Problème Séries temporelles

Exercice 1 *Soit* (Z_t) *un bruit blanc WN*$(0,1)$. *Dans chacune des équations ARMA suivantes, indiquer s'il existe une solution stationnaire, causale ou inversible?*

1. $X_t + \frac{1}{2}X_{t-3} = Z_t + Z_{t-1}$;
2. $X_t + 2X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}$;
3. $X_t = Z_t + \frac{5}{6}Z_{t-1} + \frac{1}{6}Z_{t-2}$;
4. $X_t - \frac{5}{2}X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{3}Z_{t-1}$;

Exercice 2 *On considère l'équation*

$$X_t - \alpha X_{t-2} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

où (Z_t) *est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance* σ^2 *et* α *et* θ *sont des réels strictement positifs.*

1. *Quelles conditions doivent vérifier* α *et* θ *pour que de l'équation ci dessus admette une solution stationnaire.*
2. *Quelles conditions doivent vérifier* α *et* θ *pour que cette solution soit causale?*
3. *Quelles conditions doivent vérifier* α *et* θ *pour que cette solution soit inversible?*

3. *Calculer la solution* (X_t) *sous la forme d'une somme infinie* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ *dans le cas où*
   a. $\alpha > 1$
   b. $\alpha < 1$
4. *Calculer la fonction d'autocorrélation de* (X_t) *dans le cas où*
   a. $\alpha > 1$
   b. $\alpha < 1$

Exercice 3 *Soient* (X_t) *et* (Y_t) *deux processus stationnaires centrés non-correlés:* $\forall\, s,\, t$ *cor*$(X_t, Y_t) = 0$

1. *Montrer que* $Z_t = X_t + Y_t$ *est un processus stationnaire.*
2. *Est-ce que le processus* $W_t = X_t Y_t$ *est stationnaire?*

Exercice 4 *Soit le processus centré suivant*

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$$

où (Z_t) *est un BB*$(0,1)$

1. *Quelle est la nature de* (X_t)

2. *Quelle condition sur α doit on imposer pour que ce processus soit stationnaire causale ?*
3. *Calculer la variance de ce processus.*
4. *Calculer l'autocovariance de (X_t)*
5. *En déduire la décroissance vers 0 de l'auto-covariance lorsque h tend vers l'infini.*
6. *Calculer l'auto-corrélation partielle.*

Exercice 5 *On considère $(X_t) \sim AR(2)$ suivant*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} - .5X_{t-2} + Z_t$$

1. *Calculer ϕ_1 en fonction de $\gamma_X(0)$ et de $\gamma_X(1)$*
2. *En déduire $r_X(1)$ et $r_X(2)$.*

Exercice 6 *On considère le code `R` suivant*

```
> require(caschrono)
> set.seed(123)
> y1=arima.sim(n=100,list(ar=-.3,.....=.5),sd=sqrt(3))
> library(forecast)
> my1=Arima(y1,order=c(1,0,1),include.mean=FALSE)
> my1
Series: y1
ARIMA(1,0,1) with zero mean

Coefficients:
          ar1   .....
      -0.6437  0.8885
s.e.   0.1449  0.0910

sigma^2 estimated as 2.328:  log likelihood=-183.34
AIC=372.68   AICc=372.93   BIC=380.5
> my2=Arima(y1,order=c(........),include.mean=FALSE)
> my2
Series: y1
ARIMA(.........) with zero mean

Coefficients:
          ar1      ar2    ma1
      -0.6439  -0.0120  0.883
s.e.   0.1454   0.1166  0.107

sigma^2 estimated as 2.352:  log likelihood=-183.34
AIC=......   AICc=375.09   BIC=385.09
> my3=Arima(y1,order=c(.......),include.mean=FALSE)
```

```
> my3
Series: y1
ARIMA(.......) with zero mean

Coefficients:
         ma1      ma2     ma3
      0.2519  -0.1481  0.1839
s.e.  0.1015   0.1121  0.0983

sigma^2 estimated as 2.363:  log likelihood=.........
AIC=375.08   AICc=375.5   BIC=385.5
> sum(my1$residuals^2)
[1] .........
> sum(my1$residuals^2)/my1$sigma2
[1] ..........
```

1. *Compléter le code* R.
2. *Ecrire l'équation du modèle simulé dans le code* R.
3. *Ecrire l'équation des modèles estimés dans le code* R.
4. *Quel modèle ajuste au mieux les données simulées.*

