

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

**Интервальный анализ**  
**Отчёт по лабораторным работам №1 и №2**

Выполнил:

Студент: Габдушев Рушан

Группа: 5040102/30201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2024 г.

# Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Постановка задачи</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Теория</b>  | <b>4</b>  |
| 2.1      | Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(Tol)$ . . . . .        | 4         |
| 2.2      | Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики. . . . . | 5         |
| <b>3</b> | <b>Реализация</b>  | <b>6</b>  |
| 3.1      | Построение коридора совместности . . . . .                             | 6         |
| <b>4</b> | <b>Результаты</b>  | <b>7</b>  |
| <b>5</b> | <b>Обсуждение</b>  | <b>14</b> |
| <b>6</b> | <b>Синтетический пример</b>  | <b>15</b> |
| <b>7</b> | <b>Приложения</b>  | <b>16</b> |

## Список иллюстраций

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Структурная схема калибровки DRS4 . . . . .  | 4  |
| 2  | Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений. Калибровочная прямая полученная вторым методом, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. прямые в вершинах – зелёным. . . . . | 7  |
| 3  | Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 0) . . . . .  | 8  |
| 4  | Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (1, 24) . . . . .   | 8  |
| 5  | Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (2, 72) . . . . .   | 9  |
| 6  | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 0). Голубым цветом обозначен новый интервал, зеленым исходный . . . . .   | 9  |
| 7  | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (1, 24). Голубым цветом обозначен новый интервал, зеленым исходный . . . . .  | 10 |
| 8  | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (2, 72). Голубым цветом обозначен новый интервал, зеленым исходный . . . . .  | 10 |
| 9  | Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 0), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности <i>Tol</i> и <i>Uni</i> обозначены голубым и светло-серым цветом. . . . .          | 11 |
| 10 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (1, 24), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности <i>Tol</i> и <i>Uni</i> обозначены голубым и светло-серым цветом. . . . .         | 11 |
| 11 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (2, 72), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности <i>Tol</i> и <i>Uni</i> обозначены голубым и светло-серым цветом. . . . .         | 12 |
| 12 | Увеличенное изображение из Рис.10. . . . .   | 12 |
| 13 | <i>Tol</i> , <i>Uni</i> и <i>argmaxTol</i> для датчика (0, 0). . . . .   | 13 |
| 14 | <i>Tol</i> , <i>Uni</i> и <i>argmaxTol</i> для датчика (1, 24). . . . .  | 13 |
| 15 | <i>Tol</i> , <i>Uni</i> и <i>argmaxTol</i> для датчика (2, 72). . . . .  | 14 |
| 16 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для смещения 0.0, обозначена красным цветом. . . . .  | 15 |
| 17 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для смещения 0.15, обозначена красным цветом. . . . .   | 15 |

---

|    |  |    |
|----|--|----|
| 18 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для смещения 0.25, обозначена красным цветом. . . . . | 16 |
|----|--|----|

# 1 Постановка задачи

Проводится исследование из области солнечной энергетики. Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

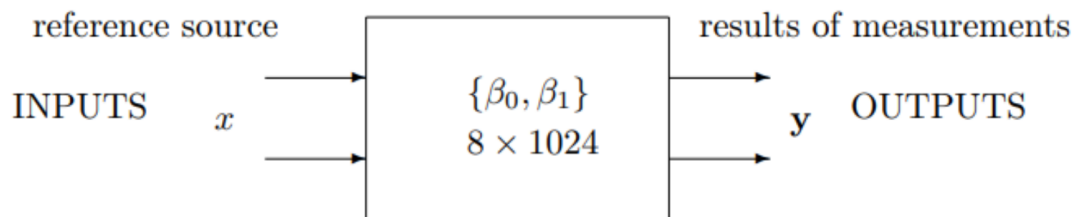


Рис. 1: Структурная схема калибровки DRS4

Ставится задача калибровки данного чипа. Для этого в чип подается заранее известное напряжение  $X$  и считываются полученные значения  $Y$ . Для каждого отдельного напряжения  $X$ , эта операция повторяется 100 раз. Затем, исходя из предположения что

$$Y = \beta_0 X + \beta_1 \quad (1)$$

выполняется линейная регрессия и находятся коэффициенты  $\beta_0, \beta_1$ .

## 2 Теория

### 2.1 Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(Tol)$ .

Поскольку показания датчиков обладают погрешностью, полученные данные на самом деле следует рассматривать как интервалы, центр которых совпадает со считанными показаниями, а радиус равен  $\varepsilon$ , в данном случае  $1/16535$ .

В связи с тем, что показания независимы, мы можем рассмотреть произвольную ячейку из всех  $8 \times 1024$  ячеек. Тогда, для данной ячейки мы имеем  $100 \times 11$  пар значений, где  $x$  координата соответствует поданному напряжению и лежит в границах  $[-0.5, 0.5]$ , а  $y$  координата представляет собой интервал

с  $wid = 2/16535$ . Для того, чтобы найти точечную оценку коэффициентов калибровки, воспользуемся распознающим функционалом  $Tol$

$$Tol(x) = Tol(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \{rad(b_i) - |mid(b_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|\} \quad (2)$$

Где  $A$  - матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \dots & \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$b$  - интервальный вектор

$$b = \begin{pmatrix} [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \\ \dots \\ [y_m - \epsilon, y_m + \epsilon] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Особенностью данного функционала является то, что допустовое множество решений системы  $Ax = b$  можно описать как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Tol(x, A, b) \geq 0\} \quad (5)$$

Таким образом, если  $Tol(argmax(Tol), A, B) \geq 0$ , то система совместная и  $argmax(Tol)$  можно считать результатом регрессии (а значит это вектор содержащий  $\beta_0\beta_1$ ).

