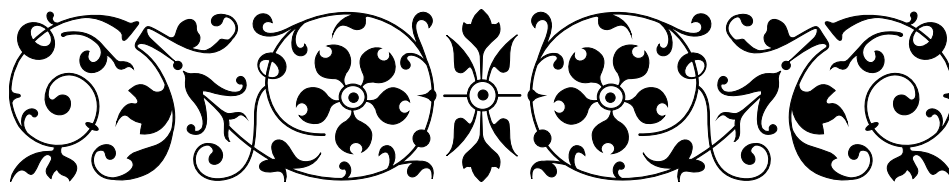


CIRCUITOS ELÉTRICOS,

MÉTODOS DE ANÁLISE E INTRODUÇÃO À SÍNTESE

POR
ANTÔNIO CARLOS MOREIRÃO DE QUEIROZ

Professor Titular do Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
Escola Politécnica
Professor do Programa de Engenharia Elétrica
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE)
Universidade Federal do Rio de Janeiro



1 de maio de 2016

Sumário

I	Análise de circuitos	7
1	Técnicas baseadas na análise nodal	8
1.1	Introdução	8
1.2	Análise nodal de circuitos resistivos	10
1.3	Análise nodal sistemática	12
1.3.1	Descrição da estrutura	12
1.3.2	O Teorema de Tellegen	14
1.3.3	Descrição dos ramos	15
1.3.4	Geração do sistema nodal	16
1.3.5	Montagem direta do sistema nodal	17
1.3.6	Montagem do sistema nodal por estampas	18
1.3.7	Descrição do circuito através de um “netlist”	19
1.3.8	Solução do sistema	20
1.4	Análise no estado permanente senoidal	21
1.4.1	Capacitores e indutores	22
1.4.2	Transformadores	23
1.4.3	Estampas dos elementos reativos	24
1.4.4	Fontes independentes	25
1.4.5	Linhas de transmissão	26
1.4.6	Aplicações da análise no estado permanente senoidal	27
1.4.6.1	Cálculo de resposta em frequência	28
1.4.6.2	Resposta a um sinal periódico qualquer	29
1.4.7	Solução do sistema complexo	33
1.5	Análise nodal em transformada de Laplace	33
1.5.1	Elementos RLCM	34
1.5.2	Linhas de transmissão	36
1.5.3	Aplicações da análise em transformada de Laplace	36
1.5.3.1	Cálculo da resposta completa	36
1.5.3.2	Análise de circuitos lineares por partes	38
1.5.3.3	Cálculo de resposta em frequência	39
1.5.4	Solução do sistema	41
1.5.4.1	O algoritmo da eliminação	41
1.5.4.2	Interpolação	44
1.6	Deslocamento de fontes de tensão	46
1.7	Análise nodal modificada	50
1.7.1	Interpretação como uso de modelos	51
1.7.2	Indutores	54
1.7.3	O transformador ideal	54

1.7.4	O transformador real	56
1.7.5	O amplificador operacional ideal	62
1.7.5.1	O “fixador”	63
1.7.6	Tratamento simplificado do amplificador operacional	65
1.8	Análise nodal com modelos baseados em amp. operacionais	67
1.9	Análise nodal de circuitos resistivos não lineares	72
1.9.1	Resistor não linear	74
1.9.2	Transcondutor não linear	75
1.9.3	Amplificador de tensão não linear	76
1.9.4	Amplificador de corrente não linear	77
1.9.5	Transresistor não linear	77
1.9.6	Fontes não lineares controladas por várias variáveis	78
1.10	Algoritmo de análise pelo método de Newton-Raphson	80
1.11	Controle de convergência	81
1.12	Modelamento	82
1.12.1	Diodos	82
1.12.2	Diodos lineares por partes	83
1.12.3	Diodo ideal	84
1.12.4	Transistores bipolares	84
1.12.5	Transistores MOS	88
1.12.5.1	Modelo para canal curto	90
1.12.6	O tiristor, ou SCR	91
1.12.7	Portas lógicas	92
1.12.7.1	Inversor	92
1.12.7.2	Portas de duas entradas	93
1.13	Análise nodal no domínio do tempo	95
1.13.1	Método “backward”, ou implícito, de Euler	95
1.13.2	Método “forward”, ou explícito, de Euler	95
1.13.3	Método dos trapézios, ou integração bilinear	96
1.13.4	Capacitor linear invariante no tempo	96
1.13.5	Indutor linear invariante no tempo	98
1.13.6	Transformador linear invariante no tempo	100
1.13.7	Controle do passo	103
1.13.8	Artefatos devidos a memórias falsas	105
1.13.9	Efeitos em um oscilador LC	107
1.13.10	Métodos multipasso	107
1.13.10.1	Métodos de Adams-Bashforth	107
1.13.10.2	Métodos de Adams-Moulton	108
1.13.10.3	Passo variável	108
1.13.10.4	Estabilidade dos métodos de Adams	110
1.13.10.5	Controle do passo	111
1.13.11	Métodos de Gear	114
1.13.11.1	Estabilidade dos métodos de Gear	116
1.13.11.2	Uso do método de Gear de segunda ordem em análise de circuitos no tempo	117
1.13.11.3	Capacitor linear invariante no tempo	117
1.13.11.4	Indutor linear invariante no tempo	118
1.13.11.5	Transformador linear invariante no tempo	118
1.13.11.6	Ordem e passo variáveis nos métodos de Gear	119
1.13.12	Análise no tempo de circuitos lineares variantes no tempo	120
1.13.12.1	Capacitor linear variante no tempo	120

1.13.12.2	O dobrador de Bennet	121
1.13.12.3	Modelamento do capacitor linear variante no tempo	122
1.13.12.4	Indutor linear variante no tempo	123
1.13.12.5	Modelamento do indutor linear variante no tempo	124
1.13.12.6	Transformador linear variante no tempo	125
1.13.13	Análise no tempo de circuitos não lineares	126
1.13.13.1	Inicialização e avanço da análise no tempo	126
1.13.13.2	Capacitor não linear	127
1.13.13.3	Capacitância de um diodo semiconductor	128
1.13.13.4	Capacitor controlado a tensão	129
1.13.13.5	Indutor não linear	130
1.13.13.6	Histerese	131
1.13.13.7	Transformador não linear	132
1.13.14	Análise no tempo de circuitos não lineares variantes no tempo	132
1.13.15	Modelos para elementos reativos variantes no tempo e não lineares	133
2	Outros métodos de análise	138
2.1	Análise das malhas	138
2.1.1	Deslocamento de fontes de corrente	142
2.1.2	Análise das malhas modificada	143
2.1.3	Amplificador operacional na análise de malhas	145
2.1.4	Modelamento com amplificadores operacionais ideais na análise de malhas	148
2.1.5	Planaridade	149
2.2	Análises dos ciclos e dos cortes	150
2.2.1	Amplificador operacional nas análises de ciclos e cortes	156
2.3	Equações de estado	158
2.3.1	Como escrever equações de estado	159
2.3.1.1	Montagem sistemática do sistema de equações de estado	162
2.3.1.2	Casos em que a árvore não é normal	166
2.3.2	Solução do caso linear invariante no tempo	167
2.3.3	Eliminação da integral de convolução	170
2.3.4	Uso de equações de estado em simulação de redes passivas com redes ativas	172
II	Introdução à síntese de circuitos	180
3	Propriedades e teoremas básicos	181
3.1	Propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo	181
3.1.1	Portas	181
3.1.2	Resposta em frequência	182
3.2	Frequências naturais	182
3.2.1	Cálculo de frequências naturais	184
3.2.2	Frequências naturais de uma variável	184
3.2.2.1	Uso da simetria	185
3.3	Polos e zeros	186
3.3.1	Zeros em redes em escada	186
3.3.1.1	Divisores que não formam zeros	187
3.4	Estruturas para filtros	189
3.4.1	Aproximações	190
3.4.2	Transformações de frequência	192

3.4.2.1	Escalamento em frequência e impedância	192
3.4.2.2	Transformação passa-baixas - passa-altas	192
3.4.2.3	Transformação passa-baixas - passa-faixa	193
3.4.2.4	Transformação passa-baixas - rejeita-faixa	193
3.4.2.5	Número de elementos necessários	194
3.5	Teoremas	196
3.5.1	Teorema da substituição	196
3.5.2	Teorema da superposição	196
3.5.3	Teoremas de Thévenin e Norton	196
3.6	Redes de duas portas	198
3.6.1	Parâmetros Z	199
3.6.2	Parâmetros Y	199
3.6.3	Parâmetros h e g	200
3.6.4	Teorema da reciprocidade	201
3.6.5	Parâmetros ABCD	203
4	Síntese de circuitos passivos	206
4.1	Propriedades das impedâncias e admitâncias RLCM	206
4.1.1	Imitâncias LC	206
4.1.1.1	Realização de imitâncias LC	207
4.1.2	Imitâncias RC e RL	210
4.1.2.1	Realização de imitâncias RC e RL	212
4.1.3	Imitâncias RLCM	219
4.1.3.1	Síntese de Brune	220
4.1.3.2	Síntese de Bott e Duffin	223
4.1.3.3	Análogos mecânicos	226
4.2	Realização de funções de transferência na forma LC simplesmente terminada	226
4.2.1	Terminação na entrada	227
4.2.2	Terminação na saída	228
4.3	Realização de zeros finitos de transmissão em redes “ladder”	229
4.4	Realização de funções de transferência na forma LC duplamente terminada	235
4.4.1	Síntese de redes simétricas	237
4.4.1.1	Redes simétricas com níveis de impedância diferentes nas duas metades	240
4.4.2	Síntese de redes antimétricas	241
4.4.3	Forma geral da síntese de redes LC duplamente terminadas	244
4.4.4	Realização com terminações arbitrárias	252
4.4.5	Realização em “lattice”	253
4.4.6	“Lattice” de resistência constante	255
4.4.7	“Lattices” desbalanceadas	256
5	Aproximações	260
5.1	Aproximação por função característica	260
5.1.1	Aproximação de Butterworth	262
5.1.2	Aproximação de Chebyshev	263
5.1.3	Aproximação de Chebyshev inversa	267
5.1.4	Aproximação elíptica	269
5.1.5	Generalização das aproximações por função característica	269
5.1.5.1	Obtenção da função característica por otimização	274
5.2	Outras aproximações	276
5.2.1	Aproximação de Bessel	278

5.2.2	Aproximação com atraso de grupo tipo Chebyshev	278
5.2.3	Aproximação com atraso de grupo plano e zeros de transmissão finitos	278
5.2.4	Realização destes filtros	278
5.2.5	Equalizadores de fase	279
6	Análise de sensibilidade	282
6.1	A função sensibilidade	282
6.2	Sensibilidades de módulo e fase	283
6.3	Medidas multiparamétricas	283
6.4	Sensibilidades de polos e zeros	285
7	Filtros ativos	289
7.1	Realizações em cascata de biquads	289
7.1.1	Biquads com três amplificadores operacionais	290
7.1.1.1	Biquad de Tow e Thomas	290
7.1.1.2	Biquad de Akerberg e Mossberg	291
7.1.2	Biquads com um amplificador operacional	292
7.1.2.1	Biquads de Sallen e Key	293
7.1.2.2	Biquads com amplificador inversor e múltipla realimentação	296
7.1.2.3	Transformação CR-RC	299
7.1.2.4	Biquads baseados no duplo T	300
7.1.3	Ajuste de ganho em biquads	302
7.1.3.1	Redução de ganho	302
7.1.3.2	Aumento de ganho	303
7.2	Realizações usando conversores de impedância	305
7.2.1	O conversor negativo de impedância (NIC)	305
7.2.2	O conversor generalizado de impedância (GIC)	308
7.2.3	Filtros passa-altas	310
7.2.4	Filtros passa-baixas e outros	310
7.2.4.1	Indutores suspensos	311
7.2.4.2	O resistor negativo dependente da frequência (FDNR)	312
7.3	Simulação por equações de estado de filtros passivos	314
A	Programas de análise e síntese de circuitos	323
B	Atualizações	325
	Índice remissivo	329

Prefácio

“Causa latet, vis est notissima”. Ovídio¹.

ESTE texto² contém essencialmente o material lecionado pelo autor na cadeira de Circuitos Elétricos II no Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro³. O material estudado no curso está completo, com alguns temas extras também incluídos. O material foi separado em análise de circuitos e em uma introdução à síntese de circuitos.

A parte sobre análise estuda o material necessário ao desenvolvimento de programas de análise de circuitos, refletindo a experiência do autor no desenvolvimento de simuladores, usados em seus trabalhos de pesquisa e cursos. É assumido já um conhecimento básico sobre circuitos elétricos, os tipos de variáveis, os elementos que fazem os circuitos, etc., com o texto focando em métodos sistemáticos de análise voltados para simulação numérica de circuitos. Alguns materiais são não usuais, decorrendo de trabalhos de pesquisa do autor, como o tratamento das análises modificadas com o uso de modelos e os sistemas de redução do tamanho dos sistemas de equações com o uso de modelos baseados em amplificadores operacionais. A parte trata primeiramente os vários tipos de análise que podem ser feitos usando a análise nodal e a análise nodal modificada, e a seguir estende as mesmas análises para os métodos de malhas, ciclos e cortes, finalizando com equações de estado.

A parte sobre síntese estuda as propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo e técnicas básicas de síntese de impedâncias e funções de transferência através de redes passivas e ativas. Não pretende cobrir completamente o vasto tema, mas inclui a maior parte do material sobre síntese de circuitos lineares efetivamente usada ou desenvolvida nos cursos e trabalhos do autor. Materiais originais incluem métodos numéricos para geração de aproximações, síntese de redes simétricas e antissimétricas, e critérios para análise de sensibilidade. A parte trata primeiramente das propriedades gerais destes circuitos, passando a seguir aos métodos de síntese, com discussões ao final sobre aproximações, análise de sensibilidade e filtros ativos. O material do curso de Circuitos Elétricos II usualmente vai até a síntese de redes “ladder” LC simplesmente terminadas, se estendendo além eventualmente.

Temas adicionais e mais exemplos deverão ser adicionados com o tempo, mantendo relação com o curso, como material adicional, cobrindo mais sobre os trabalhos desenvolvidos pelo autor, ou decorrentes de atualizações.

Rio de Janeiro, junho de 2011,

Antônio Carlos M. de Queiroz

¹“A causa está escondida, mas o efeito é bem conhecido”. Está também no frontispício do livro “The history and present state of electricity, with original experiments”, Joseph Priestley, 1775.

²©2010 Antônio Carlos M. de Queiroz. Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida sem permissão do autor.

³Iniciando em 1983. Originalmente o nome da cadeira era Teoria de Circuitos II, passando a Circuitos Elétricos II em 1990. O material sobre síntese vem da cadeira de Teoria de Circuitos III, depois Síntese Moderna de Circuitos, extinta por volta de 2000, e mais tarde substituída por um curso optativo. Um curso que inclui material similar de síntese tem sido oferecido pelo autor nos cursos de pós-graduação do Programa de Engenharia Elétrica da COPPE/UFRJ desde 1991.

Parte I

Análise de circuitos

Capítulo 1

Técnicas baseadas na análise nodal

1.1 Introdução

As formas usuais de análise de circuitos aproximam o que realmente acontece nos circuitos elétricos, usando aproximações por elementos concentrados, onde os componentes se comportam como se fossem infinitamente pequenos e tivessem suas funções concentradas em um ponto. O circuito pode então ser decomposto em uma série de elementos de dois terminais, como resistores, capacitores, indutores e fontes independentes e controladas, formando “ramos” interconectados em “nós”. Para circuitos assim, valem as chamadas “leis de Kirchhoff”¹:

Lei de Kirchhoff das tensões (LKT, ou “Kirchhoff’s voltage law”, KVL, em inglês): A soma das diferenças de potencial elétrico (tensões elétricas, ou “voltagens”) ao longo de um circuito fechado é igual a zero. No caso, os circuitos fechados seriam através dos ramos que compõem o circuito, com as tensões medidas sobre eles.

Lei de Kirchhoff das correntes (LKC ou “Kirchhoff’s current law”, KCL, em inglês): A soma das correntes elétricas cruzando uma fronteira fechada é igual a zero. As fronteiras neste caso seriam definidas por conjuntos de um ou mais nós, com as correntes medidas sobre os ramos que deixam os conjuntos para outras partes do circuito.

A análise geral de circuitos teria que considerar as “leis de Maxwell”² para avaliar corretamente o que acontece com circuitos que não são infinitamente pequenos, que possuem resistências, capacitâncias e indutâncias parasitas por toda parte, e que irradiam e captam ondas eletromagnéticas. As leis de Maxwell, em sua forma vetorial, no vácuo (ou, com pouca diferença, no ar), são:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mu_0 \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

onde \vec{H} é o campo magnético (ou campo “magnetizante”, com o “campo magnético” ou “densidade de

¹Enunciadas no artigo do físico alemão Gustav Kirchhoff, “Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene insbesondere durch eine kreisförmige”, *Annalen der Physik und Chemie*, 64, pp. 497-514, 1845. As duas leis aparecem em um apêndice ao fim do artigo. Kirchhoff tinha 21 anos e ainda era estudante.

²Descritas, de forma bem mais complexa, pelo físico escocês James Clerk Maxwell em uma série de quatro artigos com o título “On Physical Lines of Force”, *Philosophical Magazine*, 1861-1862. A forma atual das equações é devida a Oliver Heaviside, que as apresentou por volta de 1884 em artigos na revista “The Electrician”.

fluxo magnético” sendo $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$), \vec{E} é o campo elétrico, \vec{J} é uma densidade de corrente elétrica por área, e ρ é a densidade superficial de carga. μ_0 é a permeabilidade do vácuo e ϵ_0 é a permissividade do vácuo³. A primeira equação diz que o campo magnético não tem fontes. Ele ocorre sempre em linhas fechadas. A segunda equação é a “lei de Gauss”, que diz que acumulações de carga são as fontes do campo elétrico. A terceira equação é a “lei de Ampère”, modificada por Maxwell. Ela diz que o campo magnético circula ao redor de correntes elétricas, e que campos elétricos variantes também geram campos magnéticos. O termo acrescentado por Maxwell à corrente é a chamada “corrente de deslocamento”. A quarta equação é a “lei de Faraday”, que diz que um campo magnético variante gera um campo elétrico ao redor dele.

Quando um circuito elétrico é pequeno o suficiente, ou opera devagar o suficiente, pode-se ignorar os termos envolvendo as constantes ϵ_0 e μ_0 , o que corresponde a ignorar efeitos relacionados com campos elétricos e magnéticos no circuito. Considere-se também que como a velocidade da luz no vácuo vale $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, isto corresponde a considerar que as dimensões do circuito são pequenas em relação ao comprimento de onda $\lambda = c_0/f$ dos sinais de frequência até f considerados. Nesta condição, a primeira equação perde o sentido, a segunda diz que não existe acumulação de carga nos condutores, a terceira diz que o campo magnético é gerado por correntes apenas, e a terceira diz que não há circuitos fechados de campo elétrico. A terceira equação permite concluir, aplicando-se o divergente em ambos os lados, que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

E a quarta equação que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Estas duas expressões são as formas genéricas das leis de Kirchhoff, que dizem que o somatório das correntes elétricas saindo de alguma região fechada é nulo (KCL), e que o somatório das tensões elétricas ao longo de um circuito fechado é nulo (KVL), já que a integral do campo elétrico na distância é uma tensão elétrica.

É interessante notar que campos elétricos e magnéticos em circuitos a parâmetros concentrados são representados por capacitores e indutores. Um nó onde existe acumulação de carga, aparentemente violando a lei das correntes, pode ser considerado como tendo capacitâncias ligadas a outros pontos do circuito, onde há acumulação de carga oposta. A lei das correntes é então satisfeita pelas correntes de deslocamento entre as placas destes capacitores, e o campo elétrico fica então todo entre as placas deles. Um circuito fechado onde as tensões não somam zero pode ser considerado como tendo indutâncias e indutâncias mútuas nele. A diferença para zero fica então nas tensões sobre estas indutâncias, e o campo magnético fica dentro dos indutores e transformadores acrescentados. Propagação de sinais com velocidade finita e radiação eletromagnética pode ser modelada com linhas de transmissão⁴.

Com a eliminação dos campos, restam apenas as variáveis de corrente e tensão, \vec{j} e \vec{v} , com efeitos dos campos elétricos e magnéticos modelados pelas integrais destas quantidades no tempo, a carga elétrica em capacitores, $q(t) = \int j(t)dt$, e o fluxo magnético⁵ em indutores e transformadores, $\phi(t) = \int v(t)dt$. Associações instantâneas entre tensões e correntes são modeladas por resistores, fontes controladas e fontes independentes. O objetivo dos métodos de análise de circuitos a serem estudados é calcular as correntes e as tensões em todos os elementos do circuito, com o circuito considerado como tendo

³As constantes μ_0 e ϵ_0 valem, no Sistema Internacional de Unidades, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.2566370614 \times 10^{-6}$ H/m e $\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12}$ F/m. As duas quantidades estão relacionadas com a velocidade da luz no vácuo, $c_0 = 299792458$ m/s, por $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

⁴Linhas de transmissão são tratadas apenas sumariamente aqui, como material opcional.

⁵Mais apropriadamente o “enlace de fluxo magnético”. O fluxo magnético é a integral do campo magnético \vec{B} em uma superfície, $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Para um indutor de uma espira, esta superfície seria a área envolta pela espira. Para N espiras com o mesmo campo magnético interno, entretanto, o enlace de fluxo magnético ϕ é N vezes maior, e a tensão sobre o conjunto de espiras também N vezes maior, com a área contando novamente a cada espira. Em geral o fluxo não é constante para todas as espiras, e apenas a soma dos valores em todas as espiras, o enlace de fluxo, é importante.

parâmetros concentrados, com efeitos distribuídos ignorados, ou aproximados por circuitos também a parâmetros concentrados. A figura 1.1 mostra os elementos básicos a parâmetros concentrados, em suas representações para o caso linear, invariante no tempo.

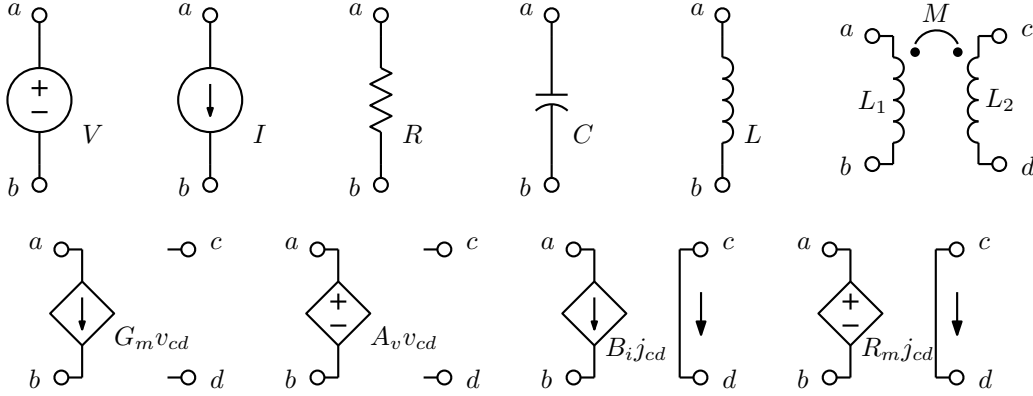


Figura 1.1: Elementos básicos a parâmetros concentrados. Acima, fontes independentes de tensão e de corrente, resistor, capacitor, indutor e transformador com indutância mútua entre dois indutores. Abaixo, fontes controladas de corrente e de tensão, controladas por tensão e por corrente. Transcondutor, amplificador de tensão, amplificador de corrente e transresistor.

As fontes independentes geram tensões ou correntes fixas, $v_{ab} = V$ ou $j_{ab} = I$. O resistor associa tensões e correntes por $v_{ab} = Rj_{ab}$. O capacitor associa a carga elétrica com a tensão, $q_{ab} = Cv_{ab}$. O indutor associa o fluxo magnético com a corrente, $\phi_{ab} = Lj_{ab}$. O transformador associa os fluxos magnéticos em dois indutores com as correntes em ambos, $\phi_{ab} = L_1j_{ab} + Mj_{cd}$ e $\phi_{cd} = Mj_{ab} + L_2j_{cd}$. As fontes controladas associam tensões e correntes em ramos controlados e controladores. Transcondutor: $j_{ab} = G_mv_{cd}$, amplificador de tensão: $v_{ab} = A_vv_{cd}$, amplificador de corrente: $j_{ab} = B_ij_{cd}$ e transresistor: $v_{ab} = R_mj_{cd}$.

1.2 Análise nodal de circuitos resistivos

Em circuitos resistivos, não existem elementos com “memória”, como capacitores e indutores. Existem apenas resistores e fontes controladas, que geram associações instantâneas entre tensões e correntes. A solução não depende da história anterior. Para a chamada “análise nodal”⁶, o circuito é considerado decomposto em ramos de dois terminais ligados entre nós de conexão. Cada ramo é descrito pela relação entre corrente e tensão nele, que pode envolver tensões e correntes sobre outros ramos também. A análise nodal consiste em escrever, para todos os nós do circuito com a exceção de um, o nó de terra ou de referência, de uma equação exprimindo a lei de Kirchhoff das correntes para o nó:

$$\sum \text{correntes saindo do nó} = 0$$

As equações devem ter como incógnitas as tensões nodais, que são as tensões entre os nós e o nó de referência, onde o potencial é considerado nulo. As correntes nos ramos devem ser expressas considerando-se as relações entre corrente e tensão nos ramos.

Em um circuito resistivo, para a análise nodal, os ramos podem conter apenas resistores, fontes de corrente independentes e fontes de corrente controladas por tensão entre nós, ou transcondutores, pois

⁶O método vem de trabalhos de Ohm, Kirchhoff e Maxwell. A análise nodal básica para circuitos resistivos aparece no livro de Maxwell “A Treatise on Electricity and Magnetism”, 1873, §280. O mesmo na segunda edição de 1881.

nestes elementos se pode exprimir a corrente em função de uma ou mais tensões, no próprio ramo ou em outros, ou a corrente é fixa. Circuitos que contenham outros tipos de elemento, como fontes de tensão, independentes ou controladas, e curto-circuitos, devem ser adequadamente transformados (ver “deslocamento de fontes” e “análise nodal modificada”, adiante) antes da aplicação da análise nodal.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.2:

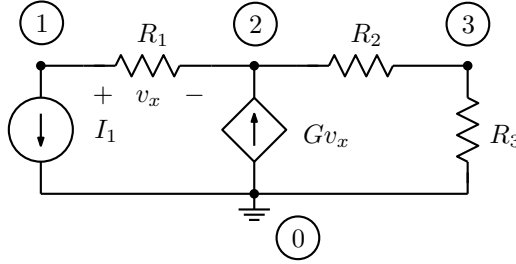


Figura 1.2: Circuito resistivo linear.

As equações nodais são:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{e_1 - e_2}{R_1} = -I_1 \\ 2) \quad & \frac{e_2 - e_1}{R_1} - G(e_1 - e_2) + \frac{e_2 - e_3}{R_2} = 0 \\ 3) \quad & \frac{e_3 - e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} = 0 \end{aligned}$$

A equação do nó de terra (0), que não é escrita por ser a soma das demais com sinal invertido, seria:

$$0) \quad G(e_1 - e_2) - \frac{e_3}{R_3} = I_1$$

Resulta um sistema de equações lineares, que pode ser escrito em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema ficou linear pois apenas componentes lineares foram usados no circuito. O sistema tem uma única solução, supondo que as equações sejam linearmente independentes (do contrário existiriam infinitas soluções) e que não descrevam hiperplanos paralelos (caso sem solução).

O sistema nodal pode ser escrito também para circuitos não lineares. Apenas não é mais possível colocá-lo em forma matricial neste caso, e o número de soluções depende da natureza das não-linearidades.

Exemplo: Equações nodais para o circuito não linear resistivo da figura 1.3:

As equações nodais são não lineares, da forma $\vec{F}(\vec{e}) = 0$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{e_1}{R_1} + K(e_1 - e_2)^2 + \frac{A}{e_1 - e_3} - I_1 = 0 \\ 2) \quad & -K(e_1 - e_2)^2 + \frac{e_2}{R_2} + G(e_2 - e_3)^3 = 0 \\ 3) \quad & -G(e_2 - e_3)^3 + \frac{e_3}{R_3} - \frac{A}{e_1 - e_3} = 0 \end{aligned}$$

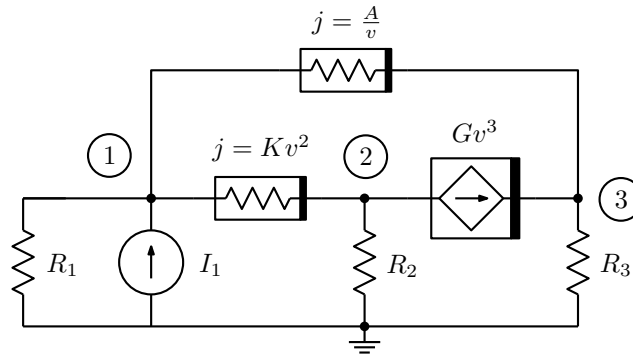


Figura 1.3: Circuito resistivo não linear.

Geralmente estes sistemas só podem ser resolvidos por métodos numéricos, como o método de Newton-Raphson, que se verá mais adiante que é de relativamente simples implementação. Sistemas de equações não lineares podem ter múltiplas soluções, ou nenhuma solução. Em circuitos corretamente modelados, sempre há ao menos uma solução.

1.3 Análise nodal sistemática

No caso de circuitos lineares (e como se verá mais adiante, outros circuitos também, pois o método de solução recai neles), para uma descrição mais sistemática, utilizável em um computador, pode-se descrever o circuito através de um conjunto de matrizes e vetores.

1.3.1 Descrição da estrutura

A estrutura pode ser descrita por um “grafo” numerado e orientado, onde ficam identificadas as polaridades consideradas nos ramos, e a que nós eles estão ligados, como na figura 1.4.

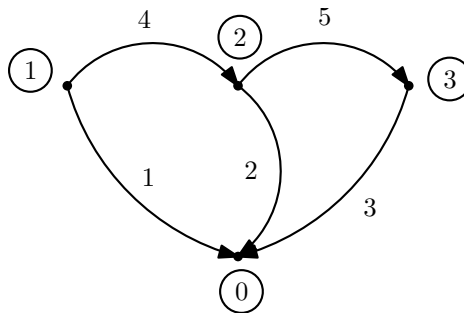


Figura 1.4: Grafo orientado e numerado.

O grafo pode ser descrito por uma “matriz de incidência” $[A_a]$, que descreve a que nós os ramos se conectam e com qual sentido. Esta matriz tem $n + 1$ linhas (número total de nós, inclusive o de terra) e b (número de ramos) colunas. Os elementos da matriz $[A_a]$ são:

$$a_{ik} = 1 \text{ se o ramo } k \text{ sai do nó } i.$$

$a_{ik} = -1$ se o ramo k entra no nó i .

$a_{ik} = 0$ se o ramo k não toca o nó i .

No caso do grafo da figura 1.4, $[A_a]$ tem a forma:

$$[A_a] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

As direções dos ramos identificam os sentidos em que se quer medir as tensões e as correntes sobre eles. Segue-se a norma de identificar a direção do ramo com a direção da corrente elétrica, considerada como fluxo de cargas positivas, e de considerar que o terminal positivo do ramo é por onde a corrente entra, como na figura 1.5.

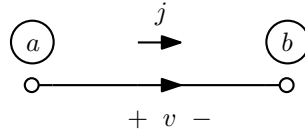


Figura 1.5: Direções associadas.

Essas direções são mera convenção, por motivos históricos. Sabe-se que a corrente elétrica é praticamente sempre um fluxo de elétrons, cargas negativas, fluindo na direção oposta à da corrente positiva, mas isto não faz nenhuma diferença em circuitos elétricos normais⁷. Não haveria problema também de considerar o terminal positivo o por onde a corrente sai. Apenas as tensões seriam calculadas todas com sinais opostos.

A matriz $[A_a]$ está ligada às leis de Kirchhoff. A lei das correntes é expressa na relação:

$$[A_a]\vec{j} = \vec{0}$$

onde \vec{j} é o vetor das correntes nos ramos. No exemplo:

$$\text{Nó } 0 : -j_1 - j_2 - j_3 = 0$$

$$\text{Nó } 1 : j_1 + j_4 = 0$$

$$\text{Nó } 2 : j_2 - j_4 + j_5 = 0$$

$$\text{Nó } 3 : j_3 - j_5 = 0$$

A lei das tensões aparece quando se verifica a relação entre as tensões nos ramos e os potenciais nos nós:

$$\vec{v} = [A_a]^T \vec{e}$$

⁷A existência de dois tipos de carga elétrica foi descrita primeiramente por Charles Du Fay, em 1733, que as chamou de eletricidade “vítrea” e eletricidade “resinosa”, pois eram os tipos obtidos atritando vidro e resinas como se fazia nos estudos de eletricidade estática na época. Os nomes atuais, de cargas “positivas” e “negativas” são devidos a Benjamin Franklin, que usou estes termos ao descrever sua teoria de que os efeitos elétricos eram causados por excesso e falta de um único tipo de carga, por 1747. A eletricidade “vítrea” ficou sendo a positiva, que era a produzida pelas máquinas eletrostáticas de fricção da época, que atritavam vidro com almofadas de couro. As polaridades de tensão e corrente seguem então as mesmas orientações, com corrente positiva sendo uma que retira carga positiva de um ponto e a coloca em outro, e a tensão positiva a que aparece sobre um resistor positivo percorrido por uma corrente positiva segundo as direções associadas, ou entre cargas elétricas positivas e negativas em um capacitor. O fato da corrente elétrica normal ser um fluxo de cargas negativas em direção contrária à da corrente positiva foi verificado com a descoberta do elétron por J. J. Thompson em 1897, mas a esta época as noções sobre a eletricidade já estavam firmemente estabelecidas, e a convenção foi mantida.

onde \vec{v} é o vetor de tensões nos ramos e \vec{e} é o vetor de tensões nodais, no caso ainda incluindo a tensão no nó de terra. No exemplo:

$$\text{Ramo 1 : } v_1 = -e_0 + e_1$$

$$\text{Ramo 2 : } v_2 = -e_0 + e_2$$

$$\text{Ramo 3 : } v_3 = -e_0 + e_3$$

$$\text{Ramo 4 : } v_4 = e_1 - e_2$$

$$\text{Ramo 5 : } v_5 = e_2 - e_3$$

A tensão, ou melhor, o potencial, no nó de terra é definido como sendo zero. Assim, uma das linhas de $[A_a]^T$ multiplica zero na última equação, e é dispensável. Também, a linha de $[A_a]$ correspondente ao nó de terra faz em $[A_a]\vec{j} = 0$ a equação nodal do nó de terra, que é apenas o negativo da soma das demais equações. Assim, define-se a matriz de incidência reduzida $[A]$ como a matriz $[A_a]$ sem a linha correspondente ao nó de terra. As relações $[A]\vec{j} = 0$ e $\vec{v} = [A]^T \vec{e}$ continuam válidas, com $e_0 = 0$ sendo a tensão no nó de terra. No caso:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.3.2 O Teorema de Tellegen

Este teorema [14] diz que a soma dos produtos de tensão e corrente em todos os ramos de um circuito é nula. Ele é consequência das leis de Kirchhoff:

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = \vec{j}^T \vec{v} = \vec{j}^T [A]^T \vec{e} = \left[[A]\vec{j} \right]^T \vec{e} = \left[\vec{0} \right]^T \vec{e} = 0$$

Para um certo circuito, sendo \vec{j} e \vec{v} funções do tempo ou constantes, ele reflete a conservação da energia, pois a soma das potências dissipadas ou geradas nos ramos dá zero. Mas o teorema é também válido em análise no estado permanente senoidal, em transformadas de Laplace ou outras, onde a multiplicação de tensão por corrente não é diretamente a potência. Uma possível utilidade é na verificação do resultado de uma análise numérica. Excessivo erro numérico nos cálculos leva ao somatório resultando em valor significativo em relação às potências nos ramos do circuito.

O teorema de Tellegen tem uma propriedade curiosa: Observe-se que \vec{j} e \vec{v} podem ser medidos em circuitos diferentes, que tenham a mesma matriz de incidência $[A]$. Assim, se \vec{j}_x e \vec{v}_x são medidos em um circuito e \vec{j}_y e \vec{v}_y em outro, ambos com o mesmo grafo:

$$\vec{j}_x^T \vec{v}_x = \vec{j}_y^T \vec{v}_y = \vec{j}_x^T \vec{v}_y = \vec{j}_y^T \vec{v}_x = 0$$

As formas cruzadas podem também ser usadas para verificação de análises, por exemplo usando valores de análises no tempo de um circuito em dois tempos diferentes. São importantes para provar alguns teoremas sobre circuitos, como o da reciprocidade, adiante, e levam também à análise de sensibilidades pelo “método da rede adjunta”, onde valores obtidos das análises de dois circuitos com o mesmo grafo, um obtido do outro por certas regras (a “rede adjunta”), são usados para calcular as derivadas da solução em relação a variações de parâmetros do circuito [11].

Exemplo: Sejam os circuitos da figura 1.6. Um é linear e o outro é não linear. As soluções dos dois circuitos são triviais:

$$\begin{array}{llll}
v_1 = -10 \text{ V} & j_1 = -10 \text{ A} & \hat{v}_1 = -1/8 \text{ V} & \hat{j}_1 = -8 \text{ A} \\
v_2 = -80 \text{ V} & j_2 = -40 \text{ A} & \hat{v}_2 = 2 \text{ V} & \hat{j}_2 = 2/5 \text{ A} \\
v_3 = -90 \text{ V} & j_3 = 10 \text{ A} & \hat{v}_3 = 15/8 \text{ V} & \hat{j}_3 = 8 \text{ A} \\
v_4 = -80 \text{ V} & j_4 = 30 \text{ A} & \hat{v}_4 = 2 \text{ V} & \hat{j}_4 = -42/5 \text{ A}
\end{array}$$

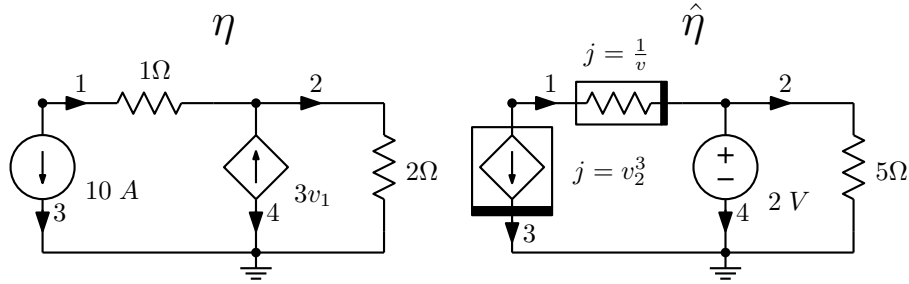


Figura 1.6: Dois circuitos para verificação do teorema de Tellegen.

É simples verificar que o teorema de Tellegen é satisfeito nas quatro formas:

$$\begin{aligned}
\sum v_i j_i &= 100 + 3200 - 900 - 2400 = 0 \\
\sum \hat{v}_i \hat{j}_i &= 1 + 4/5 + 15 - 84/5 = 0 \\
\sum \hat{v}_i j_i &= 10/8 - 80 + 150/8 + 60 = 0 \\
\sum v_i \hat{j}_i &= 80 - 32 - 720 + 672 = 0
\end{aligned}$$

1.3.3 Descrição dos ramos

Os ramos de um circuito podem ser transformados de forma a conter apenas fontes de corrente, independentes ou controladas por tensões nos ramos. O resistor é um caso particular, em que o ramo onde a tensão é tomada é o mesmo da corrente. Esta é a forma controlada a tensão de um ramo. Um ramo geral obedece então à equação:

$$j_k = \frac{v_k}{R_k} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^b G_{m \text{ ki}} v_i + i_{sk}$$

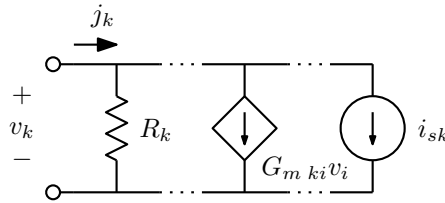


Figura 1.7: Ramo padrão para análise nodal.

O conteúdo de todos os ramos pode então ser descrito pela relação:

$$\vec{j} = [G]\vec{v} + \vec{i}_s$$

onde $[G]$ é uma matriz de dimensão $b \times b$, “matriz de condutância dos ramos”, e \vec{i}_s é um vetor de b dimensões, “vetor de fontes de corrente dos ramos”. Resistores aparecem como condutâncias $1/R$ na diagonal principal de $[G]$, transdutores como transcondutâncias fora da diagonal. No exemplo da figura 1.8:

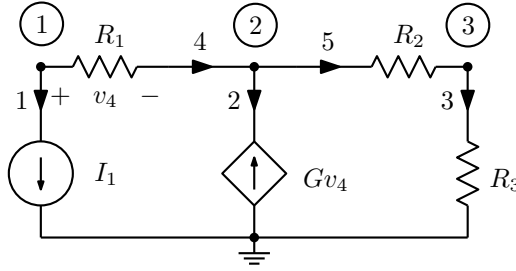


Figura 1.8: Circuito com ramos orientados e numerados.

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}; \quad \vec{i}_s = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este exemplo não tem ramos com elementos em paralelo, e assim cada elemento gera um ramo. Ramos em paralelo podem ser combinados se contendo elementos do ramo padrão, mas é mais usual colocar apenas um elemento por ramo.

1.3.4 Geração do sistema nodal

Combinando as equações acima, premultiplicando as equações dos ramos por $[A]$ e substituindo $\vec{v} = [A]^T \vec{e}$:

$$[A]\vec{j} = [A][G][A]^T \vec{e} + [A]\vec{i}_s$$

ou, como $[A]\vec{j} = \vec{0}$:

$$[A][G][A]^T \vec{e} = -[A]\vec{i}_s$$

que é o sistema nodal $[G_n]\vec{e} = \vec{i}_n$. A matriz $[G_n] = [A][G][A]^T$, chamada “matriz de condutância dos nós”, tem dimensão $n \times n$, e o vetor $\vec{i}_n = -[A]\vec{i}_s$, chamado “vetor de fontes de corrente nos nós”, tem dimensão n . As incógnitas são as n tensões nodais \vec{e} .

Fazendo as operações com as matrizes acima, resulta, obviamente, o mesmo sistema obtido “informalmente”:

$$\begin{aligned}
[G_n] &= [A][G][A]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \\
\vec{i}_n &= -[A]\vec{i}_s = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[G_n]\vec{e} = \vec{i}_n &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.3.5 Montagem direta do sistema nodal

O procedimento descrito acima, embora geral, é desnecessariamente complicado para uma montagem manual do sistema, ou mesmo para uma análise computacional. É simples observar que os elementos aparecem no sistema final sempre em posições bem determinadas. As regras para a construção direta do sistema nodal são:

O circuito deve ser primeiramente transformado de forma a que existam apenas resistores, fontes de corrente independentes, e transdutores controlados por tensões nodais.

Considere-se temporariamente os transdutores como se fossem fontes independentes.

A matriz de condutância dos nós fica então simétrica, com:

$$[G_n]_{kk} = \sum \text{condutâncias ligadas ao nó } k.$$

$$[G_n]_{ki} = - \sum_{k \neq i} \text{condutâncias ligadas entre os nós } i \text{ e } k.$$

O vetor de fontes de corrente nos nós acumula as fontes que entram nos nós:

$$\vec{i}_{nk} = \sum \text{fontes de corrente entrando no nó } k, \text{ positivas se entrando e negativas se saindo.}$$

Os termos controlados criados pelas transcondutâncias em \vec{i}_n são então passados para a matriz $[G_n]$, gerando a forma final do sistema.

No exemplo, tem-se inicialmente, deixando o transcondutor como se fosse uma fonte independente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ G(e_1 - e_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transporta-se então para dentro de $[G_n]$ os termos envolvendo \vec{e} em \vec{i}_n , obtendo o sistema final, o mesmo anterior.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É simples fazer algumas verificações para ver se o sistema está montado corretamente: Todas as entradas dentro de $[G_n]$ são condutâncias e transcondutâncias, e todas as entradas em \vec{i}_n são fontes independentes de corrente. Condutâncias aterradas somente aparecem uma vez, na diagonal principal. Condutâncias suspensas aparecem quatro vezes, duas na diagonal principal com sinal positivo e duas fora dela, com sinal negativo, nas mesmas colunas e linhas. Transcondutâncias aparecem uma, duas, ou quatro vezes, dependendo de se os nós de controle e de saída incluem o nó de terra. Fontes de corrente aparecem uma ou duas vezes em \vec{i}_n , dependendo se estejam aterradas ou não.

Todas as tensões e todas as correntes nos ramos podem ser obtidas, depois da solução do sistema para \vec{e} , pelas relações:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [A]^T \vec{e} \\ \vec{j} &= [G]\vec{v} + \vec{i}_s \end{aligned}$$

1.3.6 Montagem do sistema nodal por estampas

Para operação em computador, um método mais prático é o da montagem por “estampas”, onde cada elemento gera uma série de adições de termos ao sistema. Parte-se de um sistema nodal com $[G_n]$ e \vec{i}_n zerados, e adiciona-se as estampas dos elementos (figura 1.9):

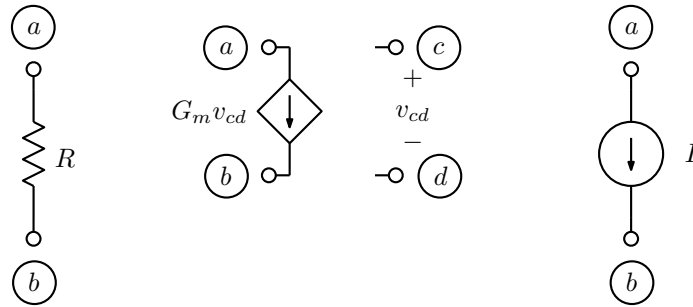


Figura 1.9: Elementos básicos para análise nodal. Resistor, transcondutor e fonte de corrente.

Estampa, que fica apenas em $[G_n]$, de um resistor de valor R entre os nós a e b :

$$\begin{matrix} a & b \\ a & \begin{bmatrix} +1/R & -1/R \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} -1/R & +1/R \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$$

Estampa, que fica apenas em $[G_n]$, de um transcondutor de transcondutância G_m com saída entre os nós a e b e entrada entre os nós c e d :

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +G_m & -G_m \\ \cdot & \cdot & -G_m & +G_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

Estampa, que fica apenas em \vec{i}_n , de uma fonte de corrente de valor I , entre os nós a e b :

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ +I \end{bmatrix} \end{array}$$

1.3.7 Descrição do circuito através de um “netlist”

A montagem por estampas é usualmente utilizada em associação com a descrição do circuito através de uma lista, ou “netlist”, que descreve a estrutura do circuito. No caso de uma análise de circuito resistivo linear, uma única leitura do “netlist” é suficiente para a montagem do sistema nodal. No exemplo da figura 1.10, o “netlist” poderia ser:

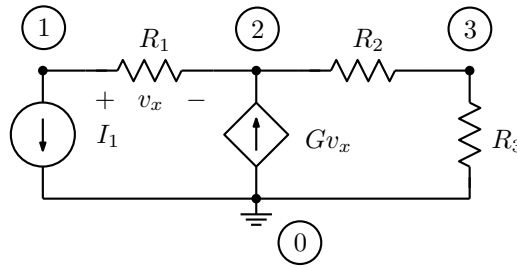


Figura 1.10: Circuito resistivo linear.

```
I1 1 0 <corrente>
R1 1 2 <resistência>
G1 0 2 1 2 <transcondutância>
R2 2 3 <resistência>
R3 3 0 <resistência>
```

Os valores entre “< >” seriam os valores numéricos dos parâmetros e outras informações. Foi seguida a notação usual de “netlist” usada em programas de análise de circuitos como o SPICE⁸. Note que basta zerar um sistema nodal de 3 equações e somar a ele as estampas dos 5 elementos uma a uma em qualquer ordem para ter o sistema nodal montado. As partes das estampas que incluem o nó 0 não são montadas, ou, mais simplesmente, podem ser montadas em uma linha e coluna 0, não usadas na solução do sistema (mas zeradas inicialmente também).

⁸Programa clássico de análise de circuitos desenvolvido na Universidade da Califórnia, Berkeley, a partir do fim dos anos 1960. Ainda mantido e amplamente utilizado em muitas versões.

Também é possível montar imediatamente as matrizes $[G]$ e $[A]$ e o vetor \vec{i}_s a partir de estampas, se se quiser montar o sistema a partir de um nível mais baixo, ou ter as equações para o cálculo de todas as tensões e correntes nos ramos em forma matricial. Mas esse cálculo pode ser feito convenientemente por um exame do “netlist” do circuito, após a solução do sistema nodal.

1.3.8 Solução do sistema

Sistemas de equações numéricas podem ser resolvidas com o algoritmo de Gauss-Jordan⁹, que consiste essencialmente em, para cada equação, exprimir uma das variáveis em função das demais e substituir a expressão em todas as demais. Feito isto para todas as equações resultam diretamente as soluções. O código em C abaixo faz exatamente isto. “Yn” é o sistema nodal, com o vetor de excitação \vec{i}_n montado logo após a última coluna de $[G_n]$. “nv” é o número de equações, limitado a 50 no caso. Note-se que existe uma margem no sistema, coluna e linha zero, não usada na solução, mas que pode ser usada na montagem das estampas dos elementos. Para cada coluna, o algoritmo primeiramente troca equações para conseguir o maior valor multiplicando a variável a eliminar, chamado “pivot” (“condensação pivotal”). Se um pivot não nulo (módulo maior que “TOLG”) não é encontrado o sistema é singular, não tendo solução ou tendo múltiplas soluções. A seguir a variável é isolada e substituída nas demais equações. Cuidado foi tomado para evitar operações inúteis, como atualizar valores que não serão mais usados e multiplicações por zero.

```
#define TOLG 1e-9
#define MAX_NOS 50
int nv;
double Yn[MAX_NOS+1][MAX_NOS+2];

int resolver sistema(void)
{
    int i,j,l,a;
    double t,p;

    for (i=1; i<=nv; i++) {
        t=0.0;
        a=i;
        for (l=i; l<=nv; l++) {
            if (fabs(Yn[l][i])>fabs(t)) {
                a=l;
                t=Yn[l][i];
            }
        }
        if (i!=a) {
            for (l=1; l<=nv+1; l++) {
                p=Yn[i][l];
                Yn[i][l]=Yn[a][l];
                Yn[a][l]=p;
            }
        }
        if (fabs(t)<TOLG) {
            printf("Sistema singular\n");
            return 1;
        }
        for (j=nv+1; j>i; j--) {
```

⁹Atribuído a Wilhelm Jordan, no livro “Textbook of Geodesy”, 1888. Modifica o método de Gauss (Carl Friedrich Gauss, ~1810), que é similar, mas substitui a variável isolada apenas nas equações seguintes, sendo seguida por uma série de substituições para calcular as demais variáveis.

```

    Yn[i][j]/= t;
    p=Yn[i][j];
    if (p!=0.0)
        for (l=1; l<=nv; l++) {
            if (l!=i)
                Yn[l][j]-=Yn[l][i]*p;
        }
    }
}
return 0;
}

```

Este método tem um tempo de processamento proporcional ao cubo do número de equações¹⁰. Para análise de sistemas muito grandes, métodos de solução de sistemas esparsos são usados. Estes métodos exploram eficientemente o fato de existirem muitos zeros nas matrizes e vetores, e evitam operações com estes elementos. Um outro problema que ocorre com sistemas muito grandes é acumulação de erro numérico. Métodos iterativos como o de Gauss-Seidel¹¹ podem ser usados em vez de métodos algorítmicos, para reduzir o número de operações e acumulação de erro.

Sistemas algébricos podem ser resolvidos pelo método de Cramer¹², que só requer multiplicações e somas. O método diz que a incógnita e_k do sistema $[G_n]\vec{e} = \vec{i}_n$ é obtida como:

$$e_k = \frac{|[G_{nk}]|}{|[G_n]|}$$

onde $[G_{nk}]$ é a matriz obtida substituindo-se a coluna k de $[G_n]$ por \vec{i}_n . $|\dots|$ é o determinante. Os determinantes, se calculados pelo método usual que só usa multiplicações e somas, requerem um número de operações proporcional ao fatorial do tamanho das matrizes, embora matrizes com muitos zeros permitam economizar muitas operações. Isto fica rapidamente inviável para cálculo numérico, mas é útil para sistemas algébricos, que usualmente não são muito grandes, sob pena de expressões muito complexas nas soluções.

Uma interessante possibilidade da análise algébrica é o cálculo de expressões aproximadas. Para isto, depois de uma análise algébrica completa, que vai calcular as soluções como razões de somas de produtos, estes produtos são avaliados com valores típicos para os elementos, e termos desprezíveis em relação aos demais da mesma soma são descartados. Os termos restantes formam expressões aproximadas para as soluções.

1.4 Análise no estado permanente senoidal

Uma simples extensão do sistema nodal para análise de circuitos resistivos é a análise no estado permanente senoidal. Nesta análise, assume-se que todas as tensões e correntes são senoides na mesma frequência, tendo transientes já terminado, como se o circuito estivesse operando há muito tempo, e usa-se a similaridade entre operações envolvendo senoides e operações com números complexos para reduzir o

¹⁰O método de Gauss é mais rápido, se todas as operações forem feitas. Para n equações, ele realiza aproximadamente $\frac{2n^3}{3}$ operações para n grande, entre multiplicações, divisões, somas e subtrações, enquanto o método de Gauss-Jordan realiza aproximadamente n^3 operações. Outro método igualmente eficiente é o da “fatoração LU” (Alan Turing, 1948). Entretanto, com a economia de operações envolvendo zeros, como no exemplo, frequentemente o método de Gauss-Jordan é mais rápido.

¹¹No método de Gauss-Seidel (Philipp Ludwig von Seidel), a partir de uma estimativa inicial da solução, usa-se a primeira equação para recalcular a primeira variável, a segunda equação para recalcular a segunda variável, etc. Um método similar é o de Jacobi (Carl Gustav Jakob Jacobi), onde a atualização da solução é feita após se percorrer todas as equações, em vez de após cada cálculo. Estes métodos em geral só convergem se a matriz do sistema tiver a diagonal principal dominante.

¹²Método descrito pelo matemático Gabriel Cramer, no livro “Introduction à l’analyse des lignes courbes algébriques”, 1750.

problema à análise de um circuito resistivo linear com elementos complexos¹³. Cada sinal é representado por um “fasor” correspondente, um número complexo, seguindo a regra:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Leftrightarrow A - jB$$

Com isto, é evidente que somar sinais ou multiplicá-los por constantes é equivalente a fazer as mesmas operações com os fasores que os representam. Apenas estas operações são necessárias para resolver um circuito resistivo. No caso de circuitos reativos, contendo capacitores, indutores e transformadores (lineares e invariantes no tempo), são ainda necessárias diferenciações e integrações. A diferenciação equivale a uma multiplicação por $j\omega$:

$$\frac{d}{dt}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) \Leftrightarrow j\omega(A - jB) = \omega B + j\omega A$$

A integração equivale a uma divisão por $j\omega$. Note que o termo constante gerado na integração, que é parte da resposta “transiente”, que se supõe que desaparece com o tempo, é ignorado.

$$\begin{aligned} \int_0^t (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) dt &= \left[\frac{A}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^t = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{B}{\omega} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}(A - jB) = -\frac{B}{\omega} - j\frac{A}{\omega} \end{aligned}$$

Uma relação útil também é:

$$A_0 \cos(\omega t + \phi) = A_0 \cos \phi \cos \omega t - A_0 \sin \phi \sin \omega t$$

O fasor correspondente, onde não ocorre a aparente troca de sinal, é:

$$A + jB = A_0 \cos \phi + jA_0 \sin \phi = A_0 e^{j\phi}$$

Assim, um sinal cossenoidal com amplitude A_0 e fase ϕ corresponde ao fasor $A_0 e^{j\phi}$, e o sinal no tempo pode ser recuperado do fasor como:

$$\text{Re}(A_0 e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \text{Re}(A_0 e^{j\omega t + \phi}) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Esta relação é útil para demonstrações das propriedades dos fasores, mas a simples equivalência da parte real do fasor com cosseno e da parte imaginária com menos seno é suficiente para a análise de circuitos.