Exercice 7 *Compléter le code* R *suivant et indiquer la conclusion qu'on peut tirer de cette sortie* R.

```
> library(fpp2)
> library(urca)
> data(..(1)..)
> length(euretail)
[1] ..(2)..
> pf(1.404,4,50)
[1] 0.7537659
> t1<-euretail%>%diff(5)%>%ur.df(lags =..(3)..,type="drift")
> t1%>%summary

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression ..(4)..


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + ..(5)..

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.63273 -0.45865 -0.03532  0.34065  1.98545
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.05398    ..(6)..   0.503   0.6174
z.lag.1     -0.10481    0.06157  -1.702   0.0949 .
z.diff.lag1  0.24038    0.14120   1.702   0.0949 .
z.diff.lag2 -0.10917    0.14137  -0.772   0.4436
...(8).. 0.10962    0.14403  ..(7)..  0.4502
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7435 on ..(10).. degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.101,..(9).. R-squared:  0.02904
F-statistic: 1.404 on ..(11).. and 50 DF,  p-value: ..(12)..


Value of test-statistic is: -1.7023 1.4544

Critical values for test statistics:
       1pct  ..(13).. ..(14)..
tau2   -3.51   -2.89.   -2.58
.(15)..  6.70    4.71    3.86
```

Exercice 8 `> library(sarima)`

```
> x <- sim_sarima(n=100, model = list(ar=0.8,ma=.4))
```

$X_t = \frac{\text{............}}{\text{............}} Z_t$ *tel que* $Z_r \sim$ .....

```
> x <- sim_sarima(n=200,model=list(sar=0.8, nseasons=12, sigma2 = 1))
```

$X_t -$ ....$X_{\text{..........)..}} = Z_t$ *tel que* $Z_r \sim$ ...(6)...

```
> x <- sim_sarima(n=144, model = list(ar=c(1.2,-0.8), ma=0.4,
+                                      sar=0.3, sma=0.7, iorder=1,
+                                      siorder=2,
+                                      nseasons=12, sigma2 = 2))
```

....$X_t = \frac{\text{.............}}{\text{............}} Z_t$

```
x <- sim_sarima(n=144, model = list(............., iorder=......, siorder=.....,
+                                   nseasons=.............., sigma2 = 1))
```

$(1-B)^2(1-B^4)^3X_t = (1+.8B)Z_t$

```
> library(urca)
> library(fpp2)
> .............
```

```
> t1<-h02%>%diff(12)%>%...........(lags =............,type=.............)
> ...........
###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression ...........


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + ...........)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.192380 -0.032261  0.002563  0.029618  0.205681

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.01045    0.00536   1.950 0.052768 .
..(23)..     -0.36425    0.10213  -3.567 0.000465 ***
z.diff.lag1 -0.54432    .........  -4.906  2.1e-06 ***
z.diff.lag2 -0.21562    0.11675  -1.847 0.066444 .
z.diff.lag3  0.02955    0.11378   0.260 0.795362
z.diff.lag4 -0.11476    0.11145  -1.030 0.304557
z.diff.lag5 ..........    0.10440   0.114 0.909241
z.diff.lag6 -0.01355    0.08031  -0.169 0.866160
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1  1

Residual standard error: 0.0584 on 177 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5036,Adjusted R-squared:  0.4839
F-statistic: 25.65 on 7 and 177 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic is: -3.5666 6.3869

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
.........  6.52  4.63  3.81
```

On note par (X_t) le processus observé dans `h02`. On a effectué ci dessus le test d'hypothèse nulle

$$H_0 \,:\, \text{........},\ \textit{vs l'hypothèse alternative} H_1 \,:\, \pi\text{...(26)...}$$

On peut conclure que le processus .... est ....

```
> t2<-h02%>%diff(12)%>%.........(type=.........)
> .........

#######################
```

```
# ......... Unit Root Test #
########################

Test is of type: ......... with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.432

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
> library(forecast)
> m1<-Arima(h02,order=c(.......,1,.......),include.drift = .......,
+           seasonal=list(order=..(38)..,period=4),
+           lambda=NULL)
> m1
Series: h02
ARIMA.........(1,0,0)........ with drift

Coefficients:
            ar1      ma1  ..(41).. ..(42)..
         0.5776  -1.0000  ..(48)..  0.0024
.......  0.0597   0.0154   0.0708  0.0003

sigma^2 estimated as 0.01933:  ...(44)...=112.3
AIC=........   AICc=-214.29   BIC=-198.03
> m1$aic+2*m1$loglik
[1] ..(46)..
> t_stat(m1)
            ar1      ma1      sar1    drift
t.stat ........ -65.1087 -2.219095 ...(49)..
p.val  0.000000   0.0000  0.026480 0.000000
```