Однако, зачастую, система не является совместной. В таком случае следует рассмотреть множество  $Tol_i$

$$Tol_i(x, A, b) = rad(b_i) - |mid(b_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|, 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

Можно заметить, что если существует  $i$  для которого  $Tol_i < 0$ , то  $Tol < 0$ . При этом, для того чтобы  $Tol_i \geq 0$  был достаточно большим.

Таким образом, в случае отсутствия совместности, следует пройти по строчкам матрицы и элементам  $b$ . Если для них  $Tol_i < 0$ , то стоит "расширить" интервал в правой части, чтобы добиться  $Tol_i = 0$ . Тогда очевидно, что  $Tol(argmax(Tol), A, B)$  будет равен 0, а  $argmax(Tol)$  будет искомыми коэффициентами калибровки.

## 2.2 Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики.

У описанного первого метода есть два основных недостатка. Во-первых, "расширение" интервалов в правой части приводит к сильной погрешности

на практике, так как интервалы "расширяются" обе стороны: как в сторону регрессионной прямой, так и от неё. Во-вторых, результатом данного метода будет лишь точечная оценка. В качестве альтернативы, предлагается другой метод, основанный на использовании твинной арифметики.

Для начала, рассмотрим имеющиеся у нас данные. В первом методе мы брали все пары  $(x_i, [y_i - \epsilon y_i + \epsilon])$  и работали со всеми интервалами, однако сейчас, мы разделим значения  $y_i$  в группы по 100 значений в зависимости от соответствующего им  $x_i$ . Тогда мы получим для каждого различного  $x_i$  набор из значений, по которым мы можем построить боксплот Тьюки. По боксплоту определим внешнюю и внутреннюю оценку, и построим для каждого  $x_j$  твин  $[[y_j^{in}, \overline{y_j^{in}}], [y_j^{ex}, \overline{y_j^{ex}}]]$ .

Затем, снова построим распознающий функционал  $Tol$ , но теперь

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_0 & 1 \\ x_0 & 1 \\ x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \dots & \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} [\overline{y_0^{in}}, \overline{y_0^{in}}] \\ [\overline{y_0^{ex}}, \overline{y_0^{in}}] \\ [\overline{y_0^{in}}, \overline{y_0^{ex}}] \\ [\overline{y_0^{ex}}, \overline{y_0^{ex}}] \\ [\overline{y_1^{in}}, \overline{y_1^{in}}] \\ \dots & \end{pmatrix} \quad (7)$$

В случае если  $Tol(\operatorname{argmax}(Tol)) = 0$  мы так же возвращаем  $\operatorname{argmax}(Tol)$

В случае если  $Tol(\operatorname{argmax}(Tol)) > 0$  мы можем найти множество значений  $(\beta_0, \beta_1)$  при которых  $Tol > 0$  и вернуть его

В случае если  $Tol(\operatorname{argmax}(Tol)) < 0$  нам снова требуется бороться с отсутствием совместности.

Для этого снова рассмотрим  $Tol_i$ , однако, вместо изменения правой части, будем просто убирать соответствующую строку из  $A$  и  $b$ . В силу того что у нас на каждую пару  $(x_j, y_j)$  создается 4 уравнения, при удалении описанным способом несовместных уравнений, уравнений останется больше, чем при первом способе. А значит решение будет точнее. При этом, в результате данной операции, возможна ситуация, когда  $Tol(\operatorname{argmax}(Tol)) > 0$ .

### 3 Реализация

Данная работа реализована на языке программирования Python 3.10 с использованием пакетов matplotlib и intvalpy. Код данного отчёта подготовлен с использованием онлайн редактора Overleaf и компилятора pdflatex.

#### 3.1 Построение коридора совместности

После интерполяции вторым методом мы получаем множество допустимых значений для  $(\beta_0, \beta_1)$ , при которых система совместна, в виде выпук-

лого многоугольника с вершинами  $\{v_0, \dots, v_k\}$  где  $v_p = (\beta_{p0}, \beta_{p1})$ . Для визуализации образуемого коридора совместности найдём для каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$  нижнюю и верхнюю ограничивающую прямую из множества допустимых. Для этого вычислим  $\bar{p}_i = \operatorname{argmax}_{1 \leq p \leq k} \{\beta_{p0} \frac{(x_i + x_{i+1})}{2} + \beta_{p1}\}$  и  $\underline{p}_i = \operatorname{argmin}_{1 \leq p \leq k} \{\beta_{p0} \frac{(x_i + x_{i+1})}{2} + \beta_{p1}\}$  – индексы верхней и нижней ограничивающих прямых на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ .

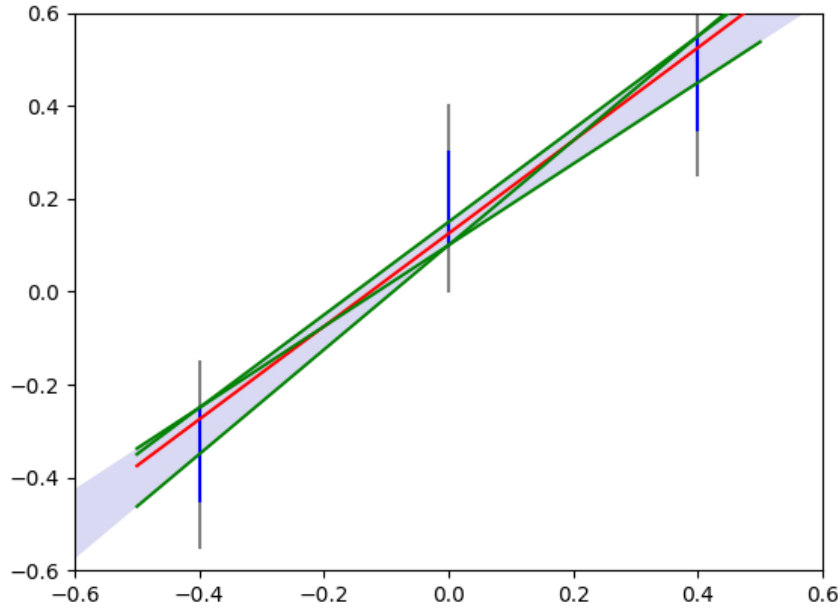


Рис. 2: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений. Калибровочная прямая полученная вторым методом, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. прямые в вершинах – зелёным.

## 4 Результаты

Для рассмотрения значений, каждому датчику в чипе были даны координаты в зависимости от номера канала и ячейки. Таким образом, датчик получивший данные из канала  $j$  ( $1 \leq j \leq 8$ ) и находящийся в ячейке  $i$  ( $1 \leq i \leq 1024$ ) будет иметь координаты  $i, j$ . Рассматриваются данные для датчиков

- С координатами  $(0, 0)$
- С координатами  $(1, 24)$
- С координатами  $(2, 72)$



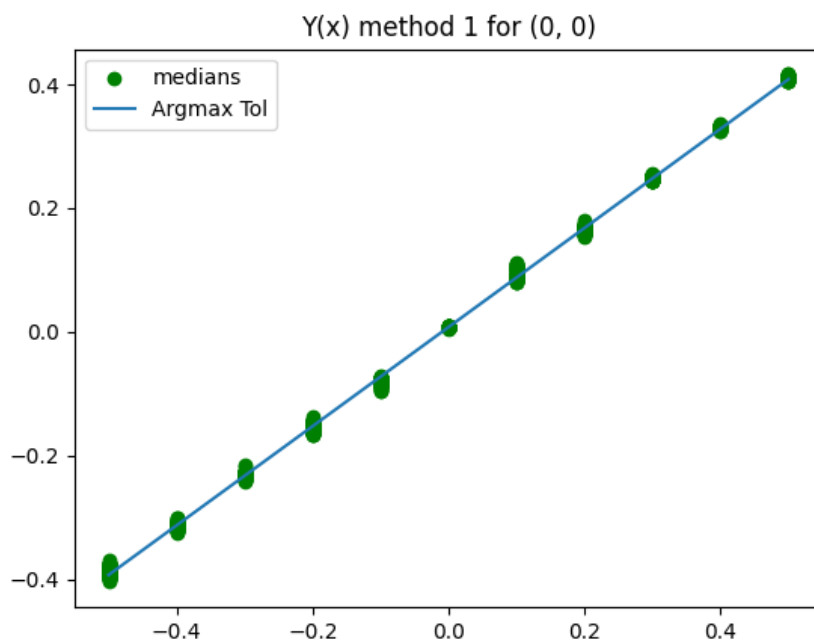


Рис. 3: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 0)

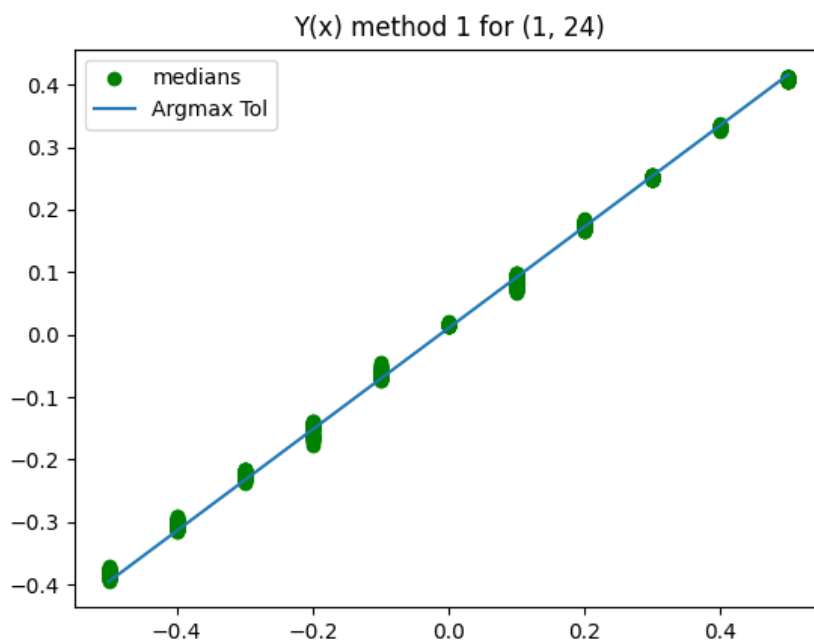


Рис. 4: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (1, 24)