1.4.1 Capacitores e indutores

Usando estas equivalências, pode-se então descrever capacitores e indutores lineares e invariantes no tempo como resistores e condutores imaginários, na forma:

$$\text{Indutores: } v(t) = L \frac{dj}{dt} \Leftrightarrow V(j\omega) = j\omega L J(j\omega)$$

$$\text{Capacitores: } j(t) = C \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow J(j\omega) = j\omega C V(j\omega)$$

¹³Este tipo de análise foi formalizado por Charles P. Steinmetz, no artigo “Complex quantities and their use in electrical engineering”, Proc. International Electrical Congress, Chicago, p. 33, agosto de 1893. A ideia já era conhecida na forma de diagramas vetoriais. É interessante ver o comentário de Steinmetz que segue ao artigo de E. A. Kennelly, “Impedance”, Trans. of the American Institute of Electrical Engineers, vol. X, p. 119, abril de 1893, onde a ideia é também discutida.

Diz-se então que indutores tem uma “reatância” $X_L(\omega) = \omega L$, correspondendo a uma “impedância” $Z_L(j\omega) = j\omega L$ e que capacitores tem uma reatância $X_C(\omega) = -1/(\omega C)$, correspondendo a uma impedância $Z_C(j\omega) = -j/(\omega C)$. Ao inverso da reatância chama-se “susceptância” (termo pouco usado). Ao inverso da impedância chama-se “admitância”, que para indutores vale $Y_L(j\omega) = -j/(\omega L)$ e para capacitores $Y_C(j\omega) = j\omega C$. Impedâncias e admitâncias correspondem a resistências e condutâncias em circuitos resistivos, tendo as mesmas unidades.

1.4.2 Transformadores

Transformadores são descritos por uma generalização do caso do indutor, usando matrizes de indutância $[L]$ e vetores de tensões e correntes:

$$\vec{v}(t) = [L] \frac{d\vec{j}}{dt} \Leftrightarrow \vec{V}(j\omega) = j\omega[L]\vec{J}(j\omega)$$

Para a análise nodal, é necessário ter as correntes em função das tensões. Para indutores isolados, basta usar:

$$J(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(j\omega)$$

Para um transformador, inverte-se a matriz $[L]$, obtendo a matriz de indutâncias recíprocas $[\Gamma]$:

$$\vec{J}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [\Gamma] \vec{V}(j\omega)$$

Para um transformador com dois enrolamentos, por exemplo, as equações usando a matriz $[L]$ seriam:

$$\begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde $M_{12} = M_{21} = M$ em qualquer transformador real, e as equações usando $[\Gamma]$ seriam:

$$\begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}; \\ \Gamma_{22} &= \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2}; \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \end{aligned}$$

Note que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ em qualquer transformador real. O coeficiente de acoplamento do transformador é definido como $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, e é sempre menor ou igual a 1. O caso $k = 1$ é chamado “acoplamento cerrado”, e não pode ser tratado diretamente na análise nodal normal, pois não existe a matriz $[\Gamma]$. Um recurso no caso pode ser diminuir a indutância de L_1 ou L_2 , mantendo M , e compensar o efeito adicionando um outro indutor em série com aquele lado do transformador, de forma a ter de volta a indutância original. Isto acrescenta um nó ao circuito, mas agora a matriz $[L]$ é inversível (embora talvez corresponda a um transformador não físico, com $k > 1$), e a análise fica exata. Para outra forma de tratamento, ver a análise nodal modificada adiante.

Pode ser observado pelas equações que o transformador de dois enrolamentos equivale a um circuito com dois indutores e dois “transdutores indutivos” (mais propriamente, talvez, “transadmitores”), ou “transindutores”:

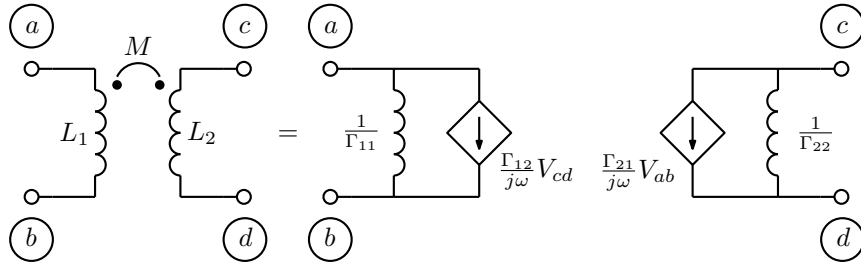


Figura 1.11: Transformador de duas bobinas para análise nodal.

Com mais enrolamentos, cada ramo tem, em paralelo, um indutor e transdutores indutivos controlados por todos os outros ramos.

1.4.3 Estampas dos elementos reativos

As estampas destes elementos (figura 1.12) na análise no estado permanente senoidal seriam então:

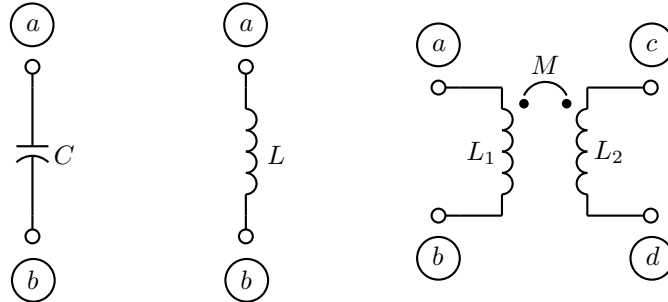


Figura 1.12: Elementos reativos: Capacitor, indutor e transformador de duas bobinas.

Capacitor:

$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{cc} a & b \\ \left[\begin{array}{cc} +j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & +j\omega C \end{array} \right] \begin{array}{c} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Indutor:

$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{cc} a & b \\ \left[\begin{array}{cc} +\frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & +\frac{1}{j\omega L} \end{array} \right] \begin{array}{c} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Transformador com duas bobinas:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} \\ -\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} \\ +\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} \\ -\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ E_c(j\omega) \\ E_d(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

1.4.4 Fontes independentes

Fontes de corrente, resistores e transdutores são tratados como na análise nodal de circuitos resistivos. A única diferença é que os valores das fontes de corrente são fasores, correspondendo às formas de onda de corrente de acordo com a relação:

$$i(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Leftrightarrow I(j\omega) = A - jB$$

A formulação admite também elementos como resistores e transdutores com valores complexos fixos, que podem ser úteis em certos estudos, como o de “filtros complexos”.

O sistema nodal tem então a forma:

$$[Y_n(j\omega)]\vec{E}(j\omega) = \vec{i}_n(j\omega)$$

onde $[Y_n(j\omega)]$ é a “matriz de admitância dos nós”, e a solução $\vec{E}(j\omega)$ é um vetor de fasores, correspondendo às tensões nodais pela relação usual.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.13:

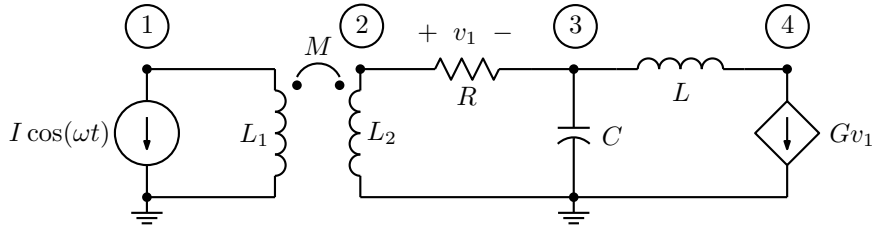


Figura 1.13: Circuito para análise em $j\omega$.

O sistema nodal correspondente para análise no estado permanente senoidal pode ser montado observando-se a rede, diretamente, ou pelas estampas. O resultado é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} & 0 & 0 \\ \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ 0 & +G & -\frac{1}{j\omega L} - G & +\frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \\ E_3(j\omega) \\ E_4(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com os dois lados do transformador aterrados, somente quatro das 16 entradas da estampa aparecem. A fonte cossenoidal é representada por seu fasor, que é real positivo. Se a entrada fosse senoidal, o fasor seria imaginário negativo.

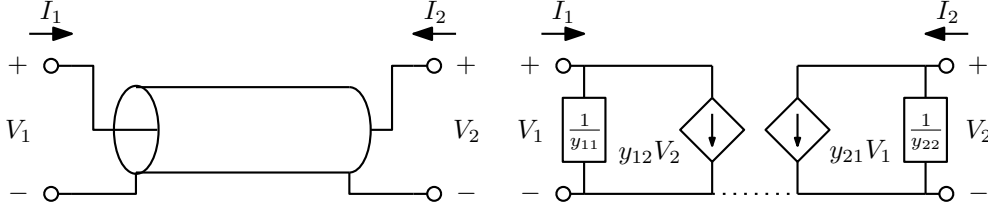
1.4.5 Linhas de transmissão¹⁴

Figura 1.14: Linha de transmissão e seu modelo.

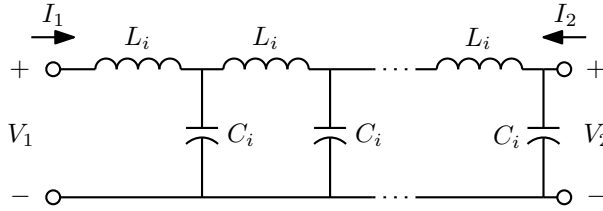


Figura 1.15: Equivalente da linha de transmissão sem perdas.

Um outro elemento que pode ser facilmente tratado pela análise no estado permanente senoidal é a linha de transmissão. A linha sem perdas equivale a um par de condutores paralelos com um material dielétrico entre eles (pode ser apenas ar), em que é considerada uma indutância por unidade de comprimento L e uma capacitância por unidade de comprimento C , como mostrado na figura 1.15, exemplificando a linha como um cabo coaxial. Linhas de transmissão modelam interconexões operando em alta frequência. Para análise nodal, a linha pode ser modelada por duas admitâncias e duas transadmitâncias, como mostrado na figura, que resultam das equações, não demonstradas aqui:

$$\begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{j}{Z_0} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tan(\omega T)} & \frac{1}{\sin(\omega T)} \\ \frac{1}{\sin(\omega T)} & -\frac{1}{\tan(\omega T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ é a “impedância característica” da linha, e $T = l\sqrt{LC}$, com l sendo o comprimento da linha, é o atraso da linha. O modelo equivale ao da figura 1.15 se:

$$L_i = \frac{lL}{n} = \frac{TZ_0}{n}; \quad C_i = \frac{lC}{n} = \frac{T}{nZ_0}$$

como se deduz das expressões para Z_0 e T , onde n é o número de seções, que deve ser grande.

Com alguma complexidade adicional se pode tratar a linha com perdas, que segue as equações:

$$\begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} \coth \gamma l & -\operatorname{csch} \gamma l \\ -\operatorname{csch} \gamma l & \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde a “impedância característica” Z_0 e a “constante de propagação” γ valem:

¹⁴Material opcional.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}}; \quad \gamma = \sqrt{(j\omega L + R)(j\omega C + G)}$$

onde R é a resistência por unidade de comprimento, G a condutância entre os condutores por unidade de comprimento, e l novamente o comprimento da linha. Neste caso Z_0 e γ são valores complexos que dependem da frequência ω . No caso sem perdas Z_0 é real, fixa, e $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$ é imaginária. Não há problema em considerar perdas que dependam da frequência, se necessário. O modelo é usualmente considerado com um terminal comum entre as duas portas, já que não faz sentido uma linha com sinais de modo comum diferentes nos dois lados (a conexão poderia ser feita por outra linha de transmissão, esta com terminais comuns). Uma diferença entre este elemento e os elementos LCM é que a frequência ω aparece envolvida em funções, e então não é possível mais exprimir as soluções do circuito em razões de polinômios de ω . Note-se que estes modelos não podem ser aplicados para $\omega = 0$, o que também acontece para os indutores na análise nodal simples, que também existem na linha. Isto é possível, entretanto, com a inversão das relações $\vec{J}(j\omega) = [Y(j\omega)]\vec{V}(j\omega)$ e o uso da análise nodal modificada (adiante).

1.4.6 Aplicações da análise no estado permanente senoidal

A aplicação básica, de análise de um circuito no estado permanente senoidal para uma única frequência serve para análise de circuitos de energia elétrica em CA (corrente alternada), por exemplo. Circuitos multifásicos podem ser facilmente analisados com a técnica.

Exemplo: Seja o circuito trifásico¹⁵ da figura 1.16, que representa uma fonte de sinal trifásica em 60 Hz ($\omega = 2\pi 60$) ligada a uma carga em “ Δ ” desbalanceada através de impedâncias indutivas.

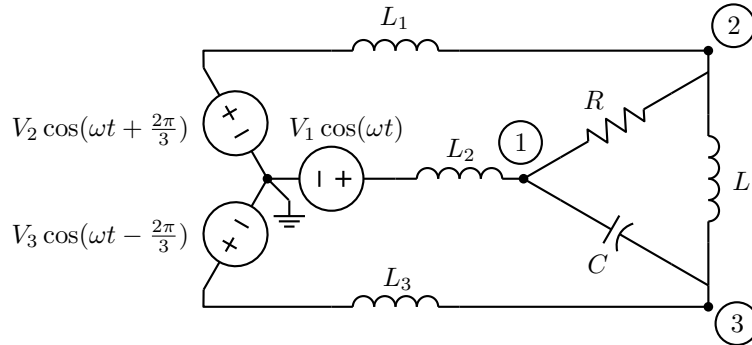


Figura 1.16: Rede trifásica.

Um sistema nodal para o cálculo das tensões sobre a carga, usando equivalentes Norton para eliminar as fontes de tensão, fica na forma abaixo. Observe-se como são gerados os fasores de entrada, correspondendo aos ângulos das fases. Para um sinal com ângulo ϕ o fasor vem da equivalência $A_0 \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow A_0(\cos \phi + j \sin \phi)$.

$$\begin{bmatrix} j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{R} & -j\omega C \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -j\omega C & -\frac{1}{j\omega L} & j\omega C + \frac{1}{j\omega L_3} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \\ E_3(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{j\omega L_2} \\ \frac{V_2(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})}{j\omega L_1} \\ \frac{V_3(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})}{j\omega L_3} \end{bmatrix}$$

¹⁵Os sistemas de distribuição de energia elétrica são quase sempre assim, e análise destes sistemas foi motivação para o desenvolvimento da análise com fasores.

1.4.6.1 Cálculo de resposta em frequência

Uma aplicação importante é a obtenção de respostas em frequência, onde se quer gráficos de como variam o módulo e a fase de uma saída quando a frequência de uma entrada é variada. Para isto, basta analisar o circuito no estado permanente senoidal variando a frequência. Se o cálculo for de uma função de transferência, a entrada pode ser feita unitária, sendo então a saída a própria função desejada. Usualmente são calculados o módulo em decibéis e a fase em graus. Para um fasor $E_k(j\omega) = A(j\omega) + B(j\omega)$:

$$|E_k(j\omega)| \text{ dB} = 20 \log \sqrt{A^2 + B^2} = 10 \log(A^2 + B^2)$$

$$\angle E_k(j\omega) = \frac{180}{\pi} \times \begin{cases} \text{Se } A > 0 \text{ e } B > 0 \Rightarrow \tan^{-1} \frac{B}{A} \\ \text{Se } A < 0 \text{ e } B > 0 \Rightarrow \tan^{-1} \frac{B}{A} + \pi \\ \text{Se } A < 0 \text{ e } B < 0 \Rightarrow \tan^{-1} \frac{B}{A} - \pi \end{cases}$$

A escolha das frequências onde realizar a análise deve ser com espaçamento uniforme, dependendo de que tipo de escala de frequência seja usada. Para n pontos com espaçamento uniforme entre as frequências ω_1 e ω_2 , começa-se por ω_1 e soma-se o incremento $\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{n-1}$ para cada nova frequência. Para escala logarítmica, começa-se também com ω_1 e multiplica-se a frequência por $\delta = \sqrt[n]{\omega_2/\omega_1}$ para cada nova frequência. Para frequências f em Hz basta usar $\omega = 2\pi f$.

Pode-se calcular também o atraso, $T = -\frac{\angle E_k(j\omega)}{\omega}$, e o atraso de grupo, $Tg = -\frac{d}{d\omega} \angle E_k(j\omega)$. Estas medidas servem para avaliar o quanto um sistema conserva corretamente a relação entre os componentes espectrais de um sinal, que normalmente devem ser igualmente atrasados. A função atraso pode ser diretamente calculada, mas como a fase pode conter múltiplos de π rad/s, pode apresentar aparentes descontinuidades. A função atraso de grupo não as apresenta, mas pode ser avaliada apenas aproximadamente com derivadas discretas em uma análise normal de resposta em frequência¹⁶.

Exemplo: Seja calcular a resposta em frequência da saída V_o em relação à entrada V_{in} no circuito da figura 1.17¹⁷.

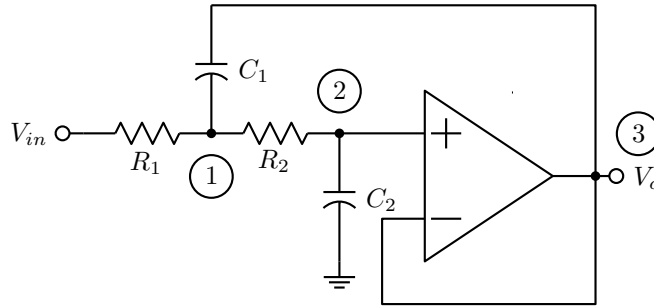


Figura 1.17: Circuito de onde calcular da função de transferência $\frac{V_o}{V_{in}}(j\omega)$ e obter os gráficos de resposta em frequência.

O circuito pode ser modelado para a análise nodal na forma da figura 1.18. O amplificador operacional¹⁸ forma um amplificador de tensão com ganho unitário. Na entrada é feito um equivalente Norton

¹⁶O cálculo exato é possível a partir de uma análise de sensibilidades [11], como a feita no programa SENSI.

¹⁷Um filtro ativo passa-baixas de Sallen e Key [16], com amplificador com ganho unitário

¹⁸Um tratamento geral do amplificador operacional está em seção mais adiante.

entre V_{in} e R_1 , e o amplificador de ganho unitário é transformado por um equivalente Norton com o capacitor C_1 . Restam dois nós, e como no circuito original $V_o = e_3 = e_2$, a saída está no nó 2.

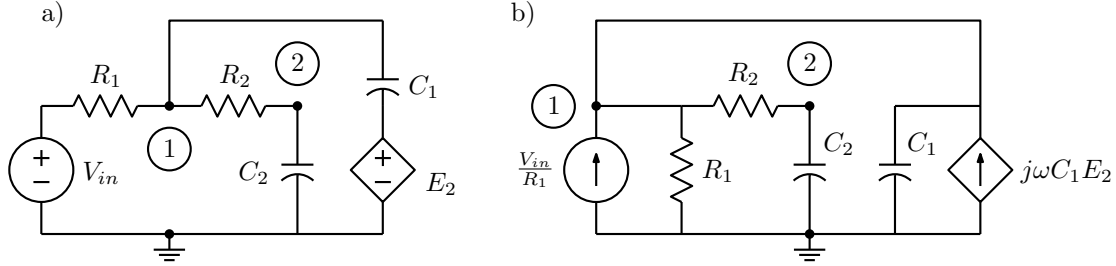


Figura 1.18: a) Modelo. b) Modelo para análise nodal, com equivalentes Norton feitos.

O sistema nodal correspondente é:

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} - j\omega C_1 \\ -\frac{1}{R_2} & j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Achando $E_2(j\omega)$ para $V_{in} = 1$ pelo método de Cramer:

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) = E_2(j\omega) &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2}}{-\omega^2 C_1 C_2 + \frac{j\omega C_1}{R_2} + j\omega C_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{j\omega C_1}{R_2}} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{-\omega^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \end{aligned}$$

O módulo e a fase valem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) \right| &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} - \omega^2 \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right)^2}} \\ \angle \left(\frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) \right) &= -\angle \left(\left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} - \omega^2 \right) + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) \right) \end{aligned}$$

O circuito faz um filtro passa-baixas ressonante de segunda ordem, com ressonância em $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$.

Para resistores iguais, gera uma amplificação na ressonância, ou fator de qualidade, $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$. As curvas de módulo e fase, para o caso de $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $C_1 = 10 \text{ F}$ e $C_2 = 0.1 \text{ F}$, são mostradas com várias possibilidades de escalas na figura 1.19, para a frequência variando entre 0.1 e 10 rad/s¹⁹. A ressonância fica em 1 rad/s, com fator de qualidade de 5. A fase começa em 0° em baixa frequência, passa por -90° na ressonância, e termina em -180° em alta frequência.

1.4.6.2 Resposta a um sinal periódico qualquer

A resposta a um sinal periódico qualquer pode ser obtida decompondo a entrada em série de Fourier de senos e cossenos, e realizando a análise de estado permanente senoidal para cada componente da série.

¹⁹Gráficos obtidos com o programa mnarf, com 1000 pontos.

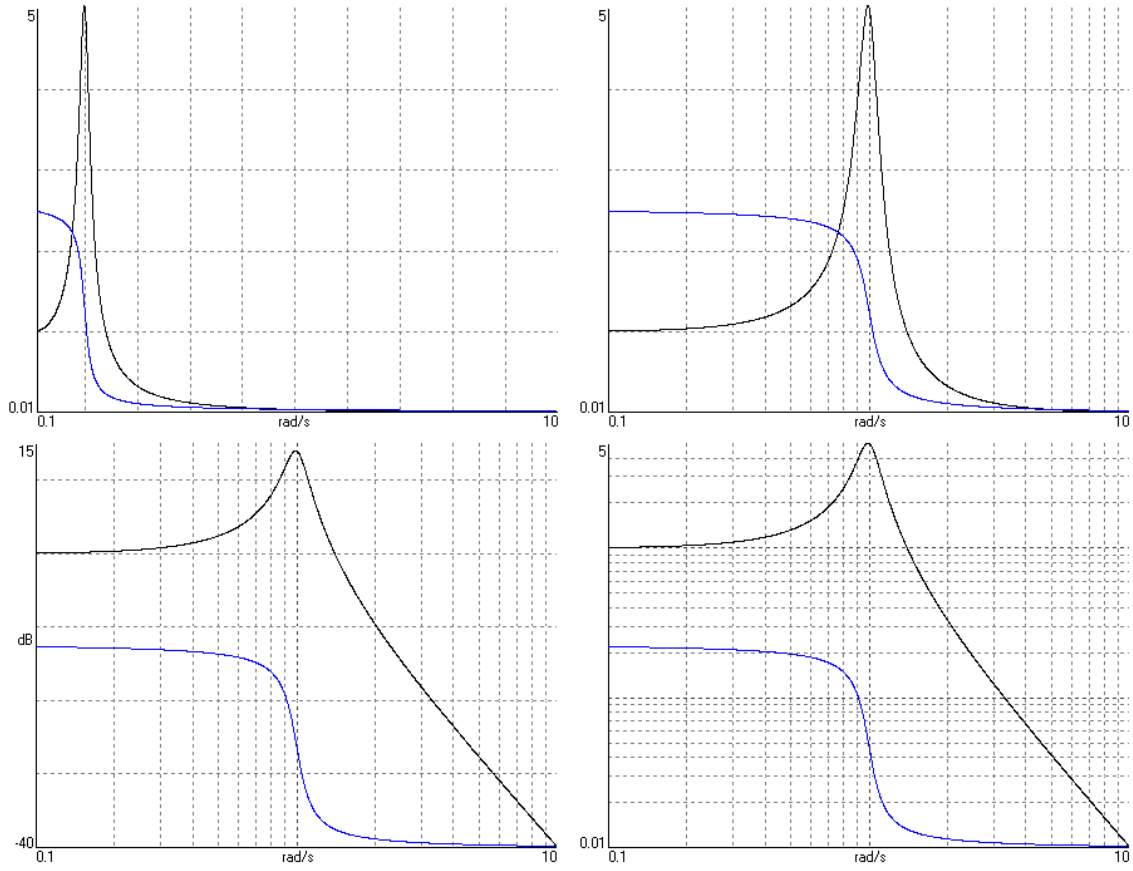


Figura 1.19: Curvas de módulo e fase de $V_o/V_{in}(j\omega)$ para o circuito da figura 1.17, acima com escala linear de módulo e escala linear e logarítmica de frequência, abaixo com módulo em decibéis e em escala logarítmica, com frequências em escala logarítmica. A escala da fase é sempre linear, entre $\pm 180^\circ$.

Os fasores de saída obtidos são então retornados ao tempo e os sinais resultantes somados. Se a entrada for $x_{in}(t)$ com período T , a série de Fourier correspondente é:

$$x_{in}(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(2\omega_0 t) + B_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Se a série de Fourier for infinita e tiver que ser truncada, a saída obtida será uma aproximação também. Os coeficientes são obtidos como usual, com integrais sobre um período T inteiro, começando de qualquer ponto conveniente T_0 :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x_{in}(t) dt \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x_{in}(t) \cos n\omega_0 t dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x_{in}(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Uma análise com $\omega = 0$ deve ser feita com entrada constante A_0 , depois uma análise em $\omega = \omega_0$ com entrada $A_1 - jB_1$, depois uma análise com $\omega = 2\omega_0$ com entrada $A_2 - jB_2$, e assim por diante. Com os fasores de saída calculados correspondentemente como $E_k(0) = C_0$, $E_k(j\omega_0) = C_1 - jD_1$, $E_k(2\omega_0) = C_2 - jD_2$, etc., a saída $e_k(t)$ vale:

$$e_k(t) = C_0 + C_1 \cos(\omega_0 t) + D_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(2\omega_0 t) + D_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

É possível combinar nesta análise sinais de períodos diferentes, somando no tempo os resultados obtidos das análises dos componentes das séries de todas as fontes, calculados separadamente. Com este método se pode também obter aproximadamente respostas transientes, por exemplo usando no lugar de uma fonte em degrau uma onda quadrada de baixa frequência. A cada transição se tem uma aproximação da resposta ao degrau.

Exemplo: Seja a análise do circuito da figura 1.20, onde a excitação é uma onda quadrada de 1 Hz com valores entre 0 V e 1 V. Usando um equivalente Norton para a fonte de tensão com R_1 , o sistema nodal é, com $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = 25/9$ e $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -20/9$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} \\ \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & \frac{1}{R_2} + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(j\omega)}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

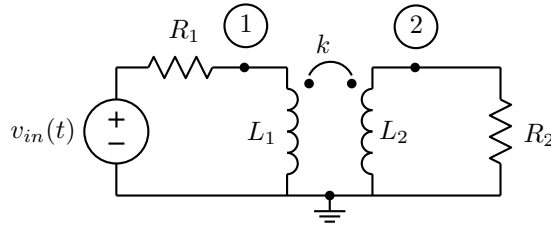


Figura 1.20: Circuito com excitação periódica não senoidal. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1\text{H}$, $k = 0.8$.

Truncando a série de Fourier da onda quadrada após o termo de ordem 11, a série truncada para $i_{in}(t) = \frac{v_{in}(t)}{R_1}$ vale:

$$i_{in}(t) = C_0 + C_1 \sin(\omega_0 t) + C_3 \sin(3\omega_0 t) + C_5 \sin(5\omega_0 t) + C_7 \sin(7\omega_0 t) + C_9 \sin(9\omega_0 t) + C_{11} \sin(11\omega_0 t)$$

onde $C_0 = 0.5$ e $C_k = \frac{2}{k\pi}$, $k = 1, 3, \dots, 11$ e $\omega_0 = 2\pi$. O circuito é então analisado para todos os termos da série, nas frequências correspondentes:

$$I_{in} = 0.5, \omega = 0 : E_1 = 0; E_2 = 0$$

$$I_{in} = -\frac{2}{\pi}, \omega = 2\pi : E_1 = -0.127164 - 0.120948j; E_2 = +0.183017 - 0.510733j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{3\pi}, \omega = 6\pi : E_1 = -0.0231701 - 0.00688278j; E_2 = +0.0294191 - 0.20514j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{5\pi}, \omega = 10\pi : E_1 = -0.00875637 - 0.00155284j; E_2 = +0.0110072 - 0.125731j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{7\pi}, \omega = 14\pi : E_1 = -0.0045292 - 0.000572922j; E_2 = +0.00567778 - 0.0903583j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{9\pi}, \omega = 18\pi : E_1 = -0.00275551 - 0.000270947j; E_2 = +0.00345037 - 0.0704578j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{11\pi}, \omega = 22\pi : E_1 = -0.00184993 - 0.000148786j; E_2 = +0.0023151 - 0.057722j$$

Foram omitidos os resultados das análises nos harmônicos pares de ω_0 , já que a entrada é nula nestas frequências. Fazendo-se a volta para o domínio do tempo as duas tensões nodais valem:

$$e_1(t) = -0.127164 \cos(2\pi t) + 0.120948 \sin(2\pi t) - 0.0231701 \cos(6\pi t) + 0.00688278 \sin(6\pi t) + \dots$$

$$e_2(t) = 0.183017 \cos(2\pi t) + 0.510733 \sin(2\pi t) + 0.0294191 \cos(6\pi t) + 0.20514 \sin(6\pi t) + \dots$$

Plotando os resultados, tem-se a figura 1.21. Observe-se o “fenômeno de Gibbs”, as oscilações nas transições abruptas de sinal em $v_{in}(t)$ e $e_1(t)$, onde a série de Fourier não converge. Colocar mais termos na série apenas aumentaria a frequência destas oscilações, sem alterar sua amplitude junto às transições. Este fenômeno limita seriamente a utilidade desta forma de análise.

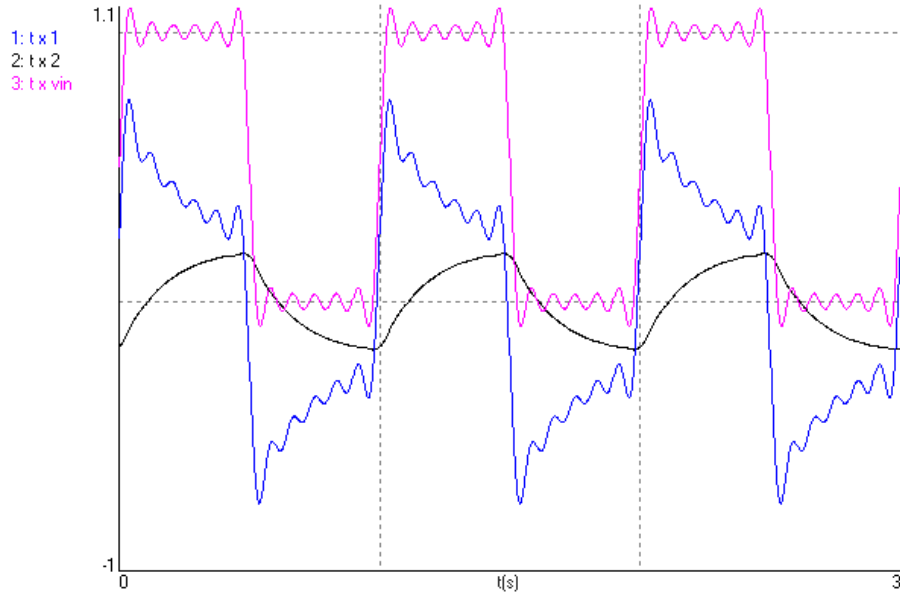


Figura 1.21: Resultado da análise usando séries de Fourier, para os dois nós e $v_{in}(t)$.

1.4.7 Solução do sistema complexo

O sistema numérico gerado tem coeficientes complexos. A solução é feita com os mesmos algoritmos usados para sistemas reais, mas com operações complexas. Como multiplicações são as operações frequentes na solução que gastam mais tempo, e uma multiplicação de números complexos equivale a quatro multiplicações reais, o tempo de solução é aproximadamente quatro vezes maior para o mesmo número de equações. Note-se que é possível usar apenas três multiplicações diferentes para multiplicar dois valores complexos, o que pode economizar algum tempo:

$$(A + jB)(C + jD) = (AC - BD) + j(AD + BC) = (AC - BD) + j((A + B)(C + D) - AC - BD)$$

Há algo similar também sobre a divisão de números complexos (que é menos usada nos algoritmos, e então a ideia não é tão útil). A forma normal requer seis multiplicações e duas divisões:

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$$

É possível economizar uma multiplicação:

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j \frac{(A + B)(C - D) - AC + BD}{C^2 + D^2}$$

Um problema que aparece nestas expressões são os grandes valores gerados pelas multiplicações quando os valores multiplicados são grandes. Uma faixa maior é ganha quando se evita as multiplicações, usando apenas divisões, supondo que C e D não são nulos:

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{\frac{A}{D} + \frac{B}{C}}{\frac{C}{D} + \frac{D}{C}} + j \frac{\frac{B}{D} - \frac{A}{C}}{\frac{C}{D} + \frac{D}{C}}$$

É possível formular o sistema em forma semialgébrica, com os coeficientes sendo polinômios de $j\omega$ e $\frac{1}{j\omega}$, para circuitos RLCM+fontes, e resolver o sistema resultante pelo método de Cramer, usando somas e multiplicações de polinômios apenas. Esta técnica é útil para acelerar o cálculo de respostas em frequência, pois uma vez encontradas as soluções, em forma de razões de polinômios de $j\omega$, é rápida a avaliação para diferentes frequências. Isto é mais convenientemente feito com a análise em transformada de Laplace.

1.5 Análise nodal em transformada de Laplace

Uma forma similar de análise para circuitos lineares e invariantes no tempo é a análise em transformada de Laplace²⁰, que permite calcular exatamente formas de onda incluindo transientes, para excitações com qualquer forma de onda que admita a transformada. Basta aplicar a transformada de Laplace às relações de definição dos elementos, e considerar sinais por suas transformadas de Laplace. O procedimento é similar ao usado na análise por fasores, mas agora as condições iniciais tem que ser consideradas também. Algumas funções úteis e propriedades, que aparecem com frequência nestas análises são mostradas na tabela 1.1.

²⁰ A transformada de Laplace foi desenvolvida por Pierre-Simon de Laplace, em 1779, como um método para a solução de equações diferenciais lineares. Ideia similar já tinha sido usada por Léonard Euler em 1763. Sua utilidade para análise de circuitos decorre dos trabalhos de Oliver Heaviside, no fim do século XIX, que a redescobriu e popularizou em seu “cálculo operacional”, usando o operador p , com significado de diferenciação com função similar à do s de Laplace. Trabalhos posteriores geraram a forma em uso atualmente. Ver o artigo de Heaviside, “On operators in physical mathematics”, Proceedings of the Royal Society of London, V. 52, pp. 504-529, 1893.

Caso geral da transformada de Laplace:	$x(t) \Longleftrightarrow X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$
Propriedade de linearidade:	$ax(t) + by(t) \Longleftrightarrow aX(s) + bY(s)$
Diferenciação:	$\frac{d}{dt}x(t) \Longleftrightarrow sX(s) - x(0)$
Integração:	$\int_0^t x(t)dt \Longleftrightarrow \frac{X(s)}{s}$
Impulso:	$\delta(t) \Longleftrightarrow 1$
Degrau:	$u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}$
Exponencial do tempo:	$t^n \Longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$
Exponencial decrescente:	$e^{-\alpha t} \Longleftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$
Exponencial decrescente com potência do tempo:	$t^n e^{-\alpha t} \Longleftrightarrow \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
Senoide:	$\sin(\omega t) \Longleftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Cossenoide:	$\cos(\omega t) \Longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Senoide amortecida:	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \Longleftrightarrow \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
Cossenoide amortecida:	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \Longleftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
Senoide amortecida geral:	$2 K e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \angle K) \Longleftrightarrow \frac{K}{s + \alpha - j\omega} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\omega}$
Atraso:	$x(t - T) \Longleftrightarrow e^{-sT} X(s)$

Tabela 1.1: Tabela de transformadas de Laplace.

1.5.1 Elementos RLCM

Tratando os elementos reativos por suas relações integrais:

$$\text{Resistores: } v(t) = Rj(t) \Leftrightarrow V(s) = RJ(s)$$

$$\text{Indutores: } j(t) = j(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t)dt \Leftrightarrow J(s) = \frac{j(0)}{s} + \frac{1}{sL} V(s)$$

$$\text{Capacitores: } v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t j(t)dt \Leftrightarrow V(s) = \frac{v(0)}{s} + \frac{1}{sC} J(s)$$

$$\text{Transformadores: } \vec{j}(t) = \vec{j}(0) + [\Gamma] \int_0^t \vec{v}(t)dt \Leftrightarrow \vec{J}(s) = \frac{\vec{j}(0)}{s} + \frac{1}{s} [\Gamma] V(s)$$

O indutor tem então em paralelo uma fonte de corrente em degrau representando sua corrente inicial, e o capacitor tem em série uma fonte de tensão representando sua tensão inicial, também em degrau. O transformador gera uma corrente inicial em degrau em paralelo com cada indutor, e uma rede de admitâncias indutivas e fontes indutivas de transadmitância. O capacitor é modelado na análise nodal pelo equivalente Norton do modelo, com uma fonte de corrente impulsional em paralelo com o capacitor.

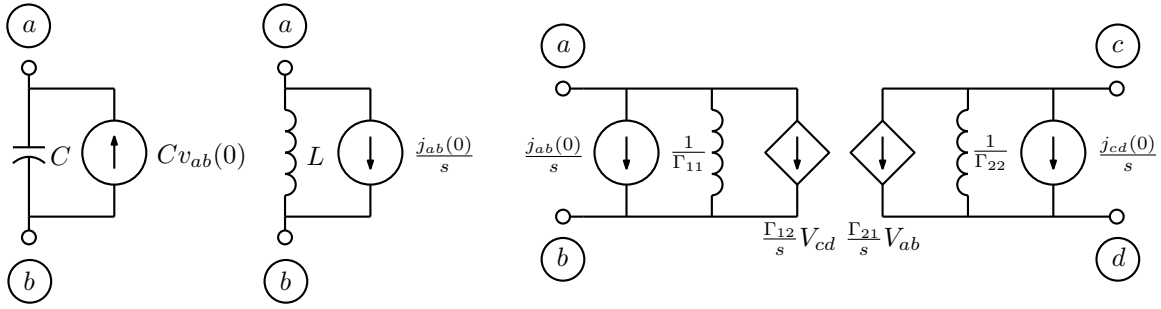


Figura 1.22: Modelos para análise nodal em transformada de Laplace. Capacitor, indutor e transformador com dois enrolamentos

As estampas dos elementos são então similares às da análise por fasores, com s em vez de $j\omega$, mas incluem as condições iniciais no vetor de excitação como fontes em impulso ou degrau, conforme os modelos da figura 1.22.

Capacitor com tensão inicial $v_{ab}(0)$:

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ a \quad b \end{array} \begin{bmatrix} +sC & -sC \\ -sC & +sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +Cv_{ab}(0) \\ -Cv_{ab}(0) \end{bmatrix}$$

Indutor com corrente inicial $j_{ab}(0)$:

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ a \quad b \end{array} \begin{bmatrix} +\frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & +\frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ +\frac{j_{ab}(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Transformador com dois enrolamentos e correntes iniciais $j_{ab}(0)$ e $j_{cd}(0)$:

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ a \quad b \quad c \quad d \end{array} \begin{bmatrix} +\frac{\Gamma_{11}}{s} & -\frac{\Gamma_{11}}{s} & +\frac{\Gamma_{12}}{s} & -\frac{\Gamma_{12}}{s} \\ -\frac{\Gamma_{11}}{s} & +\frac{\Gamma_{11}}{s} & -\frac{\Gamma_{12}}{s} & +\frac{\Gamma_{12}}{s} \\ +\frac{\Gamma_{21}}{s} & -\frac{\Gamma_{21}}{s} & +\frac{\Gamma_{22}}{s} & -\frac{\Gamma_{22}}{s} \\ -\frac{\Gamma_{21}}{s} & +\frac{\Gamma_{21}}{s} & -\frac{\Gamma_{22}}{s} & +\frac{\Gamma_{22}}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \\ E_c(s) \\ E_d(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ +\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ -\frac{j_{cd}(0)}{s} \\ +\frac{j_{cd}(0)}{s} \end{bmatrix}$$

A análise pode ser semi-algébrica, com valores numéricos e a variável “ s ”, resultando em um sistema de equações envolvendo polinômios de s e $1/s$, e uma solução em transformada de Laplace na forma de razão de polinômios de s . Métodos numéricos para a solução destes sistemas serão discutidos mais adiante. Uma solução totalmente algébrica é certamente possível também, mas para circuitos de ordem alta as expressões obtidas podem facilmente ficar enormes.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.23. O sistema de equações nodais toma a forma:

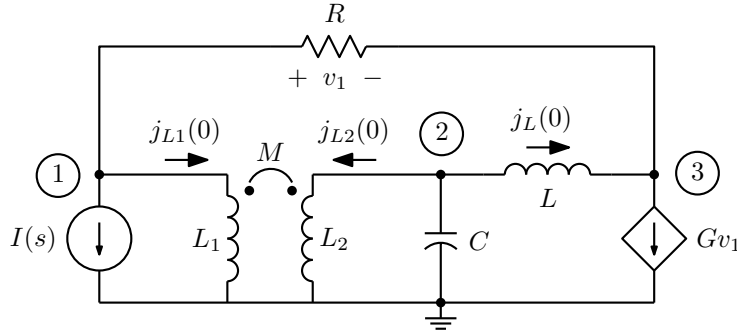


Figura 1.23: Circuito para análise em transformada de Laplace.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{s} + \frac{1}{R} & \frac{\Gamma_{12}}{s} & -\frac{1}{R} \\ \frac{\Gamma_{21}}{s} & \frac{\Gamma_{22}}{s} + sC + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R} + G & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} - G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ E_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I(s) - j_{L1}(0)/s \\ C v_c(0) - j_L(0)/s - j_{L2}(0)/s \\ + j_L(0)/s \end{bmatrix}$$

1.5.2 Linhas de transmissão²¹

É possível tratar linhas de transmissão usando transformadas de Laplace. A rede pode ser tratada como no caso do estado permanente senoidal (figura 1.14), com as equações:

$$\begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} \coth \gamma l & -\operatorname{csch} \gamma l \\ -\operatorname{csch} \gamma l & \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

onde a impedância característica Z_0 e a constante de propagação γ agora valem:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{sL + R}{sC + G}}; \quad \gamma = \sqrt{(sL + R)(sC + G)}$$

O caso sem perdas fica mais simples, com $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\gamma l = s\sqrt{LC}l = sT$. Então:

$$\coth \gamma l = \frac{1 + e^{-2sT}}{1 - e^{-2sT}}; \quad -\operatorname{csch} \gamma l = \frac{-2e^{-sT}}{1 - e^{-2sT}}$$

A volta ao domínio do tempo pode ser difícil de se obter analiticamente. É simples verificar que o modelo da linha sem perdas equivale ao circuito da figura 1.24. Como e^{-sT} significa um atraso de T segundos, as condições iniciais devem levar em conta um período T inteiro das tensões e correntes nas duas extremidades da linha. No caso com perdas em geral é mais prático aproximar a linha como uma série de seções $Z = sL + R$ em série, $Y = sC + G$ em paralelo, cada uma com suas condições iniciais, e então tem-se apenas um circuito RLC. O mesmo pode ser feito no caso sem perdas.

1.5.3 Aplicações da análise em transformada de Laplace

1.5.3.1 Cálculo da resposta completa

A aplicação fundamental é a solução de circuitos lineares invariantes no tempo, obtendo a solução completa para qualquer conjunto de entradas e condições iniciais, como ilustrado nos exemplos anteriores.

²¹Material opcional

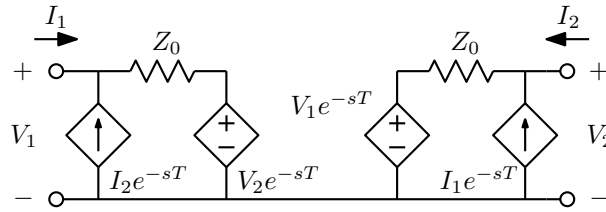


Figura 1.24: Modelo da linha de transmissão sem perdas.

A análise é algébrica ou semialgébrica, com polinômios de s e $\frac{1}{s}$. A volta ao tempo pode ser problemática numericamente, devido à necessidade de encontrar as raízes de um polinômio. Se entradas com transformadas de Laplace mais complexas que a do degrau e do impulso estiverem presentes, pode ficar mais simples calcular as respostas ao impulso unitário devidas a essas entradas, e depois multiplicar pelas transformadas, separando a resposta à entrada zero, devida às condições iniciais, da resposta ao estado zero, devida às entradas.

Exemplo: Uma “bobina de Tesla”²² (figura 1.25) é formada por dois tanques LC que ressonam na mesma frequência quando separados, acoplados através dos indutores. Se o coeficiente de acoplamento tem certos valores ($k = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$, com a e b dois inteiros com diferença ímpar, que definem o modo $a : b$ de operação, como $1 : 2$, $2 : 3$, $2 : 5$, etc.), após um certo número de oscilações ($b/2$ ciclos) toda a energia que é colocada em um dos capacitores é transferida para o outro capacitor. Com elementos no primário L_1 e C_1 , e no secundário L_2 e C_2 , Há um ganho de tensão igual a $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$. Se essas razões são grandes, ocorre grande aumento de tensão, o que torna o circuito útil na geração de pulsos de alta tensão. A transferência mais rápida de energia é obtida quando $k = 0.6$, correspondendo ao modo $a : b = 1 : 2$, com transferência em um único ciclo de oscilação. A única excitação do circuito é a tensão inicial em C_1 , e o circuito então opera com a resposta à entrada zero²³.

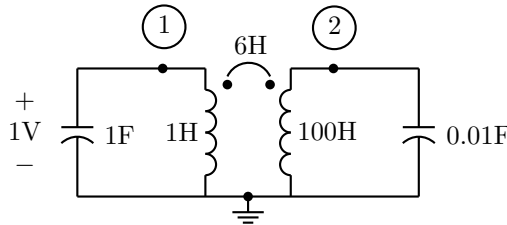


Figura 1.25: Bobina de Tesla.

A matriz de indutâncias recíprocas vale:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 100 \end{bmatrix} \Rightarrow [\Gamma] = \begin{bmatrix} \frac{100}{64} & -\frac{6}{64} \\ -\frac{6}{64} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

E o modelo para análise nodal é o da figura 1.26:

O sistema nodal fica sendo:

²²Desenvolvida por Nikola Tesla, 1891. Transformadores ressonantes foram dos primeiros circuitos elétricos não triviais a serem estudados, devido à sua aplicação em sistemas primitivos de rádio. Circuitos que se comportam de forma similar podem ser gerados de muitas outras formas, e com circuitos de ordem maior que a quarta [21].

²³Existe uma outra versão da bobina de Tesla, desenvolvida mais recentemente, que tem uma fonte de excitação alternada

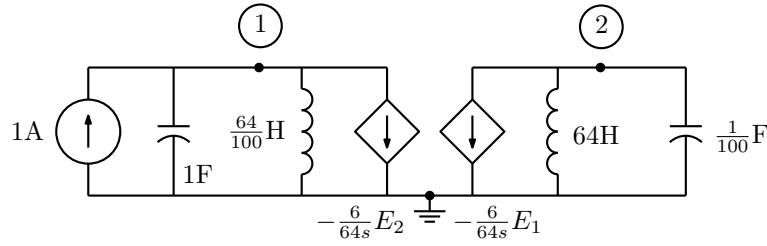


Figura 1.26: Modelo nodal para a bobina de Tesla.

$$\begin{bmatrix} s + \frac{100}{64s} & -\frac{6}{64s} \\ -\frac{6}{64s} & \frac{s}{100} + \frac{1}{64s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As soluções são:

$$E_1(s) = \frac{s^3 + \frac{100}{64}s}{s^4 + \frac{100}{32}s^2 + \frac{100}{64}}; \quad E_2(s) = \frac{\frac{600}{64}s}{s^4 + \frac{100}{32}s^2 + \frac{100}{64}}$$

Expandindo em frações parciais aparecem cossenos:

$$E_1(s) = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{5}{8}} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{5}{2}}; \quad E_2(s) = \frac{5s}{s^2 + \frac{5}{8}} - \frac{5s}{s^2 + \frac{5}{2}}$$

$$e_1(t) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{5}{8}}t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{5}{2}}t; \quad e_2(t) = 5 \cos \sqrt{\frac{5}{8}}t - 5 \cos \sqrt{\frac{5}{2}}t$$

Quando $t = 0$, os cossenos de e_1 se somam e os de e_2 se subtraem. Toda a energia está no primeiro capacitor. Após um ciclo da maior frequência (as duas estão numa razão de 1 : 2), os cossenos de e_1 se subtraem e os de e_2 se somam. Toda a energia está no segundo capacitor, que fica com -10 V. As formas de onda são mostradas na figura 1.27.

1.5.3.2 Análise de circuitos lineares por partes

Uma útil extensão é a análise de circuitos não lineares ou variantes no tempo, em que os elementos mudam de modelo quando certas condições ocorrem, mas continuam com modelos lineares. A solução é calculada pela transformada de Laplace com o modelo inicial do circuito, e a solução no tempo é seguida até que ocorra um evento que cause uma mudança de modelo. Pode ser um instante de tempo atingido, no caso variante no tempo, ou uma condição sobre a solução do circuito, no caso não linear. As condições finais calculadas são então transformadas em condições iniciais para o novo modelo, e o processo é repetido até a ocorrência do próximo evento. A análise feita assim é exata, desde que os instantes e limites dos eventos que mudam o modelo sejam determinados precisamente. A técnica é entretanto problemática numericamente, devido à volta ao tempo e à necessidade de refinar os instantes onde ocorrem as mudanças de modelo.

em série com o capacitor primário e opera com a resposta ao estado zero [15]. É uma forma mais conveniente para controle eletrônico, permitindo impressionantes demonstrações em que grandes faíscas elétricas são geradas de forma a tocar música.

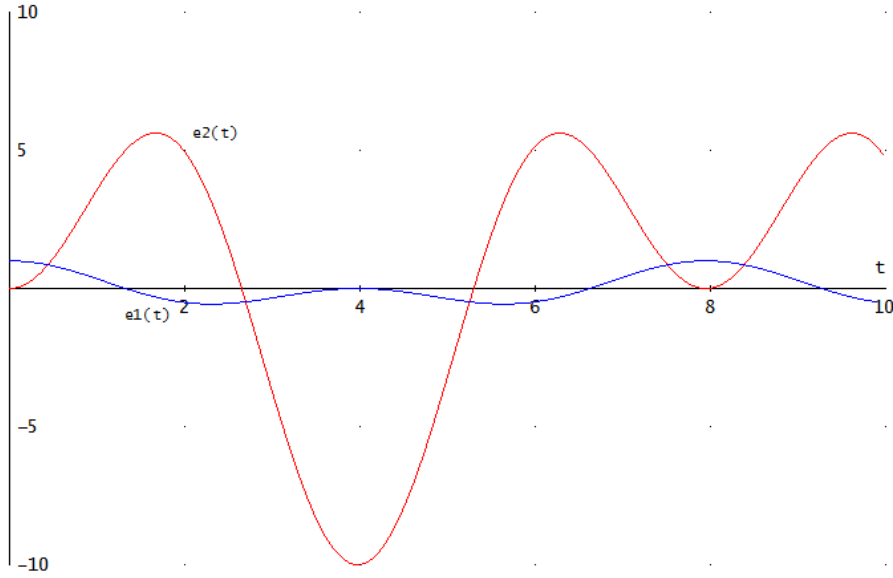


Figura 1.27: Formas de onda para a bobina de Tesla com $k = 0.6$.

1.5.3.3 Cálculo de resposta em frequência

Para análise manual de circuitos, a análise no estado permanente senoidal em forma algébrica ou semi-algébrica fica mais simples se feita com s em vez de $j\omega$, ficando então transformada em um cálculo da resposta ao impulso (com entradas em cosseno, fasores reais, se tornando impulsos na transformada de Laplace). Obtida uma solução, basta fazer $s = j\omega$ para ter o resultado para o estado permanente senoidal.

A partir dos polinômios (para redes RLCM) de s assim obtidos, podem ser feitos também cálculos de frequências naturais, polos e zeros, como se verá adiante.

Exemplo: Seja calcular a resposta em frequência entre V_{in} e E_2 no circuito da figura 1.20. O resultado é interessante pois permite avaliar como projetar um transformador a ser ligado entre resistências dadas. O sistema nodal a resolver é o mesmo daquele exemplo, com $j\omega$ substituído por s :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{\Gamma_{11}}{s} & \frac{\Gamma_{12}}{s} \\ \frac{\Gamma_{21}}{s} & \frac{1}{R_2} + \frac{\Gamma_{22}}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O resultado é:

$$\frac{E_2}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{\Gamma_{21}}{sR_1}}{\frac{1}{R_1R_2} + \frac{\Gamma_{22}}{sR_1} + \frac{\Gamma_{11}}{sR_2} + \frac{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}{s^2} - \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{s^2}} = \frac{-\Gamma_{21}R_2s}{s^2 + s(\Gamma_{22}R_2 + \Gamma_{11}R_1) + R_1R_2(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21})}$$

Substituindo as indutâncias recíprocas pelas indutâncias:

$$\frac{E_2}{V_{in}}(s) = \frac{MR_2s}{(L_1L_2 - M^2)s^2 + s(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2}$$

Isto é uma função passa-faixa de segunda ordem. Os comportamentos em baixa frequência, média frequência e alta frequência podem ser obtidos da expressão:

$$\begin{aligned}
\text{Baixa frequência: } \left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| &\approx \frac{M}{R_1} \omega \\
\text{Média frequência: } \left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| &= \frac{MR_2}{L_1R_2 + L_2R_1} \text{ em } \omega = \sqrt{\frac{R_1R_2}{L_1L_2 - M^2}} \\
\text{Alta frequência: } \left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| &\approx \frac{MR_2}{(L_1L_2 - M^2)\omega}
\end{aligned}$$

Note-se que o ganho em média frequência vale, usando-se $M = k\sqrt{L_1L_2}$ e $n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$:

$$\left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| = \frac{MR_2}{L_1R_2 + L_2R_1} = k \frac{\frac{R_2}{n^2}}{R_1 + \frac{R_2}{n^2}} n$$

que é o ganho se fosse usado um transformador ideal com relação de espiras n multiplicado por k . Comparando as assíntotas de baixa e alta frequência com o ganho de média frequência, são obtidos os dois limites de frequência entre os quais o transformador opera com ganho aproximadamente constante, de forma quase ideal se $k \approx 1$. Destes limites podem ser calculados os valores necessários para L_1 e k . Note-se o compromisso que aparece, pois se L_1 é aumentado para reduzir ω_1 , k tem que ser mais próximo de 1 para manter ω_2 .

$$\begin{aligned}
\text{Limite inferior: } \omega_1 &= \frac{R_1R_2}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\frac{R_2}{n^2}}{R_1 + \frac{R_2}{n^2}} \frac{R_1}{L_1} \\
\text{Limite superior: } \omega_2 &= \frac{L_1R_2 + L_2R_1}{L_1L_2 - M^2} = \frac{R_1 + \frac{R_2}{n^2}}{L_1(1 - k^2)}
\end{aligned}$$

Por exemplo, seja um transformador a ligar entre resistências de $R_1 = 50 \Omega$ e $R_2 = 300 \Omega$, de forma a produzir o máximo ganho possível, que deva operar entre 1 MHz e 100 MHz. O máximo ganho é obtido com máxima transferência de potência com $k = 1$, o que resulta em $n = \sqrt{R_2/R_1} = 2.45$, independente de k . O cálculo leva a $L_1 = 3.98 \mu\text{H}$, $L_2 = 23.9 \mu\text{H}$ e $k = 0.9798^{24}$. A figura 1.28 mostra a resposta em frequência calculada. O ganho máximo resulta como 1.2, que é o máximo ideal de 1.225 multiplicado por k . Nas frequências limite o ganho máximo fica dividido por $\approx \sqrt{2}$, ficando em ≈ 0.85 . Note-se que por este cálculo existe uma mínima frequência superior, pois $k > 0$, de 4.0 MHz com os valores usados.

