7. Quiero probar que $\varphi = A^T . A$ es def. positiva, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invers.

φ es def. positiva $\iff x^T . \varphi . x > 0$, lo que es equivalente a $x^T . A^T . A . x > 0$, $\forall x \neq 0$.

$x^T . A^T . A . x = (Ax)^T . (Ax) = \|Ax\|_2^2$

Qpq $\|Ax\|_2^2 > 0$. Sabemos que $\|Ax\|_2^2 \geq 0$, ya que toda norma es mayor o igual a 0. Entonces alcanza con probar que $\|Ax\|_2^2 \neq 0$ $\forall x \neq 0$. Esto ocurre si y solo si $Ax \neq 0$ $\forall x \neq 0$, y como A es inversible, se cumple.