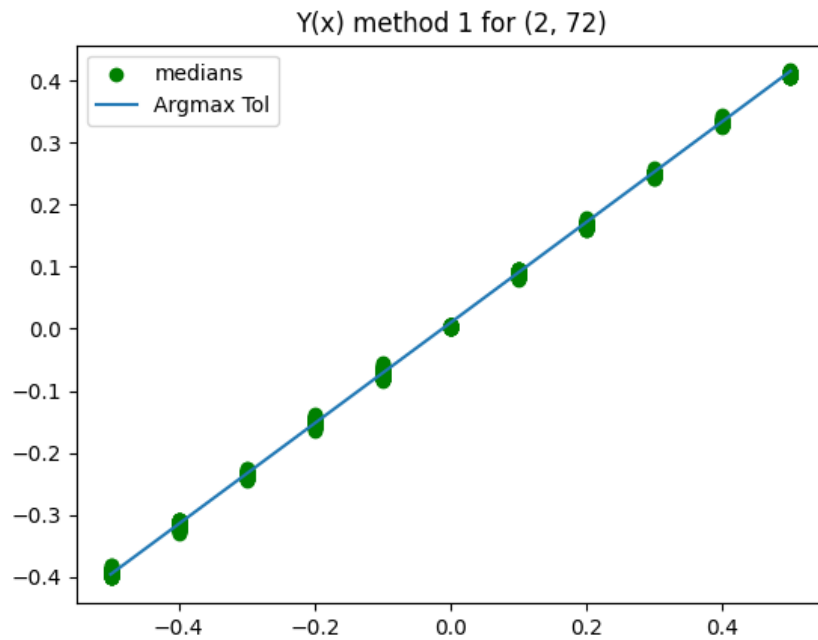


Рис. 5: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (2, 72)

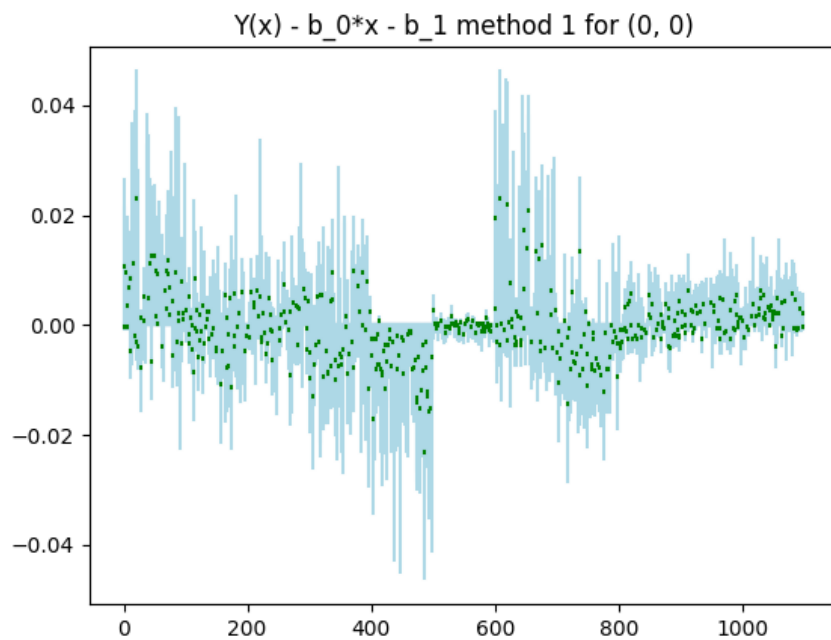


Рис. 6: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 0). Голубым цветом обозначен новый интервал, зеленым исходный

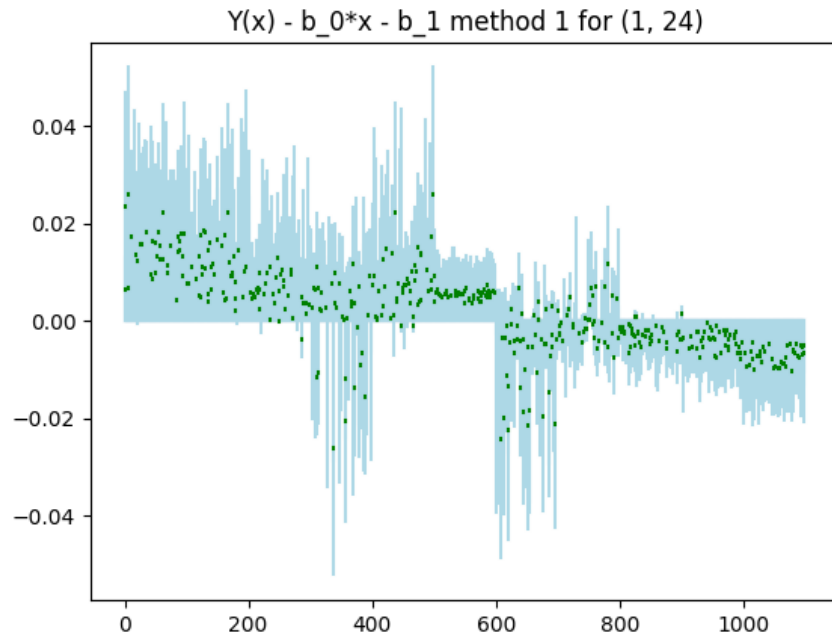


Рис. 7: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (1, 24). Голубым цветом обозначен новый интервал, зеленым исходный