Note-se que se $k = 1$ o sistema é de primeira ordem, e não existe limite superior de frequência. É interessante observar a resposta ao degrau deste circuito. A resposta a um degrau de amplitude V_{in} é fácil de calcular:

$$E_2(s) = \frac{MR_2}{s(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2} V_{in} = \frac{\frac{R_2}{n^2}}{R_1 + \frac{R_2}{n^2}} n V_{in} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{s + \omega_1} V_{in}$$

Voltando ao tempo:

$$e_2(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} V_{in} e^{-\omega_1 t}$$

O caso com $k < 1$ com $\omega_2 \gg \omega_1$ resulta em duas exponenciais com constantes de tempo próximas de $1/\omega_1$ e $1/\omega_2$, com a segunda determinando o tempo de subida do pulso e primeira o tempo de descida. A figura 1.29 mostra a comparação das respostas a um degrau unitário do circuito, com k como calculado e com $k = 1$.

Detalhando o cálculo, com o circuito na condição de máxima transferência de potência:

²⁴Nesta condição, $L_1 = R_1/(2\omega_1)$, $k = \sqrt{1 - 4\omega_1/\omega_2}$, e sempre $L_2 = n^2 L_1$.

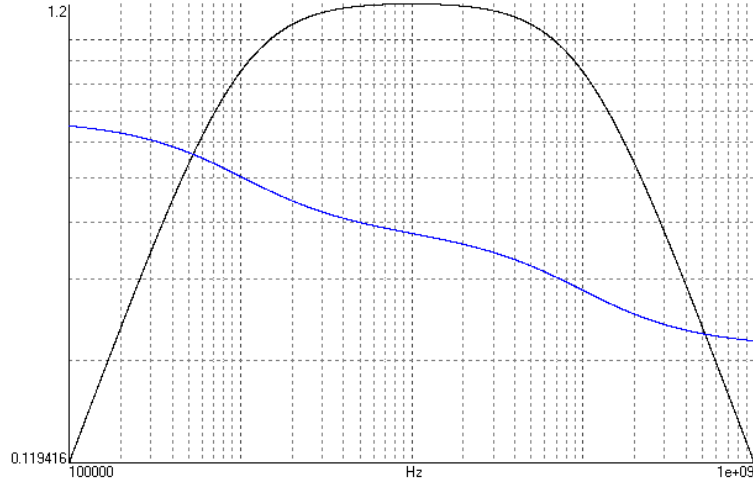


Figura 1.28: Resposta em frequência do transformador entre resistências. A fase está entre $\pm 180^\circ$.

$$E_2(s) = \frac{MR_2}{(L_1L_2 - M^2)s^2 + (L_1R_2 + L_2R_1)s + R_1R_2}V_{in} = \frac{knL_1R_2}{(L_1^2\frac{R_2}{R_1}(1-k^2))s^2 + 2L_1R_2s + R_1R_2}V_{in}$$

A expansão em frações parciais fica simples:

$$E_2(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}V_{in} \left(\frac{1}{s + \frac{R_1}{L_1(1+k)}} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L_1(1-k)}} \right)$$

No tempo:

$$e_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}V_{in} \left(e^{-\frac{R_1}{L_1(1+k)}t} - e^{-\frac{R_1}{L_1(1-k)}t} \right)$$

Note-se que realmente as duas constantes de tempo são próximas de $1/\omega_1 = 2L_1/R_1$ e $1/\omega_2 = (1-k^2)L_1/(2R_1)$ se $k \approx 1$.

1.5.4 Solução do sistema

Um sistema algébrico pode ser resolvido pelo método de Cramer. Um sistema semialgébrico em polinômios de s e $\frac{1}{s}$, pode também ser resolvido pelo método de Cramer. O problema de operar com potências negativas de s pode ser contornado com a multiplicação por s das equações envolvendo indutores (isto pode aumentar os graus dos polinômios mais que o necessário), ou pelo uso da análise nodal modificada (adiante).

1.5.4.1 O algoritmo da eliminação²⁵

Um algoritmo similar ao método de Gauss, mas que não requer divisões de polinômios, é conhecido para a solução de sistemas de equações polinomiais com coeficientes numéricos. O método é muito mais rápido que o de Cramer para circuitos grandes.

²⁵Material opcional. Ver o livro “Basic Circuit Theory”, de Desoer e Kuh, 1969.

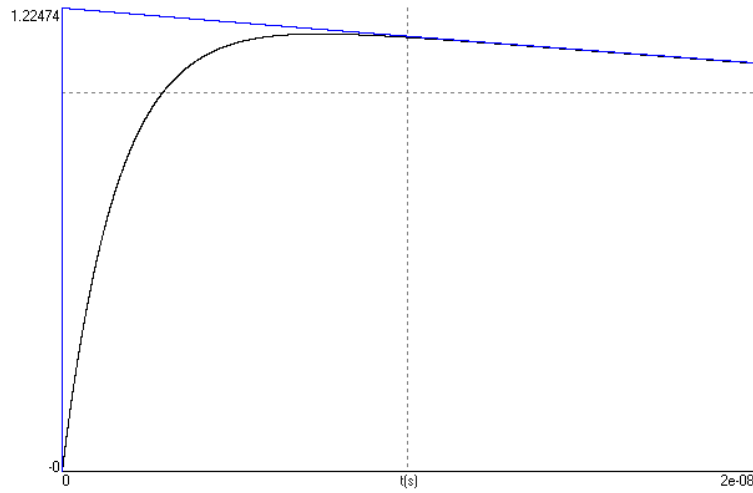


Figura 1.29: Início da resposta a um degrau de 1 V do mesmo circuito, com $k = 0.9798$ e com $k = 1$.

Seja um sistema de equações polinomiais em s :

$$\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & \cdots & P_{1n}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & \cdots & P_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(s) & P_{n2}(s) & \cdots & P_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}$$

O algoritmo de solução é:

1. Para $i = 1 \dots n$:
2. Examinar a coluna i , de $P_{ii}(s)$ até $P_{ni}(s)$. Se apenas um polinômio é não nulo, seja $P_{ki}(s)$, trocar as equações i e k e ir ao passo 7.
3. Fazer k o índice da linha do polinômio com menor grau não nulo para $k = i \dots n$, $P_{ki}(s)$.
4. Dividir por $P_{ki}(s)$ todos os polinômios $P_{ji}(s)$, $j = 1 \dots n$, $j \neq k$ achando os quocientes $q_{ji}(s)$ e os restos $r_{ji}(s)$, de forma que $p_{ji}(s) - q_{ji}(s)P_{ki}(s) = r_{ji}(s)$.
5. Para todas as equações l , $l = 1 \dots n$, $l \neq k$, fazer equação $l =$ equação $l - q_{li}(s) \times$ equação k .
6. Voltar ao passo 2.
7. Fim do ciclo.

Exemplo: Seja resolver o sistema, que resulta da análise nodal modificada (ver adiante) do circuito da figura 1.30:

$$\left[\begin{array}{cc|c} s & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & s \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

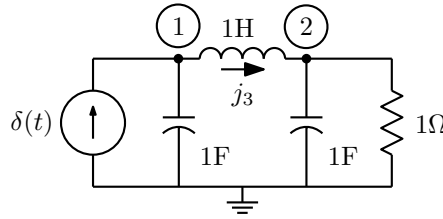


Figura 1.30: Circuito a resolver pelo algoritmo da eliminação.

Seguindo o algoritmo:

1) $i = 1$

2) Não há apenas um polinômio não nulo na coluna 1.

3) $k = 3$, $P_{31}(s) = -1$.

4) Dividindo a coluna 1 por $P_{31}(s)$, exceto $P_{31}(s)$:

$s \div -1 = -s$, resto 0.

$0 \div -1 = 0$, resto 0.

5) Processando as equações 1 e 2:

$s - (-s)(-1) = 0$; $0 - (-s)1 = s$; $1 - (-s)s = s^2 + 1$; $1 - (-s)0 = 1$.

$0 - (0)(-1) = 0$; $s + 1 - (0)1 = s + 1$; $-1 - (0)s = -1$; $0 - (0)0 = 0$ (melhor omitir se $q_{li} = 0$).

Resta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & s & s^2 + 1 \\ 0 & s + 1 & -1 \\ -1 & 1 & s \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Trocando as linhas 1 e 3:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & s + 1 & -1 \\ 0 & s & s^2 + 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) $i = 2$.

3) $k = 2$, $P_{22}(s) = s + 1$.

4) Dividindo a coluna 2, a partir do índice 2, por $P_{22}(s)$, exceto $P_{22}(s)$:

$s \div (s + 1) = 1$; resto -1 .

5) Processando a equação 3:

$s - 1(s + 1) = -1$; $s^2 + 1 - 1(-1) = s^2 + 2$; $1 - 1(0) = 1$.

Resta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & s + 1 & -1 \\ 0 & -1 & s^2 + 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) $k = 3$; $P_{32} = -1$.

4) Dividindo a coluna 2, a partir do índice 2, por $P_{32}(s)$, exceto $P_{32}(s)$:

$(s + 1) \div -1 = -s - 1$; resto 0.

5) Processando a equação 2:

$$s + 1 - (-s - 1)(-1) = 0; -1 - (-s - 1)(s^2 + 2) = s^3 + s^2 + 2s + 1; 0 - (-s - 1)1 = s + 1.$$

Resta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & 0 & s^3 + s^2 + 2s + 1 \\ 0 & -1 & s^2 + 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s + 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Trocando as equações 2 e 3:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & -1 & s^2 + 2 \\ 0 & 0 & s^3 + s^2 + 2s + 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s + 1 \end{bmatrix}$$

O algoritmo está completo, encontrando $J_3(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+2s+1}$. As demais variáveis podem ser obtidas a partir do sistema final, ou repetindo o procedimento com colunas trocadas, já que apenas a última variável é diretamente calculada. Notar o problema numérico que pode ocorrer no passo 5, onde a subtração de dois polinômios pode anular o coeficiente de grau mais alto, mas erros numéricos podem tornar o cancelamento inexato. É necessário examinar os polinômios gerados após as subtrações para eliminar termos desprezíveis e talvez corrigir o grau. Se um erro na decisão se um valor é nulo ou não ocorrer neste passo, o método falha. O método de Cramer não tem este problema. Os polinômios podem ser examinados apenas no fim das operações.

1.5.4.2 Interpolação

É possível também interpolar os polinômios das soluções. Primeiramente a ordem de complexidade m do circuito é determinada (pode ser superestimada), que é o grau máximo que os polinômios podem ter. Considerando apenas entradas impulsoriais, inclusive condições iniciais, os polinômios então terão no máximo $m + 1$ coeficientes. Realizando-se $m + 1$ análises totalmente numéricas, com valores numéricos de s , tem-se informação suficiente para interpolar os polinômios para os numeradores e denominadores (o mesmo para todas) de todas as soluções. Como todas as soluções são razões de polinômios de s , $E_k(s) = N_k(s)/D(s)$. O polinômio do denominador $D(s)$, comum a todas as soluções, é o determinante da matriz $[Y_n(s)]$, possivelmente multiplicado por uma potência de s para eliminar potências negativas de s (a potência correta é igual ao número de indutores). Os polinômios dos numeradores são então dados por $N_k(s) = E_k(s)D(s)$. Avaliando $D(s)$ para $m + 1$ valores de s s_i , os coeficientes do polinômio $D(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0$ podem ser obtidos resolvendo-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} s_1^m & s_1^{m-1} & \dots & 1 \\ s_2^m & s_2^{m-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m^m & s_m^{m-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(s_1) \\ D(s_2) \\ \vdots \\ D(s_{m+1}) \end{bmatrix}$$

O polinômio obtido é então examinado, com coeficientes desprezíveis gerados por erro numérico sendo zerados, corrigindo seu grau se ele foi superestimado. O mesmo é feito para interpolar os numeradores $N_k(s) = b_k s^m + b_{k-1} s^{m-1} + \dots + b_k 0$, com as incógnitas agora sendo \vec{b}_k e o vetor de excitação do sistema mudado para $\vec{N}_k(\vec{s})$. Todos os coeficientes podem ser calculados simultaneamente, com um sistema de equações com uma única matriz e vários vetores de excitação.

O algoritmo é mais estável numericamente se todos os s_i tiverem valores com módulos próximos. Uma forma de conseguir todos com o mesmo módulo é usar valores complexos distribuídos em um círculo com

raio da mesma ordem de grandeza da faixa de frequências ω onde o circuito opera. É possível economizar alguns cálculos usando o fato de que as soluções para valores complexos conjugados de s_i são também complexas conjugadas. É também possível acelerar o cálculo e evitar o sistema de equações usando o fato de que, se o número de análises for uma potência de 2 e os valores de s_i forem localizados igualmente espaçados sobre um círculo, com valores reais ou complexos conjugados, os coeficientes \vec{a} e \vec{b}_k podem ser obtidos por “fast Fourier transforms” (FFT) das sequências complexas $\vec{D}(\vec{s})$ e $\vec{N}_k(\vec{s})$. O resultado fica escalado pelo raio de círculo usado.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 1.31. O sistema nodal em transformada de Laplace para ele, usando um equivalente Norton para a fonte de tensão, é:

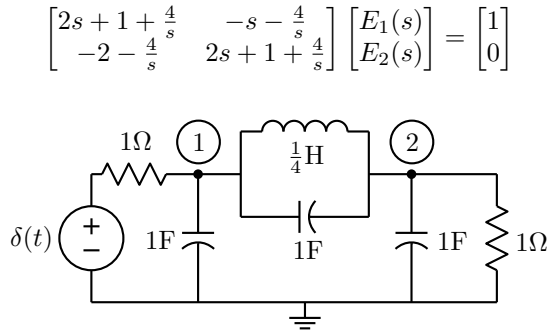


Figura 1.31: Circuito a ser analisado por interpolação.

Escolhendo um raio de 2 rad/s para um círculo, devem ser feitas quatro análises:

$$\begin{aligned}
 s_1 = +2 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_1) \\ E_2(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_1) \\ E_2(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{33} \\ \frac{4}{33} \end{bmatrix} \quad D(s_1) = 33 \\
 s_2 = +2j &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+2j & 0 \\ 0 & 1+2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_2) \\ E_2(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_2) \\ E_2(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2j}{-3+4j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D(s_2) = -3+4j \\
 s_3 = -2 &\Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_3) \\ E_2(s_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_3) \\ E_2(s_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{9} \\ \frac{-4}{9} \end{bmatrix} \quad D(s_3) = 9 \\
 s_4 = -2j &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-2j & 0 \\ 0 & 1-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_4) \\ E_2(s_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_4) \\ E_2(s_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-2j}{-3-4j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D(s_4) = -3-4j
 \end{aligned}$$

Montando os sistemas de equações para achar os coeficientes do denominador e dos dois numeradores $N_k(s_i) = E_k(s_i)D(s_i)$, os valores obtidos para estes devem ser multiplicados por s_i , para que as soluções sejam polinômios de terceiro grau:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} s_1^3 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^3 & s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^3 & s_3^2 & s_3 & 1 \\ s_4^3 & s_4^2 & s_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D(s_1)s_1 \\ D(s_2)s_2 \\ D(s_3)s_3 \\ D(s_4)s_4 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} s_1^3 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^3 & s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^3 & s_3^2 & s_3 & 1 \\ s_4^3 & s_4^2 & s_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1(s_1)s_1 \\ N_1(s_2)s_2 \\ N_1(s_3)s_3 \\ N_1(s_4)s_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s_1^3 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^3 & s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^3 & s_3^2 & s_3 & 1 \\ s_4^3 & s_4^2 & s_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{23} \\ b_{22} \\ b_{21} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2(s_1)s_1 \\ N_2(s_2)s_2 \\ N_2(s_3)s_3 \\ N_2(s_4)s_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Com os valores calculados, os resultados são:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_{23} \\ b_{22} \\ b_{21} \\ b_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Os resultados correspondem às soluções:

$$E_1(s) = \frac{2s^2 + s + 4}{3s^3 + 4s^2 + 9s + 8}; \quad E_2(s) = \frac{s^2 + 4}{3s^3 + 4s^2 + 9s + 8}$$

O mesmo resultado pode ser obtido pela interpolação com FFT. Realizando as FFTs das sequências e reescalando em frequência por 2:

$$\begin{aligned} D(s) : \begin{bmatrix} 66 \\ -8 - 6j \\ -18 \\ -8 + 6j \end{bmatrix} &\rightarrow \text{FFT} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 1 = 8 \\ \div 2 = 9 \\ \div 4 = 4 \\ \div 8 = 3 \end{matrix} \\ N_1(s) : \begin{bmatrix} 14 \\ -4 + 2j \\ 10 \\ -4 - 2j \end{bmatrix} &\rightarrow \text{FFT} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 1 = 4 \\ \div 2 = 1 \\ \div 4 = 2 \\ \div 8 = 0 \end{matrix} \quad N_2(s) : \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{FFT} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 1 = 4 \\ \div 2 = 0 \\ \div 4 = 1 \\ \div 8 = 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Notar que as sequências são as mesmas dos vetores de excitação dos sistemas de equações. Pode-se evitar a renormalização usando raio unitário, mas então o circuito deve estar normalizado, para boa precisão no cálculo.

A análise nodal é bastante restrita quanto aos elementos aceitos, mas o problema pode ser contornado de várias formas, através de deslocamentos de fontes de tensão ou de modelamento dos ramos controlados a corrente, como se verá a seguir.

1.6 Deslocamento de fontes de tensão

A análise nodal normal não permite o tratamento direto de elementos com controle por corrente, onde a tensão depende da corrente, no próprio ramo ou em outro. O caso mais simples é o da fonte de tensão, que coloca a mesma tensão no ramo para qualquer corrente. Usando a análise nodal básica, pode-se tratar fontes de tensão usando equivalentes Norton e deslocamentos de fontes. Uma fonte de tensão, independente ou controlada, em série com um elemento de impedância Z (o que inclui a análise de circuitos resistivos lineares e as análises no estado permanente senoidal e em transformada de Laplace), pode ser diretamente eliminada por um equivalente Norton. Se a fonte de tensão estiver em série com uma fonte de corrente, independente ou controlada, a fonte de tensão pode ser eliminada, pois sua presença não altera a corrente no ramo (figura 1.32):

Note-se que um nó desaparece no processo, e que a tensão e a corrente sobre a impedância ficam diferentes no equivalente Norton. A tensão sobre a fonte de corrente é toda a tensão sobre o ramo. No caso de uma fonte isolada, ela pode ser deslocada para qualquer um dos lados (figura 1.33), e os ramos resultantes transformados.

Também desaparece um nó no processo (o nó a), mas sua tensão nodal pode ser facilmente calculada somando-se V à tensão no nó restante (nó b) da fonte de tensão. As tensões nos nós restantes não são alteradas. Deslocamentos podem ser feitos também com fontes controladas, mas é preciso ter cuidado com modificações nas variáveis controladoras das fontes, quando fontes são deslocadas para os ramos que

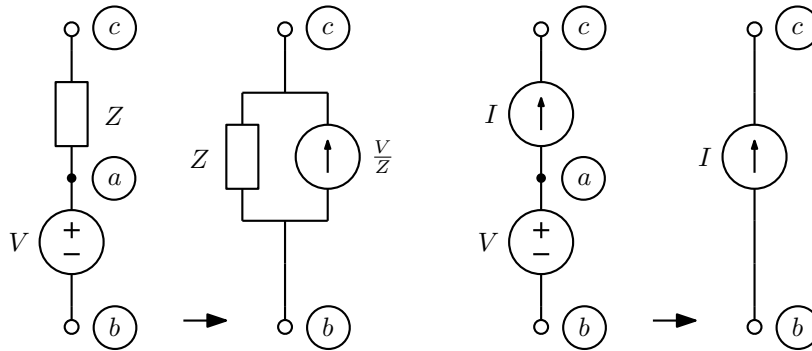


Figura 1.32: Equivalente Norton e eliminação de fonte de tensão.

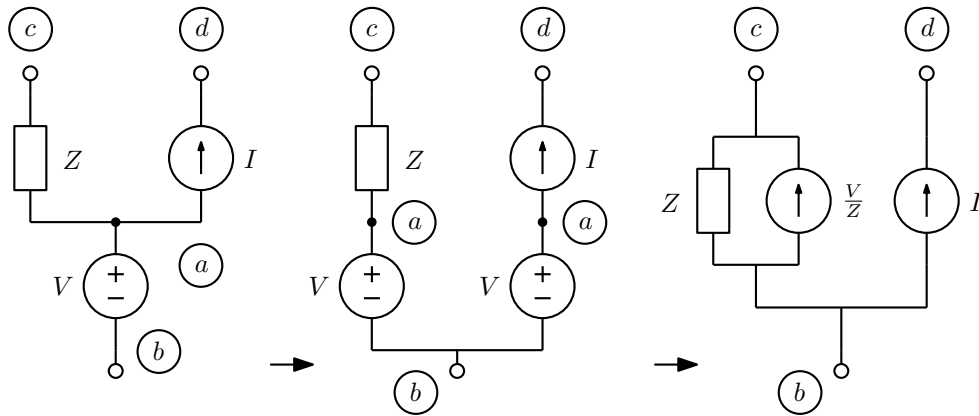


Figura 1.33: Deslocamento de fonte de tensão.

as contém. Como cada deslocamento elimina um nó do circuito, o máximo número de fontes de tensão em um circuito é igual ao número de nós, exceto o nó de terra. Estes deslocamentos não afetam as correntes nos ramos.

Variáveis de corrente controladoras de fontes controladas também podem ser deslocadas, usando-se as mesmas regras. Uma corrente controladora isolada em um ramo, um curto-circuito, que não pode existir na análise nodal normal, pode ser deslocada como se desloca uma fonte de tensão. O deslocamento é feito até que seja possível exprimir o valor do controle em termos das variáveis do sistema, as tensões nodais.

Estas operações reduzem o tamanho do sistema a ser resolvido, mas são de complicada implementação em um programa de análise de circuitos. E no caso de existirem fontes controladas, podem requerer a solução de um sistema de equações apenas para a montagem do sistema nodal, em circuitos com várias fontes controladas deslocadas umas para os ramos controladores das outras. Em geral é o melhor processo para uma análise manual de um circuito, especialmente se os deslocamentos são simples. Deslocamentos são menos úteis em circuitos não lineares, pois neles não existe diretamente o equivalente Norton.

Deslocamentos na direção do nó de terra deslocam as fontes na direção do terminal de terra também. Isto faz com que todas as tensões nodais fiquem acrescidas do valor da fonte deslocada.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.34. Ele tem duas fontes de tensão e um curto-circuito que devem ser deslocados. Os deslocamentos vão alterar as tensões de controle v_1 e v_2 .

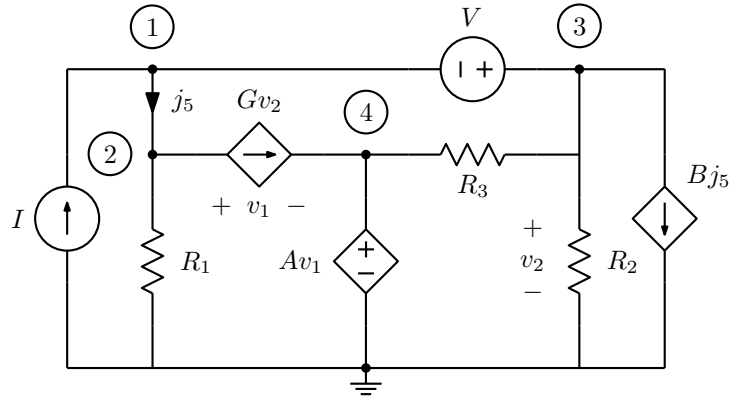


Figura 1.34: Exemplo onde vários deslocamentos que interagem são necessários.

A fonte V pode ser deslocada na direção do nó 3, ficando em série com os resistores R_3 e R_2 , e desaparecendo em série com a fonte Bj_5 . A fonte Av_1 pode ser deslocada na direção do nó 4, ficando em série com R_3 e desaparecendo em série com a fonte Gv_2 . Há aí uma dificuldade, pois a fonte Gv_2 passa a ficar ligada entre o nó 2 e a terra, e a tensão de controle v_1 não é mais tensão sobre ela, e deve ser calculada em função de e_2 , ou melhor, de e_1 :

$$\begin{aligned} v_1 &= e_2 - e_4 = e_2 - Av_1 \\ v_1 &= \frac{e_2}{1+A} = \frac{e_1}{1+A} \end{aligned}$$

A corrente j_5 pode ser calculada deslocando o curto-circuito na direção do nó 2. Fica em função de $e_2 = e_1$ e v_2 , mas $v_2 = e_3$ desaparece no deslocamento da fonte V e tem que ser obtida a partir de e_1 e V . v_2 também é necessária para controlar a fonte Gv_2 :

$$\begin{aligned} v_2 &= e_1 + V \\ j_5 &= \frac{e_2}{R_1} + Gv_2 = \frac{e_1}{R_1} + G(e_1 + V) \end{aligned}$$

Resulta o modelo da figura 1.35, antes dos equivalentes Norton, e sem decompor as fontes controladas em controladas e independentes. Os três deslocamentos eliminam três nós:

Resta uma só equação nodal, que calcula e_1 :

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + G - \frac{A}{R_3(1+A)} + B \left(\frac{1}{R_1} + G \right) \right] e_1 = \left[I - GV - \frac{V}{R_3} - \frac{V}{R_2} - BGV \right]$$

As outras tensões nodais podem ser calculadas em função de e_1 , observando-se o circuito original:

$$\begin{aligned} e_2 &= e_1 \\ e_3 &= e_1 + V \\ e_4 &= \frac{A}{1+A} e_1 \end{aligned}$$

O deslocamento de fontes pode ser aplicado também ao deslocamento de outros elementos. Um resistor, por exemplo, pode ser modelado como um transresistor em série com um curto-circuito (figura 1.36).

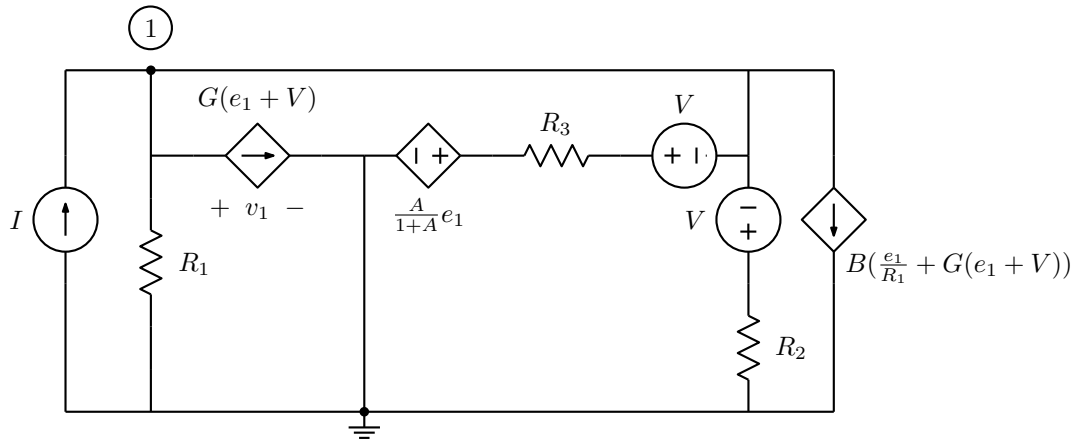


Figura 1.35: Deslocamentos e identificação das variáveis controladoras feitos.

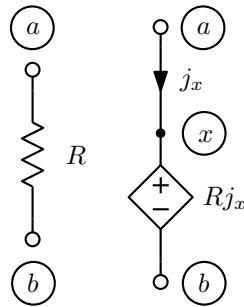


Figura 1.36: Equivalente deslocável de um resistor.

O transresistor pode então ser deslocado em direção ao nó b , e o curto-circuito deslocado na direção do nó a . A operação deixa apenas o nó x , e é equivalente a eliminar a tensão do nó b do sistema de equações. Normalmente não é muito útil essa operação, mas é um recurso.

Um exemplo com análise no estado permanente senoidal é mostrado na figura 1.37.

A matriz de indutâncias recíprocas do transformador é:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \therefore [\Gamma] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Deslocando a fonte de tensão na direção do indutor ela afeta o controle do transcondutor. Modelando o transformador e usando fasores resulta o modelo da figura 1.38.

O sistema nodal é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j2} + \frac{4}{j6} & -\frac{1}{j6} \\ -\frac{1}{j6} - 2 & \frac{1}{j6} + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j2) \\ E_2(j2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{j2} \\ -20 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} -j\frac{7}{6} & j\frac{1}{6} \\ j\frac{1}{6} - 2 & j\frac{23}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j2) \\ E_2(j2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j5 \\ -20 \end{bmatrix}$$

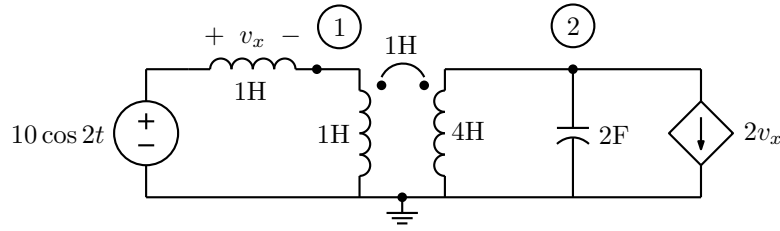


Figura 1.37: Circuito que requer deslocamentos para análise no estado permanente senoidal.

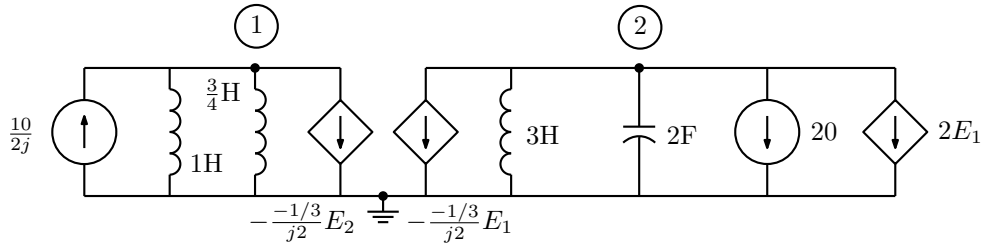


Figura 1.38: Modelo com deslocamentos feitos.

Resolvendo:

$$E_1(j2) = \frac{\frac{115}{6} + j\frac{10}{3}}{\frac{9}{2} + j\frac{1}{3}} = \frac{3145}{733} + j\frac{310}{733} = 4.29 + j0.423$$

$$E_2(j2) = \frac{-\frac{5}{6} + j\frac{40}{3}}{\frac{9}{2} + j\frac{1}{3}} = \frac{25}{733} + j\frac{2170}{733} = 0.0341 + j2.96$$

Voltando para o domínio do tempo:

$$e_1(t) = 4.29 \cos 2t - 0.423 \sin 2t$$

$$e_2(t) = 0.0341 \cos 2t - 2.96 \sin 2t$$

Observe-se que esse circuito é instável, devido ao valor da transcondutância, o que esta análise não revela. Superposta a esta resposta existem termos que crescem exponencialmente com o tempo.

1.7 Análise nodal modificada

Os elementos básicos de interesse que a análise nodal não admite são a fonte independente de tensão, a fonte de tensão controlada a tensão (amplificador de tensão), a fonte de corrente controlada a corrente (amplificador de corrente) e a fonte de tensão controlada a corrente (transresistor). Pode-se incluir também o amplificador operacional ideal, e resistores com controle por corrente. É também conveniente tratar o indutor e os transformadores usando controle por corrente, no caso das análises no estado permanente senoidal e em transformada de Laplace.

A técnica da “análise nodal modificada” [22] permite o tratamento de fontes de tensão e outros elementos que a análise nodal não admite diretamente sem alterações no circuito. O custo é um sistema de equações maior. Há duas interpretações possíveis para o que é feito, descritas a seguir:

Na primeira interpretação, que é a clássica, a modificação consiste em introduzir como variáveis as correntes nas fontes de tensão, e, em geral, outras correntes que se tenha interesse em calcular. Para cada

corrente acrescentada, uma nova equação deve ser também adicionada ao sistema. Essas equações são as equações dos ramos onde passam as correntes, na forma com controle por corrente.

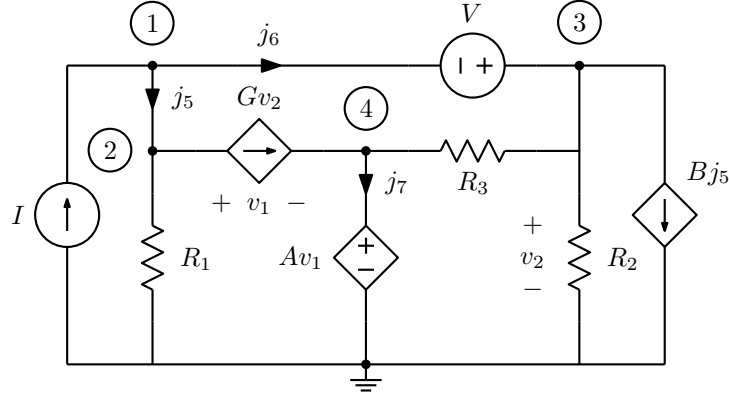


Figura 1.39: Circuito para análise nodal modificada.

Exemplo: Seja o mesmo circuito anterior, na figura 1.39. As equações nodais modificadas, escritas por extenso são:

- 1) $j_5 + j_6 = I$
- 2) $g_1 e_2 + G e_3 - j_5 = 0$
- 3) $g_2 e_3 + g_3 (e_3 - e_4) + B j_5 - j_6 = 0$
- 4) $g_3 (e_4 - e_3) - G e_3 + j_7 = 0$
- 5) $e_1 - e_2 = 0$
- 6) $e_3 - e_1 = V$
- 7) $A(e_2 - e_4) - e_4 = 0$

As primeiras quatro equações são as equações dos nós, com as correntes nos ramos com fontes de tensão acrescentadas. As últimas três são as equações dos ramos onde passam as três correntes acrescentadas. Colocando em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & g_1 & G & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 + g_3 & -g_3 & B & -1 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 - G & g_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -A - 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é muito maior que o obtido por deslocamentos, mas cada elemento é tratado sem informação sobre os demais, e nenhuma transformação é necessária.

1.7.1 Interpretação como uso de modelos

Na segunda interpretação, os elementos especiais são modelados usando fontes de corrente e transdutores. Usando modelos adequados, onde nós internos são acrescentados e os transdutores arrumados

de forma a que as tensões nos novos nós sejam numericamente idênticas às correntes nas fontes de tensão, as equações resultantes são equivalentes às obtidas pelo processo clássico. Esses modelos são mostrados na figura 1.40, para a fonte de tensão, o amplificador de tensão, o amplificador de corrente e o transresistor, de cima para baixo.

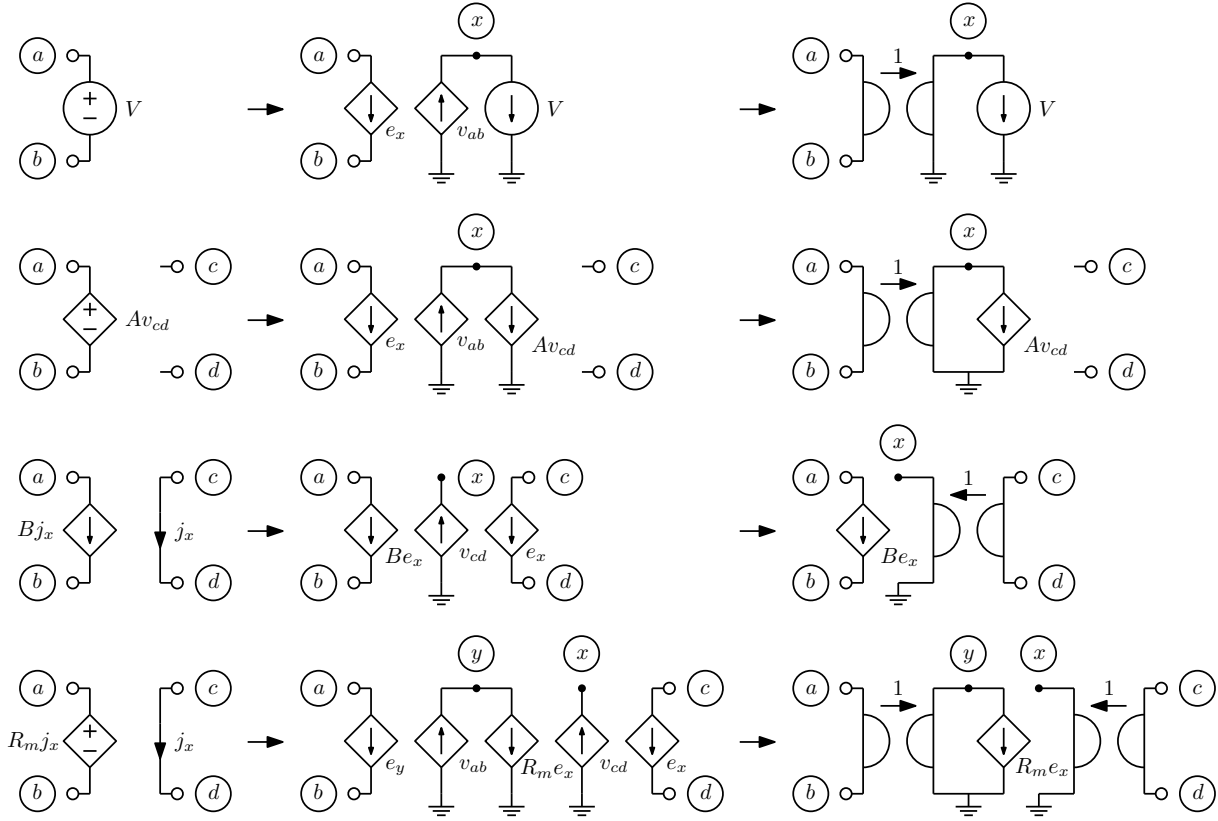


Figura 1.40: Modelos nodais para elementos com controle por corrente.

Estes modelos²⁶ sempre usam pares de transdutores configurados como giradores, para transformar elementos em suas formas duais. Para a fonte de tensão, tanto a independente como a controlada, a tensão no nó extra x equivale à corrente na fonte j_x . Para o amplificador de corrente equivale à corrente no curto-circuito de entrada (ou fonte de tensão de valor 0), j_x , e no transresistor as tensões nos dois nós internos x e y correspondem às correntes nos ramos de entrada (j_x) e saída (j_y). Estes modelos correspondem a estampas, que podem ser usadas com as estampas dos elementos básicos²⁷:

$$\text{Fonte de tensão: } \begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

²⁶Notar que o aterramento indicado nos modelos poderia ser feito em qualquer ponto do circuito, pois a solução coloca corrente nula fluindo para aquele nó. O nó de terra é apenas mais conveniente.

²⁷Nestas estampas, daqui por diante, as colunas das matrizes não são mais indicadas. Ficam associadas ao vetor de variáveis.

$$\text{Amp. de tensão:} \quad \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & +A & -A & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Amp. de corrente:} \quad \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Transresistor:} \quad \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & +R_m & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_x \\ j_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Note que nas equações dos nós extra, o preenchimento de mais colunas corresponde ao acréscimo de fontes de tensão controladas a tensão (no quadrante inferior esquerdo), resistores e transresistores (no quadrante inferior direito) e fonte de tensão (no vetor \vec{i}_n), todos em série com o ramo. Nos modelos estes elementos aparecem em forma dual, junto do circuito dualizado pelos giradores. O caso do resistor é particularmente útil, já que a resistência pode valer zero. A estampa do resistor controlado a corrente é então:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & +R \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

As equações dos ramos de fontes de tensão ficam com sinais invertidos em relação ao que foi feito na outra interpretação com o uso desses modelos, o que não faz diferença no resultado. Pode-se então adotar esta convenção de polaridade sempre, forçando que elementos no segundo segmento das equações dos ramos, representando resistências em série nos ramos, sejam sempre positivos. A forma sem inversões é obtida se os ramos aterrados dos giradores são aterrados no outro terminal.

Exemplo:

Seja o mesmo circuito anterior, mas com uma resistência no ramo onde passa j_5 (figura 1.41). O ramo de entrada do amplificador de corrente agora tem uma resistência, e a equação 5 se torna:

$$5) -e_1 + e_2 + R_4 j_5 = 0$$

Usando as estampas acima, resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & g_1 & G & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 + g_3 & -g_3 & B & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_3 - G & g_3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -A - 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V \\ 0 \end{bmatrix}$$

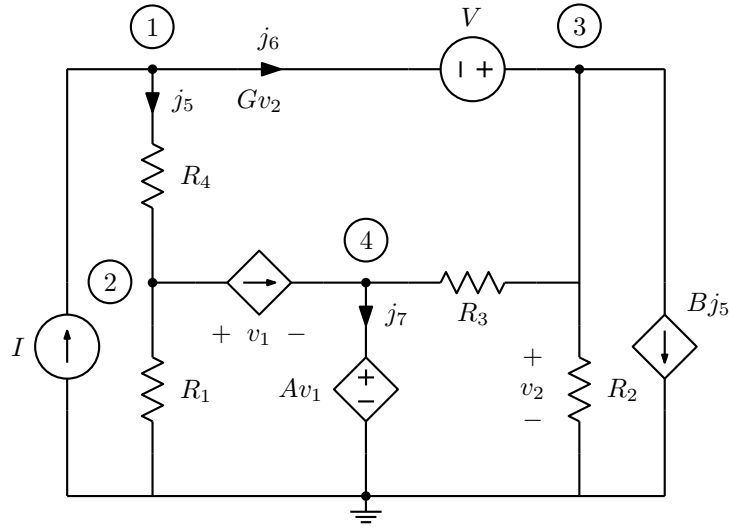


Figura 1.41: Circuito para análise nodal modificada, com um resistor controlado a corrente (R_4).

1.7.2 Indutores

A análise nodal modificada é conveniente para análise de circuitos contendo indutores, com o cálculo das correntes neles. Se pode também estender uma análise no estado permanente senoidal ao caso de frequência zero e a análise em transformada de Laplace ao caso de indutância nula.

A estampa para análise no estado permanente senoidal é uma extensão do caso do resistor controlado a corrente:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & +j\omega L \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ \hline J(j\omega) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right]$$

E para análise em transformada de Laplace é similar, com acréscimo do efeito da corrente inicial como fonte de tensão impulsional em série com o indutor:

$$v(t) = L \frac{dj}{dt} \Rightarrow V(s) = sLJ(s) - Lj(0)$$

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & +sL \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} E_a(s) \\ E_b(s) \\ \hline J(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ +Lj(0) \end{array} \right]$$

1.7.3 O transformador ideal

Um elemento importante que não admite tratamento direto na análise nodal pura é o transformador ideal. Ele é o que resulta de um transformador “real” quando o coeficiente de acoplamento é unitário e as indutâncias tendem ao infinito.

Seja o caso de duas bobinas. Um transformador “real” teria as equações:

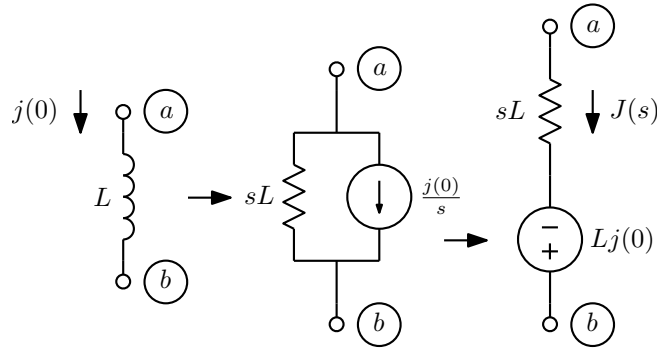


Figura 1.42: Indutor na análise nodal modificada em transformada de Laplace.

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dj_1}{dt} \\ \frac{dj_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Se $M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$, pode-se dividir uma equação pela outra, obtendo:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{L_1 \frac{dj_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dj_2}{dt}}{\sqrt{L_1 L_2} \frac{dj_1}{dt} + L_2 \frac{dj_2}{dt}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}$$

onde se usa o fato das indutâncias serem proporcionais ao quadrado do número de espiras, para indutores de mesma geometria. Se as indutâncias tenderem a infinito, com derivadas das correntes finitas, a primeira equação se reduz a (a segunda também):

$$0 = L_1 \frac{dj_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dj_2}{dt} \therefore \frac{dj_2}{dt} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{1}{n}$$

Esta é a forma correta, onde as derivadas das correntes ficam associadas, mas ignorando possíveis componentes contínuas nas correntes se acha a relação mais comum de se encontrar:

$$\frac{j_1(t)}{j_2(t)} = -n$$

O transformador ideal pode então ser modelado com duas fontes controladas. Um amplificador de tensão e um amplificador de corrente (figura 1.43).

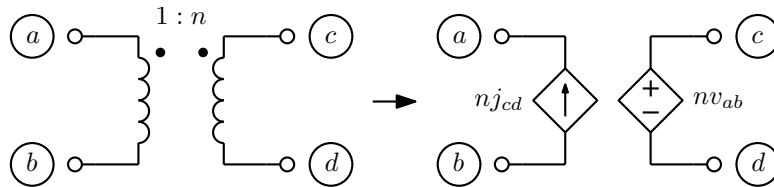


Figura 1.43: Transformador ideal.

Este modelo pode ser facilmente incluído na análise nodal modificada, com o cálculo da corrente j_{cd} , com a estampa:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ +n & -n & -1 & +1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Este modelo equivale a dois giradores em cascata (figura 1.44).

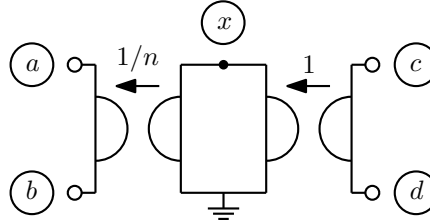


Figura 1.44: Transformador ideal modelado com giradores.

Para o caso de mais de duas bobinas, pode-se interligar vários transformadores de duas bobinas, ligando todas as bobinas de um lado em paralelo. Note-se que com este modelo é possível ligar uma fonte de corrente em paralelo com o ramo ab e/ou uma fonte de tensão em paralelo com o ramo cd , e isto não gera singularidade do sistema de equações (naturalmente, com ambos os lados do transformador aterrados ou referenciados a alguma tensão definida). Não é possível, entretanto, ligar duas fontes de tensão ou duas fontes de corrente aos dois lados. Resulta um sistema singular se isso for feito.

O transformador tem uma interessante e útil propriedade de conversão de níveis de impedância. Colocando-se um dos lados ligado a uma impedância Z , a impedância vista pelo outro lado é vista dividida pelo quadrado da relação de espiras, na forma mostrada na figura 1.45. Assim se pode obter circuitos equivalentes de circuitos contendo transformadores movendo impedâncias através do transformador.

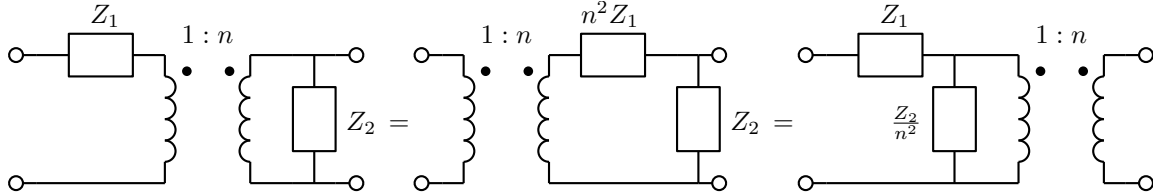


Figura 1.45: Conversão de impedância com transformador ideal.

1.7.4 O transformador real

Embora seja possível tratar o transformador real pela análise nodal básica, há alguns inconvenientes. O acoplamento não pode ser cerrado ($k = 1$), pois isto torna impossível inverter a matriz de indutâncias. Embora transformadores com acoplamento cerrado não existam na realidade, são um modelamento idealizado frequentemente utilizado. Também não é possível realizar análise em frequência zero na análise de estado permanente senoidal, ou zerar as indutâncias. O mesmo ocorre para indutores isolados. A análise nodal modificada permite analisar os indutores e transformadores, calculando as correntes neles, de forma a evitar estes inconvenientes.

As equações para um transformador com dois enrolamentos em transformada de Laplace, incluindo o efeito das correntes iniciais, são (aplicando a transformada diretamente às equações no tempo, usando a transformada da derivada):

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{ab}(0) \\ j_{cd}(0) \end{bmatrix}$$

Este sistema corresponde ao modelo da figura 1.46.

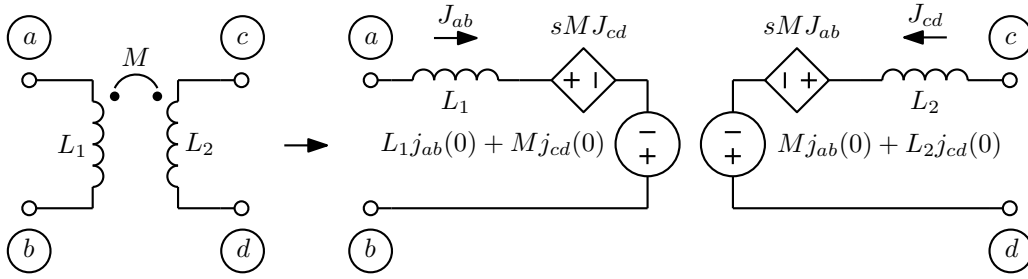


Figura 1.46: Transformador real em transformada de Laplace na análise nodal modificada.

A estampa correspondente é então da forma:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +sL_1 & +sM \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +sM & +sL_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \\ E_c(s) \\ E_d(s) \\ J_{ab}(s) \\ J_{cd}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +L_1j_{ab}(0) + Mj_{cd}(0) \\ +Mj_{ab}(0) + L_2j_{cd}(0) \end{bmatrix}$$

onde se pode notar que a estampa do acoplamento mútuo é separada das estampas dos dois indutores, o que é muito conveniente, pois se pode especificar acoplamentos entre os indutores independentemente, sem ter que recalculá-los na montagem do sistema.

Para análise no estado permanente senoidal, a estrutura é a mesma:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +j\omega L_1 & +j\omega M \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +j\omega M & +j\omega L_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ E_c(j\omega) \\ E_d(j\omega) \\ J_{ab}(j\omega) \\ J_{cd}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja analisar o circuito da bobina de Tesla da figura 1.25 usando análise nodal modificada, para o caso geral de indutância mútua. O modelo correspondente é o da figura 1.47, que tem duas tensões nodais e duas correntes a calcular (equivalente Norton para o capacitor primário usado no sistema):

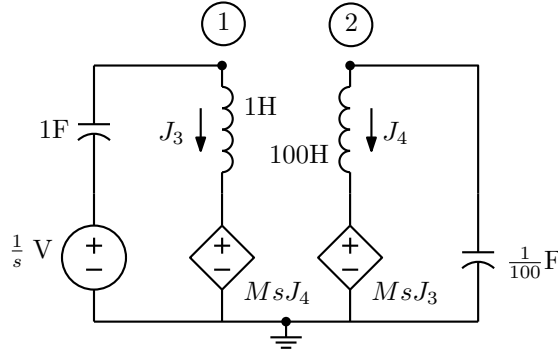


Figura 1.47: Modelo para uma bobina de Tesla usando análise nodal modificada.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & s & Ms \\ 0 & -1 & Ms & 100s \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \\ J_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É simples obter a solução pelo método de Cramer para 4 variáveis, obtendo-se resultado que se simplifica para o mesmo já visto pela análise nodal simples com uma multiplicação por $\frac{100}{100-M^2}$ dos polinômios, para $M = 6$ H:

Denominador, expandindo pela primeira coluna:

$$s \begin{vmatrix} \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ 0 & s & Ms \\ -1 & Ms & 100s \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ -1 & Ms & 100s \end{vmatrix} = s(s^3 + s - \frac{M^2}{100}s^3) - 1(-1 - s^2) = \frac{100 - M^2}{100}s^4 + 2s^2 + 1$$

Numerador para $E_1(s)$, expandindo pela primeira coluna:

$$1 \begin{vmatrix} \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ 0 & s & Ms \\ -1 & Ms & 100s \end{vmatrix} = 1(s^3 + s - \frac{M^2}{100}s^3) = \frac{100 - M^2}{100}s^3 + s$$

Numerador para $E_2(s)$, expandindo pela segunda coluna:

$$-1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & s & Ms \\ 0 & 6s & 100s \end{vmatrix} = -(-Ms) = Ms$$

Os quadrados das raízes do polinômio do denominador valem $-\frac{10}{10+M}$ e $-\frac{10}{10-M}$. Assim, e usando $M = k\sqrt{1 \times 100} = 10k$:

$$\begin{aligned}
E_1(s) &= \frac{\left(\frac{100-M^2}{100}\right)s^3 + s}{\left(\frac{100-M^2}{100}\right)\left(s^2 + \frac{10}{10+M}\right)\left(s^2 + \frac{10}{10-M}\right)} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{10}{10+M}} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{10}{10-M}} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{1}{1+k}} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{1}{1-k}} \\
E_2(s) &= \frac{Ms}{\left(\frac{100-M^2}{100}\right)\left(s^2 + \frac{10}{10+M}\right)\left(s^2 + \frac{10}{10-M}\right)} = \frac{5s}{s^2 + \frac{10}{10+M}} - \frac{5s}{s^2 + \frac{10}{10-M}} = \frac{5s}{s^2 + \frac{1}{1+k}} - \frac{5s}{s^2 + \frac{1}{1-k}} \\
e_1(t) &= \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{1}{1+k}}t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{1}{1-k}}t \\
e_2(t) &= 5 \cos \sqrt{\frac{1}{1+k}}t - 5 \cos \sqrt{\frac{1}{1-k}}t
\end{aligned}$$

Colocando a razão entre as duas frequências como b/a , vem a relação já mencionada para k , que é válida no caso geral também:

$$\frac{\frac{1}{1-k}}{\frac{1}{1+k}} = \frac{b^2}{a^2} \quad \therefore \quad k = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

A operação desejada ocorre exatamente quando as duas frequências estão em uma razão de números inteiros diferindo de 1. A figura 1.48 mostra o caso de razão 6:7, $k = \frac{13}{85} \approx 0.153$. A transferência completa de energia ocorre em $b/2 = 3.5$ ciclos, ou $7\pi \approx 22$ s.

