vers 1, alors $\ln(v_n) \sim v_n - 1$.

Exemples : calcul des limites suivantes :

(i) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{1-\cos(1/n)}$ (ii) $\lim 2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ (iii) $\lim \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$ (iv) $\lim n^3 \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{\sin\dfrac{1}{n}}$

c) **Comparaisons de référence :**

(i) Puissances : $\boxed{\text{si } a < b, \text{ alors } n^a = o\left(n^b\right)}$ En particulier on a l'échelle

$$\underbrace{\frac{1}{n^p} \ll \cdots \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{infiniments petits}} \ll 1 \ll \underbrace{\sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll \cdots \ll n^p}_{\text{infiniments grands}}$$

(ii) Suites géométriques : $\boxed{\text{si } 0 < a < b, \text{ alors } a^n \ll b^n}$

(iii) Théorème : si α et β sont strictement positifs et $q > 1$, on a

$$\boxed{(\ln n)^\alpha \ll n^\beta \ll q^n \ll n! \ll n^n}$$

Exemple 1 : calculer les limites suivantes :

(i) $\lim \dfrac{n^n+n!}{(\ln 3)^n + n^5}$ (ii) $\lim \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ (iii) $\lim \dfrac{3^{n+2}-5^{n+2}}{3^n-5^n}$ (iv) $\lim \dfrac{(-10)^n+3n!}{100^n+n!}$

Exemple 2 : comparer à l'infini les suites de terme général $(\ln n)^{10}\, n^2$ et $(\ln n)\, n^5$