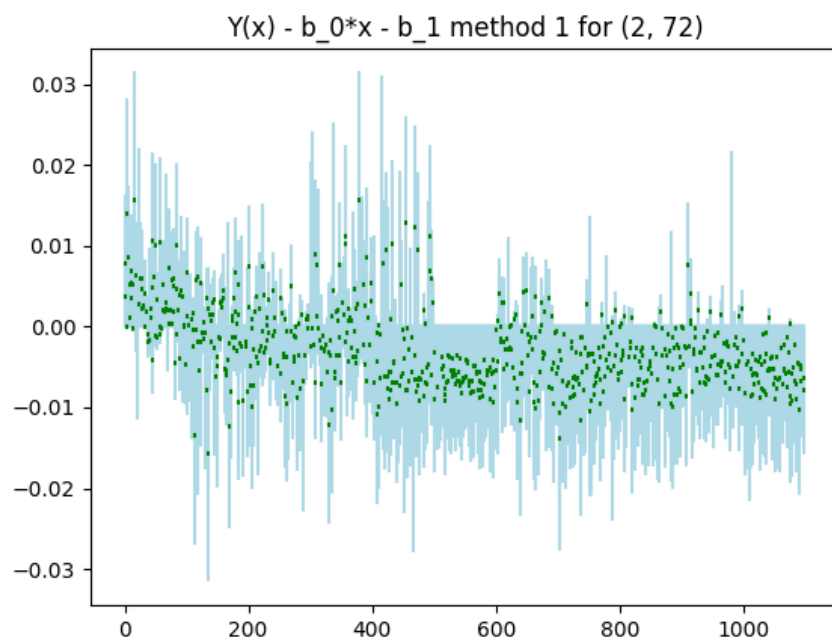


Рис. 8: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (2, 72). Голубым цветом обозначен новый интервал, зеленым исходный

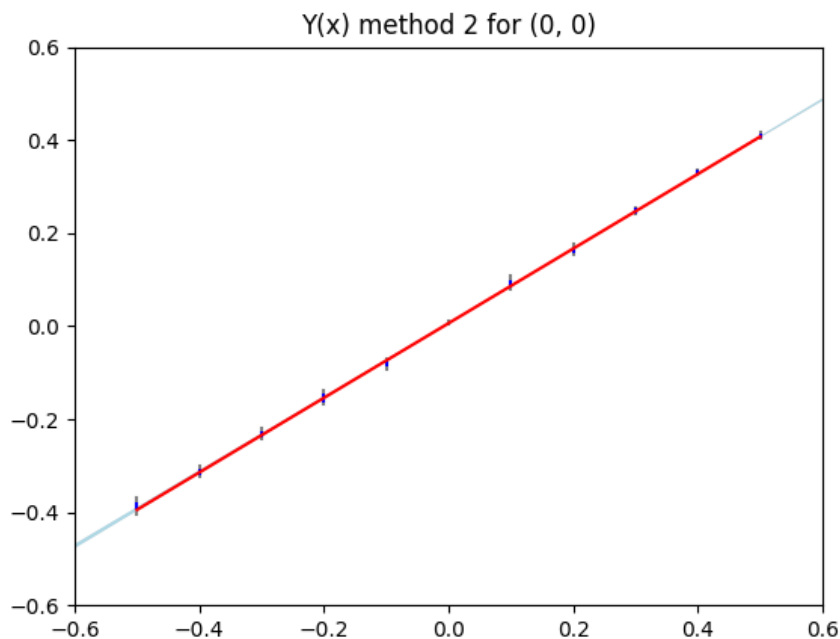


Рис. 9: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 0), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности  $Tol$  и  $Uni$  обозначены голубым и светло-серым цветом.

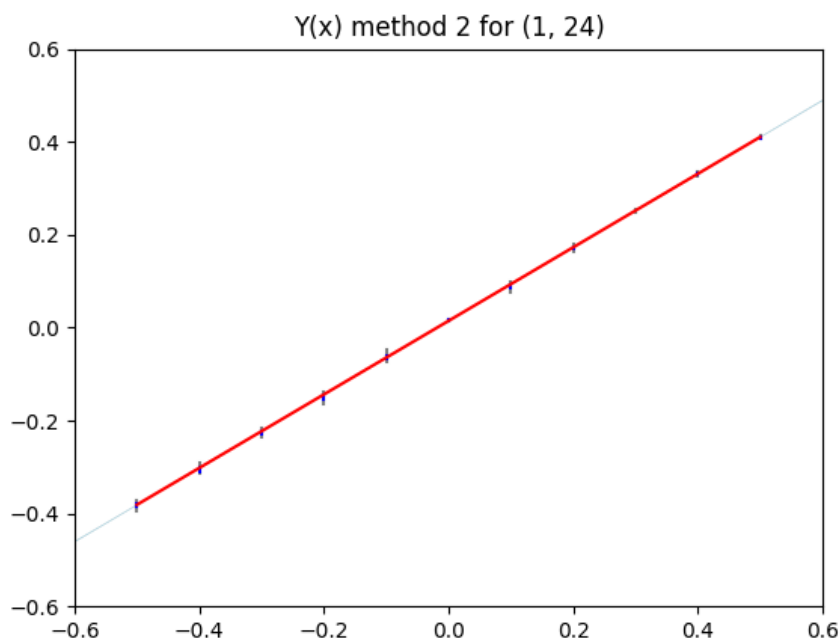


Рис. 10: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (1, 24), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности  $Tol$  и  $Uni$  обозначены голубым и светло-серым цветом.