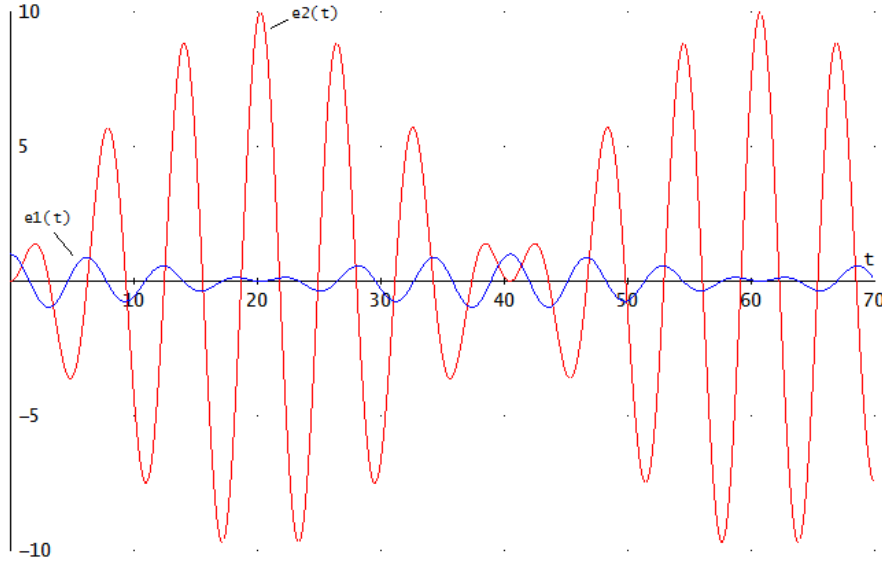


Figura 1.48: Formas de onda para uma bobina de Tesla no modo 6:7.

É possível obter um modelo para o transformador de dois enrolamentos com apenas uma corrente calculada. O modelo a usar é o da figura 1.49. É simples verificar que o modelo satisfaz as equações do transformador real. L_1 é a indutância vista no lado esquerdo quando o lado direito está em aberto. A indutância vista pelo lado direito com o lado esquerdo em curto-circuito vale $\frac{1}{\Gamma_{22}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1} = L_2(1 - k^2)$. O ganho de tensão da esquerda para a direita vale $\frac{M}{L_1} = k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$. De um lado aparece a “indutância de

magnetização”, que é a própria L_1 . Do outro lado aparece uma “indutância de dispersão” proporcional a L_2 e que desaparece quando $k = 1$. O transformador ideal no centro tem a relação de espiras multiplicada por k .

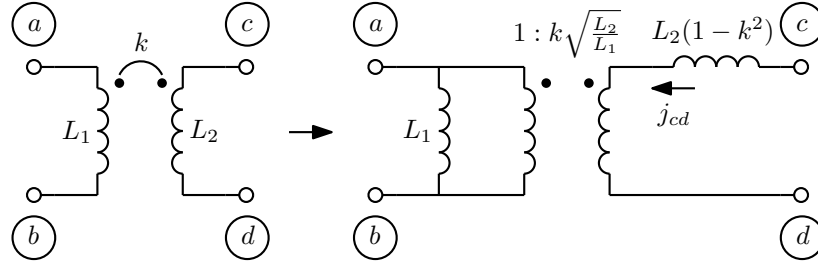


Figura 1.49: Transformador real modelado com um transformador ideal e indutâncias de magnetização e de dispersão.

A estampa que descreve este modelo é uma modificação da estampa do transformador ideal, no caso para análise no estado permanente senoidal. Para análise em transformada de Laplace, as condições iniciais seriam colocadas como na análise nodal normal para L_1 e como na análise nodal modificada para L_2 :

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} & \cdot & \cdot & -k\sqrt{L_2/L_1} & \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{j\omega L_1} & \cdot & \cdot & +k\sqrt{L_2/L_1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \\ \hline +k\sqrt{L_2/L_1} & -k\sqrt{L_2/L_1} & -1 & +1 & j\omega(1-k^2)L_2 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ E_c(j\omega) \\ E_d(j\omega) \\ J_{cd}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{1}{sL_1} & -\frac{1}{sL_1} & \cdot & \cdot & -k\sqrt{L_2/L_1} & \\ -\frac{1}{sL_1} & \frac{1}{sL_1} & \cdot & \cdot & +k\sqrt{L_2/L_1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \\ \hline +k\sqrt{L_2/L_1} & -k\sqrt{L_2/L_1} & -1 & +1 & s(1-k^2)L_2 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \\ E_c(s) \\ E_d(s) \\ J_{cd}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ +\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ \cdot \\ \cdot \\ +Mj_{ab}(0) + L_2j_{cd}(0) \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 1.50 para calcular a corrente no indutor e a tensão no capacitor, com condições iniciais nulas. Usando o modelo da figura 1.43 com o transformador invertido, pode-se usar uma análise nodal modificada aproveitando que a corrente é a mesma nos três ramos do lado esquerdo:

$$\left[\begin{array}{c|c} sC & -\frac{1}{n} \\ \hline -\frac{1}{n} & sL \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V}{s} \end{bmatrix}$$

A solução é facilmente obtida pelo método de Cramer:

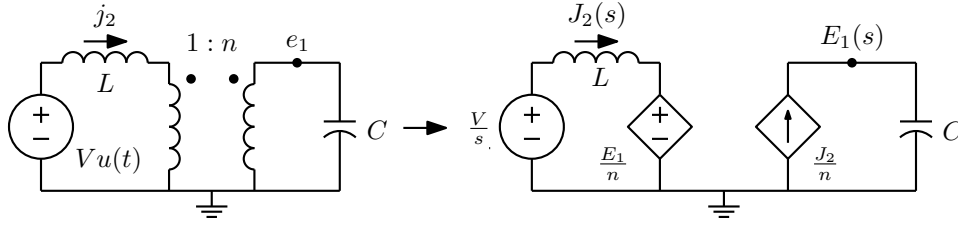


Figura 1.50: Circuito com transformador ideal.

$$\begin{aligned}
 E_1(s) &= \frac{\frac{V}{ns}}{s^2 LC + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{V}{nLC}}{s(s^2 + \frac{1}{n^2 LC})} = nV \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{n^2 LC}} \right) \\
 e_1(t) &= nV \left(1 - \cos \frac{1}{n\sqrt{LC}} t \right) \\
 J_2(s) &= \frac{CV}{s^2 LC + \frac{1}{n^2}} = \frac{nV \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{n\sqrt{LC}}}{s^2 + \frac{1}{n^2 LC}} \\
 j_2(t) &= nV \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{1}{n\sqrt{LC}} t
 \end{aligned}$$

Estes valores correspondem ao que se obtém da análise de um circuito LC série ligado à fonte de tensão, com o capacitor transportado para o lado esquerdo do transformador ideal, com sua impedância dividida por n^2 , e com e_1 sendo a tensão neste capacitor multiplicada por n . Observe-se os resultados irrealísticos, na corrente senoidal no indutor e na tensão com nível contínuo no capacitor. Uma análise com transformador real resulta, adicionalmente, em uma rampa somada a j_2 . A tensão e_1 continua tendo uma componente contínua devida à indutância mútua e à corrente j_2 crescendo continuamente.

Um outro modelo para transformador, no caso em que existe um terminal comum entre os indutores acoplados, é o da figura 1.51. O modelo tem três indutores não acoplados e um nó extra²⁸. Este modelo é útil para verificação de modelos para transformador, e para a obtenção de circuitos equivalentes. Por exemplo, um auto-transformador pode ser convertido em um transformador com dois indutores na forma mostrada na figura 1.52.

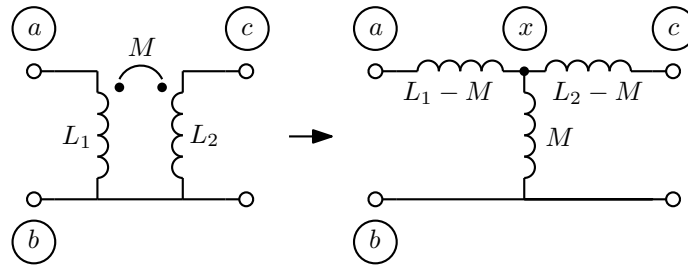


Figura 1.51: Modelo “T” para um transformador com terminal comum entre os indutores.

²⁸é possível eliminar o nó extra com uma transformação Δ -estrela, obtendo-se um modelo “ π ”. Também é possível inserir um transformador ideal na rede, eliminando o nó comum.

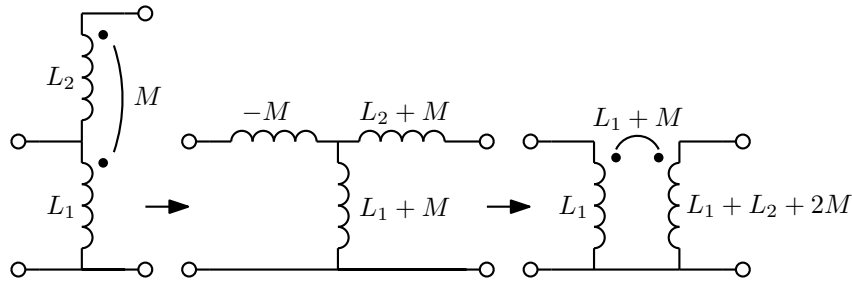


Figura 1.52: Usando o modelo “T” para obter um equivalente de um autotransformador.

1.7.5 O amplificador operacional ideal

O amplificador operacional ideal é um elemento que pode ser considerado um limite de qualquer das quatro fontes controladas, quando o fator de ganho se torna infinito. Considerando que ele é sempre usado com realimentação negativa, e a tensão e corrente da saída são finitas, a tensão e a corrente de entrada são muito baixas, idealmente nulas. O modelo para o amplificador operacional é um par de dois elementos especiais chamados “nullator” e “norator” (figura 1.53). O “nullator” tem tensão nula e corrente nula. O “norator” tem tensão e corrente indeterminadas. Estes elementos são necessariamente usados aos pares, e nessa condição é possível resolver o circuito. A solução somente é correta se o circuito estiver operando com realimentação negativa. Caso a realimentação seja positiva, o ponto de equilíbrio encontrado é instável. Se não existir realimentação, não é possível resolver o circuito.

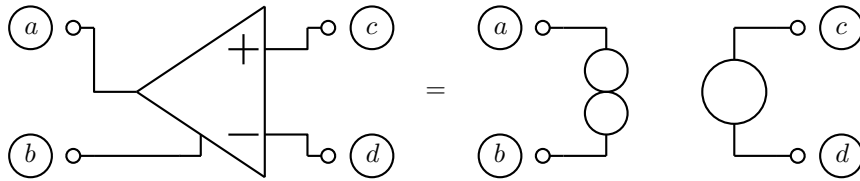


Figura 1.53: Modelo “nullator-norator” para o amplificador operacional ideal.

$$\begin{aligned} v_{ab} &=? & j_{ab} &=? \\ v_{cd} &=0 & j_{cd} &=0 \end{aligned}$$

Em circuitos normais, o nó b é a terra, já que amplificadores operacionais com saída suspensa não são usuais. Mas o modelo admite saída suspensa, e pode ser usado em modelamento de outros dispositivos. A resolução de circuitos com amplificador operacional pode ser feita assumindo-se as condições $e_c = e_d$ e $j_{cd} = 0$. Na análise nodal modificada, isto pode ser feito acrescentando-se como variável a corrente de saída do amplificador, j_{ab} , e introduzindo-se a equação do ramo de entrada, $e_c = e_d$. Há um modelo e uma estampa correspondentes a isso, mostrado na figura 1.54. É uma cascata de dois transcondutores.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_{ab} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right]$$

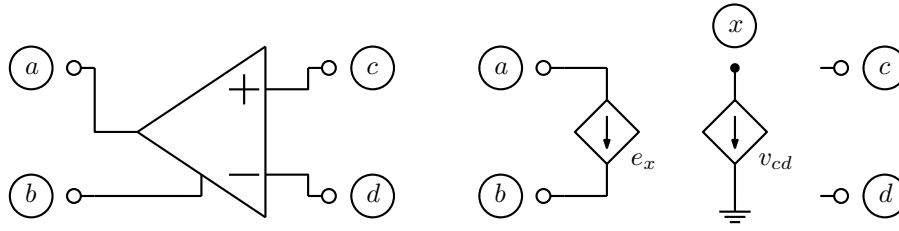


Figura 1.54: Modelo com transcondutores para o amplificador operacional ideal. $e_x = j_{ab}$.

O par ± 1 nas equações a e b é a estampa do “norator”. O par ± 1 na equação x é a estampa do “nullator”. Note-se que se na estampa do amplificador de tensão a equação do ramo de saída é dividida por A e se faz $A = \infty$ a estampa se reduz a esta. Operações nas estampas das demais fontes controladas podem também ser feitas com o mesmo resultado. O modelo e a estampa mostram fatos curiosos: Como não há conexão entre os ramos de entrada e de saída, em um circuito com vários amplificadores operacionais é possível permutar as saídas e as entradas deles, mantendo a mesma solução para o circuito. Nada é dito também sobre a polaridade da entrada ou da saída. Para que as soluções obtidas com essas variações que podem ser obtidas com essas propriedades sejam válidas, é necessário que a realimentação seja negativa em todos os amplificadores. Do contrário a solução obtida é uma situação de equilíbrio instável do circuito.

1.7.5.1 O “fixator”²⁹

O modelo “nullator-norator” força tensão e corrente nulas sobre o “nullator”. Uma versão generalizada do “nullator” é o “fixator” [10], um ramo com corrente e tensão especificadas:

$$v = v_f; \quad j = j_f$$

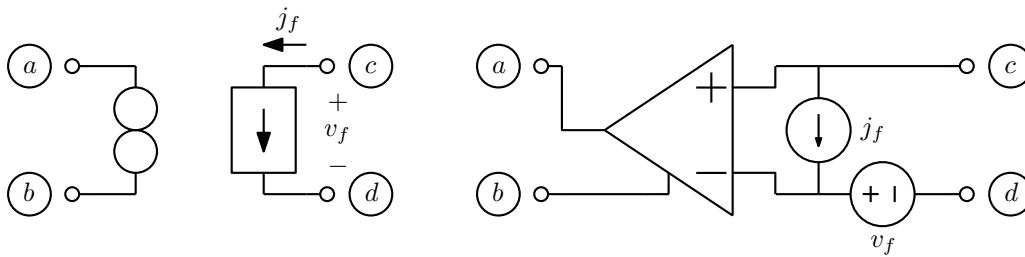


Figura 1.55: Par “fixator-norator” e seu modelo com amplificador operacional ideal.

Este elemento deve ser tratado da mesma forma que o “nullator”, sempre acompanhado de um “norator” em algum ponto do circuito. A estampa do par “fixator-norator” é similar à do amplificador operacional ideal:

²⁹Material opcional

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -j_f \\ +j_f \\ +v_f \end{bmatrix}$$

Um exemplo de aplicação do “fixador” é em um modelo para um transistor bipolar ideal em um circuito realimentado. O modelo tem um “fixador” com $v_j = 0.6$ V e $j_f = 0$ A entre base e emissor e um “norator” entre coletor e emissor.

Exemplo: Seja o amplificador realimentado da figura 1.56. Ignorando as correntes de base dos transistores, considerando tensões v_{be} fixas de 0.6 V, e considerando alto ganho de corrente h_{fe} nos transistores, resulta o modelo mostrado.

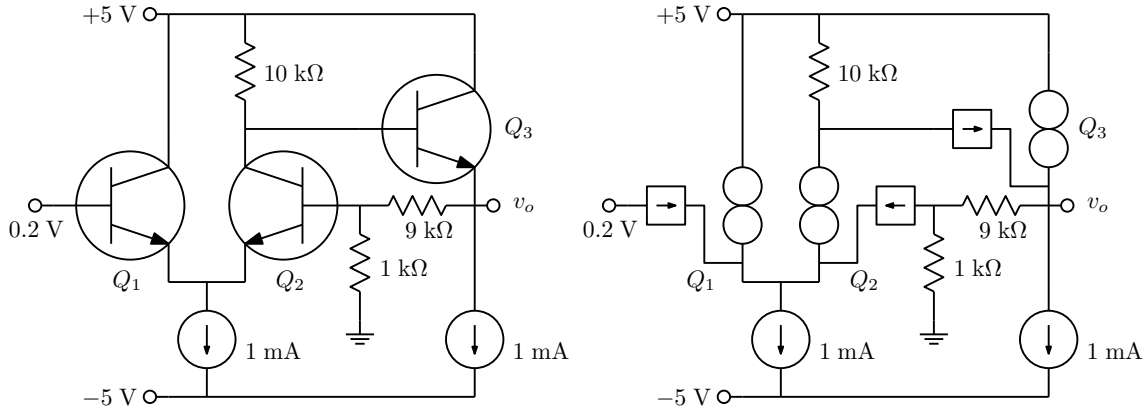


Figura 1.56: Amplificador realimentado e seu modelo com “fixators”, todos com $v_f = 0.6$ V e corrente nula.

Basta inspecionar o circuito para determinar as tensões nodais e as correntes nos transistores, todas determinadas pelas condições sobre os “fixators”. Resulta $v_o = 2$ V, pois há 0.2 V na base de Q_2 , $i_c(Q_3) = 1 + 2/10 = 1.2$ mA, $i_c(Q_2) = (5 - 2 - 0.6)/10 = 0.24$ mA, e $i_c(Q_1) = 1 - 0.24 = 0.76$ mA.

Exemplo: O “fixador” também pode ser usado para calcular valores necessários para componentes para que condições sejam satisfeitas. Seja o circuito da figura 1.57. Deseja-se encontrar quanto tem que valer R_x para que a tensão sobre $R_y = 1$ Ω seja de 1 V. Colocando um “fixador” com 1 V e 1 A no lugar de R_y e um “norator” no lugar de R_x , a solução do circuito dá a tensão e a corrente sobre o “norator” como v_x e j_x . R_x vale então $R_x = \frac{v_x}{j_x}$. Para os valores da figura, resulta $v_x = 2$ V, $j_x = 0.5$ A, e então $R_x = 4$ Ω. O sistema resolvido foi:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ j_v \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No exemplo, se forem forçados valores de tensão entre 6/7 V e 1.5 V resultam valores positivos de R_x . Valores maiores que 1.5 V levam a R_x negativo entre 0 Ω e $-8/7$ Ω. Valores menores que 6/7 V levam a valores negativos menores que $-8/7$ Ω.

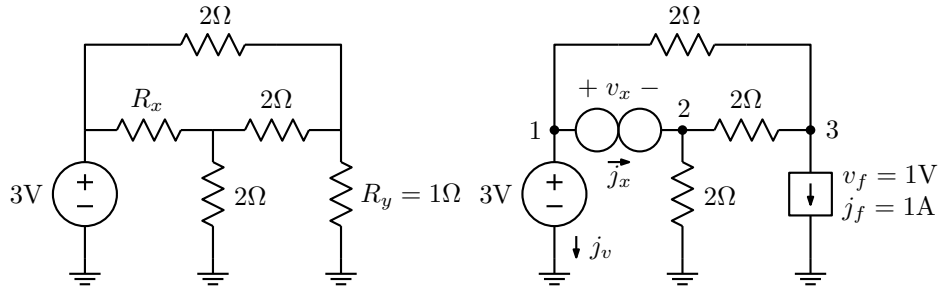


Figura 1.57: “Fixator” usado para calcular o valor de R_y para 1 V sobre R_y .

1.7.6 Tratamento simplificado do amplificador operacional

É possível eliminar os amplificadores operacionais do sistema de equações de forma bem simples: Se as equações dos nós de saída forem somadas, a corrente de saída é eliminada do sistema. Se as colunas c e d da matriz de condutância dos nós forem somadas, isto equivale a dizer que $e_c = e_d$. Estas operações podem ser realizadas sobre o sistema montado ignorando-se o amplificador, ou podem ser mapeadas em dois vetores, que indicam onde vão ficar as linhas e colunas do sistema de equações correspondentes aos nós do circuito, vetores estes montados com um simples préprocessamento. Uma “estampa” para o amplificador operacional tratado desta forma pode ser então:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

As chaves indicam linhas e colunas a somar, e variáveis que são reduzidas a uma só por serem iguais. As colunas em $[G_n]$ correspondem às variáveis em \vec{e} . Se uma das linhas ou colunas for a do nó de terra, 0, simplesmente elimina-se a outra.

O préprocessamento a fazer consiste em:

- Preparar dois vetores \vec{L} e \vec{C} tais que $L_i = i$ e $C_i = i$, $i = 0..n$. n é o número de nós, não contando o de terra.
- Ler da descrição do circuito os amplificadores operacionais. Ordenar os nós de saída a e b e de entrada c e d , de forma a ter $b > a$ e $d > c$. Naturalmente, é proibido ter $a = b$ ou $c = d$.
- Realizar o processamento, para cada amplificador operacional, após lembrar $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ e $d_0 = d$:

Para i variando de 0 a n :

Se $L_i = b_0$, $L_i \leftarrow a_0$

Se $L_i > b_0$, $L_i \leftarrow L_i - 1$

Se $C_i = d_0$, $C_i \leftarrow c_0$

Se $C_i > d_0$, $C_i \leftarrow C_i - 1$

Após o processamento de todos os amplificadores, o sistema é então montado por estampas normalmente, sendo que a estampa que iria para $[G_n]_{xy}$ passa a ir para $[G_n]_{L_x C_y}$, e a estampa que iria para i_{sx} passa a ir para i_{sL_x} . Isto gera diretamente o sistema com todas as somas feitas. O sistema é então resolvido com n —número de amp. ops. equações, e as tensões nos nós originais são encontradas como $e_i = e_{C_i}$.

Exemplo: Seja achar a impedância de entrada do circuito da figura 1.58 em transformada de Laplace:

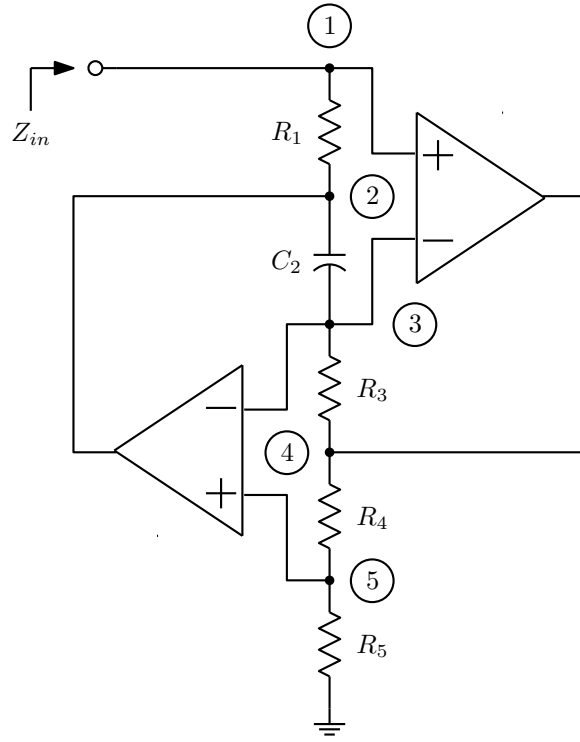


Figura 1.58: Indutor simulado com amp. ops.

Colocando uma fonte de corrente I entre a terra e o nó 1, $Z_{in}(s) = E_1(s)/I$. O sistema sem os amplificadores é:

$$\begin{array}{l} \leftarrow \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_1 + sC_2 & -sC_2 & 0 & 0 \\ 0 & -sC_2 & G_3 + sC_2 & -G_3 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ E_3(s) \\ E_4(s) \\ E_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

As setas e chaves indicam as operações a fazer: Eliminar as equações 2 e 4 (somar com a equação do nó de terra) e somar as colunas 1, 3 e 5. Resulta o sistema:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ G_3 + sC_2 & -sC_2 & -G_3 \\ G_4 + G_5 & 0 & -G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1,3,5}(s) \\ E_2(s) \\ E_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é facilmente obtida pelo método de Cramer:

$$Z_{in} = \frac{E_{1,3,5}(s)}{I} = \frac{sC_2 G_4}{sC_2 G_1 G_4 + (G_4 + G_5) G_1 G_3 - (G_3 + sC_2) G_1 G_4} = \frac{sC_2 G_4}{G_1 G_3 G_5} = \frac{sC_2 R_1 R_3 R_5}{R_4}$$

O circuito se comporta como um indutor aterrado. Note que este circuito possui dois amplificadores, e que, em princípio, as saídas deles podem ser trocadas entre si, com Z_{in} inalterada. As polaridades das entradas tem que ser ajustadas de acordo com o que seja ligado ao circuito para que a estabilidade seja

mantida, considerando que os amplificadores tem uma resposta em frequência não constante. Na forma mostrada, ele é sempre estável.

1.8 Análise nodal com modelos baseados em amp. operacionais

Considerando então que amplificadores operacionais são simples de se tratar e que reduzem o tamanho do sistema de equações, é interessante encontrar modelos para os elementos especiais na análise nodal usando amplificadores operacionais. Estes modelos são vistos na figura 1.59. Note a relação com os modelos desenvolvidos para a análise nodal modificada da figura 1.40 [23].

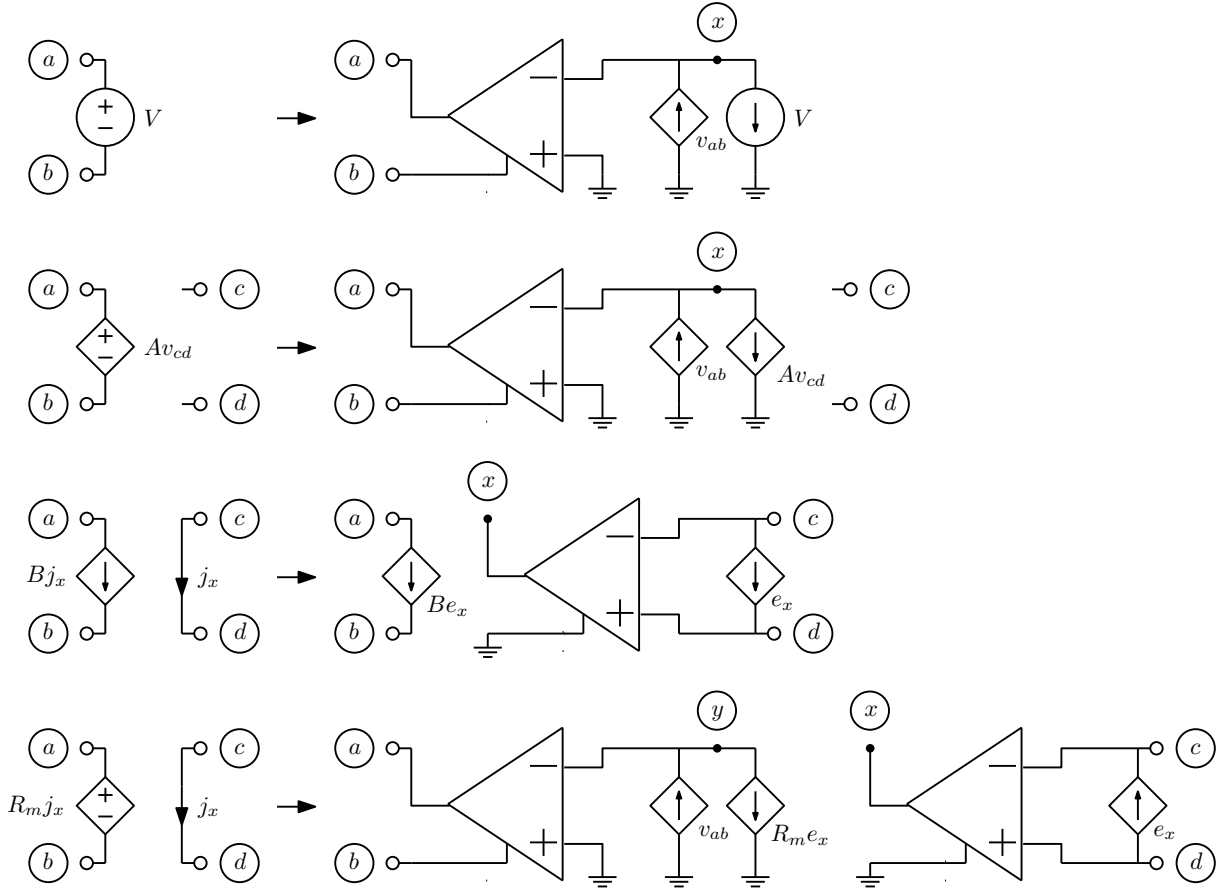


Figura 1.59: Modelos usando amplificadores operacionais.

Estampas correspondentes podem então ser obtidas. Nas estampas abaixo, apenas termos não nulos, e que não são eliminadas na compressão do sistema são mostrados. As colunas de $[G_n]$ correspondem às incógnitas. Por exemplo, no tratamento da fonte de tensão não é mostrada a coluna x , pois ela é eliminada quando se faz $e_x = 0$.

$$\text{Fonte de tensão: } \begin{cases} a \\ b \\ x \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Amp. de tensão: } & \begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & +A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \\ \\ \text{Amp. de corrente: } & \begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ \begin{cases} e_c \\ e_d \end{cases} \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \\ \\ \text{Transresistor: } & \begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & +R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ \begin{cases} e_c \\ e_d \end{cases} \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O modelo do transresistor pode ser simplificado, observando-se que o bloco de entrada do modelo do transresistor (e do amp. de corrente) já é um transresistor. O modelo da figura 1.60 pode ser usado se $R_m \neq 0$.

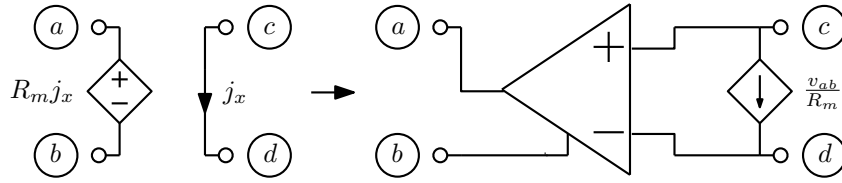


Figura 1.60: Modelo simplificado para o transresistor.

E sua estampa, que reduz o tamanho do sistema de equações em uma equação, é:

$$\begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +\frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_m} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{R_m} & +\frac{1}{R_m} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ \begin{cases} e_c \\ e_d \end{cases} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.61.

Analisado com análise nodal modificada normal, teriam que ser incluídas 5 correntes, e o sistema resultante seria:

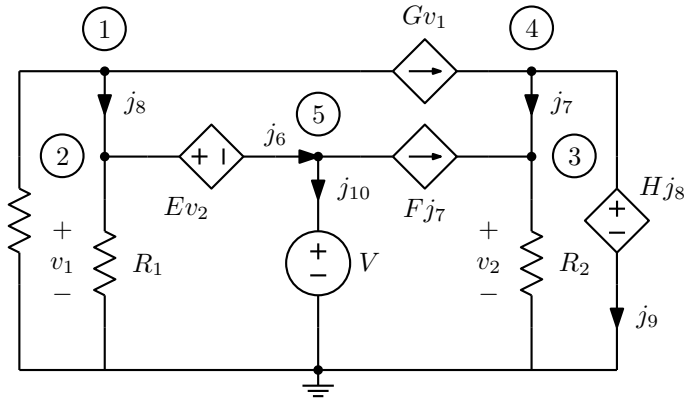


Figura 1.61: Circuito para análise com modelos com amp. operacional.

$$\begin{bmatrix} g_3 + G & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & g_1 & . & . & . & . & 1 & . & -1 & . \\ . & . & g_2 & . & . & . & . & -1 - F & . & . \\ -G & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & -1 & F & . & 1 \\ \hline . & -1 & E & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . \\ -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . & . & . & . & H & . \\ . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \\ j_9 \\ j_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ -V \end{bmatrix}$$

Usando a análise baseada em modelos com amplificador operacional, resulta o sistema, montado de acordo com as estampas acima, que já tem as eliminações triviais feitas:

$$\begin{matrix} e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ e_3 \\ \leftarrow e_4 \\ \leftarrow e_5 \\ j_6 \\ j_9 \\ j_{10} \end{matrix} \begin{bmatrix} g_3 + G & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & g_1 & . & . & . & . & . & -1 \\ . & . & g_2 & . & . & . & -1 - F & . \\ -G & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & F & . \\ \hline . & -1 & E & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . & . & H & . \\ . & . & . & . & -1 & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ -V \end{bmatrix}$$

O sistema final, após as três eliminações de equações e as duas condensações de variáveis indicadas, é:

$$\begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ j_6 \\ j_9 \\ j_{10} \end{matrix} \begin{bmatrix} g_3 + G & . & . & . & . & . & 1 \\ . & g_2 & . & . & . & . & -1 - F \\ \hline -1 & E & 1 & . & . & . & . \\ . & -1 & . & . & . & H & . \\ . & . & . & -1 & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_{3,4} \\ e_5 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ -V \end{bmatrix}$$

Este procedimento é um tanto complexo para uma análise manual, embora gere sistemas bem menores que a análise nodal modificada. É de simples implementação em um programa de computador, entretanto.

Exemplo: Em alguns casos o uso dos modelos com amplificador operacional facilita a análise manual. Considere-se o circuito da figura 1.62, que tem três nós e um transresistor. Uma análise nodal modificada gera 5 equações, com as três tensões nodais e as duas correntes nos ramos do transresistor como incógnitas. O deslocamento dos dois ramos do transresistor pode ser feito, mas é um tanto complicado. Seja então a análise feita modelando o transresistor na forma que reduz o tamanho do sistema.

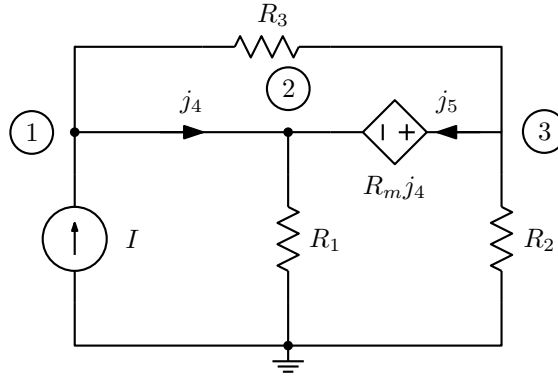


Figura 1.62: Circuito contendo um transresistor.

Substituindo o transresistor por um modelo com amplificador operacional, resulta o circuito da figura 1.63. O sistema nodal sem considerar o amplificador operacional é então:

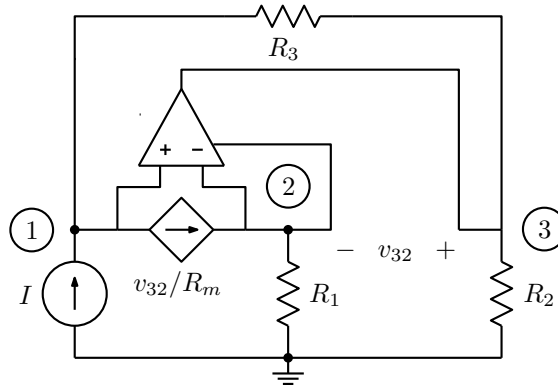


Figura 1.63: Transresistor modelado com amplificador operacional e transcondutor.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} \\ 0 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_m} \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O amplificador operacional soma as equações 2 e 3 e soma as colunas 1 e 2 da matriz do sistema, fazendo $e_1 = e_2$. Resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} \\ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é:

$$e_{1,2} = \frac{I \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_m} \right)}{\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_1 R_3} - \frac{1}{R_2 R_m} - \frac{1}{R_1 R_m}}$$

$$e_3 = \frac{-I \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} \right)}{\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_1 R_3} - \frac{1}{R_2 R_m} - \frac{1}{R_1 R_m}}$$

Com isto, já se tem como analisar qualquer circuito linear invariante no tempo³⁰. Resta a solução de circuitos contendo elementos não lineares, e métodos de análise transiente usando integração numérica no tempo, o que permitirá a análise de circuitos gerais não lineares e variantes no tempo.

³⁰E também circuitos não lineares e variantes no tempo com modelamento linear por partes.

1.9 Análise nodal de circuitos resistivos não lineares

Muitos dispositivos usados na eletrônica podem ser modelados como elementos não lineares, como diodos, transistores, etc. Os dois elementos básicos seriam o resistor não linear e o transcondutor não linear (figura 1.64).

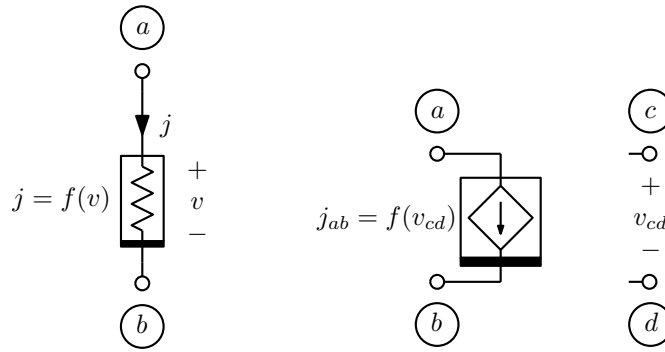


Figura 1.64: Resistor e transcondutor não lineares.

Um sistema nodal não linear pode ser escrito seguindo-se a mesma ideia de para cada nó do circuito se escrever uma equação:

$$\sum \text{correntes saindo do nó} = 0$$

Resulta um sistema de equações não lineares $\vec{F}(\vec{e}) = 0$, que não pode ser colocado em forma matricial. Em raros casos, é possível uma solução algébrica pelo procedimento usual de isolar uma incógnita em uma equação e substituir nas demais, passando a seguir para outra incógnita, até que reste apenas uma equação em uma incógnita. O problema é que estas substituições e a solução final podem envolver raízes múltiplas de equações, nem sempre solúveis analiticamente, tornando o procedimento muito complexo. Fica logo evidente que podem existir múltiplas soluções, e que as soluções podem ser complexas. Soluções complexas são não físicas. Se um circuito tiver apenas soluções complexas, ele na verdade é fisicamente impossível e insolúvel. Erros de modelamento podem levar a casos assim.

Exemplo: Seja o circuito não linear da figura 1.65. As equações nodais para ele tem a forma:

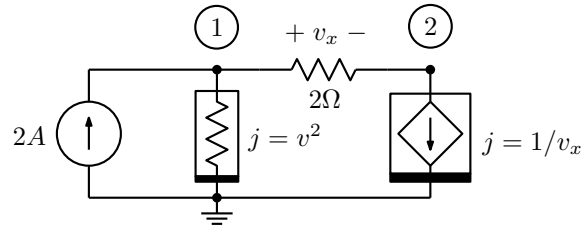


Figura 1.65: Circuito não linear resistivo.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{e_1 - e_2}{2} + e_1^2 = 2 \\ 2) \quad & \frac{e_2 - e_1}{2} + \frac{1}{e_1 - e_2} = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo:

$$-\frac{(e_1 - e_2)^2}{2} + 1 = 0 \therefore e_1 - e_2 = \pm\sqrt{2}$$

$$\frac{\pm\sqrt{2}}{2} + e_1^2 = 2 \therefore e_1 = \pm\sqrt{2 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad e_2 = e_1 \mp \sqrt{2} = \pm\sqrt{2 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}} \mp \sqrt{2}$$

São então quatro soluções reais, pois o sinal de $\mp\sqrt{2}$ é o mesmo para um mesmo par e_1 e e_2 . Os quatro pontos, juntamente com as duas curvas correspondentes às equações, que definem uma parábola e duas retas paralelas, são mostrados na figura 1.66.

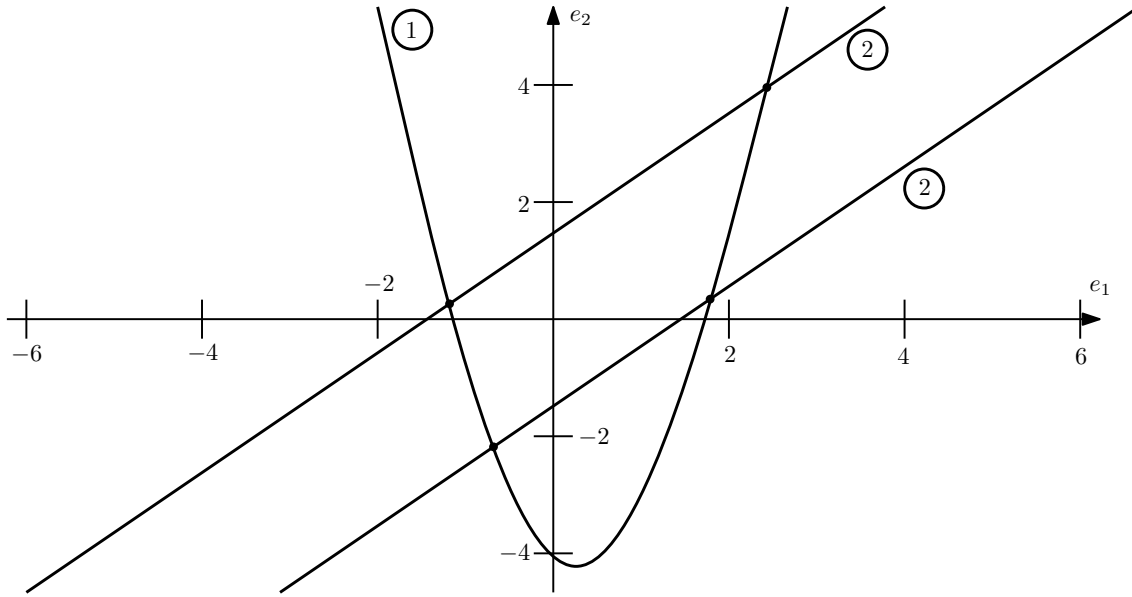


Figura 1.66: Curvas das duas equações e os quatro pontos de solução.

Um sistema não linear pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson, na versão multidimensional. Na versão unidimensional, o método de Newton-Raphson³¹ resolve a equação $f(x) = 0$ linearizando a equação em torno da aproximação atual da solução e achando uma nova solução considerando a curva linearizada (figura 1.67).

O processo é repetido até que $x_{n+1} \approx x_n$, dentro da tolerância requerida. Note que a nova solução é a solução da equação abaixo, o que corresponde a achar onde a reta que lineariza a função original passa por zero:

$$f(x_n) - f'(x_n)x_n + f'(x_n)x_{n+1} = 0$$

No caso multidimensional, esta equação toma a forma:

$$\vec{F}(\vec{x}_n) - \left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_n + \left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_{n+1} = 0$$

³¹O método também usualmente citado como “método de Newton”, foi descrito por Isaac Newton em 1669-1671 em problemas reacionados com polinômios, mas não na forma iterativa. A iteração foi introduzida por Joseph Raphson em 1690. Casos específicos do método, como o cálculo da raiz quadrada de y resolvendo $x^2 - y = 0$, o “método babilônico”, são conhecidos desde a antiguidade.

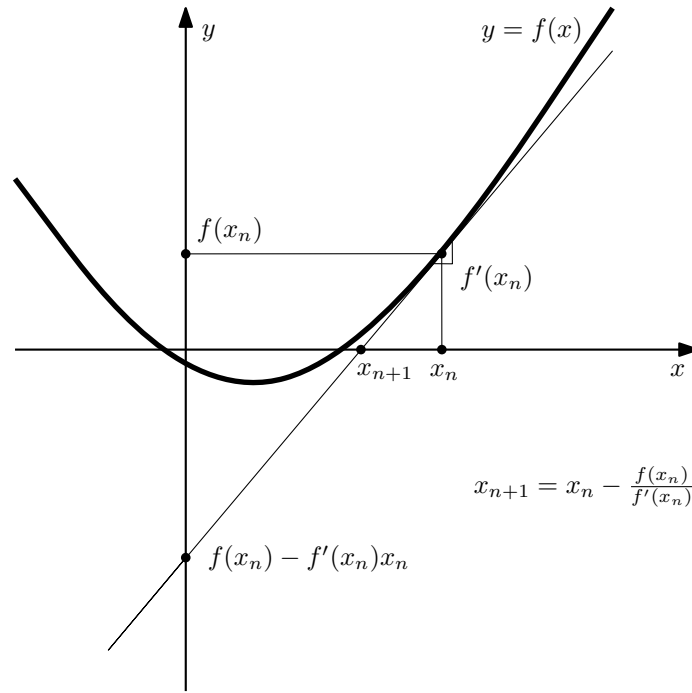


Figura 1.67: Método de Newton-Raphson unidimensional.

onde $\left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right]$ é “matriz Jacobiana”³² do sistema de equações não lineares, na aproximação atual:

$$\left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_n) \end{bmatrix}$$

Isto é um sistema de equações lineares para achar \vec{x}_{n+1} :

$$\left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_{n+1} = -\vec{F}(\vec{x}_n) + \left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_n$$

Este sistema tem a forma de um sistema nodal, onde os elementos não lineares são linearizados em torno da aproximação atual da solução \vec{x}_n . O sistema pode ser gerado como um sistema nodal para análise de um circuito resistivo linear, montado com os elementos modelados na forma linearizada. A solução do sistema é a próxima aproximação da solução \vec{x}_{n+1} .

1.9.1 Resistor não linear

Um resistor controlado a tensão com a curva $j = f(v)$, na versão linearizada se torna um resistor com $R = 1/G_0$ em paralelo com uma fonte de corrente I_0 , com a curva original tocando a reta $j = I_0 + G_0 v$, com as mesmas derivadas, no ponto $(v_n, f(v_n))$:

³²De Carl Gustav Jakob Jacobi, ~1841.

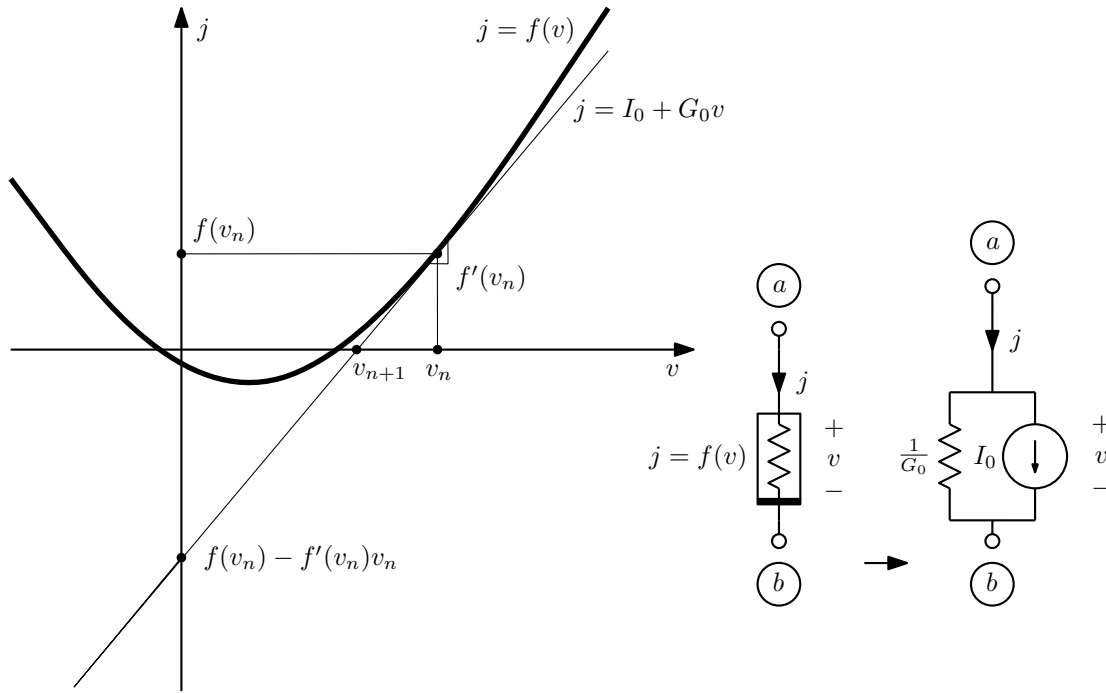


Figura 1.68: Linearização do resistor não linear.

$$\begin{aligned}
 j &= f(v) \approx f(v_n) - f'(v_n)v_n + f'(v_n)v = I_0 + G_0v \\
 G_0 &= f'(v_n) \\
 I_0 &= f(v_n) - G_0v_n
 \end{aligned}$$

1.9.2 Transcondutor não linear

Basta estender a mesma ideia do resistor não linear para o caso em que a tensão de controle v_{cd} está em outro ramo (figura 1.69).

$$\begin{aligned}
 j_{ab} &= f(v_{cd}) \approx f(v_{cd,n}) - f'(v_{cd,n})v_{cd,n} + f'(v_{cd,n})v_{cd} = I_0 + G_m v_{cd} \\
 G_m &= f'(v_{cd,n}) \\
 I_0 &= f(v_{cd,n}) - G_m v_{cd,n}
 \end{aligned}$$

Para outras fontes não lineares a linearização segue sempre a mesma regra. Uma fonte de tensão controlada a tensão é linearizada como uma fonte de tensão fixa em série com uma fonte de tensão controlada a tensão linear. Uma fonte de corrente controlada a corrente se torna uma fonte de corrente fixa em paralelo com uma fonte de corrente controlada a corrente linear. E uma fonte de tensão controlada a corrente se torna uma fonte de tensão fixa em série com uma fonte de transresistência linear. Estas fontes são tratadas pela análise nodal modificada (figuras 1.70, 1.71 e 1.72).

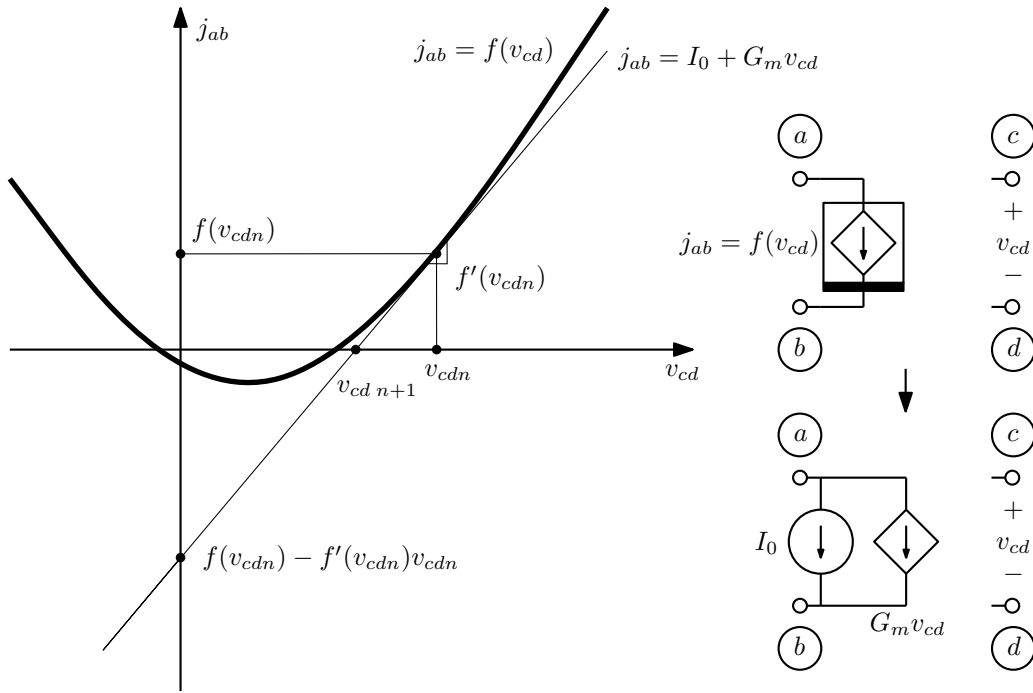


Figura 1.69: Linearização do transcondutor não linear.

1.9.3 Amplificador de tensão não linear

$$v_{ab} = f(v_{cd}) \approx f(v_{cd\ n}) - f'(v_{cd\ n})v_{cd\ n} + f'(v_{cd\ n})v_{cd} = V_0 + A_0 v_{cd}$$

$$A_0 = f'(v_{cd\ n})$$

$$V_0 = f(v_{cd\ n}) - A_0 v_{cd\ n}$$

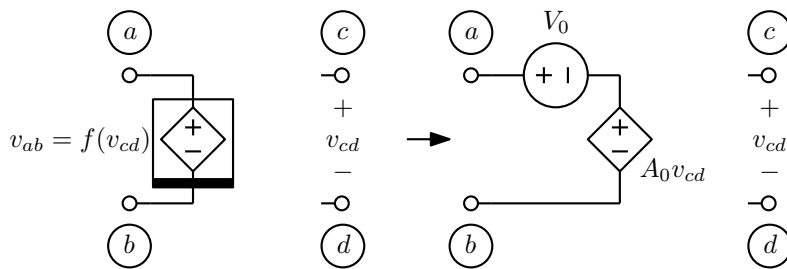


Figura 1.70: Linearização do amplificador de tensão não linear.

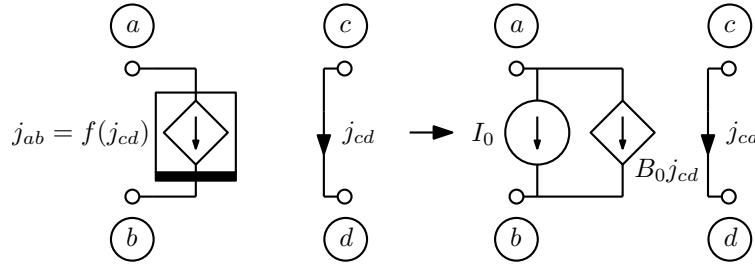


Figura 1.71: Linearização do amplificador de corrente não linear.