Le modèle estimé ci dessus sécrit alors

$$........X_t = ... + \frac{.......}{.......} Z_t$$

où $Z \sim$..(52)..

```
> m2<-sarima(h02,p = ..(55)..,d = 2,q = ..(56)..,P = ..(57)..,
+   D = 1,Q = ..(58)..,S = 4,details = F,no.constant = T)
> m2
$fit

Call:
stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal = list(order = c(P, D,
    Q), period = S), include.mean = !no.constant, optim.control = list(trace = trc,
    REPORT = 1, reltol = tol))

Coefficients:
          ar1    ..(65)..
      ........  -0.9999
s.e.   0.0716   0.0127
```

```
sigma^2 estimated as .......:  log likelihood = -0.97,  aic = 7.95

$degrees_of_freedom
[1] 196

$ttable
     Estimate     SE  t.value p.value
ar1  ...... .......  -0.3254  0.7452
......  .......  0.0127  .......  0.0000

$AIC
[1] -1.875119

$AICc
[1] -1.864727

$BIC
[1] ..........
```

Exercice 9 *On considère le code 'R' suivant*

```
> polyroot(c(1,-.5,.3))
[1] 0.833333+1.624466i 0.833333-1.624466i
> polyroot(c(1,1,1.5))
[1] -0.3333333+0.745356i -0.3333333-0.745356i
> polyroot(c(1,.4,.5,.8))
[1]  0.259294+1.012827i -1.143588+0.000000i  0.259294-1.012827i
```

Soit Z_t ∼BB(0,1) un bruit blanc et X_t un processus ARMA vérifiant les équations ci dessous Indiquer si ces équations ARMA admettent des solutions stationnaires (Répondre par oui, si stationnaire et non, sinon)

- $(1.5B + .3B^2)X_t = (1 + .8)Z_t$ ....
- $X_t = -.4X_{t-1} - .5X_{t-2} - .8X_{t-2} + Z_t + .4Z_{t-1}$ ....
- $(1 + B + 1.5B^2)X_t = Z_t$ ....

Exercice 10 *On sait que si une équation ARMA admet une solution, elle est de la forme*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{t-k}$$

où $Z_t \sim BB(0,1)$. La commande `ARMAtoMA` calcule les coefficients ψ_k étant donné les coefficients AR et MA.

1. *Rappeler l'expression de $\mathbb{E}(X_t)$ et $\gamma_X(h)$ $\mathbb{E}(X_t)$ =........... et $\gamma_X(h)$ =...........*
2. *Donner à partir du code ci dessous :*

- *le modèle ARMA:............*
- $\gamma_X(0)$............
- $\gamma_X(2)$...........

```
> psi<-ARMAtoMA(ar = c(.5,.3),ma=.8, lag.max = 1000)
> psi1<-ARMAtoMA(ar = c(.5,.3),ma=.8, lag.max = 1001)
> psi2<-ARMAtoMA(ar = c(.5,.3),ma=.8, lag.max = 1002)
> sum(psi^2)
[1] 5.24359
> sum(psi*psi1[-1])
[1] 4.302564
> sum(psi*psi2[-c(1,2)])
[1] 3.724359
> psi[1:2]
[1] 1.30 ...........
> sum(ARMAtoMA(ar = c(.5,.3),ma=.8, lag.max = 20))
[1] 7.678335
> library(FitAR)
> g=tacvfARMA(theta =  -.8,phi = c(.5,.3),sigma2 = 1,maxLag = 2)
> g
[1] ............  ............. 4.674359
> PacfDL(g,LinearPredictor = .............)
$Pacf
[1]  ............ -0.2902338

$ARCoefficients
[1]  ............ ...........

$ResidualVariance
[1] ...........
```

En déduire que

$$X_t = \ldots\ldots\ldots\ldots \times X_{t-1} + E^+_{t,1}$$

et

$$X_t = \ldots\ldots\ldots\ldots \times X_{t-1} + \ldots\ldots \times X_{t-2} + E^+_{t,2}$$

où

$$\|E^+_{t,2}\|^2 = \ldots\ldots\ldots$$