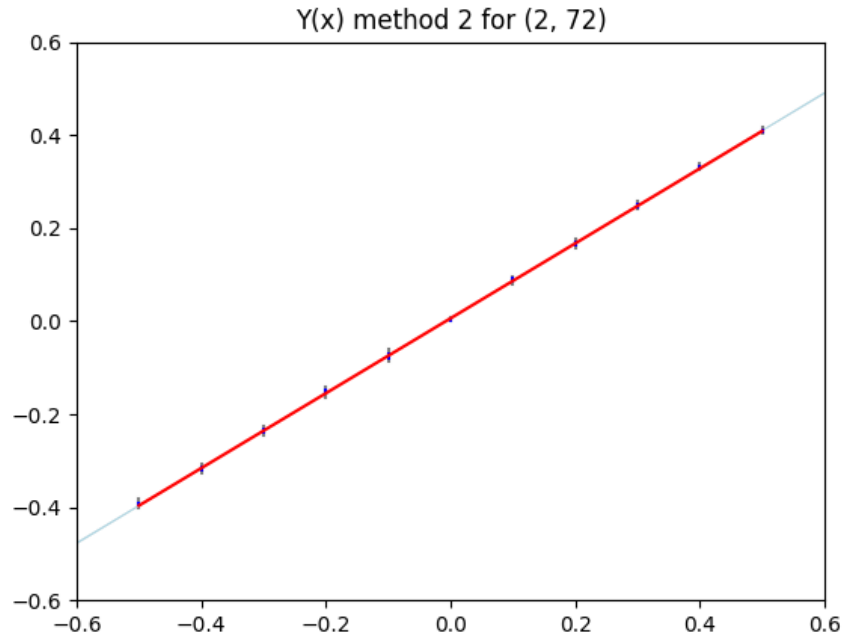


Рис. 11: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (2, 72), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности  $Tol$  и  $Uni$  обозначены голубым и светло-серым цветом.

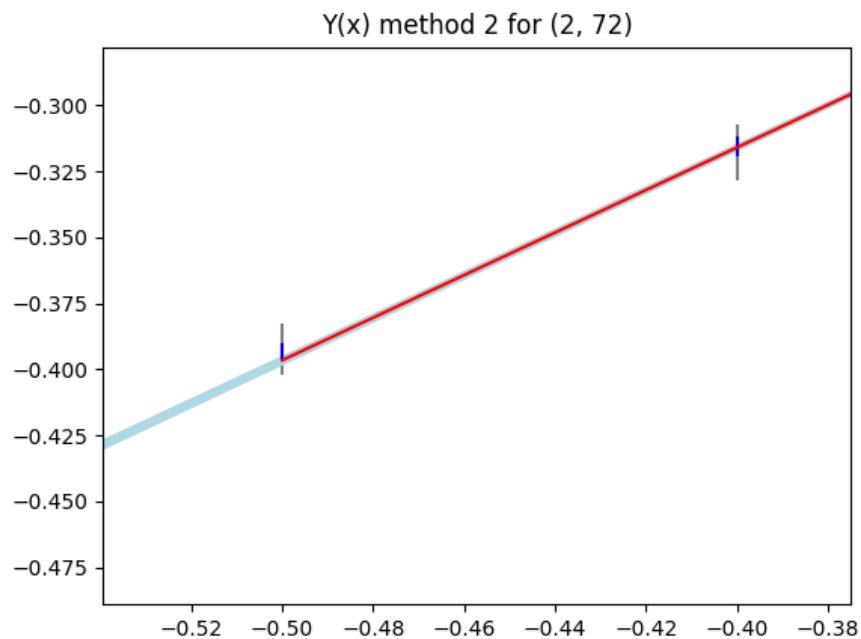


Рис. 12: Увеличенное изображение из Рис.10.

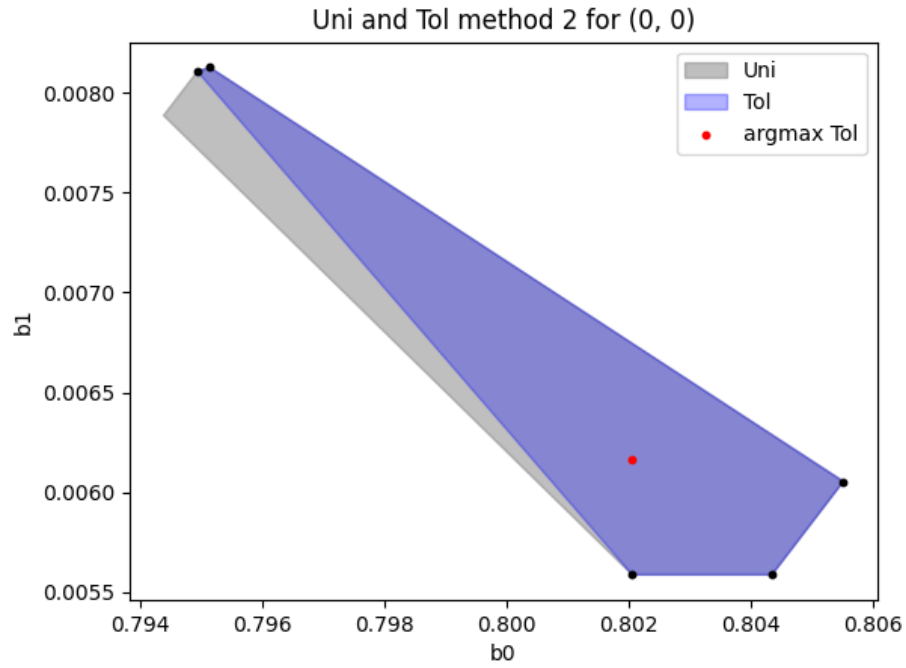


Рис. 13:  $Tol$ ,  $Uni$  и  $\text{argmax Tol}$  для датчика (0, 0).