1.9.4 Amplificador de corrente não linear

$$\begin{aligned}
 j_{ab} = f(j_{cd}) &\approx f(j_{cd\ n}) - f'(j_{cd\ n})j_{cd\ n} + f'(j_{cd\ n})j_{cd} = I_0 + B_0 j_{cd} \\
 B_0 &= f'(j_{cd\ n}) \\
 I_0 &= f(j_{cd\ n}) - B_0 j_{cd\ n}
 \end{aligned}$$

1.9.5 Transresistor não linear

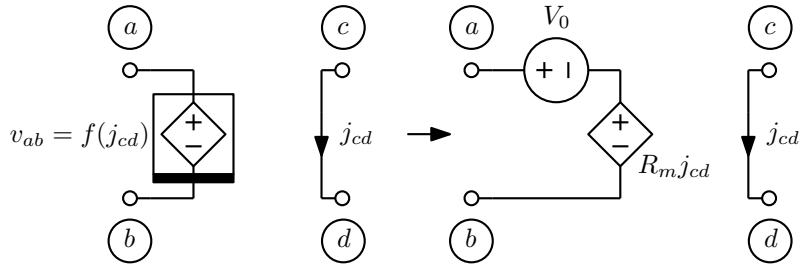


Figura 1.72: Linearização do transresistor não linear.

$$\begin{aligned}
 v_{ab} = f(j_{cd}) &\approx f(j_{cd\ n}) - f'(j_{cd\ n})j_{cd\ n} + f'(j_{cd\ n})j_{cd} = V_0 + R_m j_{cd} \\
 R_m &= f'(j_{cd\ n}) \\
 V_0 &= f(j_{cd\ n}) - R_m j_{cd\ n}
 \end{aligned}$$

Um resistor onde seja calculada a corrente equivale a um transresistor controlado por sua própria corrente (figura 1.73). O modelo na análise nodal modificada corresponde ao de um resistor controlado a tensão com a mesma função ligado ao resto do circuito por um girador unitário.

$$\begin{aligned}
 v &= f(j) \approx f(j_n) - f'(j_n)j_n + f'(j_n)j = V_0 + R_0 j \\
 R_0 &= f'(j_n) \\
 V_0 &= f(j_n) - R_0 j_n
 \end{aligned}$$

Exemplo: Usando ainda o circuito da figura 1.65, o sistema de equações obtido formalmente do método de Newton-Raphson é:

$$\left[J \left(\vec{F}(\vec{e}_n) \right) \right] \vec{e}_{n+1} = -\vec{F}(\vec{e}_n) + \left[J \left(\vec{F}(\vec{e}_n) \right) \right] \vec{e}_n$$

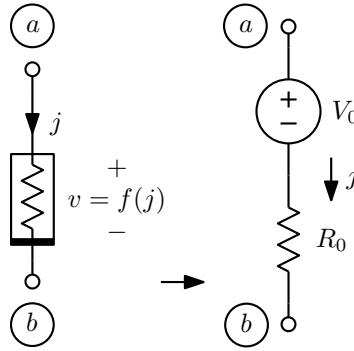


Figura 1.73: Linearização do resistor controlado a corrente.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} + 2e_{1n}}{(e_{1n} - e_{2n})^2} & \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(e_{1n} - e_{2n})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1n+1} \\ e_{2n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{e_{1n} - e_{2n}}{2} + \frac{e_{1n}^2 - 2}{e_{1n} - e_{2n}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} + 2e_{1n}}{(e_{1n} - e_{2n})^2} & \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(e_{1n} - e_{2n})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} + 2e_{1n}}{(e_{1n} - e_{2n})^2} & \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(e_{1n} - e_{2n})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1n+1} \\ e_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_{1n}^2 + 2}{2} \\ -\frac{2}{e_{1n} - e_{2n}} \end{bmatrix}$$

A figura 1.74 mostra o modelo linearizado em torno de \vec{e}_n . O sistema nodal correspondente é idêntico ao obtido da outra forma:

$$\begin{bmatrix} G_1 + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + G_{m2} & \frac{1}{2} - G_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1n+1} \\ e_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 + 2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = 2e_{1n}; \quad I_1 = e_{1n}^2 - G_1 e_{1n} = -e_{1n}^2; \quad G_{m2} = -\frac{1}{(e_{1n} - e_{2n})^2}; \quad I_2 = \frac{1}{e_{1n} - e_{2n}} - G_{m2}(e_{1n} - e_{2n}) = \frac{2}{e_{1n} - e_{2n}}$$

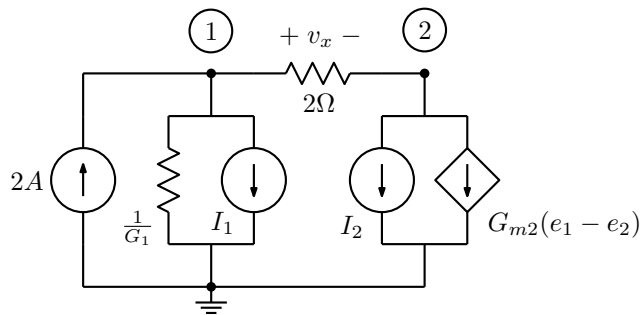


Figura 1.74: Modelo linearizado em torno da solução atual.

1.9.6 Fontes não lineares controladas por várias variáveis

Para uma fonte, de tensão ou de corrente y , controlada por várias variáveis \vec{x} , a linearização é da forma:

$$y = f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_n) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_n) x_{in} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_n) x_i = Y_0 + \sum_{i=1}^m K_{0i} x_i$$

$$K_{0i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_n)$$

$$Y_0 = f(\vec{x}_n) - \sum_{i=1}^m K_{0i} x_{in}$$

Desta forma, quando o sistema converge se tem o esperado $y = f(\vec{x})$, pois os somatórios se cancelam. Uma fonte de corrente controlada por duas tensões (figura 1.75) seria modelada como:

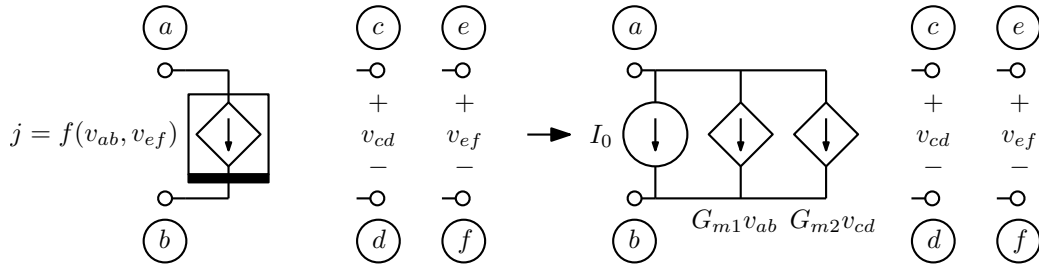


Figura 1.75: Linearização de uma fonte de corrente com dois controles a tensão.

$$j = f(v_{ab}, v_{cd})$$

$$j \approx I_0 + G_{m1}v_{ab} + G_{m2}v_{cd}$$

$$G_{m1} = \frac{\partial f}{\partial v_{ab}}(v_{ab\ n}, v_{cd\ n})$$

$$G_{m2} = \frac{\partial f}{\partial v_{cd}}(v_{ab\ n}, v_{cd\ n})$$

$$I_0 = f(v_{ab\ n}, v_{cd\ n}) - G_{m1}v_{ab\ n} - G_{m2}v_{cd\ n}$$

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.76, que contém dois multiplicadores. O modelo para a análise nodal modificada pelo método de Newton-Raphson é mostrado na figura 1.77 uma variável de corrente é acrescentada, no ramo contendo as fontes de tensão. Os parâmetros dos modelos para os multiplicadores são:

$$v_{1n} = e_{1n} - e_{2n}; \quad v_{2n} = e_{1n} - e_{3n}; \quad v_{3n} = e_{3n}$$

$$A_1 = Av_{2n}$$

$$A_2 = Av_{1n}$$

$$V_0 = Av_{1n}v_{2n} - A_1v_{1n} - A_2v_{2n} = -Av_{1n}v_{2n}$$

$$G_2 = Gv_{3n}$$

$$G_3 = Gv_{2n}$$

$$I_0 = Gv_{2n}v_{3n} - G_2v_{2n} - G_3v_{3n} = -Gv_{2n}v_{3n}$$

A equação acrescentada é:

$$e_{2\ n+1} = V_0 + A_1(e_{1\ n+1} - e_{2\ n+1}) + A_2(e_{1\ n+1} - e_{3\ n+1})$$

O sistema de equações nodais modificadas para calcular a próxima aproximação da solução é então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_1 & -1/R_2 & 0 \\ -1/R_1 + G_2 & 1/R_1 & -G_2 + G_3 & 1 \\ -1/R_2 - G_2 & 0 & 1/R_2 + 1/R_3 + G_2 - G_3 & 0 \\ \hline A_1 + A_2 & -1 - A_1 & -A_2 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_{1\ n+1} \\ e_{2\ n+1} \\ e_{3\ n+1} \\ j_{4\ n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -I_0 \\ I_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

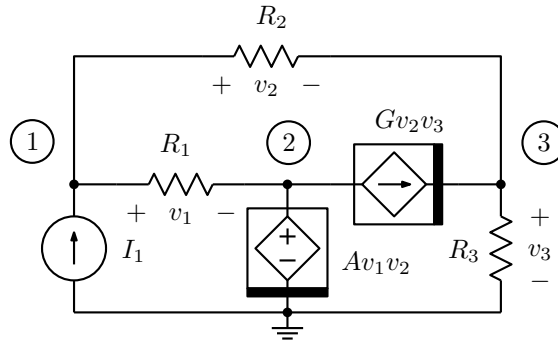


Figura 1.76: Circuito com multiplicadores.

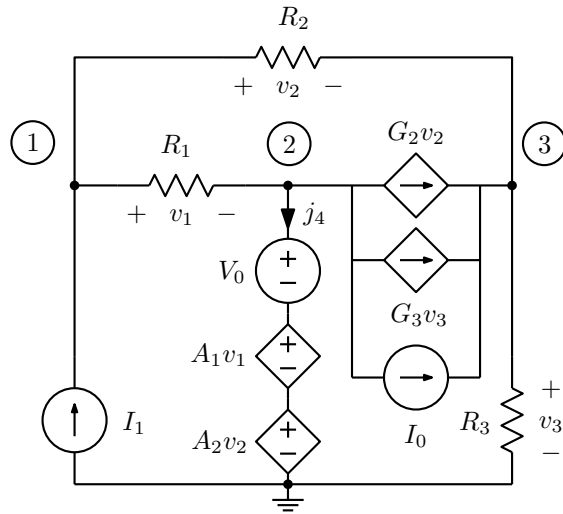


Figura 1.77: Modelo linearizado em torno da solução atual para o circuito com multiplicadores.

1.10 Algoritmo de análise pelo método de Newton-Raphson

Para realizar a análise de um circuito resistivo, as operações a fazer basicamente são:

1. Obter uma aproximação inicial para \vec{e}_n . Pode ser $\vec{e}_n = \vec{0}$, valores aleatórios, etc.

2. Montar o sistema linearizado, a partir de \vec{e}_n e das equações dos elementos do circuito.
3. Resolver o sistema, que é linear, achando \vec{e}_{n+1} .
4. Comparar a nova solução com a anterior. Se $\vec{e}_{n+1} \approx \vec{e}_n$ dentro de um certo critério de tolerância, o método convergiu e a solução foi encontrada, valendo \vec{e}_{n+1} .
5. Se ainda não foi obtida convergência, fazer $\vec{e}_n \leftarrow \vec{e}_{n+1}$ e voltar a (2).

Deve-se contar quantas iterações são feitas, e se a convergência não for atingida em um número razoável delas, interromper o processo. Várias técnicas podem ser usadas para fazer o método escapar destas situações, muito comuns.

1.11 Controle de convergência

A comparação de \vec{e}_n com \vec{e}_{n+1} é feita comparando os elementos um a um e procurando a maior diferença em módulo. É conveniente usar comparações normalizadas se os valores comparados forem maiores que certo limite X , V ou A ($X = 1$, por exemplo), e comparações diretas para valores menores, mas de forma a não criar descontinuidades:

$$\text{Se } |e_{n+1\ i}| > X, \text{ erro} = X \left| \frac{e_{n+1\ i} - e_{n\ i}}{e_{n+1\ i}} \right|, \text{ senão erro} = |e_{n+1\ i} - e_{n\ i}|$$

O método de Newton-Raphson pode não convergir, tipicamente com a busca da solução ficando presa em um “mínimo local”, causado pela existência de uma solução complexa (não física) próxima, ou outras situações. Vários métodos podem ser usados para guiar o método para a solução, supondo que esta exista:

- Pode-se simplesmente abandonar a solução atual e partir de uma nova aproximação inicial a partir de valores randômicos para as variáveis. É melhor randomizar apenas as variáveis que não estão convergindo, pois senão a solução em casos que tenham várias soluções pode ser mudada, como em circuitos contendo “flip-flops”. A randomização pode ter que ser repetida várias vezes, e deve-se então estipular um número máximo de vezes, e abandonar a análise caso a convergência não seja atingida.
- Pode-se modificar o circuito temporariamente para uma versão que convirja mais facilmente, e gradualmente voltar o circuito ao original. Um método bastante usado é o de acrescentar resistores em paralelo com ramos não lineares, inicialmente valor pequeno, o que lineariza o circuito e força a existência de uma solução, e ir aumentando progressivamente os valores deles, com soluções a cada passo usando a solução anterior como aproximação inicial. Isto guia a solução até uma solução correta. No último passo, podem ser deixadas no circuito condutâncias de valor baixo G_{min} , como usualmente feito em simuladores tipo SPICE (método conhecido como “Gmin stepping”).
- Algo similar é partir de uma aproximação $\vec{e}_n = \vec{0}$ com todas as fontes independentes zeradas, e voltar gradualmente as fontes a seus valores normais, com soluções a cada passo usando a solução anterior como aproximação inicial (“source stepping”).

Com os dois últimos métodos também pode ocorrer mudança da solução. Uma possibilidade para evitar isto é não alterar elementos conectados a nós (ou correntes) que estejam convergindo pelo método normal³³.

³³Os programas citados no apêndice usam o primeiro método.

1.12 Modelamento

Dispositivos eletrônicos comuns não lineares são modelados com os modelos discutidos na seção anterior.

1.12.1 Diodos

Diodos, considerando apenas a característica estática, são resistores não lineares. Um diodo semicondutor usual (figura 1.78) segue uma curva do tipo:

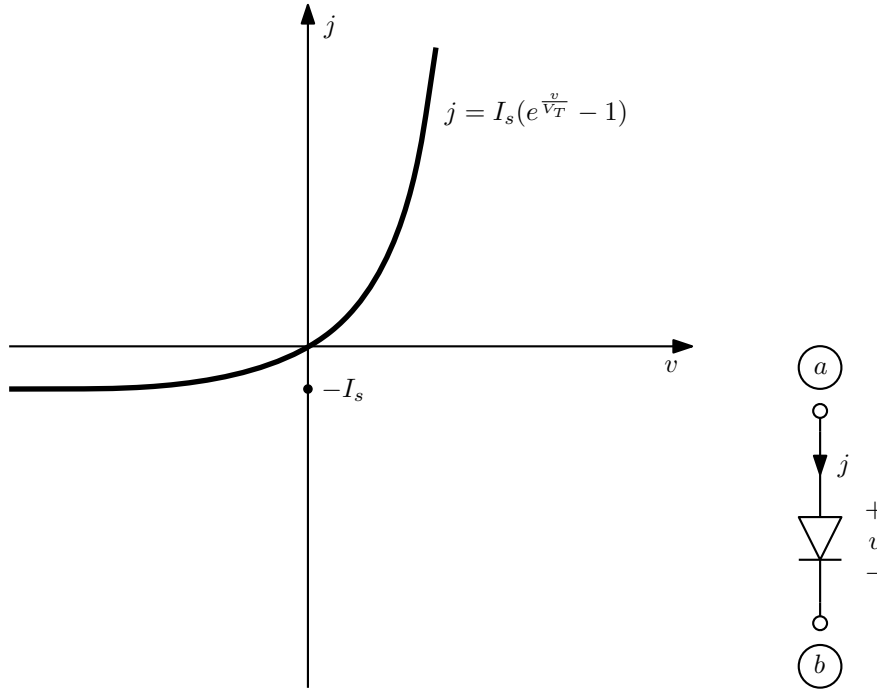


Figura 1.78: Diodo semicondutor.

$$j = I_s \left(e^{\frac{v}{V_T}} - 1 \right)$$

onde I_s é a corrente reversa e $V_T = \frac{kT}{q}$, onde k é a constante de Boltzmann ($1.3806503 \times 10^{-23} m^2 kg s^{-2} K^{-1}$), q é a carga do elétron ($1.60217646 \times 10^{-19}$ coulombs), e T é a temperatura absoluta em kelvins. Em 300 K, V_T vale aproximadamente 25 mV. Costuma-se colocar um fator empírico η multiplicando V_T para adaptar a curva a características de diodos reais (absorvido em V_T aqui). Com um modelo assim, os parâmetros a usar na análise pelo método de Newton-Raphson são:

$$G_0 = \frac{I_s e^{\frac{v_n}{V_T}}}{V_t}$$

$$I_0 = I_s \left(e^{\frac{v_n}{V_T}} - 1 \right) - G_0 v_n$$

É possível que ocorra “overflow” no cálculo de $e^{\frac{v_n}{V_T}}$, e assim é mais seguro limitar o valor de v_n em algo como 0.9 V, usando o valor do limite no lugar de v_n se o limite for excedido. Isto corresponde a estender a curva do diodo como uma reta acima do limite.

1.12.2 Diodos lineares por partes

Não apenas diodos, mas quaisquer resistores não lineares, podem ser modelados por uma função formada por uma sequência de retas que se interceptam em pontos dados (v_i, j_i) . As retas além dos limites máximo e mínimo de v podem ser extensões das retas entre os pares de pontos nos dois extremos.

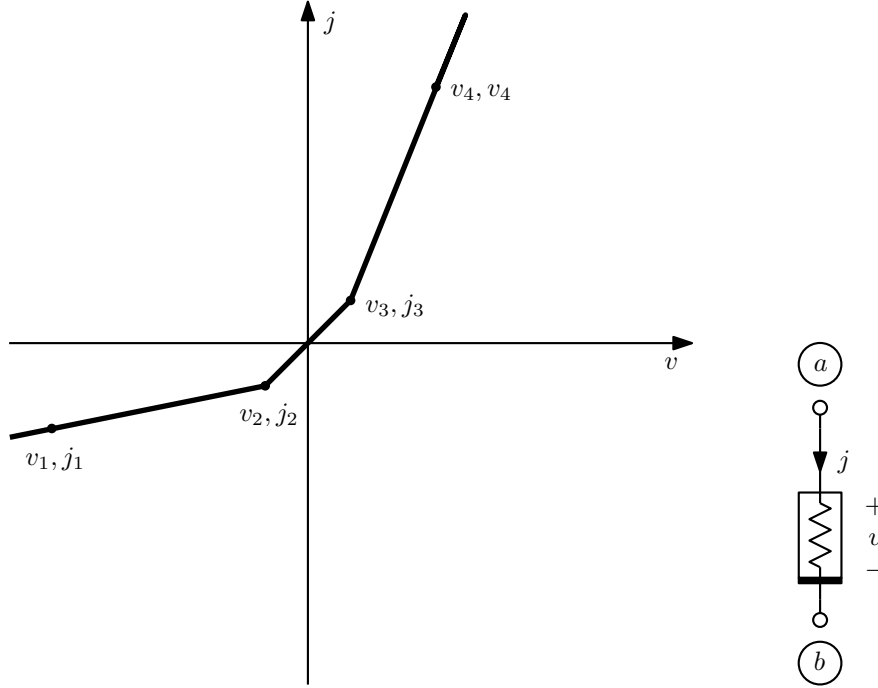


Figura 1.79: Resistor linear por partes.

Dada a solução atual v_n , está determinado o segmento atual e os dois parâmetros da linearização, que vem das equações das retas. No exemplo, há três possibilidades, dados os 4 pontos:

$$v < v_2 : G_0 = \frac{j_2 - j_1}{v_2 - v_1}; I_0 = j_2 - G_0 v_2$$

$$v_2 \leq v < v_3 : G_0 = \frac{j_3 - j_2}{v_3 - v_2}; I_0 = j_3 - G_0 v_3$$

$$v \geq v_3 : G_0 = \frac{j_4 - j_3}{v_4 - v_3}; I_0 = j_4 - G_0 v_4$$

O modelamento linear por partes pode ser usado para fontes controladas por uma variável também, de forma similar. Uma propriedade interessante dos circuitos onde todas as não linearidades sejam tratadas desta forma é que uma vez que a solução atual \vec{v}_n coloque todos os dispositivos em seus segmentos corretos, a solução é exata. Uma nova solução, como o método de Newton-Raphson faria buscando a convergência, dá exatamente o mesmo resultado.³⁴

³⁴Em um circuito com todos os elementos lineares por partes com várias soluções, é simples encontrar todas elas. Basta inicializar o método com todas as combinações de segmentos de todos os componentes e ver para onde convergem. Os casos correspondentes às soluções convergem imediatamente. Note-se que não é necessário saber qual a solução inicial, já que qualquer uma com os mesmos segmentos da solução converge para ela.

1.12.3 Diodo ideal

O diodo ideal exigiria um segmento vertical, o que não pode ser feito pela análise anterior. Pode ser tratado como sendo ou um curto-circuito onde a corrente j é calculada ou um circuito aberto onde a tensão v é calculada, seguindo-se as regras de atualização:

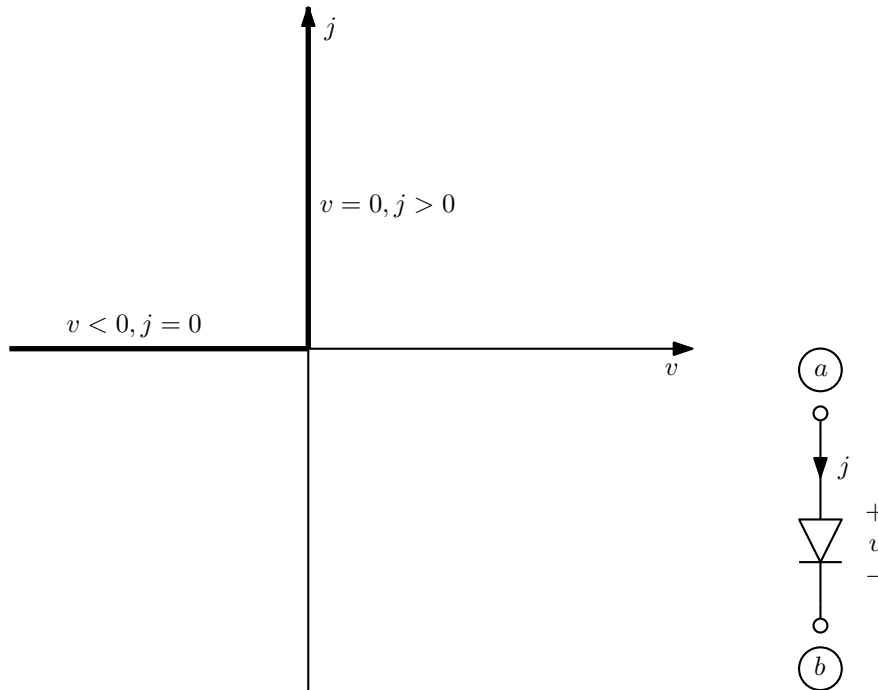


Figura 1.80: Diodo ideal.

Se era um circuito aberto e $v_n > 0$, modelar como curto-circuito, senão continuar modelando como circuito aberto.

Se era um curto-circuito e $j_n < 0$, modelar como circuito aberto, senão continuar modelando como curto-circuito.

Para não ser necessário alterar a estrutura do sistema de equações, usando apenas equações nodais, pode-se modelar o diodo como dois resistores em série, que tem resistências iguais com sinais opostos para modelar um curto-circuito ou tem uma das resistências infinita para modelar um circuito aberto. A corrente pode ser obtida a partir da tensão sobre um deles e a solução para as tensões nodais. Pode-se também usar análise nodal modificada, montando a estampa de um curto-circuito onde a corrente é calculada ou a estampa de uma corrente nula (a equação do ramo é simplesmente $j = 0$). Um modelo que corresponde a isto é mostrado na figura 1.81. Para circuito aberto, os transcondutores formando um girador não são montados no sistema. Para curto-circuito, o resistor (unitário) não é montado. Em ambos os casos há uma variável a mais.

1.12.4 Transistores bipolares

Um modelo de simples implementação e que cobre todas as possibilidades de operação (cortado, ativo, saturado e invertido) é o modelo de Ebers-Moll (figura 1.82). Um exame em livros e artigos que mostram o modelo mostra que há duas formas usuais: Em uma (esquerda), duas fontes controladas são controladas

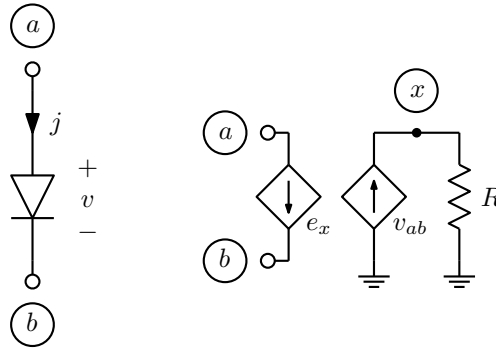


Figura 1.81: Modelo para um diodo ideal.

pelas correntes nos dois diodos. Em outra (direita), elas são controladas pelas correntes de emissor e de coletor.

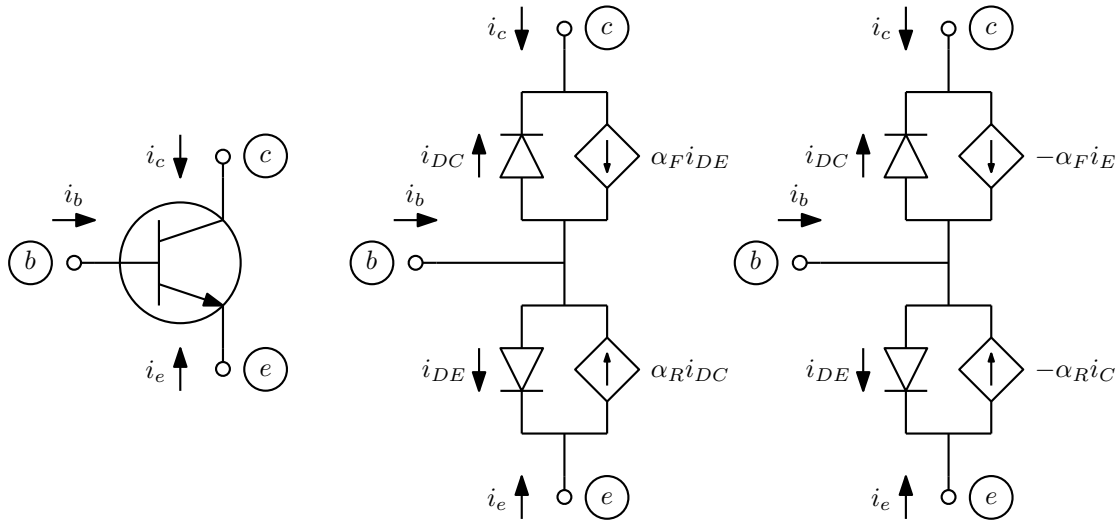


Figura 1.82: Variantes do modelo de Ebers-Moll para o transistor bipolar.

O artigo original [1] usa a segunda forma. Os dois modelos tem o mesmo comportamento, como mostrado abaixo. Os diodos seguem funções arbitrárias, controladas pelas tensões v_{be} , entre base e emissor, e v_{bc} , entre base e coletor:

$$\begin{aligned} i_{DC} &= f_c(v_{bc}) \\ i_{DE} &= f_e(v_{be}) \end{aligned}$$

Para o primeiro circuito:

$$\begin{aligned} i_c &= -i_{DC} + \alpha_F i_{DE} \\ i_e &= -i_{DE} + \alpha_R i_{DC} \end{aligned}$$

Para o segundo circuito:

$$\begin{aligned}
 i_c &= -i_{DC} - \alpha_F i_e \\
 i_e &= -i_{DE} - \alpha_R i_c \\
 i_c &= -i_{DC} + \alpha_F i_{DE} + \alpha_F \alpha_R i_c \\
 i_e &= -i_{DE} + \alpha_R i_{DC} + \alpha_R \alpha_F i_e \\
 i_c &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} (-i_{DC} + \alpha_F i_{DE}) \\
 i_e &= \frac{1}{1 - \alpha_R \alpha_F} (-i_{DE} + \alpha_R i_{DC})
 \end{aligned}$$

Os dois modelos são então equivalentes se as funções dos diodos forem escaladas no primeiro circuito como:

$$\begin{aligned}
 i_{DC} &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} f_c(v_{bc}) \\
 i_{DE} &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} f_e(v_{be})
 \end{aligned}$$

O primeiro modelo é de implementação simples no método de Newton-Raphson. Basta obter os modelos para os diodos, com resistores e fontes de corrente, a partir das tensões atuais sobre eles e das funções que seguem, e colocar fontes de corrente e transcondutores em proporção, para gerar o efeitos das fontes de corrente controladas a corrente (figura 1.83). Usando o segundo modelo, basta escalar as funções dos diodos como mostrado.

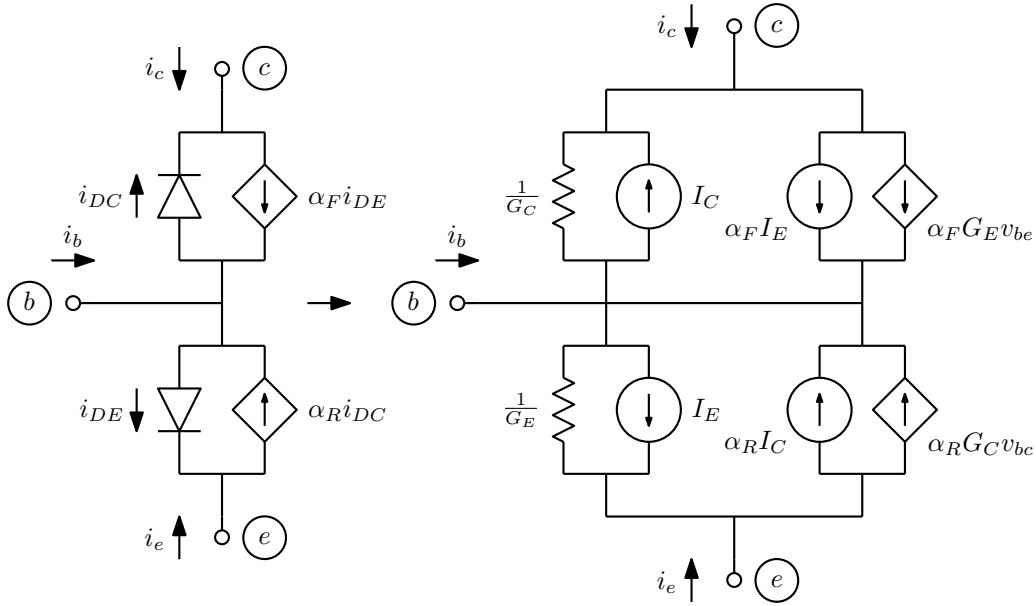


Figura 1.83: Modelo linearizado correspondente ao modelo de Ebers-Moll.

Notar que este modelo não modela o “efeito Early”³⁵, que faz a corrente de coletor aumentar em proporção a v_{ce} . O modelo pode ser alterado para que isto ocorra, implementando-se uma multiplicação

³⁵J. M. Early, “Effects of space-charge layer widening in junction transistors”, Proc. IRE, vol. 40, pp. 1401-1406, 1952.

da corrente de coletor por $1 + v_{ce}/V_A$, onde V_A é a “tensão de Early”, um valor que pode ser determinado experimentalmente, usualmente entre 15 V e 150 V. Para manter a simetria do modelo, pode-se acrescentar uma corrente $i_c v_{cb}/V_A$ entre coletor e base, e outra $i_e v_{eb}/V_A$ entre emissor e base. Estas fontes seriam tratadas como fontes controladas por duas variáveis, multiplicadores. Como $i_c = -i_{DC} + \alpha_F i_{DE}$ e $i_e = i_{DE} + \alpha_R i_{DC}$, as correntes a acrescentar são proporcionais a multiplicações das correntes nos diodos por v_{cb} e v_{eb} . Faz pouca diferença, entretanto, implementar apenas a multiplicação da corrente de coletor por $1 + v_{ce}/V_A$. Para isto coloca-se em paralelo com o transistor, entre coletor e emissor, uma fonte de corrente $i_c v_{ce}/V_A$. Considerando diodos genéricos, como feito no modelo acima, a corrente a acrescentar vale:

$$j_{Early} = i_c v_{ce}/V_A = (\alpha f_e(v_{be}) - f_c(v_{bc})) \frac{v_{ce}}{V_A}$$

Esta é uma função não linear com três controles (Figura 1.84), e é linearizada com três transcondutores e uma fonte de corrente, realizando:

$$j_{Early} = I_0 + G_1 v_{be} + G_2 v_{bc} + G_3 v_{ce}$$

onde:

$$G_1 = \alpha f'_e(v_{be\ n}) \frac{v_{ce\ n}}{V_A}$$

$$G_2 = -f'_c(v_{bc\ n}) \frac{v_{ce\ n}}{V_A}$$

$$G_3 = (\alpha f_e(v_{be\ n}) - f_c(v_{bc\ n})) \frac{1}{V_A}$$

$$I_0 = (\alpha f_e(v_{be\ n}) - f_c(v_{bc\ n})) \frac{v_{ce\ n}}{V_A} - G_1 v_{be\ n} - G_2 v_{bc\ n} - G_3 v_{ce\ n} = -G_1 v_{be\ n} - G_2 v_{bc\ n}$$

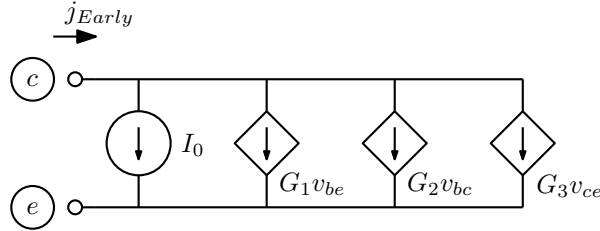


Figura 1.84: Modelo a acrescentar para criar o efeito Early.

Já tendo calculados os parâmetros dos diodos do modelo, as funções requeridas podem ser obtidas diretamente deles:

$$f'_e(v_{be\ n}) = G_E$$

$$f'_c(v_{bc\ n}) = G_C$$

$$f_e(v_{be\ n}) = G_E v_{be\ n} + I_E$$

$$f_c(v_{bc\ n}) = G_C v_{bc\ n} + I_C$$

Para o transistor PNP, basta trocar as polaridades dos diodos e os sentidos dos amplificadores de corrente, ou apenas trocar as polaridades dos diodos, mantendo os amplificadores. Para fazer isto usando o modelo de diodo semiconductor, basta trocar os sinais de I_s e V_T .

Exemplo: O modelo pode gerar resultados estranhos em certos casos. Seja o circuito da figura 1.85, onde se tenta usar uma única análise para determinar que resistor deve ser colocado entre a fonte de alimentação e a base do transistor para que a tensão no coletor seja de exatamente 6 V. Com o amplificador operacional ideal montado como mostrado (um par “fixador-norator”), a solução do circuito força esta condição, e o valor necessário do resistor seria calculado dividindo a tensão sobre o ramo de saída do amplificador por sua corrente de saída.

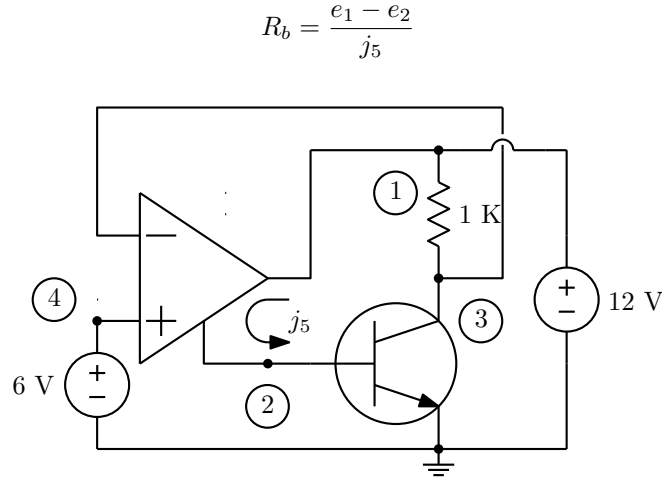


Figura 1.85: Circuito para calcular o valor do resistor de base, que dá resultado estranho.

Ocorre que existem duas soluções neste circuito. Uma é a normal, que geraria uma tensão v_{be} em torno de 0.6 V e uma pequena corrente de base, mas há outra, com o transistor saturado, uma gigantesca corrente de base e uma enorme tensão v_{be} . Modelando o circuito com diodos com $I_s = 3.77513 \times 10^{-14}$ A e $V_t = 0.025$ V, com curva estendida como reta se $v > 0.9$ V, e parâmetros $\alpha = 0.99$ e $\alpha_r = 0.5$, as duas soluções resultam em:

- a) $v_{be} = 0.644794$ V; $j_5 = 6.00006 \times 10^{-5}$ A; $R_b = 189235\Omega$
- b) $v_{be} = 600.875$ V; $j_5 = 1.97259 \times 10^6$ A

Dependendo de qual aproximação inicial é usada, uma ou outra solução é encontrada.

1.12.5 Transistores MOS

Um modelo adequado para transistores onde os campos elétricos internos não são muito grandes, ou para transistores de dimensões não muito pequenas, é o de Shichman-Hodges [4], que também é o modelo de nível 1 de simuladores tipo SPICE. A formulação usual do modelo (diferente da encontrada no artigo original, mas com mesmo resultado), é, para um transistor de canal N com largura W e comprimento L :

$$i_D = \begin{cases} 0, & \text{se } v_{gs} < V_t, \text{ corte.} \\ K \frac{W}{L} (2(v_{gs} - V_t)v_{ds} - v_{ds}^2) (1 + \lambda v_{ds}), & \text{se } v_{ds} \leq v_{gs} - V_t, \text{ região ôhmica, ou de triodo.} \\ K \frac{W}{L} (v_{gs} - V_t)^2 (1 + \lambda v_{ds}), & \text{se } v_{ds} > v_{gs} - V_t, \text{ região de saturação.} \end{cases}$$

v_{gs} e v_{ds} são as tensões entre porta (“gate”) e fonte (“source”), e entre dreno (“drain”) e fonte, respectivamente, W é a largura do canal, L o comprimento do canal, V_t a tensão de limiar (“threshold”), K o

parâmetro de transcondutância e λ um parâmetro que controla a inclinação das curvas, de forma similar à do efeito Early nos transistores bipolares. Considera-se ainda o “efeito de corpo”, que faz com que a tensão v_{gs} tenha que ser maior para fazer o transistor conduzir se a tensão no substrato (terminal b , de “bulk”) for mais negativa, fazendo V_t variar com v_{bs} :

$$V_t = V_{t0} + \gamma(\sqrt{\phi - v_{bs}} - \sqrt{\phi})$$

O parâmetro de transcondutância K é função da mobilidade dos portadores de carga no canal μ e da capacitância por unidade de área entre o “gate” e o canal C_{OX} :

$$K = \frac{\mu C_{OX}}{2}$$

Valores típicos para os parâmetros podem ser $V_t = 1$ V, $K = 50 \times 10^{-6}$ A/V², $\lambda = 0.01$, $\gamma = 0.3 \sqrt{V}$ e $\phi = 0.6$ V, dependendo do processo usado.

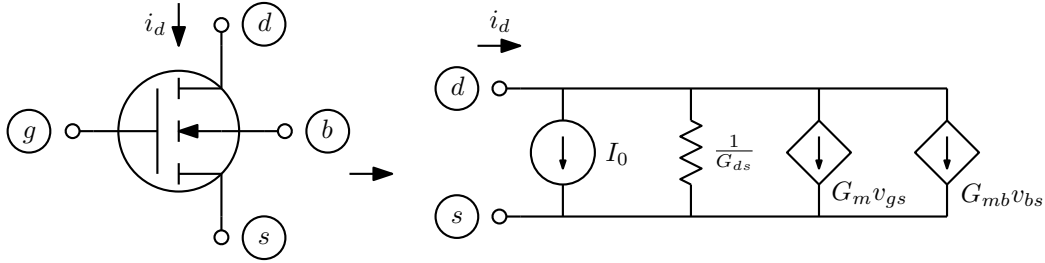


Figura 1.86: Modelo linearizado para um transistor NMOS.

O modelo para a análise pelo método de Newton-Raphson tem então três transcondutâncias (uma delas uma condutância) e uma fonte de corrente (figura 1.86), pois a corrente entre “drain” e “source” é controlada por três tensões. Os valores das transcondutâncias são obtidos como:

$G_{ds\ n}$:

Corte: 0

Triodo: $K \frac{W}{L} (2(v_{gs\ n} - V_t) - 2v_{ds\ n} + 4\lambda(v_{gs\ n} - V_t)v_{ds\ n} - 3\lambda v_{ds\ n}^2)$

Saturação: $K \frac{W}{L} (v_{gs\ n} - V_t)^2 \lambda$

G_m :

Corte: 0

Triodo: $K \frac{W}{L} (2v_{ds\ n} (1 + \lambda v_{ds\ n}))$

Saturação: $K \frac{W}{L} (2(v_{gs\ n} - V_t) (1 + \lambda v_{ds\ n}))$

G_{mb} :

Corte: 0

Triodo: $\frac{G_m \gamma}{\sqrt{\phi - v_{bs\ n}}}$

Saturação: $\frac{G_m \gamma}{\sqrt{\phi - v_{bs\ n}}}$

Notar que G_{mb} é proporcional a G_m , pois V_t aparece sempre subtraído de V_{gs} nas fórmulas, e então $G_{mb} = -\frac{\partial i_D}{\partial V_{gs}} \frac{\partial V_t}{\partial V_{bs}}$.

Para o transistor PMOS, pode-se trocar todas as polaridades das tensões e o sentido de i_D . No mais o modelo é idêntico.

Como os transistores são simétricos mas o modelo não é, é necessário definir que terminais são “drain” e “source”. Para transistores NMOS, o “source” é o nó de menor tensão nodal entre os dois. Para transistores PMOS o oposto. O modelo deve incluir ainda diodos de “drain” e “source” para o substrato, com anodos no substrato para transistores NMOS e catodos no substrato para transistores PMOS. Há um problema com o modelo se estes diodos conduzem, pois v_{bs} pode ficar maior que ϕ . É necessário então adaptar as equações que modelam o efeito de variação de V_t com v_{bs} para que isto não ocorra, por exemplo limitando v_{bs} a $\phi/2$.

1.12.5.1 Modelo para canal curto³⁶

O modelo de “nível 1” é de simples manipulação e útil para projetos iniciais de circuitos, mas não dá resultados corretos para transistores com “canal curto”, onde os campos elétricos internos são elevados. Uma modificação que não acrescenta muita complexidade é alterar as equações na forma³⁷:

$$i_D = \begin{cases} 0, & \text{se } v_{gs} < V_t, \text{ corte.} \\ K \frac{W}{L} (2(v_{gs} - V_t)v_{ds} - v_{ds}^2) v_{dsat}/(v_{gs} - V_t)(1 + \lambda v_{gs}), & \text{se } v_{ds} \leq v_{gs} - V_t, \text{ região ôhmica, ou de triodo.} \\ K \frac{W}{L} (v_{gs} - V_t) v_{dsat} (1 + \lambda v_{gs}), & \text{se } v_{ds} > v_{gs} - V_t, \text{ região de saturação.} \end{cases}$$

onde $v_{dsat} = (v_{gs} - V_t)/(LE_{sat})$ ($//$ é a operação de paralelo de impedâncias). E_{sat} é tipicamente da ordem de 4×10^6 V/m. Assim, as fórmulas são como as de canal longo se $v_{gs} - V_t \ll LE_{sat}$, e o crescimento da corrente se torna linear com $v_{gs} - V_t$ e independente de L se o campo elétrico é intenso. As expressões equivalem a multiplicar i_D por $v_{dsat}/(v_{gs} - V_t)$. O modelo para a análise de Newton-Raphson tem a mesma estrutura da figura 1.86, com parâmetros calculados de forma similar:

³⁶Material opcional.

³⁷T. Lee, “The design of CMOS radio-frequency integrated circuits”, Cambridge U. Press, 2004.

$$\begin{aligned}
&G_{ds\ n} : \\
&\text{Corte: } 0 \\
&\text{Triodo: } - \frac{E_{sat}KW(v_{ds\ n}\lambda(3v_{ds\ n} - 4(v_{gs\ n} - V_t)) + 2(v_{ds\ n} - v_{gs\ n} + V_t))}{LE_{sat} + v_{gs\ n} - V_t} \\
&\text{Saturação: } \frac{E_{sat}KW\lambda(v_{gs\ n} - V_t)^2}{LE_{sat} + v_{gs\ n} - V_t} \\
&G_m : \\
&\text{Corte: } 0 \\
&\text{Triodo: } \frac{E_{sat}v_{ds\ n}KW(2E_{sat}L + v_{ds\ n})(1 + \lambda v_{ds\ n})}{(LE_{sat} + v_{gs\ n} - V_t)^2} \\
&\text{Saturação: } \frac{E_{sat}KW(v_{gs\ n} - V_t)(2E_{sat} + v_{gs\ n} - V_t)(1 + \lambda v_{ds\ n})}{(LE_{sat} + v_{gs\ n} - V_t)^2} \\
&G_{mb} : \\
&\text{Corte: } 0 \\
&\text{Triodo: } \frac{G_m\gamma}{\sqrt{\phi - v_{bs\ n}}} \\
&\text{Saturação: } \frac{G_m\gamma}{\sqrt{\phi - v_{bs\ n}}}
\end{aligned}$$

Muitos outros modelos tem sido desenvolvidos para transistores, acompanhando a evolução da tecnologia. Na maior parte são complexos e úteis apenas para análise numérica³⁸

1.12.6 O tiristor, ou SCR

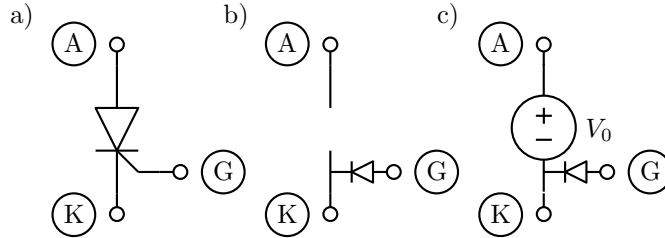


Figura 1.87: Tiristor, ou SCR (a), e seus modelos em corte (b) e em condução (c).

Um SCR (“silicon controlled rectifier”), figura 1.87 tem dois estados possíveis, conduzindo e cortado, e o comportamento, determinado pelas tensões e corrente entre os terminais de anodo (A), catodo (K) e porta (“gate”) (G):

³⁸Um outro modelo que é interessante citar é o de “subthreshold”, que descreve o comportamento do transistor MOS quando v_{gs} fica muito próxima ou menor que V_t . Nesta condição a corrente i_D , muito pequena, varia exponencialmente com v_{gs} , na forma $i_D = I_{D0} \frac{W}{L} e^{\frac{v_{gs}}{nV_T}}$, onde $n \approx 1.2$.

$$\begin{aligned} \text{Se está cortado} & \begin{cases} \text{Se } v_{AK} > V_{min} \text{ e } j_{GK} > I_{Gmin}, \text{ passa a conduzindo} \\ \text{Senão continua cortado} \end{cases} \\ \text{Senão (está conduzindo)} & \begin{cases} \text{Se } j_{AK} > I_{min}, \text{ continua conduzindo} \\ \text{Senão passa a cortado} \end{cases} \end{aligned}$$

Os limites V_{min} e I_{min} definem a mínima tensão e a mínima corrente para condução, e I_{Gmin} a mínima corrente para o disparo, ou entrada em condução. Uma outra possibilidade é modelar o SCR com um modelo com dois transistores, um NPN e outro PNP, como na figura 1.88, o que imita a estrutura interna do dispositivo. Os transistores podem usar o modelo de Ebers-Moll.

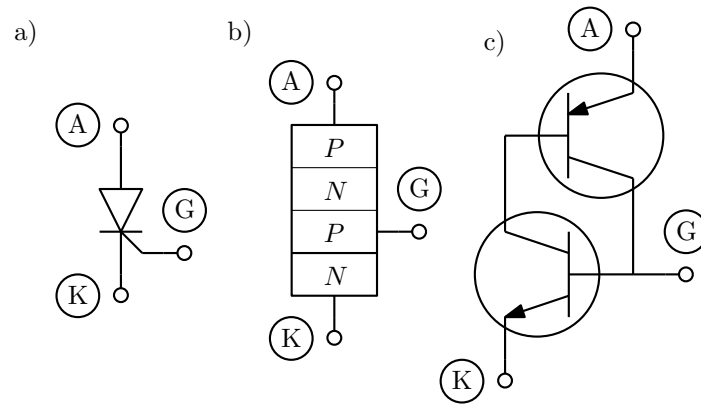


Figura 1.88: Modelo para o SCR (a) usando transistores (c), derivado da estrutura interna com quatro camadas de semicondutores com dopagens P e N (b).

1.12.7 Portas lógicas

Circuitos lógicos estáticos podem ser modelados como fontes controladas não lineares, com função que descreve o comportamento tendo regiões separadas, o que é um modelamento por partes.

1.12.7.1 Inversor

Seja um inversor CMOS, operando com níveis lógicos 0 e V . Sua curva de transferência pode ser como a da figura 1.89, e o modelo como também mostrado. Uma resistência de saída é acrescentada para modelamento mais realístico de carregamentos. Na estrada poderia ser colocada uma capacitância, tratada como na seção seguinte.

O modelo linearizado pode ser obtido na forma, correspondendo aos modelos da figura 1.90:

$$\text{Calcula-se } V_x = \frac{V}{2} - A \left(e_{an} - \frac{V}{2} \right)$$

$$\text{Se } V_x > V: V_0 = V; A_0 = 0$$

$$\text{Senão se } V_x < 0: V_0 = 0; A_0 = 0$$

$$\text{Senão } V_0 = \frac{V}{2}(1 + A); A_0 = -A$$

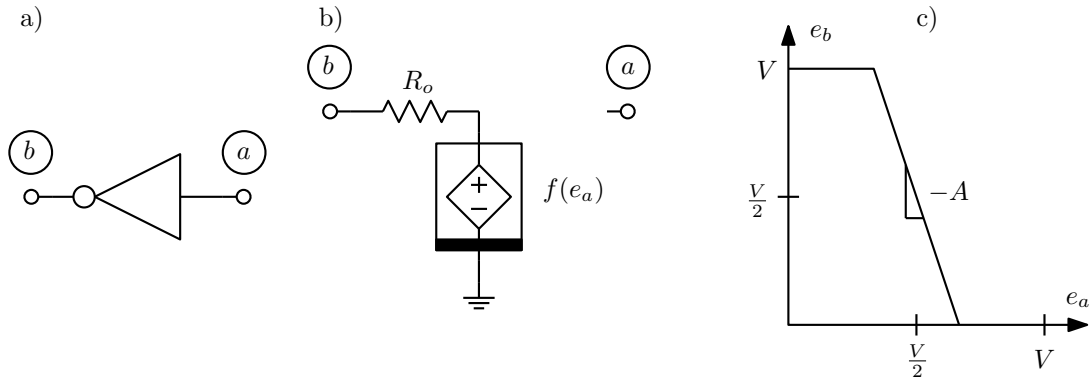


Figura 1.89: Curva de transferência (c) de um inversor lógico (a), e seu modelo (b).

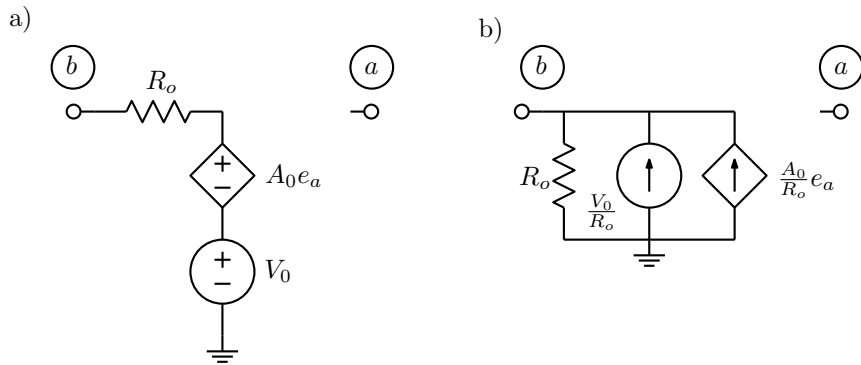


Figura 1.90: Modelo linearizado para o inversor (a), e equivalente Norton (b).

1.12.7.2 Portas de duas entradas

As curvas das portas NAND, AND, NOR e OR de duas entradas, idealizadas de forma similar ao feito para o inversor, são mostradas na figura 1.91. As figuras são visões da curva tridimensional da porta, sem carga, vistas da direção da tensão de saída e_c . Nas áreas hachuradas a derivada de e_c em relação a e_a e e_b vale $\pm A$, dependendo da porta.

Seja por exemplo a porta NAND da figura 1.92. Nota-se que, pela simetria da curva, se $e_a > e_b$ a curva é a de um inversor comandado por e_b , e se $e_b > e_a$ um inversor comandado por e_a . O modelo é então o da figura 1.93, onde os parâmetros podem ser obtidos como:

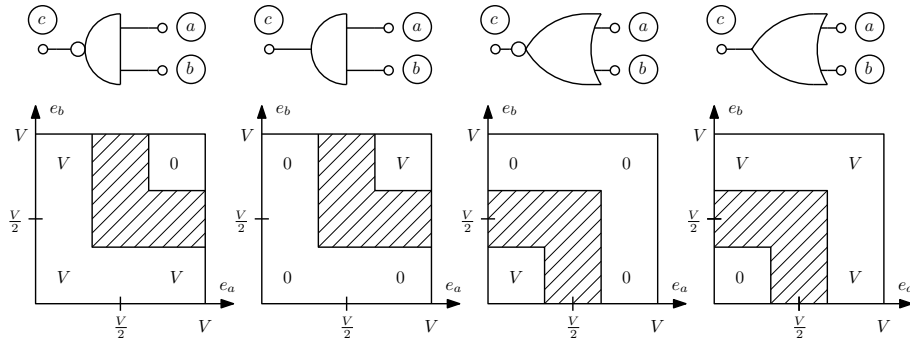
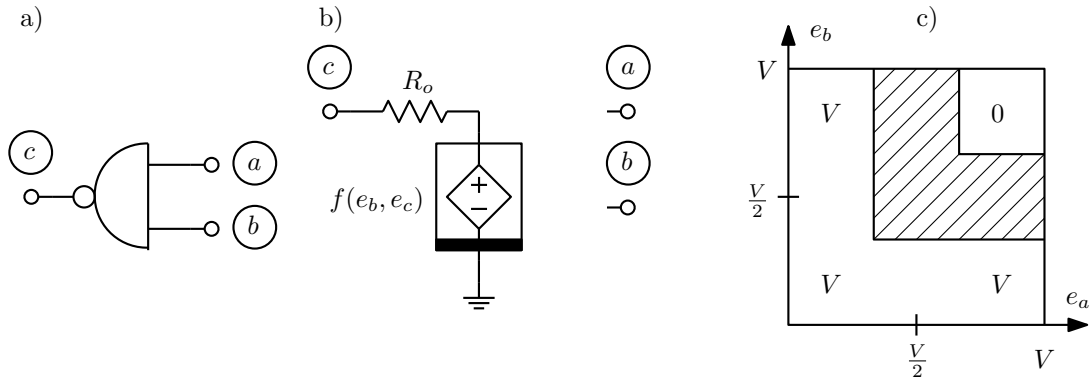


Figura 1.91: Curvas de transferência das portas lógicas de duas entradas.

Figura 1.92: Curva de transferência (c) de uma porta NAND de duas entradas (a), e seu modelo (b). Na região hachurada da curva a inclinação vale $-A$, como no inversor.

$$\begin{aligned}
 &\text{Se } e_a > e_b \left\{ \begin{array}{l} \text{Calcula-se } V_x = \frac{V}{2} - A \left(e_{bn} - \frac{V}{2} \right) \\ \text{Se } V_x > V: V_0 = V; A_1 = A_2 = 0 \\ \text{Senão se } V_x < 0: V_0 = 0; A_1 = A_2 = 0 \\ \text{Senão } V_0 = \frac{V}{2}(1 + A); A_1 = 0; A_2 = -A \end{array} \right. \\
 &\text{Senão } \left\{ \begin{array}{l} \text{Calcula-se } V_x = \frac{V}{2} - A \left(e_{cn} - \frac{V}{2} \right) \\ \text{Se } V_x > V: V_0 = V; A_1 = A_2 = 0 \\ \text{Senão se } V_x < 0: V_0 = 0; A_1 = A_2 = 0 \\ \text{Senão } V_0 = \frac{V}{2}(1 + A); A_1 = -A; A_2 = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Para modelar uma porta AND basta trocar o sinal de A . Para modelar uma porta NOR, basta trocar o teste para se $e_a < e_b$, e para modelar uma porta OR basta fazer as duas trocas. O modelo é sempre o da figura 1.93.

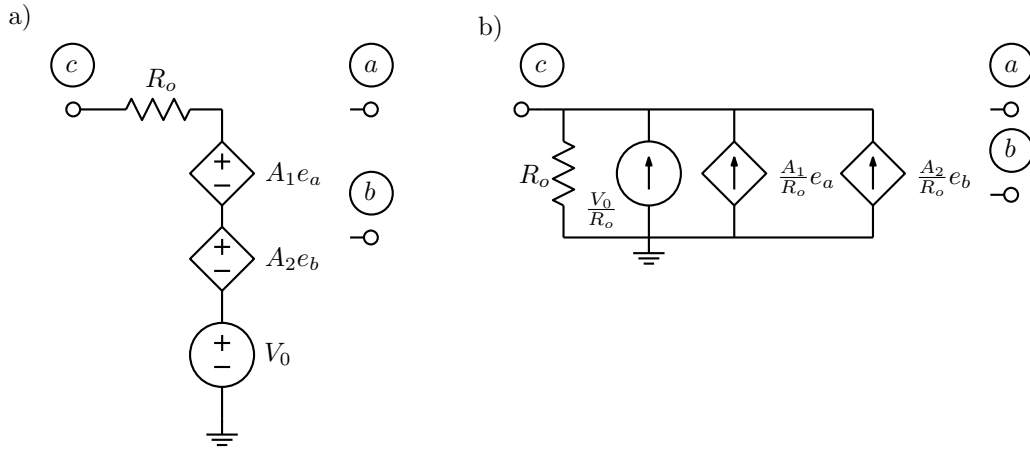


Figura 1.93: Modelo linearizado para a porta NAND (a), e equivalente Norton (b).

1.13 Análise nodal no domínio do tempo

Análises transientes no tempo podem ser calculadas numericamente usando métodos de discretização das integrações, que reduzem o problema à análise de circuitos resistivos. O que interessa aproximar é a integração, no caso de uma variável:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt$$

Vários métodos numéricos são conhecidos para aproximar a integração. Alguns dos mais simples são os métodos de Euler³⁹, o método dos trapézios⁴⁰ e os métodos multipasso de Adams-Bashforth, Adams-Moulton⁴¹ e de Gear⁴².

1.13.1 Método “backward”, ou implícito, de Euler

A função é aproximada por retângulos “para trás”. Resulta uma equação associando o valor futuro, em $t = t_0 + \Delta t$ com o valor presente, em t_0 :

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

O método tende a aumentar o amortecimento, introduzindo erros bastante severos na simulação se o passo Δt não for pequeno o bastante. Um tanque LC simulado por este método gera uma senoide que decai com o tempo. Por outro lado, é bem comportado quando existem transições abruptas e chaveamentos rápidos.

1.13.2 Método “forward”, ou explícito, de Euler

A função é aproximada por retângulos “para frente”. Resulta uma expressão explícita para o valor futuro:

³⁹Leonhard Euler, “Institutionum calculi integralis”, 1768-1770.

⁴⁰A forma que se segue ao método “backward” de Euler, dentro dos métodos de Adams-Moulton de integração numérica.

⁴¹John Couch Adams, Francis Bashforth, 1883, Forest Ray Moulton, 1926.

⁴²C. W. Gear, “Simultaneous Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations”, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 18, no. 1, pp. 89-95, jan. 1971.

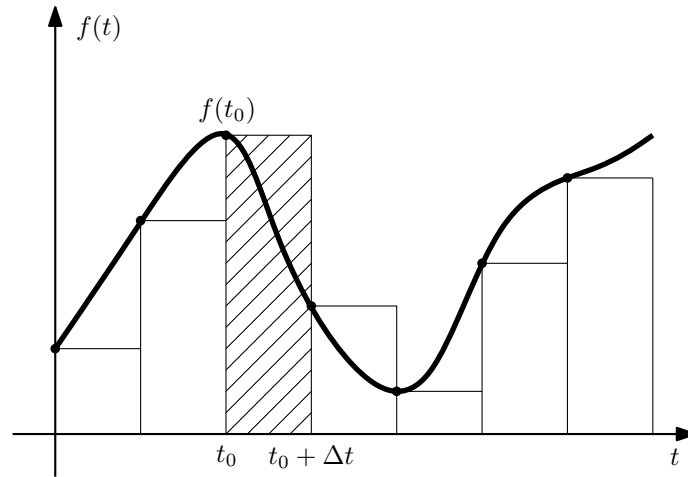


Figura 1.94: Integração “backward” de Euler.

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t f(t_0)$$

O método tende a reduzir o amortecimento, possivelmente causando instabilidade. Um tanque LC simulado por este método gera uma senoide que cresce com o tempo. É muito mal comportado quando existem transições abruptas, e gera “memórias falsas” em elementos reativos, como se verá adiante.

1.13.3 Método dos trapézios, ou integração bilinear

A função é aproximada por trapézios, com muito maior precisão. Resulta uma combinação dos dois métodos de Euler.

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (f(t_0) + f(t_0 + \Delta t))$$

É um dos melhores métodos, muito mais preciso que os de Euler. Não altera o amortecimento. Circuitos que gerariam senoides perpétuas continuam a gerá-las, com apenas um pequeno erro de frequência para menos. Gera, entretanto, alguma “memória falsa” e não é bem comportado quando existem transições abruptas, embora seja bem melhor que o “forward” de Euler quanto a isto.

Outros métodos interessantes são os de Adams-Bashforth e de Adams-Moulton, que generalizam os métodos de Euler usando informação de valores anteriores de função $f(t)$, e o método de Gear, que usa informações de tempos anteriores da função $y(t)$, discutidos adiante.

A aplicação dos métodos de integração é feita sobre os elementos reativos diretamente, gerando modelos resistivos.

1.13.4 Capacitor linear invariante no tempo

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

Método “backward” de Euler: O capacitor é modelado por um resistor, em série com uma fonte de tensão ou em paralelo com uma fonte de corrente, fazendo-se o equivalente Norton.

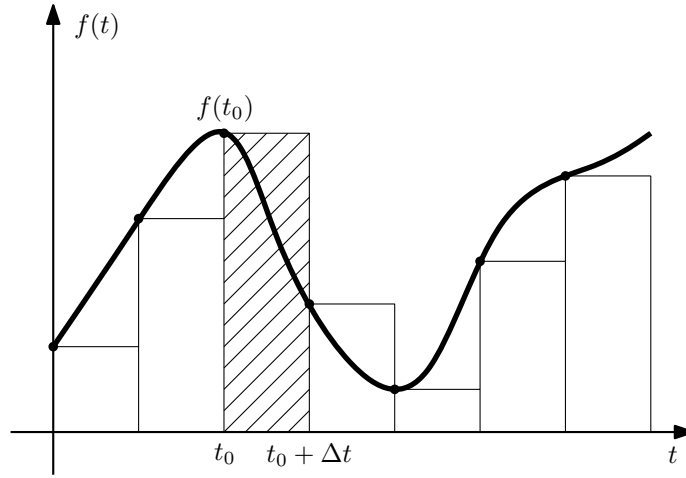


Figura 1.95: Integração “forward” de Euler.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{C} j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C}{\Delta t} (v(t_0 + \Delta t) - v(t_0))$$

A forma adequada para análise nodal é a última, em que a corrente é expressa em função da tensão.

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{C}{\Delta t} & -\frac{C}{\Delta t} \\ -\frac{C}{\Delta t} & +\frac{C}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{C}{\Delta t} v(t_0) \\ -\frac{C}{\Delta t} v(t_0) \end{bmatrix}$$

Método “forward” de Euler: O capacitor é modelado como uma fonte de tensão.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{C} j(t_0)$$

A corrente no capacitor deve ser calculada ao fim da análise pois é necessária no passo seguinte. Análise nodal modificada é necessária, e circuitos fechados de capacitores e fontes de tensão são proibidos, o que não é prático. Note-se que existe uma “memória falsa” de corrente que pode introduzir sérios artefatos na simulação.

Método dos trapézios: O modelo é similar ao do método “backward” de Euler, mas também com memória falsa de corrente, que pode também introduzir artefatos. A corrente tem que ser calculada ao fim da análise.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{2C} (j(t_0) + j(t_0 + \Delta t))$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2C}{\Delta t} (v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)) - j(t_0)$$

O modelo tem a mesma forma do usado no método B. E.:

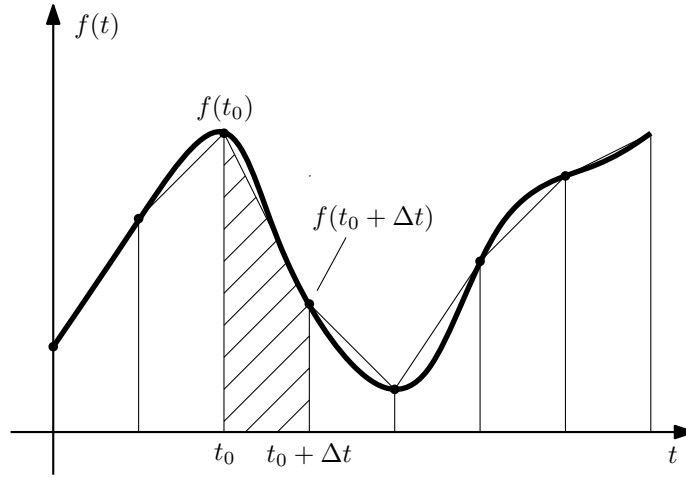


Figura 1.96: Integração trapezoidal.

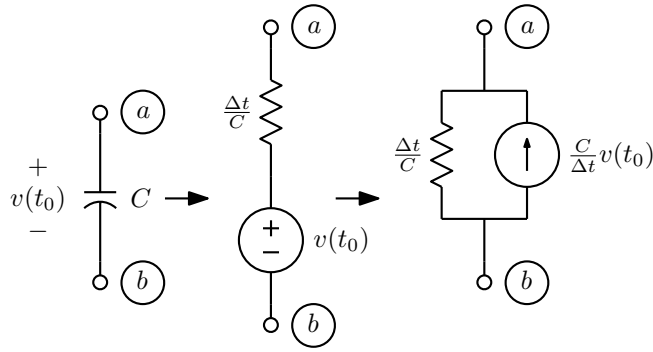


Figura 1.97: Capacitor no método “backward” de Euler.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{2C}{\Delta t} & -\frac{2C}{\Delta t} \\ -\frac{2C}{\Delta t} & +\frac{2C}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{2C}{\Delta t} v(t_0) + j(t_0) \\ -\frac{2C}{\Delta t} v(t_0) - j(t_0) \end{bmatrix}$$

1.13.5 Indutor linear invariante no tempo

$$j(t_0 + \Delta t) = j(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Método “backward” de Euler:

$$\begin{aligned} j(t_0 + \Delta t) &\approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{L} v(t_0 + \Delta t) \\ v(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{L}{\Delta t} (j(t_0 + \Delta t) - j(t_0)) \end{aligned}$$

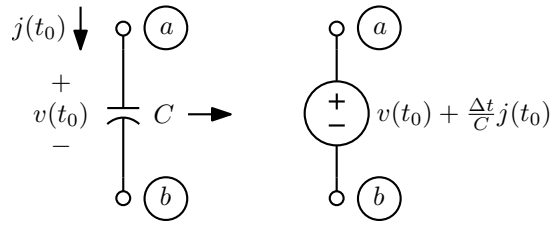


Figura 1.98: Capacitor no método “forward” de Euler.

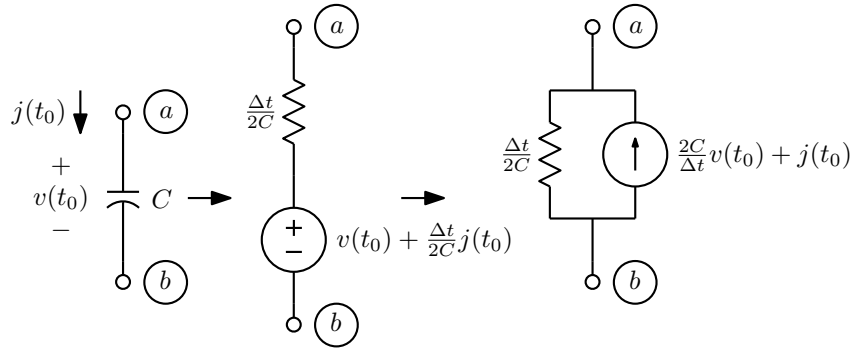


Figura 1.99: Capacitor no método dos trapézios.

Para análise nodal simples, usa-se a forma com controle por tensão.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\Delta t}{L} & -\frac{\Delta t}{L} \\ -\frac{\Delta t}{L} & +\frac{\Delta t}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(t_0) \\ +j(t_0) \end{bmatrix}$$

Para análise nodal modificada, usa-se o modelo controlado a corrente, com a vantagem de se ter a corrente calculada.

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & +\frac{L}{\Delta t} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ +\frac{L}{\Delta t}j(t_0) \end{bmatrix}$$

Método “forward” de Euler:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{L}v(t_0)$$

O modelo é uma fonte de corrente, compatível com a análise nodal simples. Este modelo pode ser usado junto com capacitores modelados pelo método “backward” de Euler, com menos erro do que se forem todos os elementos modelados pelo mesmo método de Euler. Blocos de circuito conectados ao resto apenas por indutores e fontes de corrente são proibidos.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{L}v(t_0) - j(t_0) \\ +\frac{\Delta t}{L}v(t_0) + j(t_0) \end{bmatrix}$$

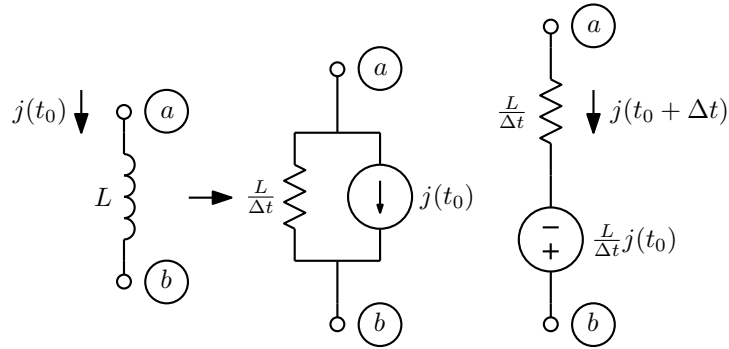


Figura 1.100: Indutor no método “backward” de Euler.

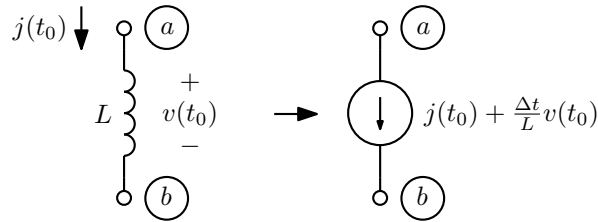


Figura 1.101: Indutor no método “forward” de Euler.

Método dos trapézios:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{2L}(v(t_0) + v(t_0 + \Delta t))$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2L}{\Delta t}(j(t_0 + \Delta t) - j(t_0)) - v(t_0)$$

Novamente se tem um modelo para uso na análise nodal simples, que exige cálculo da corrente após a análise, e um modelo mais conveniente para a análise nodal modificada, com cálculo da corrente:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\Delta t}{2L} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ -\frac{\Delta t}{2L} & +\frac{\Delta t}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -j(t_0) - \frac{\Delta t}{2L}v(t_0) \\ +j(t_0) + \frac{\Delta t}{2L}v(t_0) \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vdots & +1 \\ \cdot & \cdot & \vdots & -1 \\ -1 & +1 & \vdots & +\frac{2L}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ +\frac{2L}{\Delta t}j(t_0) + v(t_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.13.6 Transformador linear invariante no tempo

Basta generalizar o caso do indutor para uma forma matricial.

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) = \vec{j}(t_0) + [\Gamma] \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

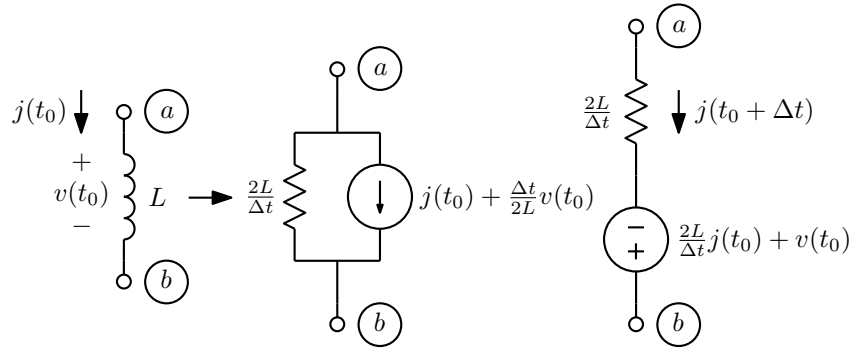


Figura 1.102: Indutor no método dos trapézios.

Método “backward” de Euler

$$\begin{aligned}\vec{j}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{j}(t_0) + \Delta t[\Gamma]\vec{v}(t_0 + \Delta t) \\ \vec{v}(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta t}[L](\vec{j}(t_0 + \Delta t) - \vec{j}(t_0))\end{aligned}$$

Para o caso de dois enrolamentos correspondendo à primeira forma na figura 1.103, na forma para análise nodal simples a estampa é:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} +\Gamma_{11}\Delta t & -\Gamma_{11}\Delta t & +\Gamma_{12}\Delta t & -\Gamma_{12}\Delta t \\ -\Gamma_{11}\Delta t & +\Gamma_{11}\Delta t & -\Gamma_{12}\Delta t & +\Gamma_{12}\Delta t \\ +\Gamma_{21}\Delta t & -\Gamma_{21}\Delta t & +\Gamma_{22}\Delta t & -\Gamma_{22}\Delta t \\ -\Gamma_{21}\Delta t & +\Gamma_{21}\Delta t & -\Gamma_{22}\Delta t & +\Gamma_{22}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{ab}(t_0) \\ +j_{ab}(t_0) \\ -j_{cd}(t_0) \\ +j_{cd}(t_0) \end{bmatrix}$$

E para análise nodal modificada, correspondendo à segunda forma na figura 1.103, a estampa é:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +\frac{L_1}{\Delta t} & +\frac{M}{\Delta t} \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +\frac{M}{\Delta t} & +\frac{L_2}{\Delta t} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \\ \hline j_{ab}(t_0 + \Delta t) \\ j_{cd}(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +\frac{1}{\Delta t}(L_1 j_{ab}(t_0) + M j_{cd}(t_0)) \\ +\frac{1}{\Delta t}(M j_{ab}(t_0) + L_2 j_{cd}(t_0)) \end{bmatrix}$$

Como acontece em outras análises envolvendo transformadores na análise nodal modificada, as estampas dos indutores e do acoplamento são independentes. E como no caso dos indutores não acoplados, na análise nodal simples é necessário calcular as correntes após análise, para usar no passo seguinte. A análise nodal modificada calcula tudo diretamente.

Método “forward” de Euler:

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{j}(t_0) + \Delta t[\Gamma]\vec{v}(t_0)$$

Só existe a forma para análise nodal simples, que gera fontes de corrente, com memória falsa das tensões. Para o caso de dois enrolamentos:

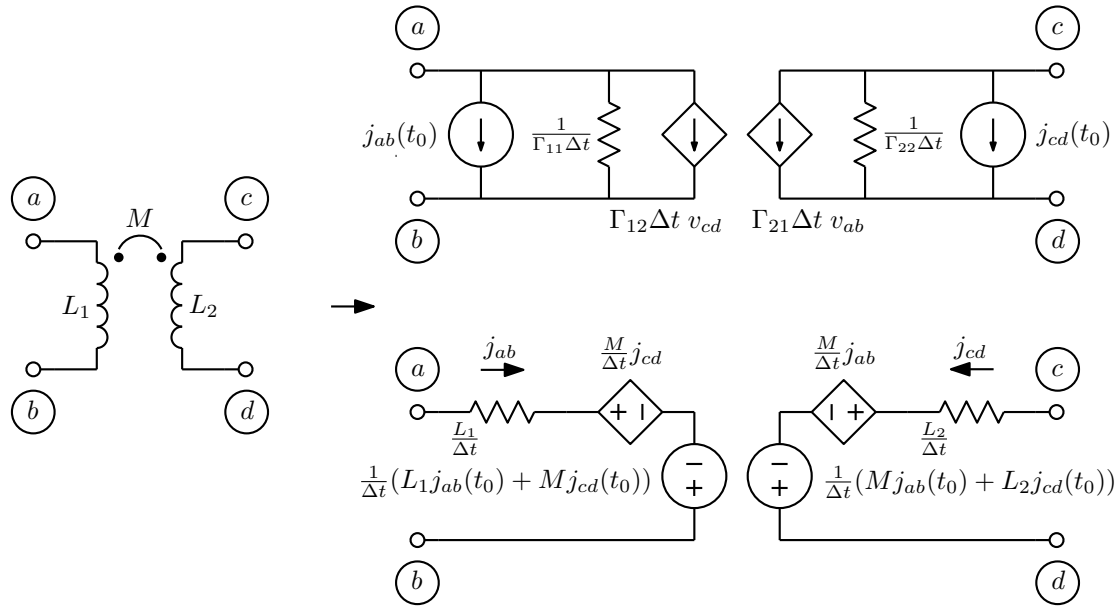


Figura 1.103: Transformador com dois enrolamentos no método “backward” de Euler.

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{ab}(t_0) - \Delta t (\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{ab}(t_0) + \Delta t (\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ -j_{cd}(t_0) - \Delta t (\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{cd}(t_0) + \Delta t (\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \end{bmatrix}$$

Figura 1.104: Transformador com dois enrolamentos no método “forward” de Euler.

Método dos trapézios:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{j}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} [\Gamma](\vec{v}(t_0) + \vec{v}(t_0 + \Delta t)) \\
 \vec{v}(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{2}{\Delta t} [L](\vec{j}(t_0 + \Delta t) - \vec{j}(t_0)) - \vec{v}(t_0)
 \end{aligned}$$

Para o caso de dois enrolamentos, correspondendo à figura 1.105, a estampa para análise nodal simples é:

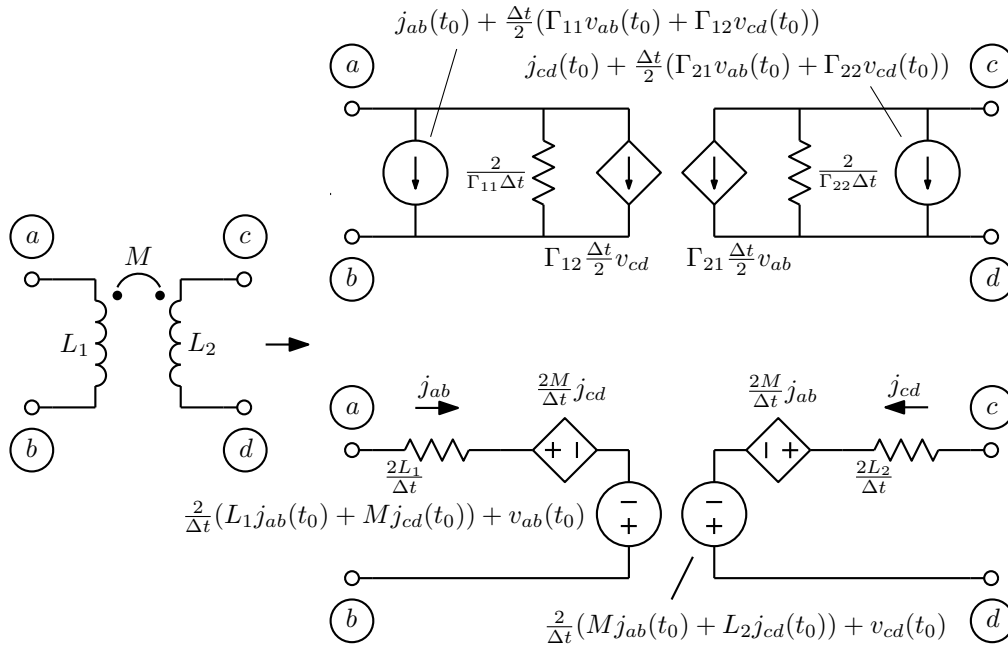


Figura 1.105: Transformador com dois enrolamentos no método dos trapézios.

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} +\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} \\ -\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} \\ +\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} \\ -\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{ab}(t_0) - \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{ab}(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ -j_{cd}(t_0) - \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{cd}(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \end{bmatrix}$$

E para análise nodal modificada, correspondendo à segunda forma na figura 1.105, a estampa é:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +\frac{2L_1}{\Delta t} & +\frac{2M}{\Delta t} \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +\frac{2M}{\Delta t} & +\frac{2L_2}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \\ \hline j_{ab}(t_0 + \Delta t) \\ j_{cd}(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +\frac{2}{\Delta t}(L_1j_{ab}(t_0) + Mj_{cd}(t_0)) + v_{ab}(t_0) \\ +\frac{2}{\Delta t}(Mj_{ab}(t_0) + L_2j_{cd}(t_0)) + v_{cd}(t_0) \end{bmatrix}$$

1.13.7 Controle do passo

O “passo de integração” Δt determina a precisão da aproximação, e pode ser fixo ou variável. Métodos de passo variável são melhores para análise correta e eficiente de circuitos em que se misturem eventos

rápidos e lentos. É necessário então um algoritmo para a variação adaptativa do passo, determinando passo menor durante eventos rápidos e passo maior quando não está havendo muita atividade.

No caso dos métodos de Euler, o erro em cada integração pode ser estimado por comparação com o que seria calculado com o método dos trapézios, mais preciso. O erro em um passo na integração de $f(t)$ é então a área do triângulo com base Δt e altura $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Ver a figura 1.106.

$$\epsilon \approx \pm \frac{\Delta t (f(t_0 + \Delta t) - f(t_0))}{2}$$

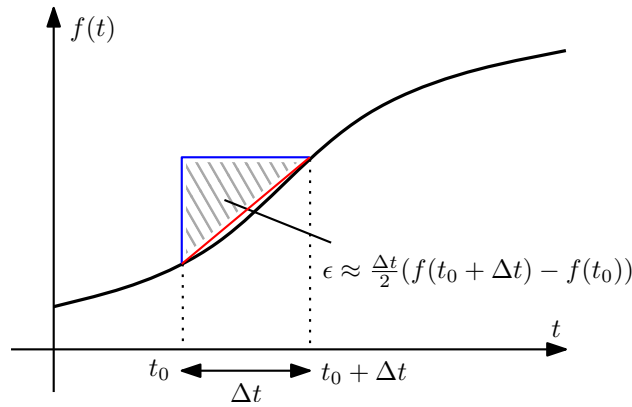


Figura 1.106: Erro de integração no método “backward” de Euler.

Erros relativos podem ser calculados dividindo os erros assim calculados pelos valores atuais das variáveis integradas. Para evitar divisão por zero, os erros podem ser normalizados apenas se as variáveis integradas forem maiores que 1, em módulo. O controle de passo pode então usar o algoritmo, no caso linear invariante no tempo⁴³:

1. Calcular os erros em todas as integrações:

- Capacitores: $\epsilon \approx \frac{\Delta t}{2C} (j(t_0 + \Delta t) - j(t_0))$
- Indutores: $\epsilon \approx \frac{\Delta t}{2L} (v(t_0 + \Delta t) - v(t_0))$
- Transformadores: $\vec{\epsilon} \approx \frac{\Delta t}{2} [\Gamma] (\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0))$.

2. Normalizar os erros, opcionalmente, dividindo erros em capacitores pela tensão atual e erros em indutores e transformadores pela corrente atual.

3. Achar o maior erro em módulo, $|\epsilon_{max}|$.

4. Se o maior erro é maior que um limite superior e_{max} , dividir o passo por um fator α . Senão, se o maior erro é menor que um limite inferior e_{min} , multiplicar o passo pelo fator α . Senão, manter o mesmo passo.

5. Verificar se o passo está entre limites máximo e mínimo especificados, e voltá-lo a estes limites se não estiver.

6. Se o passo diminuiu, a última análise está com erro excessivo e deve ser refeita.

⁴³Método implementado no programa MNAV.

Notar que os erros em capacitores são medidos por comparação de correntes (que devem então ser calculadas), e que erros em elementos indutivos são medidos por comparação de tensões. Valores adequados para os parâmetros a usar podem ser $\alpha = \sqrt{2}$, com $e_{max} = 1.5e_{med}$ e $e_{min} = 0.67e_{med}$. Assim se o erro cair um pouco abaixo de e_{min} ou pouco acima de e_{max} deverá ficar próximo do outro limite no passo seguinte, pois o erro é proporcional ao quadrado do passo. Evita-se assim muitas trocas de passo, com recálculos sempre que o passo diminui.

É possível aplicar o erro calculado como descrito a outros métodos de integração mais precisos, mas o erro fica superestimado e o passo menor que o necessário. É possível definir um processo semelhante para o método dos trapézios, com o erro calculado por diferença entre áreas sob parábolas interpoladas em grupos de 2 intervalos de tempo e os valores calculados pelo método. Ver o método de Adams-Moulton de ordem 3, adiante, que faz a interpolação parabólica.

Outro método, aplicável diretamente a todos os métodos de integração, pode ser simplesmente exigir que todas as variáveis tenham variações máximas normalizadas dentro de certa faixa dentro de um passo. O controle é similar ao do caso discutido, com dois limites de erro e o passo sendo ajustado para que o erro máximo fique entre eles, com a última análise abandonada sempre que o passo for reduzido.

Pode ser útil diminuir o passo na análise de circuitos não lineares se o método de Newton-Raphson não convergir, embora isto possa apenas refinar o instante de tempo em que a não convergência ocorre.

Em um circuito não linear, um grande número de iterações no método de Newton-Raphson indica que o passo está grande demais e um número pequeno que poderia ser usado um passo maior. O passo pode então ser ajustado de acordo com o número de iterações que estão sendo necessárias para a convergência.

Pode haver alguma comunicação com as fontes independentes presentes no circuito. Por exemplo, se uma fonte de tensão variar acima do limite tolerado atual, a análise pode ser feita diretamente com um passo reduzido, evitando-se uma análise que seria rejeitada por variação excessiva. A comunicação também pode ser usada para evitar perda de eventos, como acontece se um passo grande ignorar um pulso gerado por uma fonte dentro do intervalo do passo. Uma fonte pulsada poderia comandar a ocorrência de análises em todos os instantes em que ela muda de inclinação.

1.13.8 Artefatos devidos a memórias falsas

Os métodos “forward” de Euler e dos trapézios geram nos componentes memórias falsas sobre o comportamento em $t = t_0$. Um capacitor tem sua tensão dependendo da corrente anterior e indutores tem sua corrente dependendo da tensão anterior. O circuito da figura 1.107 ilustra um tipo de artefato que frequentemente se observa devido a isto ⁴⁴. Neste circuito há um instante em que a corrente no indutor se anula, quando o diodo corta, mas a tensão sobre o indutor não se anula. Usando o método dos trapézios, o modelo gerado cria uma tensão sobre o indutor proporcional à tensão anterior sobre ele, invertida. O mesmo se repete nos ciclos seguintes, até que o diodo volta a conduzir. O efeito é uma oscilação de alta frequência na tensão sobre o indutor, inexistente na realidade. A figura 1.108 mostra o que acontece, em uma simulação com um diodo ideal.

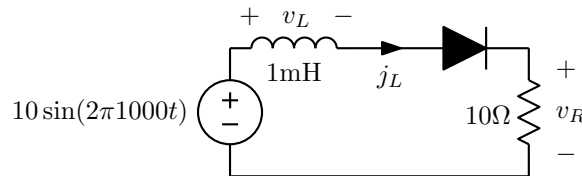


Figura 1.107: Circuito que gera artefato no método dos trapézios

⁴⁴Ver adiante como é feita a análise no tempo de circuitos não lineares.

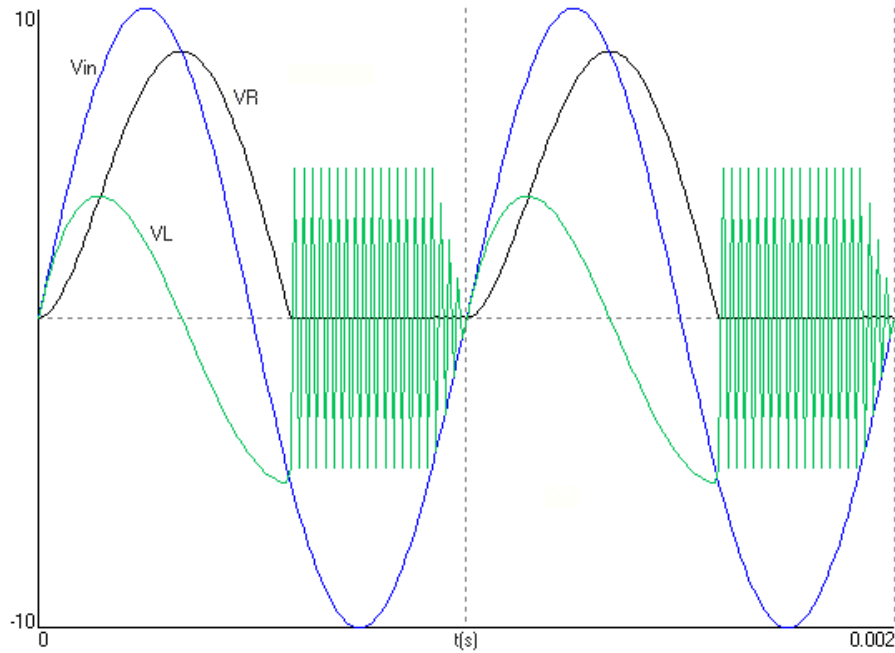


Figura 1.108: Artefato gerado pelo método dos trapézios na tensão sobre o indutor quando a corrente é zerada mas a tensão se mantém. São mostradas a tensão de entrada, a tensão sobre o resistor, proporcional à corrente, e a tensão sobre o indutor.

O método “Forward” de Euler gera artefato ainda mais sério neste circuito, pois tenta forçar corrente no diodo cortado, sem um resistor em paralelo, gerando um sistema singular. O método “backward” de Euler funciona corretamente.

Sempre que um indutor ficar ligado em alta impedância oscilações similares em sua tensão (e na sua corrente se o circuito não for totalmente aberto) podem ocorrer. No caso dual, sempre que um capacitor ficar ligado em baixa impedância oscilações em sua corrente (e na sua tensão se o capacitor não estiver em curto-circuito) podem ocorrer. O efeito é similar ao de se ter um capacitor em paralelo com cada indutor, ou um indutor em série com cada capacitor. Quando estes elementos não existem explicitamente, a oscilação fica com frequência $\frac{1}{2\Delta t}$. É interessante notar que o método dos trapézios “comprime” a escala de frequências de modo a que não apareça na simulação nenhuma frequência maior que esta. Isto pode ser demonstrado observando-se a equação da integração trapezoidal em transformada Z e comparando com uma integração contínua em transformada de Laplace, para $s = j\omega$:

$$\begin{aligned}
y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(x(t_0) + x(t_0 + \Delta t)) \\
Y(Z) &= Z^{-1}Y(Z) + \frac{\Delta t}{2}(Z^{-1}X(Z) + X(Z)) \\
\frac{Y(Z)}{X(Z)} &= \frac{\Delta t}{2} \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \\
\frac{1}{j\omega_s} &= \frac{\Delta t}{2} \frac{1 + e^{-j\omega_s \Delta t}}{1 - e^{-j\omega_s \Delta t}} \\
j\omega_s &= \frac{2}{\Delta t} \frac{e^{j\omega_s \frac{\Delta t}{2}} - e^{-j\omega_s \frac{\Delta t}{2}}}{e^{j\omega_s \frac{\Delta t}{2}} + e^{-j\omega_s \frac{\Delta t}{2}}} = \frac{2}{\Delta t} j \frac{2 \sin \frac{\omega_s \Delta t}{2}}{2 \cos \frac{\omega_s \Delta t}{2}} = j \frac{2}{\Delta t} \tan \frac{\omega_s \Delta t}{2}
\end{aligned}$$

A equação diz que a frequência que se tenta obter, ω_s , é mapeada pela integração trapezoidal na frequência:

$$\omega_z = \frac{2}{\Delta t} \arctan \frac{\omega_s \Delta t}{2}$$

Uma frequência ω_s infinita é mapeada em $\omega_z = \frac{\pi}{\Delta t}$, que tem período $2\Delta t$.

1.13.9 Efeitos em um oscilador LC

A figura 1.109 mostra o que ocorre na simulação da tensão sobre um tanque LC paralelo com valores unitários, com uma tensão inicial unitária sobre o capacitor, com 50 pontos por ciclo. O método “backward” gera um decaimento. O método “forward” gera um crescimento, na mesma frequência. O método dos trapézios gera uma senoide, com frequência um pouco menor que a correta, devido à compressão descrita acima. Quando o capacitor é modelado pelo método “backward” e o indutor pelo método “forward”, obtém-se uma senoide perfeita, com frequência um pouco maior que a correta⁴⁵.

1.13.10 Métodos multipasso⁴⁶

1.13.10.1 Métodos de Adams-Bashforth

O método “forward” de Euler ser estendido, usando-se polinômios de ordem mais alta da variável $f(t)$ para interpolá-la antes de $t = t_0$ e obter valores explícitos para a integral. Pontos conhecidos em $t = t_0$ e antes são usados para interpolar uma curva polinomial, e sua integral a partir de t_0 é calculada. A figura 1.110 mostra as duas possibilidades seguintes ao método “forward” de Euler. As interpolações usando reta e parábola, ordens 2 e 3, geram as aproximações:

$$\begin{aligned}
y(t_0 + \Delta t) &\approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{3}{2}f(t_0) - \frac{1}{2}f(t_0 - \Delta t) \right) \\
y(t_0 + \Delta t) &\approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{23}{12}f(t_0) - \frac{4}{3}f(t_0 - \Delta t) + \frac{5}{12}f(t_0 - 2\Delta t) \right)
\end{aligned}$$

Estes métodos geram modelos como os mostrados para o método “forward” de Euler, como fontes de tensão para capacitores e fontes de corrente para indutores, como mostrado na figura 1.111 para o caso de ordem 2. Transformadores geram conjuntos de fontes de corrente.

⁴⁵Uma análise similar à feita para a integração trapezoidal revela que a frequência vale $\omega_z = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \frac{\omega_s \Delta t}{2}$.

⁴⁶Material opcional.

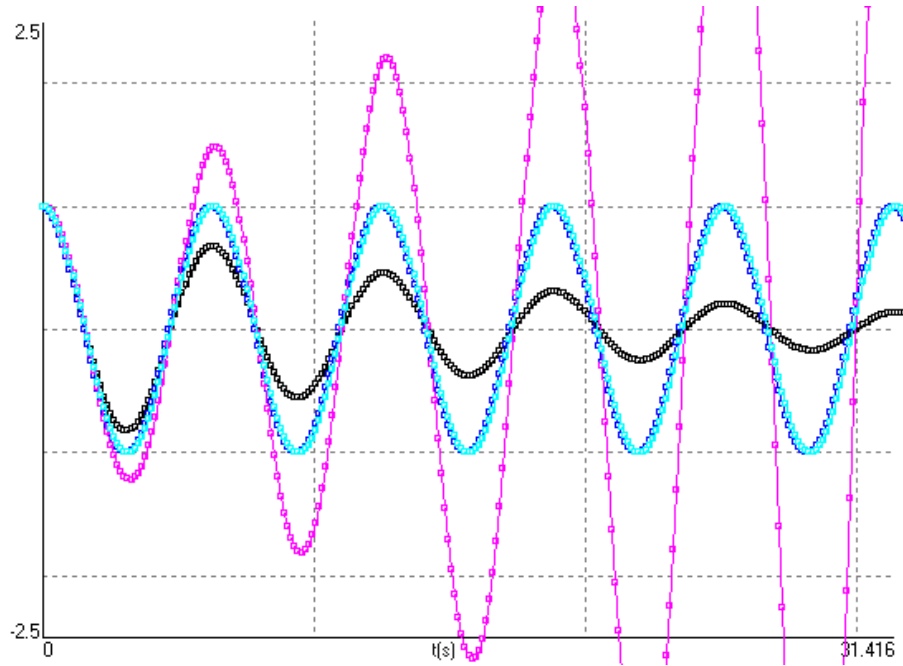


Figura 1.109: Resultados da simulação da tensão sobre um tanque LC. A curva que decai é a do método “backward”. A que cresce a do “forward”. As duas senoides são as do método dos trapézios e da combinação “backward”-“forward”.

1.13.10.2 Métodos de Adams-Moulton

O método “backward” de Euler pode também ser estendido com polinômios de ordem maior usados para interpolar $f(t)$ e gerar valores implícitos para a integral, como mostrado na figura 1.112. A aproximação usando uma constante é o método “backward” de Euler, e usando uma reta é o método dos trapézios. As próximas, usando uma parábola e uma curva cúbica interpoladas até $t_0 + \Delta t$, ordens 3 e 4, levam a:

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{5}{12} f(t_0 + \Delta t) + \frac{2}{3} f(t_0) - \frac{1}{12} f(t_0 - \Delta t) \right)$$

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{3}{8} f(t_0 + \Delta t) + \frac{19}{24} f(t_0) - \frac{5}{24} f(t_0 - \Delta t) + \frac{1}{24} f(t_0 - 2\Delta t) \right)$$

Os modelos gerados são similares aos dos métodos “backward” de Euler e dos trapézios. A figura 1.113 mostra os modelos para capacitor e indutor no método de ordem 3. Transformadores são tratados de forma similar ao caso do método dos trapézios. Notar que as memórias de tensão são parte das estampas dos indutores apenas, sem influência da indutância mútua.

1.13.10.3 Passo variável

Se o passo for variável, é possível obter versões mais gerais destes métodos para Δt variável. Seja o método de Adams-Bashforth de ordem 2, que envolve três pontos, $(t_1, f(t_1))$, $(t_2, f(t_2))$ e $(t_3, f(t_3))$. Assuma-se que a função a integrar é uma reta:

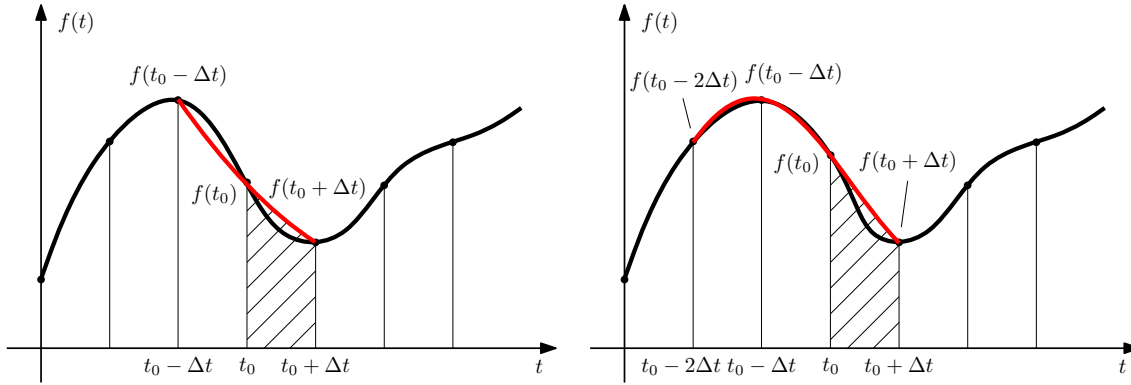


Figura 1.112: Integrações implícitas de Adams-Moulton de ordens 3 e 4, usando parábolas e cúbicas.

Fazendo um procedimento semelhante, também envolvendo três pontos, se obtém a fórmula de Adams-Moulton, para o caso de ordem 3. Assume-se que a função a integrar é uma parábola:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

$$y(t_3) = y(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} f(t)dt = y(t_2) + \frac{a}{3}(t_3^3 - t_2^3) + \frac{b}{2}(t_3^2 - t_2^2) + c(t_3 - t_2)$$

Os coeficientes da parábola que passa por $(t_1, f(t_1))$, $(t_2, f(t_2))$ e $(t_3, f(t_3))$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \end{bmatrix}$$

As soluções são complicadas. Substituindo os coeficientes a , b e c calculados na integral, e fazendo $t_1 = t_0 - \Delta t_a$, $t_2 = t_0$ e $t_3 = t_0 + \Delta t_b$, com Δt_a sendo o passo anterior e Δt_b o novo, vem a fórmula de Adams-Moulton para passo variável de ordem 3:

$$y(t_0 + \Delta t_b) \approx y(t_0) + \Delta t_b \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta t_b}{6(\Delta t_a + \Delta t_b)} \right) f(t_0 + \Delta t_b) + \left(\frac{\Delta t_b}{6\Delta t_a} + \frac{1}{2} \right) f(t_0) + \left(\frac{\Delta t_b}{6(\Delta t_a + \Delta t_b)} - \frac{\Delta t_b}{6\Delta t_a} \right) f(t_0 - \Delta t_a) \right)$$

É possível também aplicar estes métodos com ordem variável, aumentando a ordem até certo limite à medida em que mais amostras sejam calculadas, com algum critério para reduzir no início de transientes abruptos. Em um sistema de passo variável a formulação de passo variável pode ser usada, ou valores anteriores com passo fixo podem ser interpolados.

1.13.10.4 Estabilidade dos métodos de Adams

A estabilidade destes métodos pode ser examinada vendo-se onde o interior do círculo unitário $Z = e^{j\omega_z \Delta t}$ é mapeado no plano complexo, como feito para o método dos trapézios. O resultado são curvas que indicam o que ocorre com as frequências naturais do sistema contínuo quando discretizado pelos métodos. Frequências naturais fora da região mapeada pelo interior do círculo, deformada pela transformação, geram sinais crescentes no tempo, instabilizando o sistema. Por exemplo, o caso de Adams-Moulton de ordem 3 resulta no mapeamento:

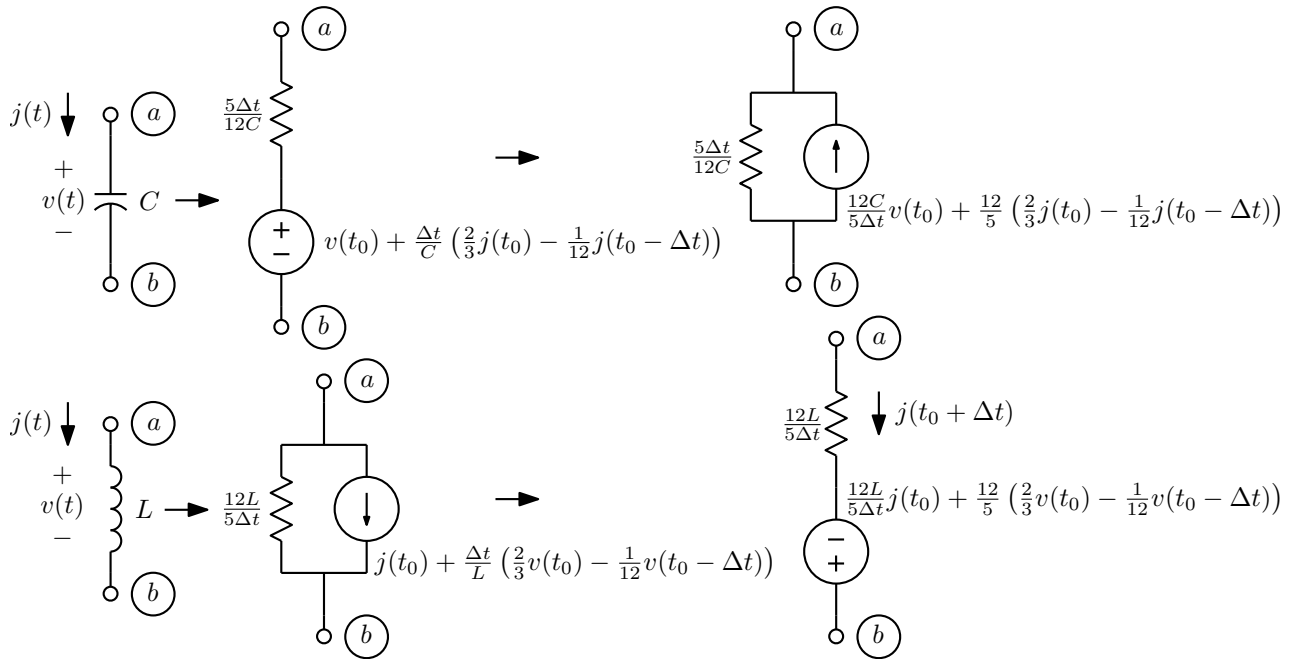


Figura 1.113: Capacitor e indutor no método de Adams-Moulton de ordem 3.

$$s = \frac{Z - 1}{\frac{5}{12}Z + \frac{2}{3} - \frac{1}{12}Z^{-1}}, \quad Z = e^{j\omega_z \Delta t}$$

A figura 1.114 mostra os mapeamentos resultantes dos primeiros métodos de Adams-Bashforth e de Adams-Moulton. Observa-se que apenas os métodos “backward” de Euler e dos trapézios mantêm sempre estáveis sistemas estáveis. As curvas dizem, por exemplo, que o método “backward” de Euler gera oscilações perpétuas para frequências naturais em $+1 \pm j$, e o método “forward” de Euler as gera para frequências naturais em $-1 \pm j$, com $\Delta t = 1$ s ⁴⁷.

1.13.10.5 Controle do passo

A ideia usada para o controle do passo no método “backward” de Euler pode ser estendida aos métodos de Adams, usando-se como mais correto o método de ordem seguinte⁴⁸. Para o método dos trapézios, por exemplo, o erro seria calculado como a diferença entre a integração usando uma reta e a integração usando uma parábola, como mostrado na figura 1.115, assumindo que o passo não muda. Usando a fórmula de Adams-Moulton de ordem 3, observa-se que o erro é aproximadamente 6 vezes menor que o erro do método “backward”. Parece possível ignorar a amostra em $t_0 - \Delta t$ sem muito erro, e controlar o passo da mesma forma descrita para o método “backward”, com apenas um fator de escala de 1/6 no

⁴⁷Um circuito RLC paralelo com $C = 1$ F, $L = 0.5$ H e $R = -0.5 \Omega$, que deveria ser instável por ter frequências naturais em $1 \pm j$, resulta em oscilações perpétuas com período de 4 s com o método “backward” de Euler com $\Delta t = 1$ s. Isto pode ser verificado fazendo-se $s = \frac{Z-1}{Z} = 1 \pm j$. Resolvendo resulta $Z = e^{j\omega_z} = \pm j$, ou $\omega_z = \pm \frac{\pi}{2}$ rad/s, ou $f_z = \pm \frac{1}{4}$ Hz.

⁴⁸A forma mais convencional de calcular este erro envolve derivadas da função $f(t)$ no intervalo da integração. O “erro local de truncamento” (LTE, do inglês) vale $\frac{\Delta t^3}{12} f''(t)$ para trapézios, e $\frac{\Delta t^2}{2} f'(t)$ para os métodos de Euler. Com as derivadas estimadas por diferenças finitas entre pontos calculados, o resultado é idêntico ao do método discutido.

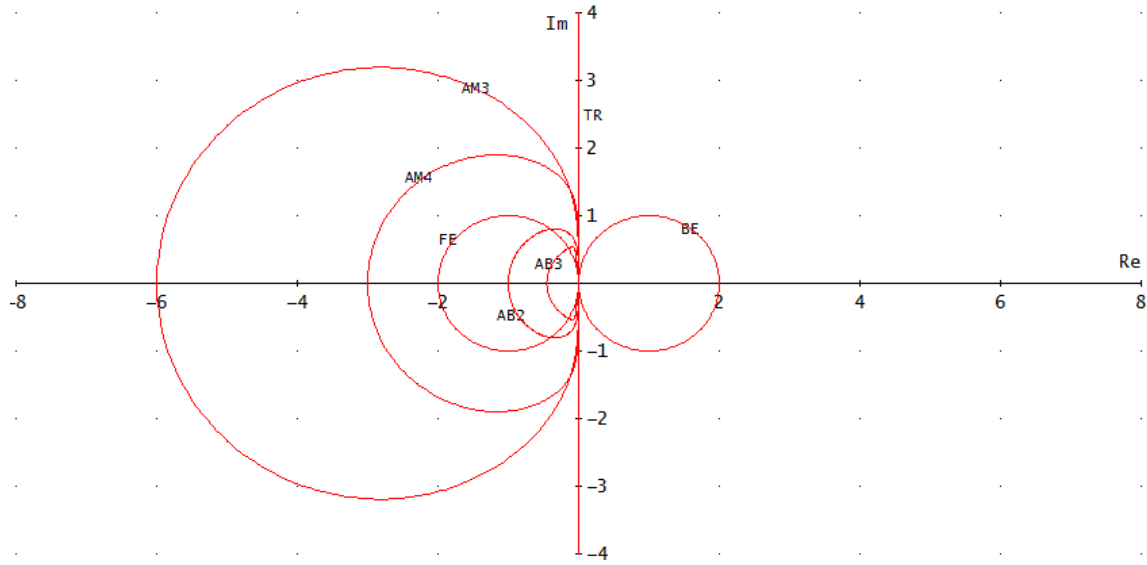


Figura 1.114: Mapeamentos do círculo unitário para vários métodos de Adams-Moulton e Adams-Bashforth. As escalas estão divididas por Δt . A região estável fica à esquerda nas proximidades da origem.

erro:⁴⁹

$$\begin{aligned}\epsilon &\approx \Delta t \left(\frac{1}{2}f(t_0 + \Delta t) + \frac{1}{2}f(t_0) \right) - \Delta t \left(\frac{5}{12}f(t_0 + \Delta t) + \frac{2}{3}f(t_0) - \frac{1}{12}f(t_0 - \Delta t) \right) \\ &= \frac{\Delta t}{12} (f(t_0 + \Delta t) - 2f(t_0) + f(t_0 - \Delta t)) \\ &\approx \frac{\Delta t}{12} (f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)), \text{ se } f(t_0) \approx f(t_0 - \Delta t)\end{aligned}$$

Seria mais correto usar a fórmula de Adams-Moulton para passo variável. Resultam as fórmulas:

$$\begin{aligned}\epsilon &\approx \Delta t_b^2 \left(\frac{\Delta t_a(f(t_0 + \Delta t_b) - f(t_0)) + \Delta t_b(f(t_0) - f(t_0 - \Delta t_a))}{6\Delta t_a(\Delta t_a + \Delta t_b)} \right) \\ &\approx \Delta t_b^2 \left(\frac{(f(t_0 + \Delta t_b) - f(t_0))}{6(\Delta t_a + \Delta t_b)} \right), \text{ se } f(t_0) \approx f(t_0 - \Delta t_a)\end{aligned}$$

Um sério problema é que em situações onde as oscilações parasitas de período $2\Delta t$ ocorram o erro fica superestimado, na forma aproximada ou mais ainda na forma completa, e o passo é logo reduzido a um valor muito pequeno.

Exemplo: Para avaliar a precisão dos métodos com passo variável, o “circuito de Chua”⁵⁰, um oscilador caótico mostrado na figura 1.116, pode ser usado. Uma primeira análise feita com alta precisão determina qual é a forma de onda correta, e os resultados de várias possibilidades de métodos de passo variável são comparados com ela, com o erro máximo ajustado para que resulte aproximadamente o mesmo número

⁴⁹A área hachurada pode ser calculada pelo método da “quadratura da parábola”, de Arquimedes (3º século AC). A área da parábola abc vale $\frac{4}{3}$ da área do triângulo abc , que é $\frac{\Delta t}{2}(f(t_0 + \Delta t) - 2f(t_0) + f(t_0 - \Delta t))$. A área da parábola bc tem $\frac{1}{8}$ desta área, o que dá a fórmula deduzida.

⁵⁰Leon O. Chua, 1983.