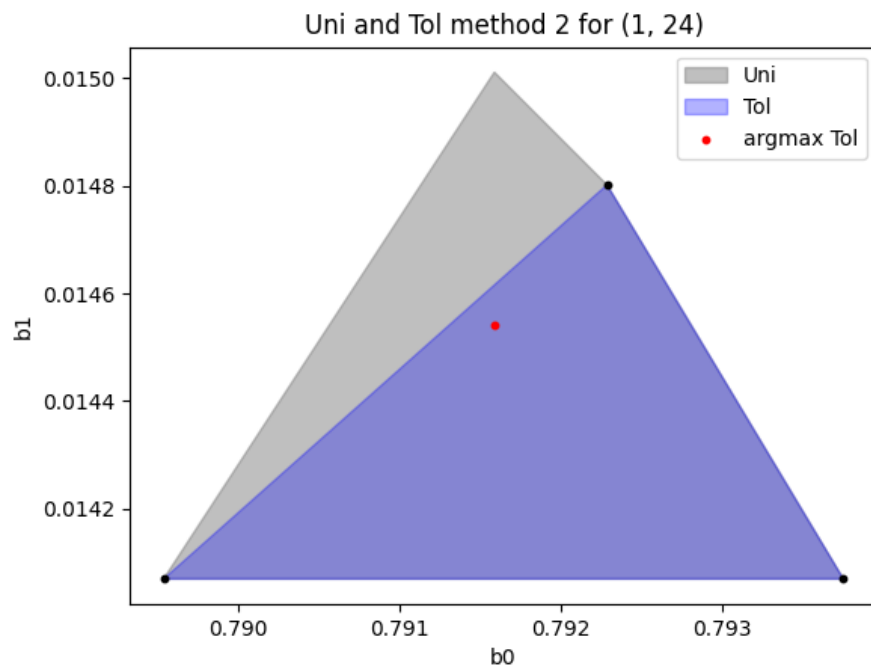


Рис. 14:  $Tol$ ,  $Uni$  и  $\text{argmax Tol}$  для датчика (1, 24).

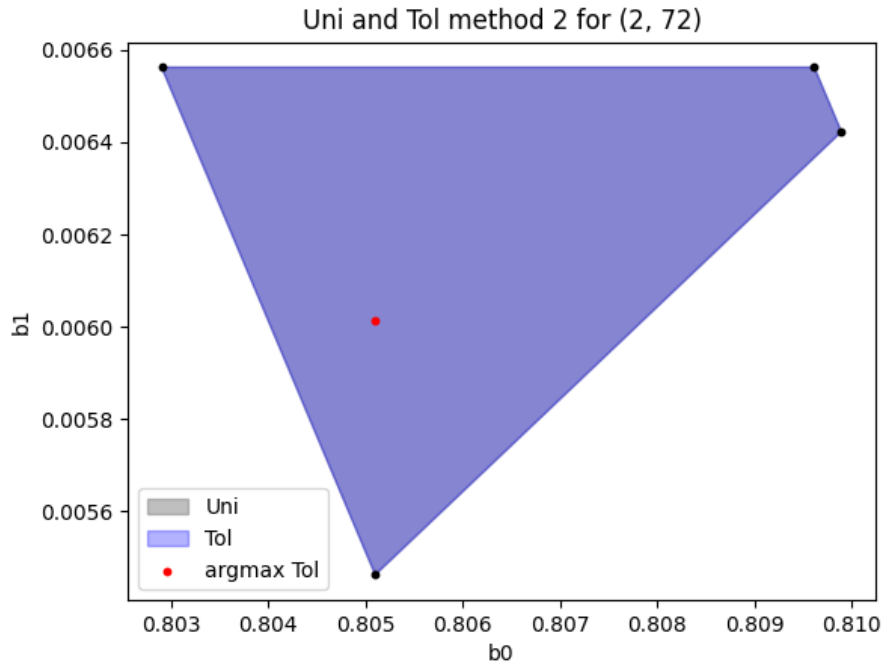


Рис. 15:  $Tol$ ,  $Uni$  и  $argmax Tol$  для датчика (2, 72).

| Координаты датчика | Метод | $\beta_0$ | $\beta_1$ | Количество модифицированных |
|--------------------|-------|-----------|-----------|-----------------------------|
| (0, 0)             | 1     | 0.801     | 0.008     | 1085                        |
| (0, 0)             | 2     | 0.802     | 0.006     | 12                          |
| (1, 24)            | 1     | 0.812     | 0.01      | 1095                        |
| (1, 24)            | 2     | 0.792     | 0.015     | 8                           |
| (2, 72)            | 1     | 0.811     | 0.01      | 1091                        |
| (2, 72)            | 2     | 0.805     | 0.006     | 6                           |

Таблица 1: Численные результаты

## 5 Обсуждение

Исходя из представленных графиков, можно судить о том, что все описанные в теории этапы выполнены правильно. Также можно заметить что результаты полученные методами 1 и 2 являются близкими, но не совпадают. По количеству модифицированных значений в 4 можно заметить что датчик с координатами (2, 72) имеет наименьшее число выбросов из рассматриваемых, а датчик с координатами (0, 0) имеет наибольшее число выбросов из рассматриваемых.