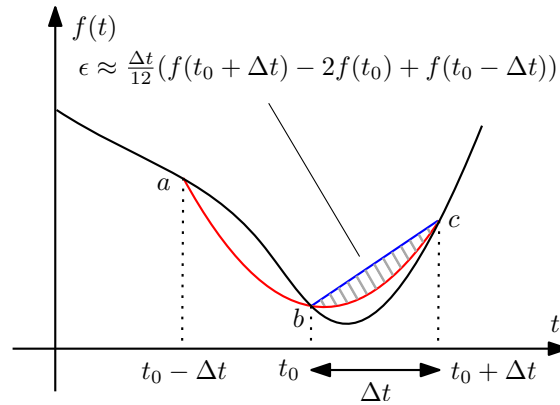


Figura 1.115: Estimativa do erro no método dos trapézios.

de passos. Os métodos que reproduzem mais fielmente a solução correta são os mais precisos. A figura 1.117 mostra o que ocorre com o método dos trapézios com passo variável controlado pelas fórmulas de erro descritas acima. Não há muita diferença, mas a fórmula completa de passo variável estima melhor o erro e resulta no mais longo acompanhamento da solução correta. A fórmula de passo fixo superestima um pouco o erro, mas dá quase o mesmo resultado. As fórmulas aproximadas superestimam muito o erro, resultando em mais curto acompanhamento⁵¹. Análises do mesmo circuito com passo fixo produzem erros similares aos das fórmulas aproximadas. Note-se que este circuito não apresenta transientes rápidos, e portanto não explora efetivamente as técnicas de passo variável. É usado aqui apenas para a avaliação do erro que resulta das aproximações na forma de estimar o erro nas integrações.

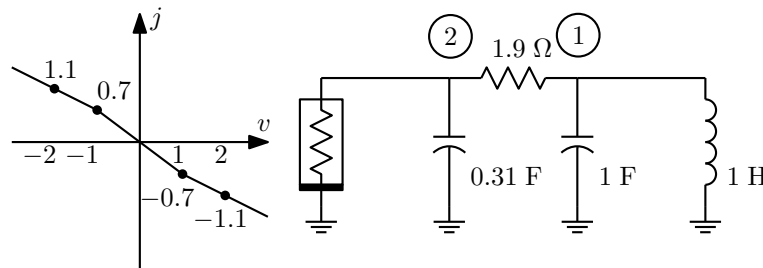


Figura 1.116: Circuito de Chua, normalizado.

Os métodos multipasso de Adams-Bashforth e Adams-Moulton tem problemas com “memórias falsas”, e quando usados para capacitores requerem o cálculo e armazenamento das correntes neles. Ambos tem problemas de estabilidade semelhantes aos do método “forward” de Euler, no sentido em que instabilizam oscilações senoidais perpétuas. Um problema particularmente sério é que circuitos que contêm ciclos de capacitores e fontes de tensão ou cortes de indutores e fontes de corrente ficam instáveis nos métodos de Adams-Moulton de ordem maior que 2, pois uma “frequência natural infinita”⁵² fica fora da região

⁵¹Análises com o programa MNAV. Condições iniciais de 10 mV nos capacitores. Ver adiante como é feita a análise no tempo de circuitos não lineares. Um erro de 10^{-4} é suficiente para resultados corretos em todos os casos. Com o método “backward” é necessário um erro de 10^{-7} .

⁵²Um ciclo de capacitores com uma pequena indutância em série gera frequências naturais imaginárias em alta frequência. Sem a indutância pode-se dizer que gera “frequências naturais no infinito”. O caso dual ocorre com cortes de indutores.

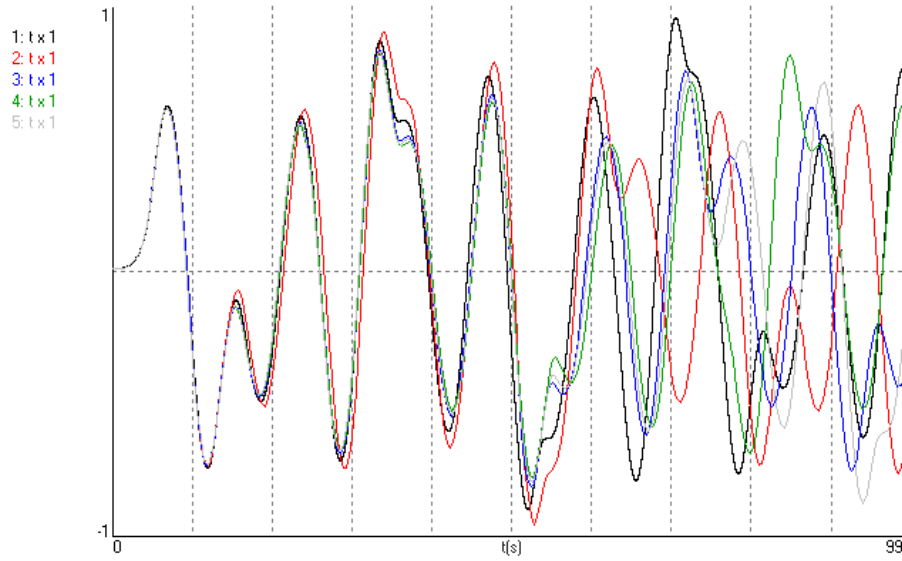


Figura 1.117: Comparação entre a solução ideal do circuito de Chua no nó 1 (1) e aproximações por trapézios com passo variável com várias fórmulas para o erro. 2) Passo variável, $\epsilon_{max} = 0.002$. 3) Passo fixo, $\epsilon_{max} = 0.0022$. 4) Passo variável aproximada, $\epsilon_{max} = 0.0049$. 5) Passo fixo aproximada, $\epsilon_{max} = 0.00495$. Análises com 258 pontos.

estável. Nos métodos de Adams-Bashforth estes casos nem são simuláveis pois os modelos são singulares. Estas inconveniências os tornam pouco práticos para uso geral na simulação de circuitos.

1.13.11 Métodos de Gear

Os métodos multipasso de Gear⁵³ geram uma série de aproximações cada vez melhores para integrações, usando valores anteriores da função a integrar em vez de valores da função integrada. Isto evita o efeito de “memória falsa” dos métodos “forward” de Euler, dos trapézios e dos de Adams, embora introduza outros tipos de erro, pois continuam existindo memórias indevidas, mesmo que da variável correta. Os métodos tem também boa estabilidade. O problema é encontrar uma forma aproximada de resolver:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt$$

sem precisar usar valores anteriores de $f(t)$ na equações de integração numérica. Assume-se que $f(t)$ seja uma função polinomial do tempo, por conveniência com a origem do tempo em t_0 :

$$f(t) = k_n(t - t_0)^n + k_{n-1}(t - t_0)^{n-1} + \dots + k_0$$

e que a função integral possa ser escrita como:

$$y(t) = a_0 y(t - \Delta t) + a_1 y(t - 2\Delta t) + a_2 y(t - 3\Delta t) + \dots + b \Delta t f(t)$$

⁵³Também conhecidos como métodos BDF, de “backward differentiation formula”.

Procura-se então uma solução exata, que independa dos coeficientes k_i . Com a aproximação polinomial, a integral de $f(t)$ vale:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt = y(t_0) + \frac{k_n}{n+1} \Delta t^{n+1} + \frac{k_{n-1}}{n} \Delta t^n + \dots + k_0 \Delta t$$

que deve ser igual a:

$$y(t_0 + \Delta t) = a_0 y(t_0) + a_1 y(t_0 - \Delta t) + a_2 y(t_0 - 2\Delta t) + \dots + b \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

Caso de primeira ordem:

$$y(t_0) + k_0 \Delta t = a_0 y(t_0) + b \Delta t k_0$$

$$a_0 = 1; \quad b = 1$$

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

É uma aproximação igual à do método “backward” de Euler.

Caso de segunda ordem:

$$y(t_0) + \frac{1}{2} k_1 \Delta t^2 + k_0 \Delta t = a_0 y(t_0) + a_1 \left(y(t_0) + \frac{1}{2} k_1 \Delta t^2 - k_0 \Delta t \right) + b \Delta t (k_1 \Delta t + k_0)$$

$$\text{Termos em } y(t_0) : a_0 + a_1 = 1$$

$$\text{Termos em } k_0 \Delta t : -a_1 + b = 1$$

$$\text{Termos em } k_1 \Delta t^2 : \frac{1}{2} a_1 + b = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{4}{3}; \quad a_1 = -\frac{1}{3}; \quad b = \frac{2}{3}$$

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{4}{3} y(t_0) - \frac{1}{3} y(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

Caso de terceira ordem:

$$\begin{aligned} & y(t_0) + \frac{1}{3} k_2 \Delta t^3 + \frac{1}{2} k_1 \Delta t^2 + k_0 \Delta t = \\ & = a_0 y(t_0) + a_1 \left(y(t_0) - \frac{1}{3} k_2 \Delta t^3 + \frac{1}{2} k_1 \Delta t^2 - k_0 \Delta t \right) + \\ & + a_2 \left(y(t_0) - \frac{8}{3} k_2 \Delta t^3 + \frac{4}{2} k_1 \Delta t^2 - 2k_0 \Delta t \right) + b \Delta t (k_2 \Delta t^2 + k_1 \Delta t + k_0) \end{aligned}$$

$$\text{Termos em } y(t_0) : a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

$$\text{Termos em } k_0 \Delta t : -a_1 - 2a_2 + b = 1$$

$$\text{Termos em } k_1 \Delta t^2 : \frac{1}{2} a_1 + 2a_2 + b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Termos em } k_2 \Delta t^3 : -\frac{1}{3} a_1 - \frac{8}{3} a_2 + b = \frac{1}{3}$$

$$a_0 = \frac{18}{11}; \quad a_1 = -\frac{9}{11}; \quad a_2 = \frac{2}{11}; \quad b = \frac{6}{11}$$

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{18}{11} y(t_0) - \frac{9}{11} y(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{11} y(t_0 - 2\Delta t) + \frac{6}{11} \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

Caso geral:

Para qualquer ordem resulta um sistema de $n + 1$ equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (-1)^n & (-2)^n & (-3)^n & \cdots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

O método de Gear de quarta ordem resulta em:

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{48}{25}y(t_0) - \frac{36}{25}y(t_0 - \Delta t) + \frac{16}{25}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{3}{25}y(t_0 - 3\Delta t) + \frac{12}{25}\Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

O método de quinta ordem é:

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{300}{137}y(t_0) - \frac{300}{137}y(t_0 - \Delta t) + \frac{200}{137}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{75}{137}y(t_0 - 3\Delta t) + \frac{12}{137}y(t_0 - 4\Delta t) + \frac{60}{137}\Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

E o de sexta ordem é:

$$\begin{aligned} y(t_0 + \Delta t) = & \frac{120}{49}y(t_0) - \frac{150}{49}y(t_0 - \Delta t) + \frac{400}{147}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{75}{49}y(t_0 - 3\Delta t) \\ & + \frac{24}{49}y(t_0 - 4\Delta t) - \frac{10}{147}y(t_0 - 5\Delta t) + \frac{20}{49}\Delta t f(t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

O método de ordem n integra corretamente funções polinomiais de ordem $n - 1$, desde que os valores anteriores requeridos estejam corretos. Note que esses métodos geram transientes falsos quando a função a integrar muda repentinamente de valor. Os métodos de Gear com ordens maiores que 6 geram transientes crescentes, e são instáveis. O método de ordem 7, por exemplo, resulta em:

$$\begin{aligned} y(t_0 + \Delta t) = & \frac{980}{363}y(t_0) - \frac{490}{121}y(t_0 - \Delta t) + \frac{4900}{1089}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{1225}{363}y(t_0 - 3\Delta t) \\ & + \frac{196}{121}y(t_0 - 4\Delta t) - \frac{490}{1089}y(t_0 - 5\Delta t) + \frac{20}{363}y(t_0 - 6\Delta t) + \frac{140}{363}\Delta t f(t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

1.13.11.1 Estabilidade dos métodos de Gear

A estabilidade para entrada zero destes métodos pode ser avaliada escrevendo-se a expressão da integração em transformada Z :

$$\begin{aligned} Y(Z) &= a_0 Z^{-1}Y(Z) + a_1 Z^{-2}Y(Z) + \cdots + a_{n-1} Z^{-n} + b\Delta t F(Z) \\ \frac{Y(Z)}{F(Z)} &= \frac{b\Delta t Z^n}{Z^n - a_0 Z^{n-1} - \cdots - a_{n-1}} \end{aligned}$$

Para estabilidade, as raízes do polinômio do denominador da expressão tem que estar todas dentro do círculo unitário. Os polinômios gerados pelos métodos de Gear tem sempre uma raiz em $Z = 1$, e outras raízes, dentro do círculo até a ordem 6. A ordem 7 gera um par complexo um pouco fora do círculo, o que continua em ordens maiores. O mesmo critério aplicado aos métodos de Adams-Bashforth

e Adams-Moulton gera apenas a raiz em $Z = 1$, significando que eles são estáveis se a variável a integrar $f(t)$ for zerada.

A estabilidade em função das frequências naturais do sistema simulado pode ser avaliada vendo-se onde o círculo unitário é mapeado. Resultam as curvas da figura 1.118. Por exemplo, o caso de ordem 3 resulta em:

$$s = \frac{Z - \frac{18}{11} + \frac{9}{11}Z^{-1} - \frac{2}{11}Z^{-2}}{\frac{6}{11}Z}, Z = e^{j\omega_z \Delta t}$$

Os métodos de primeira e segunda ordens são estáveis para qualquer sistema contínuo estável. Os demais podem instabilizar sistemas com frequências naturais próximas do eixo imaginário que estejam em certas faixas⁵⁴.

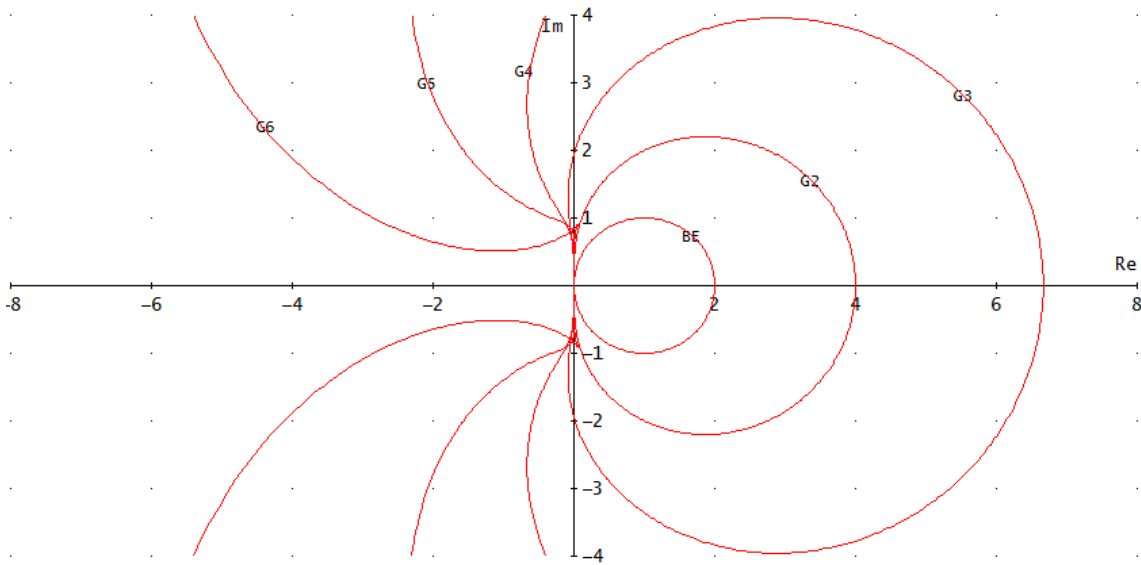


Figura 1.118: Mapeamentos do círculo unitário para os métodos de Gear. As escalas estão divididas por Δt . A região estável fica à esquerda nas proximidades da origem. As curvas para ordens acima de 3 não são mostradas completas.

1.13.11.2 Uso do método de Gear de segunda ordem em análise de circuitos no tempo

As equações que resultam são extensões das do método “backward” de Euler, com referências a valores anteriores a $t = t_0$ para os métodos de ordem maior que um. A seguir são descritas as aplicações do método de segunda ordem aos elementos reativos usuais, lineares invariantes no tempo, e os modelos resultantes. As estampas são similares às do método “backward” de Euler.

1.13.11.3 Capacitor linear invariante no tempo

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt \approx \frac{4}{3}v(t_0) - \frac{1}{3}v(t_0 - \Delta t) + \frac{2\Delta t}{3C} j(t_0 + \Delta t)$$

⁵⁴Para oscilações senoidais, as faixas instáveis para $\omega\Delta t$ são: Ordem 3: abaixo de 1.937. Ordem 4: abaixo de 4.714. Ordem 5: entre 0.7108 e 9.393. Ordem 6: entre 0.8431 e 17.57. Notar que valores acima de π resultam em subamostragem.

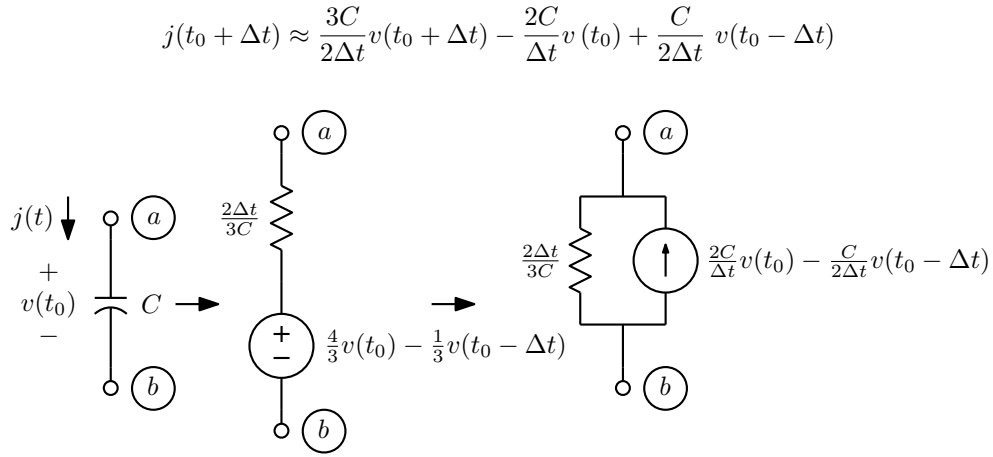


Figura 1.119: Capacitor linear invariante no tempo no método de Gear de segunda ordem.

1.13.11.4 Indutor linear invariante no tempo

$$j(t_0 + \Delta t) = j(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt \approx \frac{4}{3} j(t_0) - \frac{1}{3} j(t_0 - \Delta t) + \frac{2\Delta t}{3L} v(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3L}{2\Delta t} j(t_0 + \Delta t) - \frac{2L}{\Delta t} j(t_0) + \frac{L}{2\Delta t} j(t_0 - \Delta t)$$

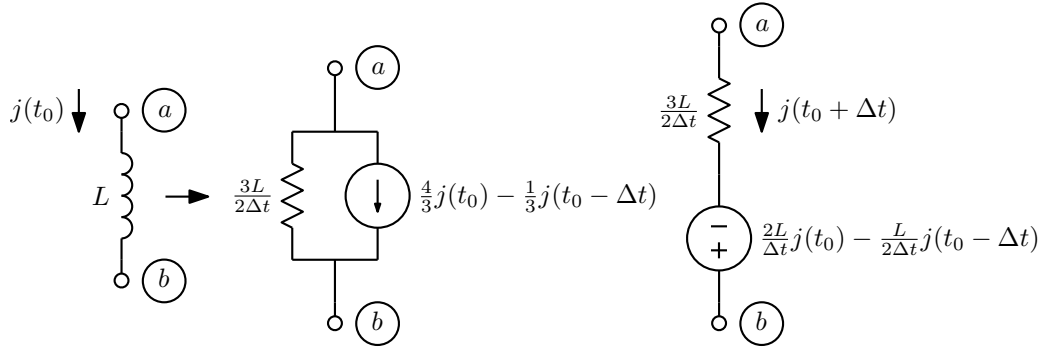


Figura 1.120: Indutor linear invariante no tempo no método de Gear de segunda ordem.

1.13.11.5 Transformador linear invariante no tempo

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) = \vec{j}(t_0) + [\Gamma] \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt \approx \frac{4}{3} \vec{j}(t_0) - \frac{1}{3} \vec{j}(t_0 - \Delta t) + \frac{2\Delta t}{3} [\Gamma] \vec{v}(t_0 + \Delta t)$$

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} [L] \vec{j}(t_0 + \Delta t) - \frac{2}{\Delta t} [L] \vec{j}(t_0) + \frac{1}{2\Delta t} [L] \vec{j}(t_0 - \Delta t)$$

Para 2 enrolamentos:

$$j_{ab}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3}j_{ab}(t_0) - \frac{1}{3}j_{ab}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t (\Gamma_{11}v_{ab}(t_0 + \Delta t) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0 + \Delta t))$$

$$j_{cd}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3}j_{cd}(t_0) - \frac{1}{3}j_{cd}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t (\Gamma_{21}v_{ab}(t_0 + \Delta t) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0 + \Delta t))$$

$$v_{ab}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0 + \Delta t) + M j_{cd}(t_0 + \Delta t)) - \frac{2}{\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0) + M j_{cd}(t_0)) + \frac{1}{2\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0 - \Delta t) + M j_{cd}(t_0 - \Delta t))$$

$$v_{cd}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} (M j_{ab}(t_0 + \Delta t) + L_2 j_{cd}(t_0 + \Delta t)) - \frac{2}{\Delta t} (M j_{ab}(t_0) + L_2 j_{cd}(t_0)) + \frac{1}{2\Delta t} (M j_{ab}(t_0 - \Delta t) + L_2 j_{cd}(t_0 - \Delta t))$$

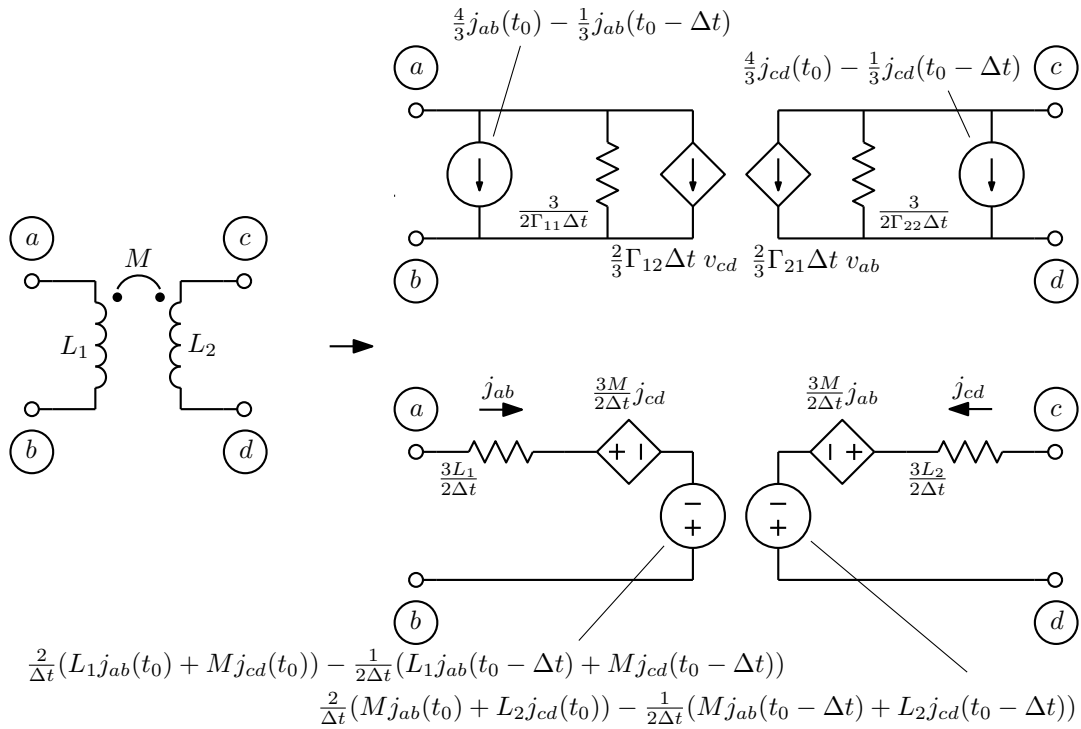


Figura 1.121: Transformador com dois enrolamentos no método de Gear de segunda ordem.

1.13.11.6 Ordem e passo variáveis nos métodos de Gear

Os métodos de Gear podem ser aplicados com ordem variável. É possível, por exemplo, começar uma análise com o cálculo do ponto de operação, e a seguir usar o método com ordem 1, 2, 3, etc., até 6, sucessivamente. Isso é simples se o passo for fixo. Se for variável, a ordem do método pode ser voltada a 1 a cada mudança de passo, ou valores anteriores podem ser interpolados a partir das análises já feitas, o que é um tanto custoso. Para usar o método sempre com a mesma ordem, é possível assumir que valores anteriores à primeira análise sejam todos os do ponto de operação, embora isso possa gerar transientes

iniciais incorretos. Em mudanças de passo, os valores anteriores devem ser interpolados. A estimativa do erro para ajuste do passo pode ser feita de forma similar à descrita para os métodos de Adams-Moulton.

Exemplo: Seja simular o circuito de Chua, figura 1.116 com as integrações de Gear de passo fixo, com o mesmo número de pontos (258) usado nas simulações da figura 1.117. Variando a ordem do método os resultados são mostrados na figura 1.122. O método de ordem 1 falha logo no primeiro ciclo e nem gera a oscilação caótica. O de ordem 2 é bem melhor mas falha pouco depois neste exemplo. Os demais aproximam bem a curva por bom tempo, em ordem crescente de precisão.

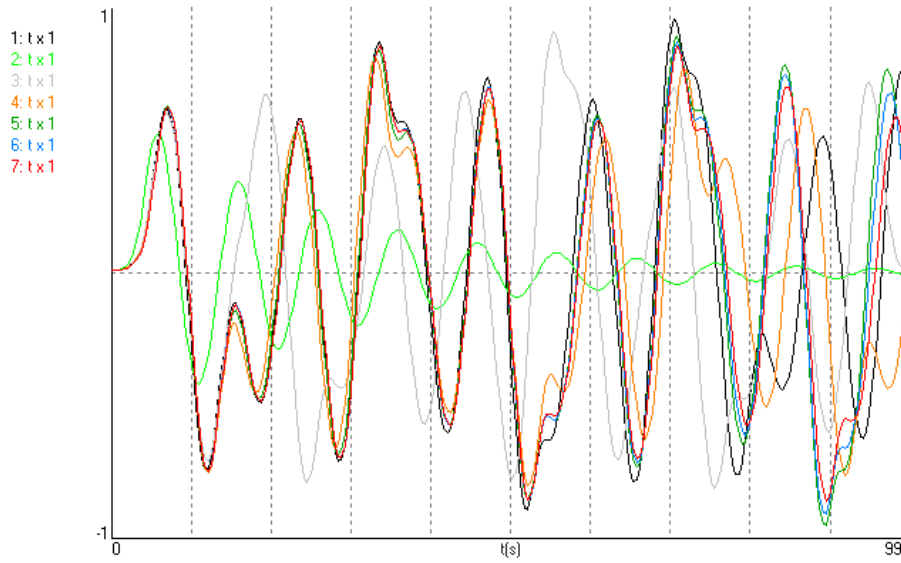


Figura 1.122: Simulações do circuito de Chua com os métodos de Gear. 1) Curva correta. 2-7) Métodos de Gear de ordens 1-6. 258 pontos.

1.13.12 Análise no tempo de circuitos lineares variantes no tempo

Os métodos de integração numérica já descritos podem ser facilmente aplicados ao caso linear invariante no tempo, partindo-se das integrações que não tem forma diferente apenas porque o circuito varia com o tempo, como descrito a seguir.

1.13.12.1 Capacitor linear variante no tempo

A integração fundamental associada ao capacitor é de que a carga é a integral da corrente:

$$q(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

E para o capacitor linear variante no tempo a capacitância $C(t)$ varia com o tempo, e tem-se:

$$q(t) = C(t)v(t)$$

$$C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) = C(t_0)v(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

$$v(t_0 + \Delta t) = \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0) + \frac{1}{C(t_0 + \Delta t)} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

A relação mostra que há uma variação de tensão devida apenas à variação da capacitância, além da integral da corrente gerando uma tensão que depende apenas do valor final da capacitância. O primeiro termo pode ser usado para geração de energia elétrica a partir de movimento mecânico variando a capacitância. Supondo o capacitor com capacitância $C(t_0)$ carregado com tensão $v(t_0)$, a energia armazenada nele vale $E(t_0) = \frac{1}{2} C(t_0) v(t_0)^2$. Com o capacitor no valor final $C(t_0 + \Delta t)$, a tensão sobre ele vale $v(t_0 + \Delta t) = \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0)$, e a energia armazenada vale:

$$E(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2} C(t_0 + \Delta t) \left(\frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0) \right)^2 = E(t_0) \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}$$

A energia aumenta se a capacitância diminui. A energia extra vem da força que tem que ser feita para reduzir a capacitância de um capacitor carregado, afastando as placas de um capacitor de placas paralelas no ar, por exemplo. Esse é o princípio usado em todos os geradores eletrostáticos “de influência”, que podem sempre ser considerados como associações de capacitores variantes no tempo (ou com o movimento da máquina) e chaves. O mesmo princípio pode ser usado em motores e atuadores eletrostáticos, onde o aumento de capacitância libera energia, que pode ser usada para realizar trabalho mecânico enquanto as placas do capacitor se aproximam.

1.13.12.2 O dobrador de Bennet

A máquina eletrostática de influência⁵⁵ mais simples é o “dobrador de Bennet”, descrito por Abraham Bennet em 1787 [2]. Ele consiste em três placas condutoras isoladas A , B e C . As placas B e C tem cabos isolantes, e placas isolantes (originalmente verniz) são usadas para separar as placas quando elas formam capacitores. A placa A é a saída principal do dispositivo, mostrada na figura 1.123 ligada a um eletroscópio. O ciclo de operação do dispositivo consiste em duas fases. Na primeira fase a placa central B forma um capacitor com a superior C enquanto esta é aterrada através de um toque. Isto gera na placa C uma cópia invertida da carga na placa B . Na segunda fase a placa superior C é posta em contato com a placa inferior A enquanto a placa central B , formando um capacitor com a inferior A , é aterrada através de outro toque. Isto une as cargas nas placas A e C e dobra também a carga na placa B . Considerando inicialmente as placas A e B carregadas opostamente, estas operações idealmente dobram as cargas nas placas A e B a cada ciclo ((b) e (c) na figura). O dispositivo pode ser usado para multiplicar uma carga inicial, tornando-a observável no eletroscópio. Mas qualquer carga inicial é multiplicada até a saturação em poucos ciclos, tornando o dobrador inútil para multiplicações por fatores elevados. A estrutura, entretanto, serve como gerador de eletricidade estática.

O dobrador pode ser considerado como um conjunto de capacitores e chaves tendo as três placas como nós de conexão, como mostrado na figura 1.124. Os capacitores variáveis são C_{ab} e C_{bc} , que variam de forma complementar. As demais capacitâncias variam também, mas menos, e sua variação pode ser ignorada. Uma análise do sistema mostra que apenas três capacitâncias, C_1 , C_{ab} e C_{bc} são essenciais à operação do sistema, e que apenas C_{ab} é necessariamente variável.

Nesta forma a operação do dispositivo pode ser simulada, tendo-se capacitores variáveis com o tempo modelados. Todos tipos de máquinas eletrostáticas “de influência” podem ser modelados de forma similar. Algumas geram modelos bastante complexos. A máquina de Wimshurst⁵⁶, por exemplo, que possui um par de discos com vários setores metálicos, requer o modelamento de todas as capacitâncias entre pares de setores, embora capacitâncias muito pequenas, entre setores distantes, possam ser ignoradas. Modelos

⁵⁵As “máquinas de influência” são geradores eletrostáticos que operam multiplicando cargas existentes, enquanto as “máquinas de atrito” geram eletricidade por efeito triboelétrico, separação de cargas por contato, ou atrito.

⁵⁶O mais conhecido dos geradores eletrostáticos de influência, desenvolvido por James Wimshurst por 1883.

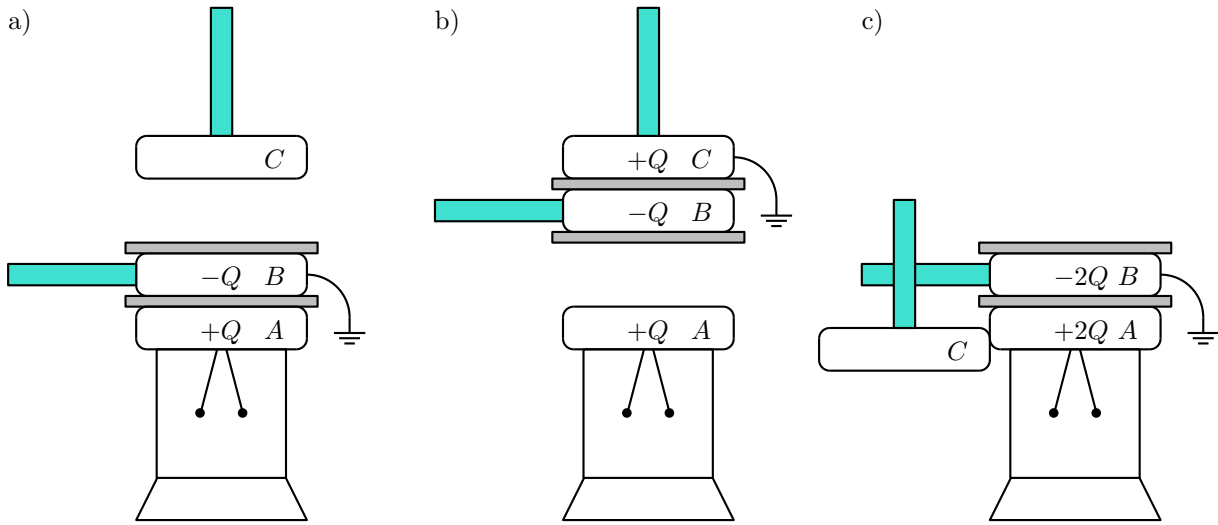


Figura 1.123: Dobrador de Bennet. a) Carga inicial. b) Cópia da carga. c) Duplicação da carga.

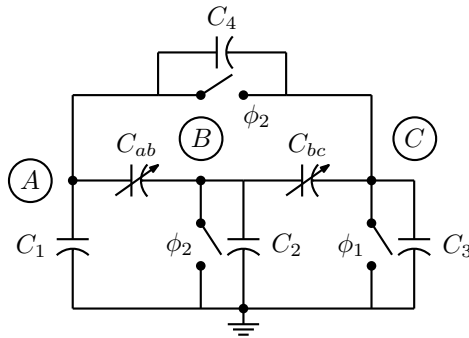


Figura 1.124: Modelo do dobrador de Bennet.

similares, embora não usando explicitamente capacitores variáveis (a formulação é em função das posições onde os setores ficam, e não em função dos próprios setores), foram estudados nos anos 1930 por A. W. Simon [3], para a máquina de Wimshurst e várias outras. Um outro problema, não tratado aqui, é o de como obter os modelos para as capacitâncias em função das posições dos elementos da máquina. Não é difícil obter aproximações, entretanto.

1.13.12.3 Modelamento do capacitor linear variante no tempo

Basta aplicar a relação $q(t) = C(t)v(t)$ às equações de discretização das integrações. Os modelos resultantes tem as mesmas estruturas dos modelos para o caso linear invariante no tempo.

Método “backward” de Euler:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx q(t_0) + \Delta t j(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0) + \frac{\Delta t}{C(t_0 + \Delta t)} j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (C(t_0 + \Delta t) v(t_0 + \Delta t) - C(t_0) v(t_0))$$

Método “forward” de Euler:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx q(t_0) + \Delta t j(t_0)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0) + \frac{\Delta t}{C(t_0 + \Delta t)} j(t_0)$$

Método dos trapézios:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx q(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (j(t_0) + j(t_0 + \Delta t))$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0) + \frac{\Delta t}{2C(t_0 + \Delta t)} (j(t_0) + j(t_0 + \Delta t))$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2}{\Delta t} (C(t_0 + \Delta t) v(t_0 + \Delta t) - C(t_0) v(t_0)) - j(t_0)$$

Método de Gear de segunda ordem:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} q(t_0) - \frac{1}{3} q(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t j(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0) - \frac{1}{3} \frac{C(t_0 - \Delta t)}{C(t_0 + \Delta t)} v(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{C(t_0 + \Delta t)} j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} \left(C(t_0 + \Delta t) v(t_0 + \Delta t) - \frac{4}{3} C(t_0) v(t_0) + \frac{1}{3} C(t_0 - \Delta t) v(t_0 - \Delta t) \right)$$

Note-se que apenas o modelamento “backward” de Euler dá resultados corretos em circuitos como máquinas eletrostáticas, onde existe chaveamento dos capacitores variantes no tempo. Os demais métodos tem o problema de “memória falsa” e geram transientes incorretos nos chaveamentos.

1.13.12.4 Indutor linear variante no tempo

A integração fundamental associada ao indutor é de que o fluxo magnético é a integral da tensão:

$$\phi(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

E para o indutor linear variante no tempo a indutância $L(t)$ varia com o tempo, e tem-se:

$$\phi(t) = L(t) j(t)$$

$$L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) = L(t_0) j(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

$$j(t_0 + \Delta t) = \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{1}{L(t_0 + \Delta t)} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Ocorre algo semelhante ao que ocorre no caso do capacitor, mas com corrente, com a corrente no indutor variando se a indutância variar. Ocorre também ganho de energia quando a indutância é reduzida, num dual ao caso do capacitor:

$$E(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2} L(t_0 + \Delta t) \left(\frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) \right)^2 = E(t_0) \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)}$$

Motores eletromagnéticos, geradores e atuadores mecânicos como relés e solenoides podem ser analisados a partir deste fenômeno. Um gerador de pulso de corrente de alta intensidade pode ser construído fazendo-se passar uma alta corrente por um indutor e então “implodindo” o indutor, procurando zerar sua indutância. É possível até a construção de duais magnéticos de máquinas eletrostáticas, se se desejar, bastando seguir as regras usuais de construção de circuitos duais a partir do modelo com capacitores e chaves. A figura 1.125 mostra como obter um “dobrador indutivo” a partir da versão mínima do dobrador de Bennet. O dual de um capacitor variável é um indutor variável, e o dual de uma chave é uma chave com operação invertida. Assim as chaves que se fechavam em duas fases sem superposição no dobrador capacitivo se fecham em duas fases superpostas no dobrador indutivo. Os capacitores omitidos se transformariam em indutores em série com as chaves, desnecessários (e prejudiciais à operação).

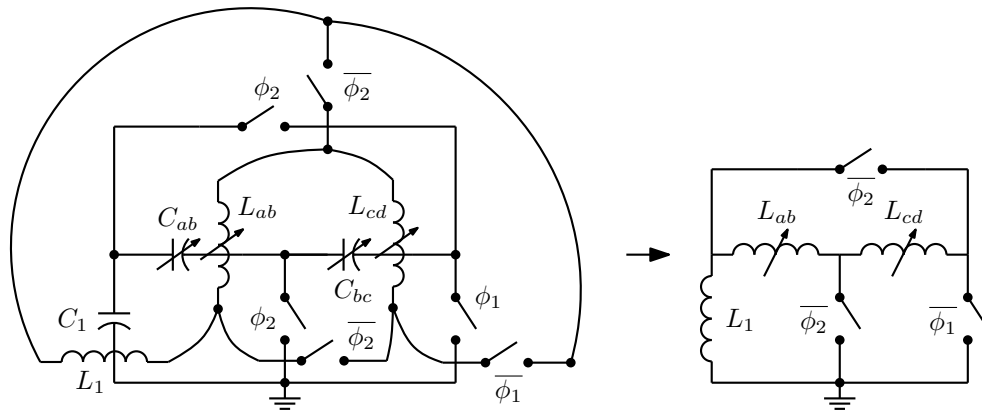


Figura 1.125: Obtenção do modelo do dual do dobrador de Bennet.

O dobrador indutivo gera correntes crescentes nos indutores, na mesma forma como são geradas tensões crescentes no dobrador elétrico. O dobrador elétrico deve ter as constantes de tempo RC grandes em relação ao período do ciclo de operação para que haja pouca perda de energia, com as resistências estando em paralelo com os elementos. Para o dobrador indutivo as constantes de tempo são tipo L/R, com as resistências em série com os elementos. Pode ser difícil mantê-las pequenas o bastante com indutores normais, mas se isto for conseguido a energia obtida pode ser muito maior que no caso do dobrador capacitivo, devido à maior densidade de energia que pode ser obtida de máquinas eletromagnéticas quando essas crescem em tamanho.

1.13.12.5 Modelamento do indutor linear variante no tempo

O tratamento é o dual do caso do capacitor. Basta aplicar a relação $\phi(t) = L(t)j(t)$ às equações de discretização das integrações. Os modelos resultantes tem as mesmas estruturas dos modelos para o caso linear invariante no tempo.

Método “backward” de Euler:

$$\phi(t_0 + \Delta t) \approx \phi(t_0) + \Delta t v(t_0 + \Delta t)$$

$$\begin{aligned} j(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{\Delta t}{L(t_0 + \Delta t)} v(t_0 + \Delta t) \\ v(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta t} (L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) - L(t_0) j(t_0)) \end{aligned}$$

Método “forward” de Euler:

$$\phi(t_0 + \Delta t) \approx \phi(t_0) + \Delta t v(t_0)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{\Delta t}{L(t_0 + \Delta t)} v(t_0)$$

Método dos trapézios:

$$\begin{aligned} \phi(t_0 + \Delta t) &\approx \phi(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (v(t_0) + v(t_0 + \Delta t)) \\ j(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{\Delta t}{2L(t_0 + \Delta t)} (v(t_0) + v(t_0 + \Delta t)) \\ v(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{2}{\Delta t} (L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) - L(t_0) j(t_0)) - v(t_0) \end{aligned}$$

Método de Gear de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \phi(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{4}{3} \phi(t_0) - \frac{1}{3} \phi(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t v(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{4}{3} \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) - \frac{1}{3} \frac{L(t_0 - \Delta t)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{L(t_0 + \Delta t)} v(t_0 + \Delta t) \\ v(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{3}{2\Delta t} \left(L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) - \frac{4}{3} L(t_0) j(t_0) + \frac{1}{3} L(t_0 - \Delta t) j(t_0 - \Delta t) \right) \end{aligned}$$

1.13.12.6 Transformador linear variante no tempo

Basta estender o caso do indutor ao caso multidimensional, como nos demais casos do transformador:

$$\vec{\phi}(t_0 + \Delta t) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Agora todas as indutâncias e indutâncias mútuas variam com o tempo, gerando a matriz $[L](t)$:

$$\vec{\phi}(t) = [L(t)] \vec{j}(t)$$

$$[L(t_0 + \Delta t)] \vec{j}(t_0 + \Delta t) = [L(t_0)] \vec{j}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) = [\Gamma(t_0 + \Delta t)] [L(t_0)] \vec{j}(t_0) + [\Gamma(t_0 + \Delta t)] \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Um motor elétrico poderia ser modelado desta forma, pois existem indutâncias e indutâncias mútuas que variam com a posição do rotor. As tensões seriam conhecidas, e a equação obtida permite o cálculo das correntes. O caso de um gerador poderia ser tratado também. Mesmo dispositivos contendo ímãs podem ser modelados. Um ímã é uma fonte de fluxo magnético, e pode ser modelado como um indutor em série com uma fonte de corrente. Ocorre entretanto que dispositivos magnéticos usando materiais ferromagnéticos podem ser bastante não lineares, e assim o tratamento linear seria uma idealização apenas.

A discretização da integração é similar à do caso do indutor simples, e ao do caso do transformador linear invariante no tempo, e não é necessário detalhá-la aqui.

1.13.13 Análise no tempo de circuitos não lineares

O caso em que os elementos reativos são lineares, variantes ou não no tempo, gera modelos lineares para eles para a análise no instante $t = t_0 + \Delta t$. Com o circuito contendo elementos resistivos não lineares, o circuito é então um circuito resistivo não linear, e a solução pode ser encontrada pelo método de Newton-Raphson. Este tipo de análise, com elementos resistivos não lineares e elementos reativos lineares, todos invariantes no tempo, é a mais usual para análise no tempo de circuitos usuais. Ocorre entretanto que alguns elementos reativos comuns são não lineares, como as capacitâncias em semicondutores e indutâncias em indutores com núcleo de material magnético.

1.13.13.1 Inicialização e avanço da análise no tempo

Há duas formas de inicializar a análise no tempo: A análise pode partir de um cálculo de ponto de operação, pela solução do circuito não linear com capacitores em aberto e indutores em curto-circuito (ou substituídos por grandes e pequenas resistências), obtendo-se a solução em $t = 0$ como se o circuito estivesse operando há longo tempo. É também possível partir das condições iniciais dadas sobre capacitores e indutores. Neste caso a solução deveria ser completada resolvendo-se um circuito onde os capacitores são substituídos por fontes de tensão e os indutores substituídos por fontes de corrente, tendo suas condições iniciais como valores. Mas esta análise não permite a existência de ciclos fechados de capacitores e fontes de tensão, ou de cortes com indutores e fontes de corrente, e também tem uma estrutura diferente da análise normal, devido às fontes de tensão introduzidas pelos capacitores. Um recurso é realizar um passo da análise pelo método “backward” de Euler, com um passo muito pequeno, que dá quase o mesmo resultado e não tem problemas com estruturas. Fontes existentes no circuito podem ser deixadas com seus valores em $t = 0$. A solução no primeiro intervalo Δt usa a solução assim obtida como aproximação inicial no método de Newton-Raphson. Nos passos seguintes, a solução final do intervalo anterior é usada. Ou seja, o método de Newton-Raphson sempre parte da última solução obtida. Se ocorrer não convergência, os procedimentos já descritos para lidar com isto podem ser usados, ou, em uma análise com passo variável, pode-se tentar reduzir o passo e tentar novamente.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 1.126, para achar a próxima aproximação da solução em $t = t_0 + \Delta t = 1.1$ s usando o método de Newton-Raphson e a aproximação “backward” de Euler, conhecidas a última solução no tempo, $\vec{e}(t_0) = \vec{e}(1)$ e a última aproximação da solução em $t_0 + \Delta t$, $\vec{e}_n(1.1)$, através de uma análise nodal modificada:

Substituindo os componentes por seus modelos, tem-se o circuito da figura 1.127, onde os elementos reativos foram substituídos por seus modelos de acordo com o método “backward” de Euler, usando a solução em $t = 1$ s, e os elementos não lineares por seus modelos de acordo com o método de Newton-Raphson, usando a última solução em $t = 1.1$ s (que na primeira iteração é a solução em $t = 1$ s):

O sistema a resolver é:

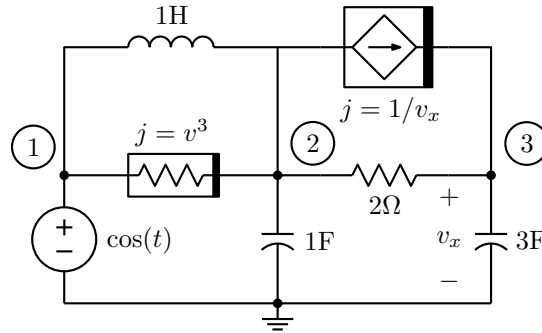


Figura 1.126: Circuito não linear com elementos reativos lineares a analisar.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} G_1 & -G_1 & . & +1 & -1 \\ -G_1 & G_1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{0.1} & -\frac{1}{2} + G_2 & -1 & . \\ . & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{0.1} - G_2 & . & . \\ \hline -1 & 1 & . & \frac{1}{0.1} & . \\ -1 & . & . & . & . \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_{1 \ n+1}(1.1) \\ e_{2 \ n+1}(1.1) \\ e_{3 \ n+1}(1.1) \\ j_{4 \ n+1}(1.1) \\ j_{5 \ n+1}(1.1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} -I_1 \\ I_1 + \frac{2}{0.1}e_2(1) - I_2 \\ I_2 + \frac{3}{0.1}e_3(1) \\ \hline \frac{1}{0.1}j_4(1) \\ -\cos(1.1) \end{array} \right]$$

Os parâmetros dos modelos dos elementos não lineares são calculados como:

$$\begin{aligned} G_1 &= 3(e)(e_{1n}(1.1) - e_{2n}(1.1))^2 \\ I_1 &= (e_{1n}(1.1) - e_{2n}(1.1))^3 - G_1(e_{1n}(1.1) - e_{2n}(1.1)) \\ G_2 &= -\frac{1}{e_{3n}(1.1)^2} \\ I_2 &= \frac{1}{e_{3n}} - G_2 e_{3n}(1.1) \end{aligned}$$

1.13.13.2 Capacitor não linear

Capacitores não lineares continuam seguindo a equação fundamental associando carga e corrente:

$$q(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

Mas agora com a relação não linear entre carga e tensão:

$$q(t) = f(v(t))$$

O uso de um método de discretização da integração resulta em um modelo que é um resistor não linear. Seja por exemplo o que acontece com o método “backward” de Euler:

$$f(v(t_0 + \Delta t)) \approx f(v(t_0)) + \Delta t j(t_0 + \Delta t)$$

Resulta um resistor não linear controlado a tensão, conveniente para a análise nodal.

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (f(v(t_0 + \Delta t)) - f(v(t_0)))$$

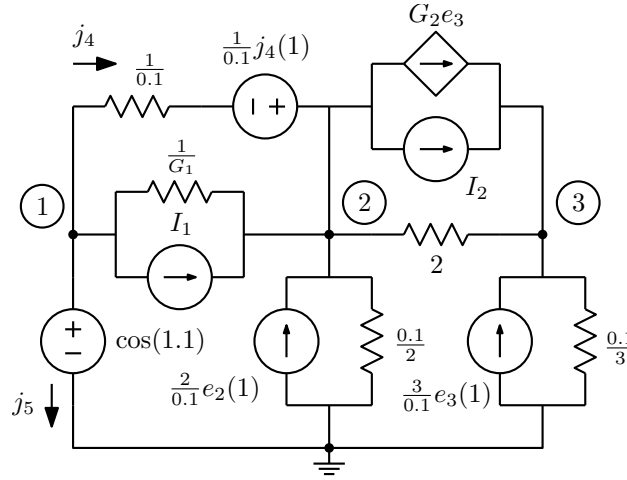


Figura 1.127: Modelo linearizado em torno da última aproximação da solução em $t = t_0 + \Delta t$.

O modelo que tem que ser montado na análise no tempo é o circuito linearizado para a análise de Newton-Raphson, que é o de um resistor não linear controlado a tensão:

$$G_0 = \frac{1}{\Delta t} f'(v_n(t_0 + \Delta t))$$

$$I_0 = \frac{1}{\Delta t} (f(v_n(t_0 + \Delta t)) - f(v(t_0)) - G_0 v_n(t_0 + \Delta t))$$

Note-se que o termo $f'(v)$ é a “capacitância incremental” do capacitor não linear. Esta é a capacitância que se considera em muitos dispositivos que tem capacitâncias não lineares, como diodos e transistores. Na obtenção do modelo de pequenos sinais a partir de uma análise de ponto de operação esta capacitância deve ser calculada a partir da tensão obtida sobre o capacitor e usada no modelo.

1.13.13.3 Capacitância de um diodo semiconductor

A capacitância de um diodo semiconductor reversamente polarizado ($v < 0$) é do tipo:

$$C(v) = \frac{C_0}{\left(1 - \frac{v}{\phi}\right)^m}$$

em que C_0 depende das dimensões do diodo, $\phi \approx 0.6$ V para um diodo de silício, e $m \approx 0.5$ para diodos usuais. A função da carga em função da tensão é obtida integrando esta expressão:

$$q(v) = \int_0^v \frac{C_0}{\left(1 - \frac{v}{\phi}\right)^m} dv = \frac{C_0 \phi}{1 - m} \left(1 - \left(1 - \frac{v}{\phi}\right)^{1-m}\right)$$

Note que esta expressão resulta em $q(0) = 0$, como deve ser. Estas expressões se tornam inválidas para $v > \phi$, que é quando o diodo começa a conduzir significativamente. A capacitância vai para infinito, e

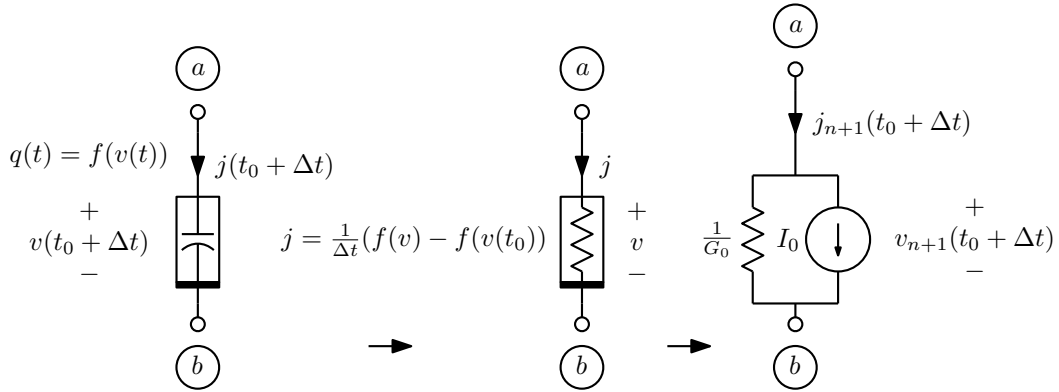


Figura 1.128: Capacitor não linear no método “backward” de Euler e modelo para o método de Newton-Raphson.

a carga não tem mais solução real. As curvas são mostradas na figura 1.129. O modelo deve ser adaptado para evitar isto. Pode-se usar a função de capacitância até, seja, $v = \phi/2$, estendendo a curva como uma reta depois. A função de carga deve ser adaptada de acordo, se tornando parabólica após este mesmo limite.

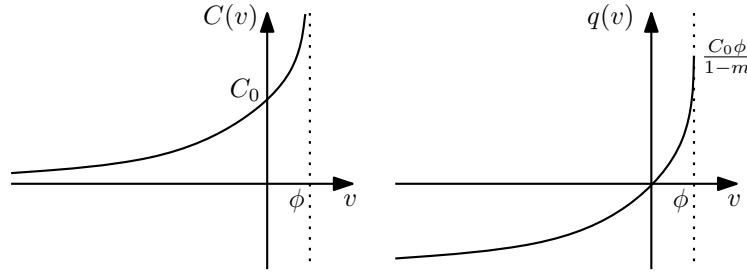


Figura 1.129: Capacitância e carga de um capacitor de diodo reversamente polarizado.

Diodos tem também uma capacitância diretamente proporcional à corrente quando conduzindo diretamente. Esta capacitância tem a forma:

$$C(v) = ki_D = C_1 (e^{v/V_T} - 1)$$

A função de carga é obtida como:

$$q(v) = \int_0^v C_1 (e^{v/V_T} - 1) = C_1 [V_T e^{v/V_T} - v]_0^v = C_1 V_T (e^{v/V_T} - 1) - C_1 v$$

Esta função também dá $q(0) = 0$. É válida para $v \geq 0$, sendo desprezível para $v < 0$. O diodo tem então estas duas capacitâncias em paralelo.