## 6 Синтетический пример

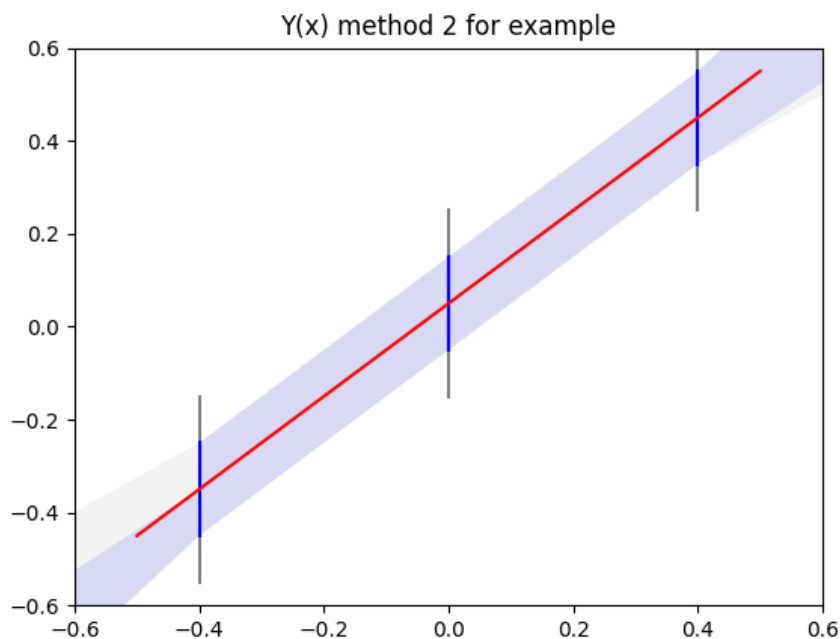


Рис. 16: Калибровочная прямая полученная вторым методом для смещения 0.0, обозначена красным цветом.

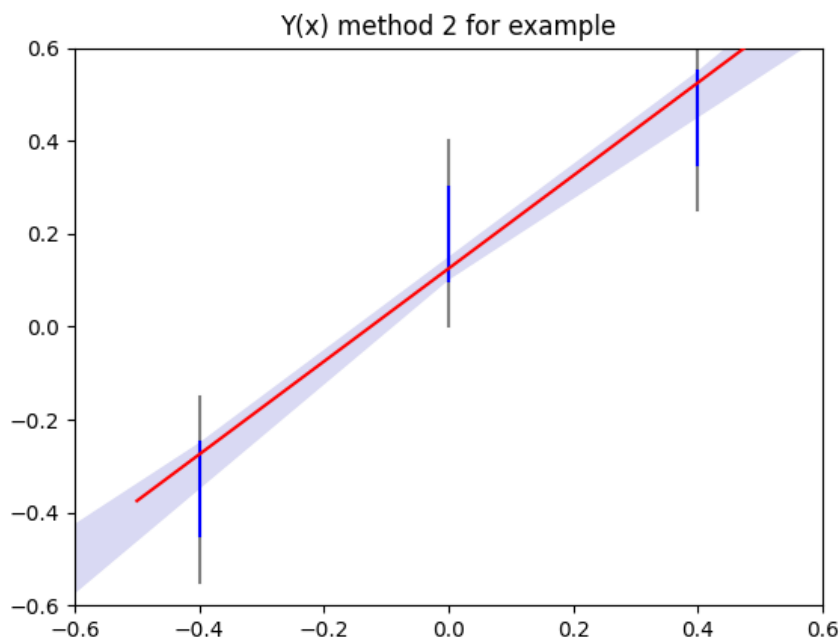


Рис. 17: Калибровочная прямая полученная вторым методом для смещения 0.15, обозначена красным цветом.



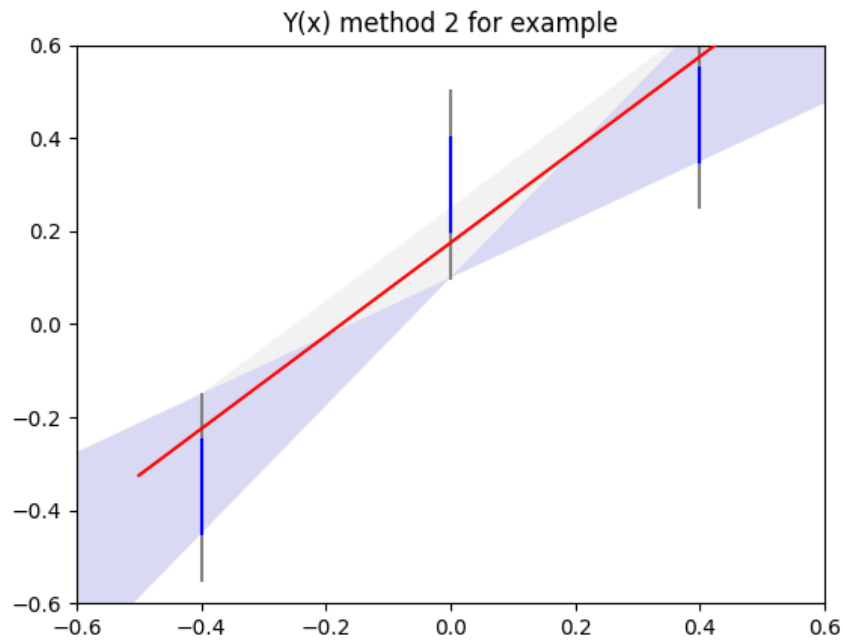


Рис. 18: Калибровочная прямая полученная вторым методом для смещения 0.25, обозначена красным цветом.

## 7 Приложения

Репозиторий с кодом программы: <https://github.com/maloxit/interval2>