1.13.13.4 Capacitor controlado a tensão

Um elemento útil é um capacitor que possa ser controlado por uma fonte de sinal. Assim se pode gerar capacitores variantes no tempo bastando fazer com que sejam controlados por fontes com formas de onda

correspondentes a como variam as capacitâncias no tempo. Um capacitor controlado a tensão pode ser definido na forma:

$$q(t) = Cv(t)v_1(t)$$

onde $v(t)$ é a tensão sobre o capacitor, $v_1(t)$ é a tensão de controle, e C um fator de escala em farads/volts. Aplicando esta relação na equação de integração de corrente gerando carga resulta:

$$Cv(t_0 + \Delta t)v_1(t_0 + \Delta t) = Cv(t_0)v_1(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t)dt$$

Aplicando um dos métodos de discretização à integral, por exemplo o método “backward” de Euler, resulta um transcondutor não linear controlado por duas tensões:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C}{\Delta t}(v(t_0 + \Delta t)v_1(t_0 + \Delta t) - v(t_0)v_1(t_0))$$

O modelo para o método de Newton-Raphson é obtido da forma usual:

$$G_0 = \frac{C}{\Delta t}v_{1n}(t_0 + \Delta t)$$

$$G_1 = \frac{C}{\Delta t}v_n(t_0 + \Delta t)$$

$$I_0 = \frac{C}{\Delta t}(v_n(t_0 + \Delta t)v_{1n}(t_0 + \Delta t) - v(t_0)v_1(t_0)) - G_0v_n(t_0 + \Delta t) - G_1v_{1n}(t_0 + \Delta t)$$

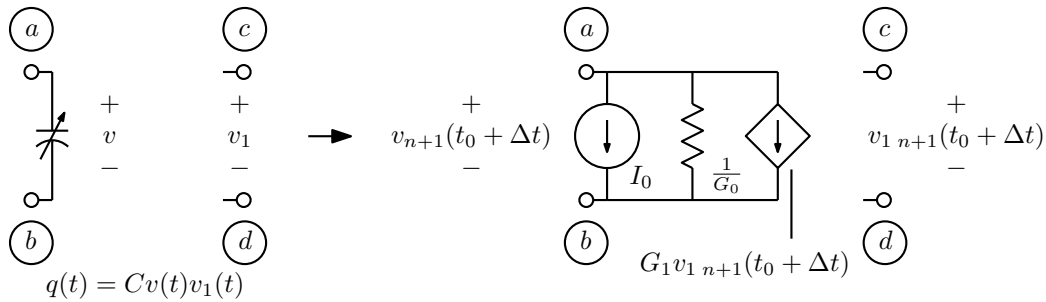


Figura 1.130: Capacitor controlado a tensão no método “backward” de Euler e modelo para o método de Newton-Raphson.

1.13.13.5 Indutor não linear

Basta repetir a mesma formulação feita para o capacitor não linear, com dualidade. O indutor não linear continua seguindo a equação fundamental associando fluxo magnético e tensão:

$$\phi(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t)dt$$

Mas agora com a relação não linear entre fluxo e corrente, em vez da relação linear $\phi = Lj$:

$$\phi(t) = f(j(t))$$

O uso de um método de discretização da integração resulta também em um modelo que é um resistor não linear. Seja por exemplo o que acontece com o método “backward” de Euler:

$$f(j(t_0 + \Delta t)) \approx f(j(t_0)) + \Delta t v(t_0 + \Delta t)$$

Resulta um resistor não linear controlado a corrente, numa forma conveniente para a análise nodal modificada. A forma controlada a tensão poderia ser obtida também, mas com a inversão da função $f(j)$.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (f(j(t_0 + \Delta t)) - f(j(t_0)))$$

O modelo que tem que ser montado na análise no tempo é o circuito linearizado para a análise de Newton-Raphson, que é o de um resistor não linear controlado a corrente:

$$R_0 = \frac{1}{\Delta t} f'(j_n(t_0 + \Delta t))$$

$$V_0 = \frac{1}{\Delta t} (f(j_n(t_0 + \Delta t)) - f(j(t_0)) - R_0 j_n(t_0 + \Delta t))$$

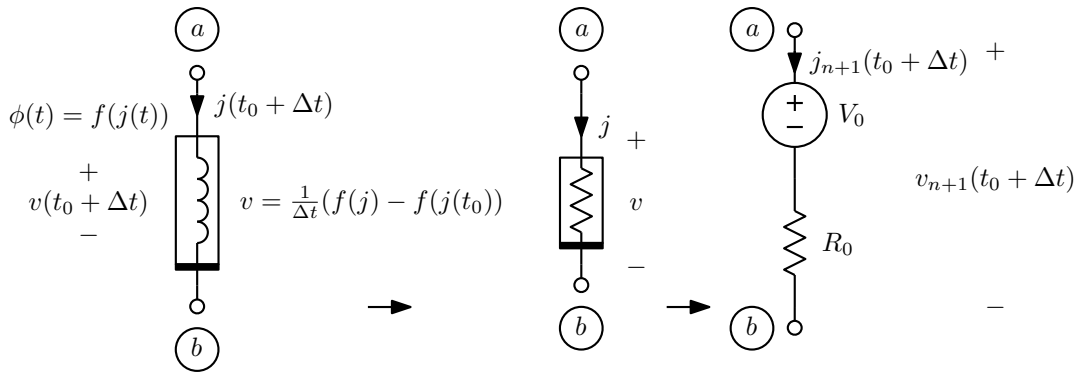


Figura 1.131: Indutor não linear no método “backward” de Euler e modelo para o método de Newton-Raphson.

Aqui o termo $f'(j)$ é a “indutância incremental” do indutor não linear. Esta é a indutância que se coloca no modelo de pequenos sinais a partir de uma análise de ponto de operação, uma vez encontrada a corrente quiescente no indutor.

1.13.13.6 Histerese

Indutores com núcleo magnético apresentam frequentemente um tipo especial de não linearidade, que é a histerese. A curva $\phi = f(j)$ não é sempre a mesma, pois se a magnetização atinge alguma saturação em uma direção o núcleo fica magnetizado, e o retorno da curva se faz por outro caminho. A curva passa por pontos onde o fluxo não é nulo quando a corrente é nula, indicando que um ímã se formou. A figura 1.132 ilustra o fenômeno. O tratamento da histerese exige a decomposição do indutor em mais de um elemento [5], para modelar a memória da história anterior que surge. Este modelamento não será tratado aqui por enquanto.

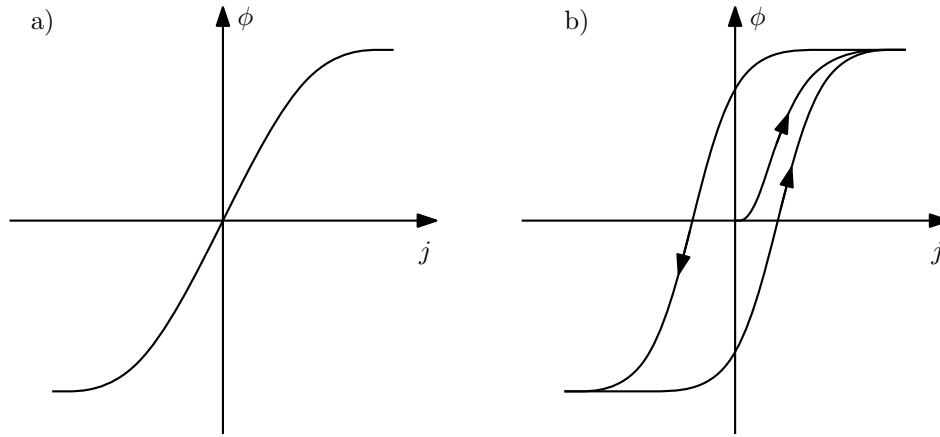


Figura 1.132: a) Indutor não linear com saturação. b) Com histerese.

1.13.13.7 Transformador não linear

Basta novamente partir da equação geral do transformador:

$$\vec{\phi}(t_0 + \Delta t) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Neste caso, o vetor de fluxos é um vetor de funções não lineares das correntes:

$$\vec{\phi}(t) = \vec{F}(\vec{j}(t))$$

$$\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) = \vec{F}(\vec{j}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

A discretização da integral leva a um conjunto de equações não lineares envolvendo as correntes. Por exemplo, usando o método “backward” de Euler:

$$\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) \approx \vec{F}(\vec{j}(t_0)) + \Delta t \vec{v}(t_0 + \Delta t)$$

É simples separar $\vec{v}(t_0 + \Delta t)$ e obter as funções em função de $\vec{j}(t_0 + \Delta t)$:

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) - \vec{F}(\vec{j}(t_0)) \right)$$

A linearização para o método de Newton-Raphson gera uma rede de resistores, transresistores e fontes de tensão, com estrutura adequada para análise nodal modificada. A estrutura é a mesma do caso linear invariante no tempo. É possível também obter a forma controlada a tensão, mas para isso é necessário poder resolver o sistema de equações não lineares para obter $\vec{j}(t_0 + \Delta t)$ em função de $\vec{v}(t_0 + \Delta t)$.

1.13.14 Análise no tempo de circuitos não lineares variantes no tempo

Para tratar este caso basta seguir o mesmo procedimento do caso não linear, mas usando as funções não lineares com seus valores no tempo $t_0 + \Delta t$.

Seja por exemplo um capacitor não linear variante no tempo:

$$q(t) = f(v(t), t)$$

Aplicando o método “backward” de Euler vem:

$$\begin{aligned} q(t_0 + \Delta t) &\approx q(t_0) + \Delta t j(t_0 + \Delta t) \\ f(v(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) &\approx f(v(t_0), t_0) + \Delta t j(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta t} (f(v(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) - f(v(t_0), t_0)) \end{aligned}$$

Resultou um resistor não linear variante no tempo, similar ao que se obtém no caso não linear invariante no tempo, com a única diferença sendo que a função não linear a avaliar depende do instante onde a avaliação é feita. O mesmo ocorre com os demais métodos de integração e demais elementos reativos.

1.13.15 Modelos para elementos reativos variantes no tempo e não lineares

É possível modelar elementos reativos variantes no tempo ou não lineares usando elementos reativos lineares invariantes no tempo e elementos resistivos não lineares. Seja um capacitor linear variante no tempo, que segue a equação:

$$C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t)dt$$

Para simular a equação pode-se gerar a função $C(t)$, multiplicá-la por $v(t)$, e forçar que o produto seja igual à integral da corrente $j(t)$. O modelo da figura 1.133a realiza estas operações, usando um amplificador operacional ideal para forçar a igualdade, um multiplicador de tensões nodais com saída em tensão para multiplicar e um capacitor para integrar. Analogamente, para um indutor linear variante no tempo vale a equação abaixo, que é simulada pelo modelo da figura 1.133b.

$$L(t_0 + \Delta t)j(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t)dt$$

É possível também usar as equações na forma de derivada. O capacitor e o indutor lineares variantes no tempo seguem as equações:

$$\begin{aligned} j(t) &= \frac{d}{dt}(C(t)v(t)) \\ v(t) &= \frac{d}{dt}(L(t)j(t)) \end{aligned}$$

Estas equações são simuladas pelos circuitos da figura 1.134. Os dois modelos produzem exatamente os mesmos resultados, para qualquer método de integração usado.

Um capacitor não linear com a função $q(t) = f(v(t))$ segue a equação:

$$f(v(t_0 + \Delta t)) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t)dt$$

Esta equação pode ser simulada gerando-se a função $q(t) = f(v(t))$ e usando-se um amplificador operacional ideal para forçar que seja igual à integral da corrente $j(t)$. Analogamente, para um indutor não linear vale a equação abaixo, que pode ser simulada gerando-se a função $\phi(t) = f(j(t))$ e usando-se um amplificador para igualá-la à integral da tensão $v(t)$. Os modelos correspondentes são os da figura 1.135.

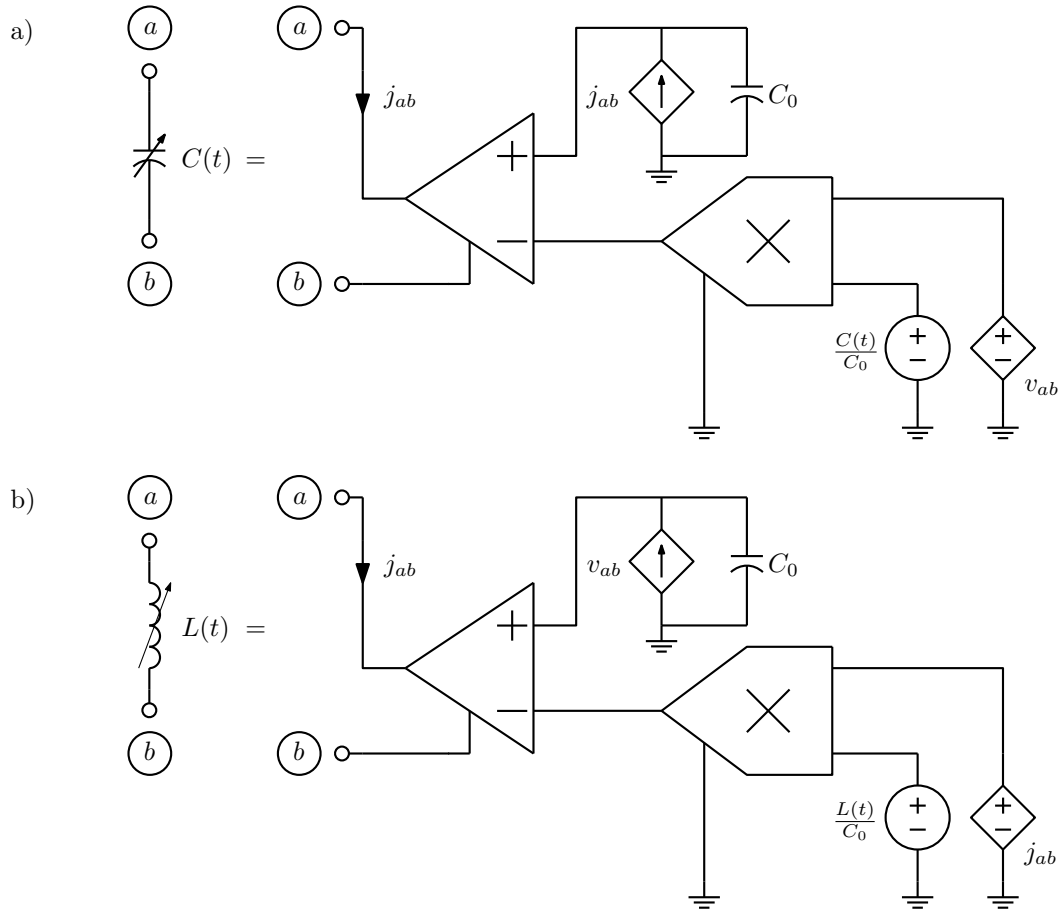


Figura 1.133: Modelos baseados em integrais para: a) Capacitor linear variante no tempo. b) Indutor linear variante no tempo.

$$f(j(t_0 + \Delta t)) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Os modelos baseados em derivadas existem também neste caso, baseados nas equações abaixo e representados na figura 1.136.

$$j(t) = \frac{d}{dt} f(v(t))$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} f(j(t))$$

Para todos os modelos mostrados, a condição inicial, carga ou fluxo, é representada pela tensão inicial sobre o capacitor que faz a integração ou a diferenciação. O método de integração para o elemento variante no tempo ou não linear é o usado neste capacitor. Foi usada uma normalização através da capacitância C_0 , arbitrária, para manter o valor da integral ou derivada em nível similar ao das demais tensões e correntes. Notar que uma condição inicial em C_0 deve ser dividida por C_0 , pois representa a carga inicial no capacitor ou o fluxo inicial no indutor.

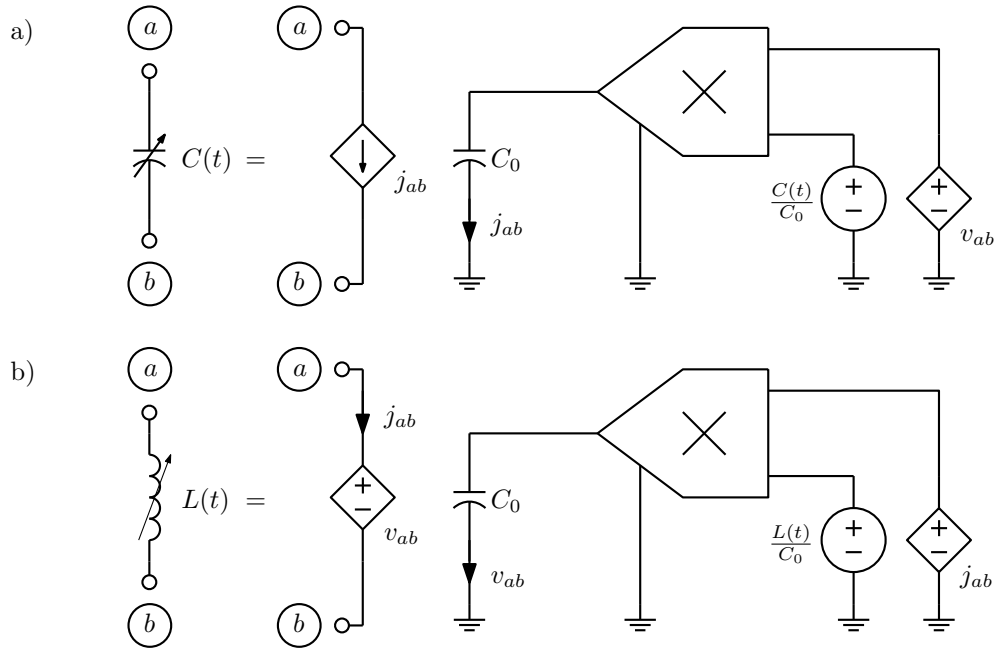


Figura 1.134: Modelos baseados em derivadas para: a) Capacitor linear variante no tempo. b) Indutor linear variante no tempo.

Modelos para transformadores podem ser obtidos de forma similar ao feito para indutores. Um transformador não linear, por exemplo, recai em um conjunto de blocos como o da figura 1.135b, um para cada indutor, com as funções não lineares de acordo com a expressão:

$$\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

É evidente que os modelos para elementos não lineares podem também ser variantes no tempo, incluindo-se o tempo na geração da função não linear, o que inclui o caso linear variante no tempo como caso particular.

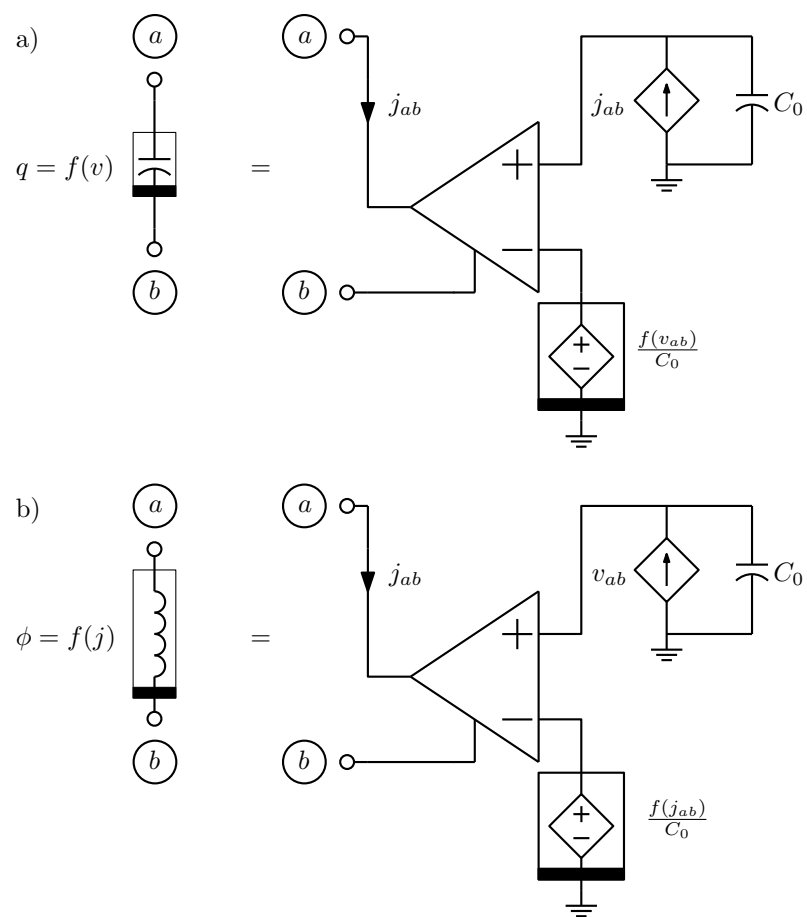


Figura 1.135: Modelos baseados em integrais para: a) Capacitor não linear. b) Indutor não linear.

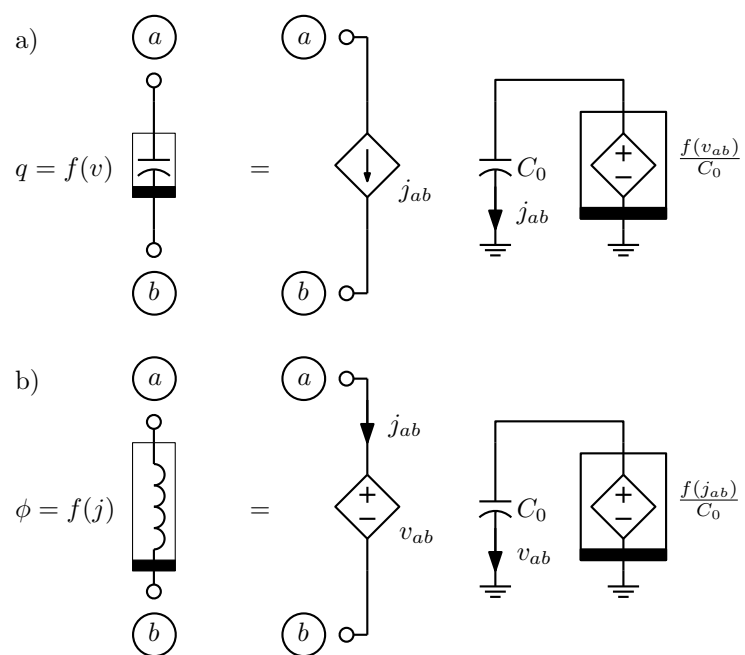


Figura 1.136: Modelos baseados em derivadas para: a) Capacitor não linear. b) Indutor não linear.

Capítulo 2

Outros métodos de análise

2.1 Análise das malhas

A análise das malhas¹ é comumente o primeiro método de análise de circuitos estudado, possivelmente porque ele não requer fontes de corrente, que são dispositivos “não naturais”, ao contrário das fontes de tensão, que modelam com boa aproximação as fontes de alimentação elétricas comuns, como baterias, ou a rede elétrica. O método consiste em:

1. Desenhar o circuito em forma planar, sem ramos se cruzando, de forma a identificar malhas no grafo do circuito.
2. Para cada malha, escrever uma equação: $\sum \text{quedas de tensão} = 0$, usando como incógnitas as “correntes de malha”.

As malhas são todos os espaços abertos no grafo (plano) do circuito. As correntes de malha são correntes fictícias que circulam apenas no interior das malhas. Se for considerada também uma malha externa, e todas as correntes de malha circulando na mesma direção nas malhas, exceto pela corrente na malha externa que circula na direção oposta, todas as correntes nos ramos são diferenças de duas correntes de malha. Note que isto é equivalente a desenhar o grafo sobre uma superfície esférica, e colocar todas as correntes de malha girando na mesma direção, como vistas olhando pelo lado da esfera mais próximo do centro da malha. Para ter uma referência para os valores das correntes de malha, considera-se que a corrente na malha externa é nula. Assim ramos que estejam nas bordas do grafo são percorridos por apenas uma corrente de malha, enquanto os ramos internos são percorridos por duas correntes de malha em sentidos opostos. Ver figura 2.1.

Exemplo: Seja o circuito da figura 2.2, que tem o mesmo grafo da figura 2.1. As equações das malhas são:

$$\begin{aligned} 1) \quad & R_4(i_1 - i_2) + R_3(i_1 - i_3) = V \\ 2) \quad & R_1 i_2 + R_4(i_2 - i_1) + R_m i_1 = 0 \\ 3) \quad & R_2 i_3 + R_3(i_3 - i_1) - R_m i_1 = 0 \end{aligned}$$

Ou, na notação matricial usual:

$$\begin{bmatrix} R_3 + R_4 & -R_4 & -R_3 \\ R_m + R_4 & R_1 + R_4 & 0 \\ -R_m - R_3 & 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¹A análise das malhas aparece no livro de Maxwell “A Treatise on Electricity and Magnetism”, 1873, §347, em uma análise da Ponte de Wheatstone. O mesmo na segunda edição de 1881. É frequentemente citada como “Método de Maxwell das correntes circulantes”.

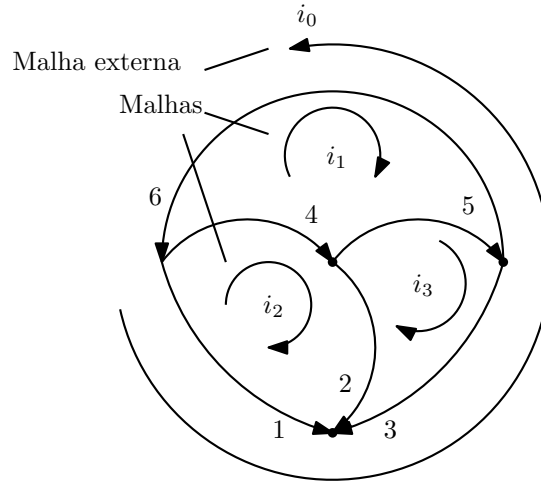


Figura 2.1: Grafo planar, malhas e correntes de malha.

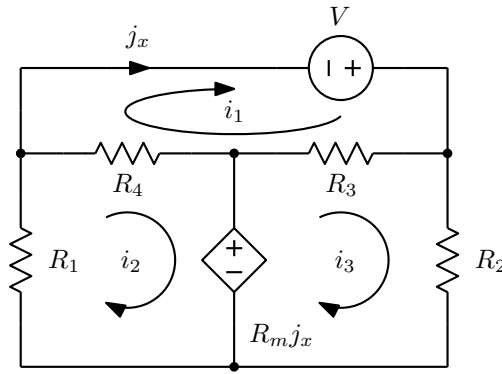


Figura 2.2: Circuito a ser analisado pelo método das malhas.

A análise das malhas pode ser formalizada de forma similar à feita para a análise nodal. Começa-se pela descrição do grafo orientado do circuito, de forma adequada para malhas, através da matriz $[M]$, de ordem número de malhas \times número de ramos, tal que:

$M_{ik} = 1$ se o ramo k está na malha i e suas direções concordam.

$M_{ik} = -1$ se o ramo k está na malha i e suas direções discordam.

$M_{ik} = 0$ se o ramo k não está na malha i .

Considerando então os usuais vetores de tensões nos ramos \vec{v} e de correntes nos ramos \vec{j} , e um vetor de correntes de malha \vec{i} , as seguintes relações vem das leis de Kirchhoff:

$$\text{KVL: } [M]\vec{v} = 0$$

$$\text{KCL: } \vec{j} = [M]^T \vec{i}$$

O ramo padrão para a análise das malhas deve ser controlado a corrente, o mesmo tipo de ramo usado nas equações extra da análise nodal modificada, que tem a equação geral, considerando que cada ramo k tem, em série, um resistor R_k , vários transresistores $R_{m\ ki}$ controlados por correntes j_i em outros ramos, e uma fonte de tensão v_{sk} :

$$v_k = R_k j_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^b R_{m\ ki} j_i + v_{sk}$$

Para todos os ramos tem-se então o sistema de equações:

$$\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$$

Combinando com as relações vindas das leis de Kirchhoff, tem-se o sistema das malhas:

$$[M]\vec{v} = [M][R][M]^T \vec{i} + [M]\vec{v}_s$$

$$[M][R][M]^T \vec{i} = -[M]\vec{v}_s$$

$$[R_m]\vec{i} = \vec{v}_m$$

A matriz $[R_m] = [M][R][M]^T$ é a “matriz de resistência das malhas”, e o vetor $\vec{v}_m = -[M]\vec{v}_s$ é o “vetor de fontes de tensão nas malhas”.

Uma vez calculadas as correntes de malha \vec{i} , as correntes de ramo são calculadas por $\vec{j} = [M]^T \vec{i}$, e as tensões de ramo por $\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$.

Exemplo: Seja o mesmo circuito da figura 2.2, agora como na figura 2.3, com os ramos numerados. As matrizes $[M]$ e $[R]$ e o vetor \vec{v}_s são obtidos como:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ R_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_s = \begin{bmatrix} -V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

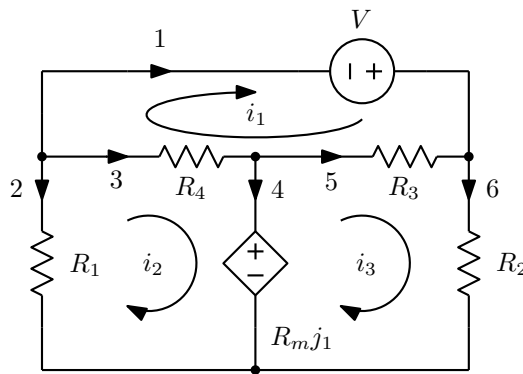


Figura 2.3: Mesmo circuito, com os ramos numerados.

A montagem do sistema com as operações matriciais resulta no mesmo sistema anteriormente montado. Como se vê pela semelhança com o que foi feito para a análise nodal, a análise das malhas é simplesmente a

análise nodal do circuito dual, onde são trocadas entre si as variáveis de tensão e corrente, os componentes são dualizados, e as malhas se tornam nós. A malha externa corresponde ao nó de terra. Um netlist para análise de malhas poderia descrever os elementos em função de em que malhas estão em vez de em função de a que nós estão ligados. A análise das malhas é então feita exatamente como na análise nodal, com os elementos dualizados.

Exemplo: O circuito dos exemplos anteriores pode ser descrito com base nas malhas onde os elementos estão, através de um “netlist” que diz em que malhas os elementos estão e em que orientação. A ordem das linhas indica a numeração dos ramos, e a sequência das malhas a orientação do ramo:

- 1) V 0 1 <valor>
- 2) R1 0 2 <valor>
- 3) R4 2 1 <valor>
- 4) Rm 2 3 1 0 <valor>
- 5) R3 3 1 <valor>
- 6) R2 3 0 <valor>

O sistema pode então ser montado por estampas, com estampas similares às da análise nodal, em versão dual. A estampa de um resistor de resistência R nas malhas a e b acrescenta R nas posições (a, a) e (b, b) e subtrai R nas posições (a, b) e (b, a) de $[R_m]$. Esta e as outras estampas são mostradas abaixo:

Estampa, que fica apenas em $[R_m]$, de um resistor de valor R nas malhas a e b :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} +R & -R \\ -R & +R \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$$

Estampa, que fica apenas em $[R_m]$, de um transresistor de transresistência R_m com saída nas malhas a e b e entrada nas malhas c e d :

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} . & . & +R_m & -R_m \\ . & . & -R_m & +R_m \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

Estampa, que fica apenas em \vec{v}_s , de uma fonte de tensão de valor V , nas malhas a e b :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ +V \end{bmatrix}$$

As regras para a montagem manual do sistema das malhas são também uma versão dual das regras para montagem do sistema nodal. Depois de desenhar o circuito em forma planar, começa-se por transformar o circuito deixando apenas resistores, transresistores controlados por correntes de malha e fontes de tensão. Trata-se temporariamente os transresistores como fontes independentes de tensão. Assim, o sistema fica com a matriz $[R_m]$ simétrica, com:

$R_{m\,kk} = \sum$ resistências na malha k .

$R_{m\,ki}, i \neq k = - \sum$ resistências comuns às malhas k e i .

$v_{m\,k} = \sum \pm$ fontes de tensão na malha k , positivas se a corrente i_k sai pelo terminal positivo.

A seguir retornam-se para a matriz $[R_m]$ os termos controlados no vetor \vec{v}_m .

A análise de malhas aceita diretamente apenas resistores, transresistores e fontes de tensão. Para inclusão de outros elementos, o problema é também o dual do que ocorre na análise nodal. Os elementos controlados a tensão podem ser deslocados, ou podem ser modelados com os elementos permitidos, o que equivale a uma “análise de malhas modificada”, em que são incluídas como incógnitas as tensões sobre fontes de corrente e circuitos abertos controladores e acrescentadas as equações dos ramos que os contém.

2.1.1 Deslocamento de fontes de corrente

Ramos contendo fontes de corrente ou circuitos abertos (para controle de fontes) podem ser tratados diretamente se estiverem em paralelo com ramos contendo resistores ou fontes de tensão, incluindo transresistores e curto-circuitos. Para uma fonte basta realizar um equivalente Thévenin ou a ignorar se estiver em paralelo com fonte de tensão (fig. 2.4). Para um circuito aberto, basta exprimir sua tensão em função da corrente sobre um resistor em paralelo, ou como a tensão sobre ele diretamente, se estiver em paralelo com fonte de tensão. No caso de não haver nada em paralelo, fontes de corrente e circuitos abertos podem ser deslocados conforme ilustrado na figura 2.5. A fonte somente tem que retirar corrente de um nó e a injetar em outro, de forma a que não importa se cópias dela colocam e retiram corrente em uma cadeia de nós entre as extremidades originais. O deslocamento de circuitos abertos é similar, deslocando-se até que seja possível exprimir a tensão sobre o circuito aberto como uma série de tensões sobre ramos que a análise de malhas permite. Deslocamentos de fontes de corrente não afetam as tensões nos ramos que restam.

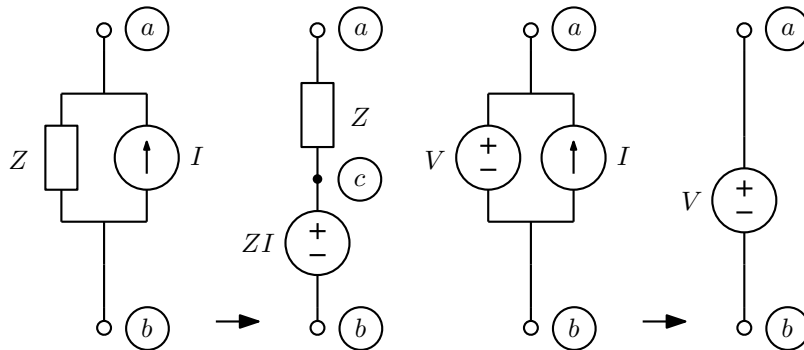


Figura 2.4: Equivalente Thévenin e eliminação de fonte de corrente.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 2.6. Duas fontes de corrente devem ser deslocadas. A fonte independente foi deslocada para ficar em paralelo com a fonte de tensão e com R_1 . O transcondutor foi deslocado pela malha externa. A tensão de controle v_y não foi alterada, e vale $v_y = R_2 i'_1$. A corrente j_x vale $j_x = i'_1 + I$. A equação que resta é:

$$[R_1 + R_2 - R_m] i'_1 = [-R_1 I + R_m I]$$

Notar que a corrente i'_1 não é a corrente i_1 da malha superior do circuito original, devido ao transcondutor deslocado pela malha externa. Deslocar ramos pela malha externa é similar ao equivalente dual na análise nodal de deslocar ramos para o nó de terra, o que acrescenta a tensão no ramo deslocado a todas as tensões nodais. No caso da análise de malhas, a corrente no ramo deslocado para a malha externa é acrescentada a todas as correntes de malha. As variáveis sobre os ramos, como j_x e v_y , são as mesmas, e permitem completar a solução do circuito original. Note-se que G_m não aparece nos denominadores, pois a tensão sobre o transcondutor está forçada pela fonte de tensão e pelo transcondutor:

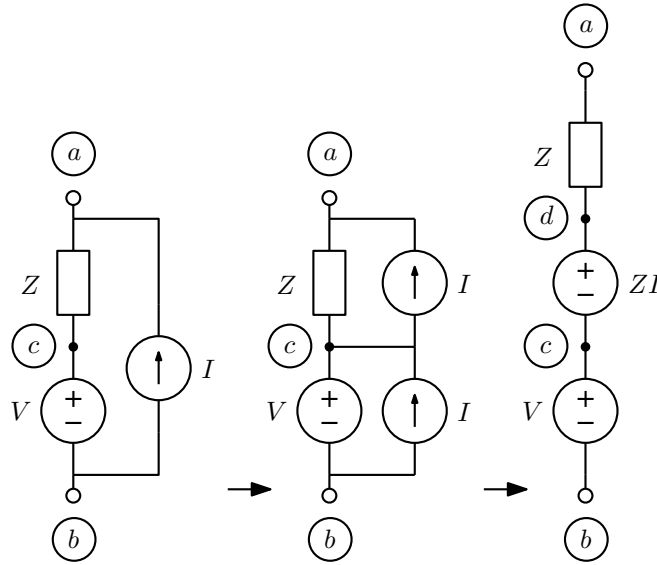


Figura 2.5: Deslocamento de fonte de corrente.

$$\begin{aligned}
 i'_1 &= \frac{-R_1 I + R_m I}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 v_y = R_2 i'_1 &= \frac{-R_2 I (R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 j_x = i'_1 + I &= \frac{R_2 I}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 i_1 = i'_1 - G_m v_y &= \frac{I(R_1 - R_m)(G_m R_2 - 1)}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 i_2 = i_1 - j_x &= \frac{I(G_m R_2 (R_1 - R_m) - R_1 - R_2 + R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 i_3 = -G_m v_y &= \frac{G_m R_2 I (R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m}
 \end{aligned}$$

2.1.2 Análise das malhas modificada

Ramos contendo fontes de corrente ou circuitos abertos podem ser tratados incluindo-se as tensões sobre estes ramos como novas incógnitas e as equações destes ramos na forma controlada a tensão como novas equações, em um dual da análise nodal modificada.

Exemplo: Seja analisar o mesmo circuito do exemplo anterior usando análise de malhas modificada. As tensões sobre a fonte de corrente e o transcondutor são acrescentadas como incógnitas, e também as equações destes elementos. A tensão v_y foi acrescentada como a incógnita v_6 também, por ser tensão controladora de fonte. Como fica sobre R_2 , este foi então tratado como um resistor que pode ser um circuito aberto, com sua equação acrescentada. Os elementos não ficam completamente independentes com essa formulação, mas tratar a tensão v_y separadamente exigiria introduzir outro ramo, um circuito aberto, só para ela e outra malha. O modelo é o da figura 2.7. O sistema de equações é:

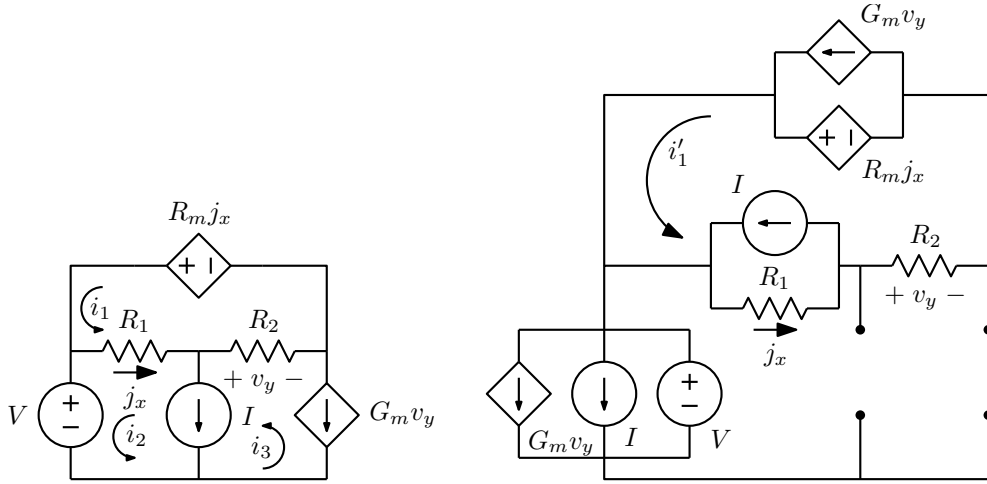


Figura 2.6: Deslocamento de fonte de corrente e transcondutor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} R_1 - R_m & -R_1 + R_m & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -R_1 & R_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & G_m \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é a mesma do sistema anterior, com as correntes calculadas diretamente.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{I(R_1 - R_m)(G_m R_2 - 1)}{R_1 + R_2 - R_m} \\ i_2 &= \frac{I(G_m R_2(R_1 - R_m) - R_1 - R_2 + R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\ i_3 &= \frac{G_m R_2 I(R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\ v_4 &= \frac{R_2 I(R_2 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} - R_2 I + V \\ v_5 &= V - \frac{R_2 R_m I}{R_1 + R_2 - R_m} \\ v_6 &= \frac{-R_2 I(R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \end{aligned}$$

É possível também modelar estes ramos usando os elementos permitidos pela análise de malhas, também em um dual do que foi feito para a análise nodal². Uma fonte de corrente pode ser simulada por uma fonte de tensão ligada ao circuito por um girador, com o girador construído com dois transresistores. Os modelos para as três fontes controladas que a análise de malhas não permite seguem a mesma ideia (figura 2.8).

Exemplo:

²Uma forma um tanto excessivamente complicada de analisar circuitos.

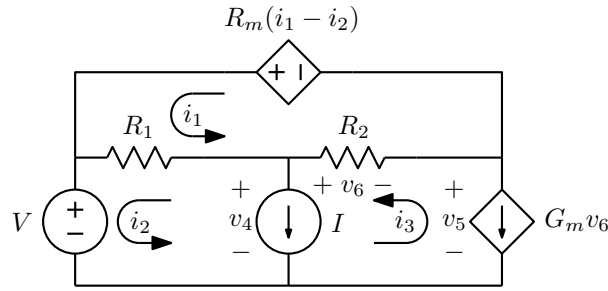


Figura 2.7: Circuito para análise de malhas modificada.

Seja analisar o circuito da figura 2.9a. Um ramo em circuito aberto é acrescentado para a tensão de controle v_x , já que ela não está sobre nenhum ramo existente, e para tornar os elementos independentes. Isto acrescenta também uma malha. O transresistor é substituído por seu modelo da figura 2.8. O modelo resultante é o da figura 2.9b, com i_4 correspondendo a v_x e i_5 à tensão sobre o transcondutor. O sistema de equações das malhas é:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & 1 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & G_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É interessante verificar a dualidade com a análise nodal modificada. A figura 2.10 mostra a obtenção do circuito dual do exemplo. A polaridade dos ramos é obtida com um giro no sentido oposto ao das malhas onde os ramos duais cruzam os originais. O sistema nodal modificado correspondente é idêntico ao obtido acima, apenas com diferentes incógnitas:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & 1 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & G_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Amplificador operacional na análise de malhas

O amplificador operacional ideal, modelado como um par “nullator-norator”, tem dois ramos separados, correspondendo aos ramos de entrada e saída do amplificador (figura 2.11). Para incluí-lo na análise de malhas modificada basta acrescentar a tensão de saída como incógnita e uma equação dizendo que as duas correntes de malha passando pelo ramo de entrada são iguais, para que a corrente de entrada seja nula.

É possível também reduzir o tamanho do sistema, de forma análoga ao feito com a análise nodal. Basta observar que a tensão de saída aparece com sinais opostos nas duas equações das malhas contendo o ramo de saída, e que as duas correntes de malha passando pelo ramo de entrada são iguais. A redução é então similar à do caso nodal:

Somar as equações das malhas que contém o ramo de saída.

Somar as colunas da matriz do sistema correspondentes às malhas que contém o ramo de entrada.

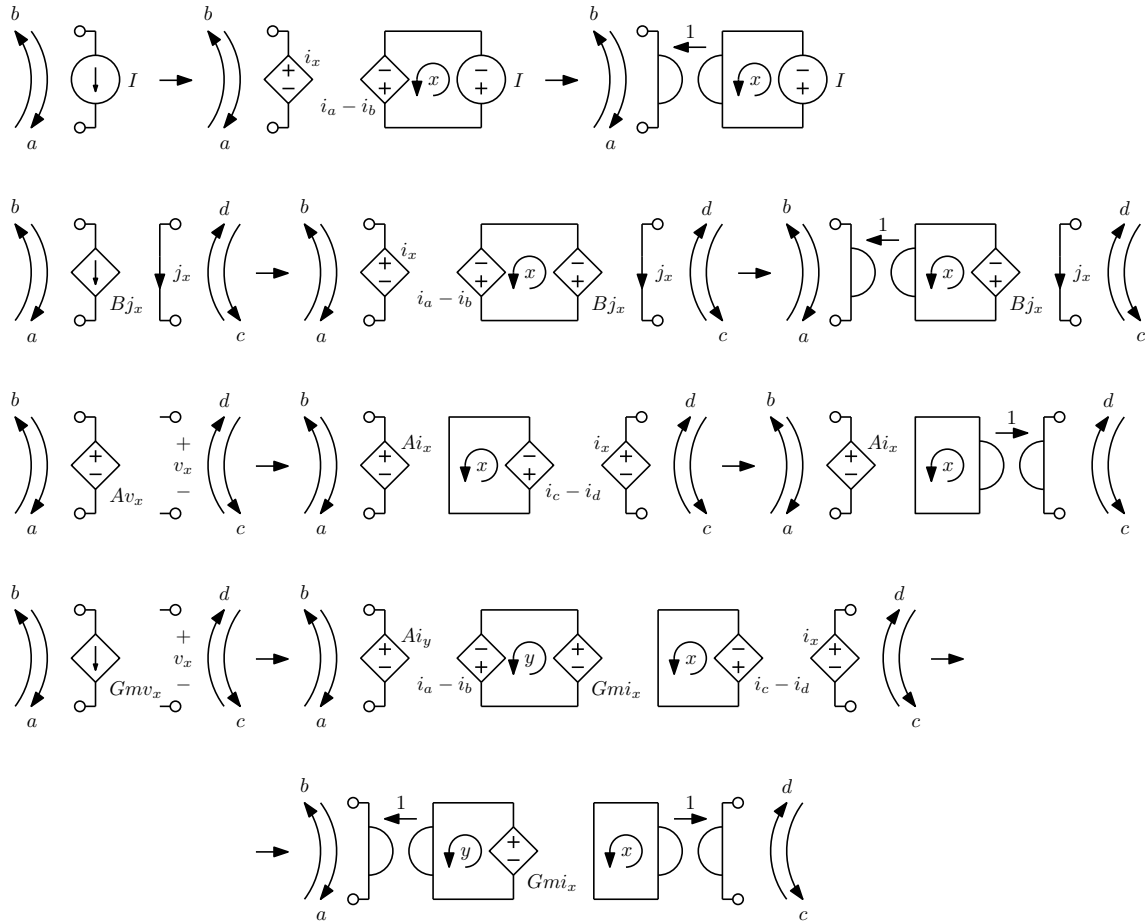


Figura 2.8: Modelos correspondendo à “análise de malhas modificada”.

Se uma das malhas passando pelo ramo de saída for a externa, basta eliminar a outra equação. Se uma das malhas passando pelo ramo de entrada for a externa, basta eliminar outra coluna da matriz do sistema e a variável correspondente, que é nula.

Exemplo: Seja o circuito da figura 2.12, a ser analisado em transformada de Laplace. O circuito já está desenhado com o amplificador operacional com os ramos de entrada e saída separados. O ramo com circuito paralelo RC pode ser tratado como uma única impedância $Z(s) = R_1/(sR_1C_1 + 1)$ em série com uma fonte de tensão $V(s) = v_1(0)R_1C_1/(sR_1C_1 + 1)$, através de um equivalente Thévenin.

Analisando o circuito por um método de malhas modificado, a tensão sobre a saída do amplificador é adicionada como incógnita, e é acrescentada a equação dizendo que a soma das correntes de malha passando pelo ramo de entrada é nula.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & 0 \\ -R_3 & R_3 + \frac{1}{sC_2} & -\frac{1}{sC_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} + Z(s) & +1 \\ \hline -1 & 0 & +1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{in}(s) - \frac{v_2(0)}{s} \\ \frac{v_2(0)}{s} - V(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

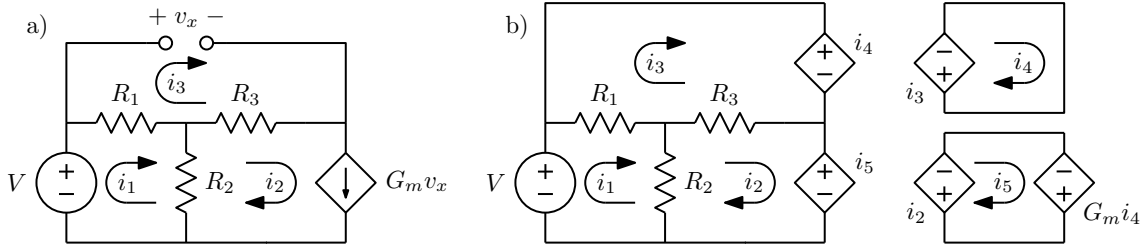


Figura 2.9: Análise de malhas usando modelamento para um transcondutor.

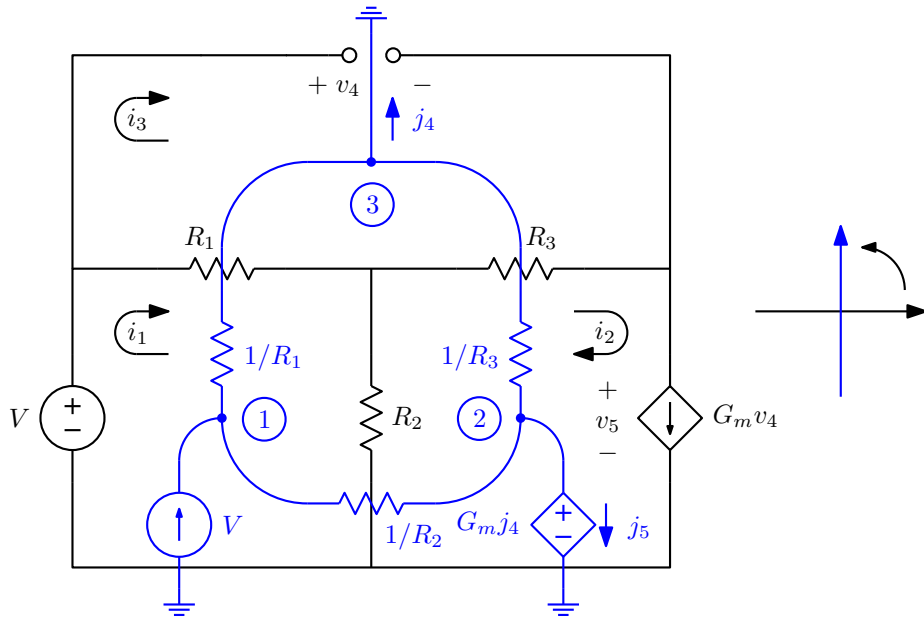


Figura 2.10: Obtenção do circuito dual ao do exemplo.

Usando a redução, primeiramente se escreve o sistema considerando os ramos de entrada e saída do amp. op. em curto-circuito, que é a parte de malhas do sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + \frac{1}{sC_2} & -\frac{1}{sC_2} \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} + Z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{in}(s) - \frac{v_2(0)}{s} \\ \frac{v_2(0)}{s} - V(s) \end{bmatrix}$$

O sistema é reduzido com a eliminação da terceira equação, pois o ramo de saída está entre a malha 3 e a malha externa, e a soma das colunas 1 e 3:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 - \frac{1}{sC_2} & R_3 + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1,3}(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{in}(s) - \frac{v_2(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Pode-se notar que estas reduções são o que ocorre quando se elimina a última equação do primeiro

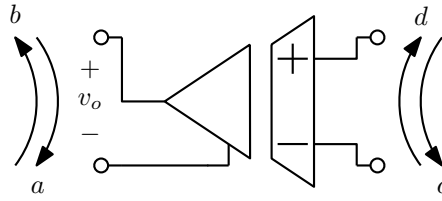


Figura 2.11: Amplificador operacional ideal na análise de malhas.

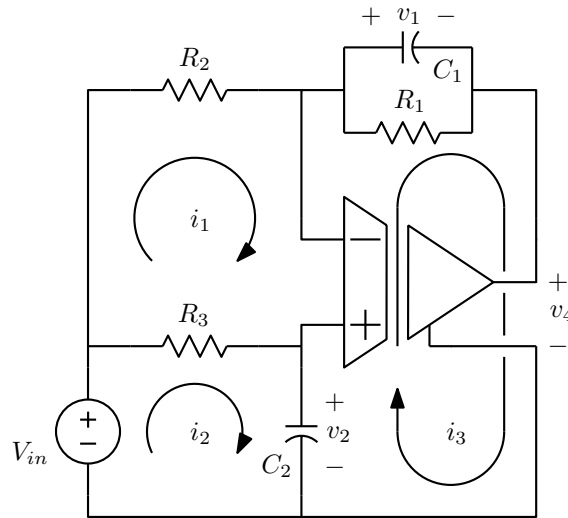


Figura 2.12: Análise de malhas com amplificador operacional.

sistema, e se reserva a terceira equação para calcular $V_4(s)$ a partir das correntes, já que ela não é necessária para calculá-las.

2.1.4 Modelamento com amplificadores operacionais ideais na análise de malhas

É possível modelar ramos controlados a tensão usando modelos baseados em amplificadores operacionais, de forma similar, dual, à feita para a análise nodal³. Também neste caso se obtém um sistema que não tem mais equações que o número de malhas, e pode até ficar com menos equações se o circuito tiver transdutores com transcondutância não nula (caso dual do transresistor, que causa redução na análise nodal se for usado o modelo mais simples). Os dois ramos necessários são o que modela uma fonte de corrente, independente ou controlada, e o que modela um circuito aberto, calculando a tensão no ramo como uma corrente. As estruturas são mostradas na figura 2.13, e são os exatos duais das mostradas para a análise nodal. O primeiro circuito força $j_{ab} = I$, e o segundo calcula $i_y = v_{cd}$. Note-se que não há problema em curto-circuitar a saída de um amplificador operacional, se sua corrente de saída é usada para controle de alguma fonte dependente realimentando o amplificador.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 2.14a, que tem uma fonte de corrente independente e um

³Outra forma excessivamente complicada de analisar circuitos, colocada aqui para completar as analogias de dualidade com a análise nodal. Ao menos esta forma gera sistemas compactos.

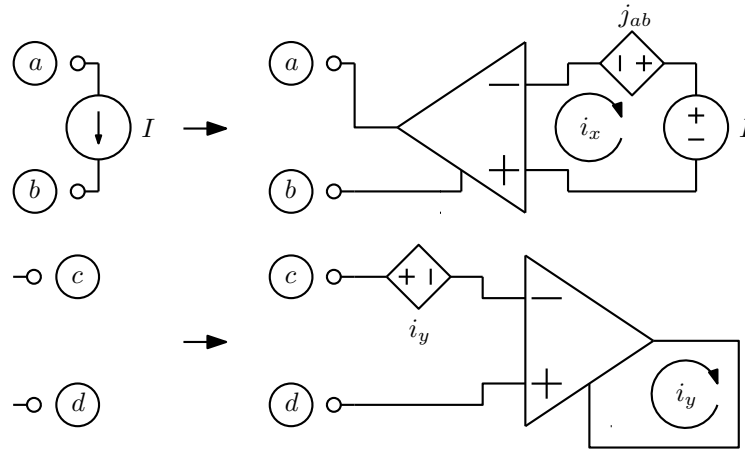


Figura 2.13: Modelos para análise de malhas de uma fonte de corrente e de um circuito aberto, usando amplificadores operacionais.

transcondutor, em transformada de Laplace. Começa-se desenhando o modelo da figura 2.14b, que gera o sistema, com os ramos de entrada e saída dos amplificadores em curto-circuito:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{sC} & R_2 + \frac{1}{sC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & G_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ I_4(s) \\ I_5(s) \\ I_6(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v(0)}{s} \\ \frac{v(0)}{s} \\ 0 \\ -I(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O transcondutor foi tratado da forma mais complicada. Poderia ser modelado com apenas um amplificador operacional, com uma adaptação do medidor de tensão da figura 2.13, com a saída do amplificador usada como saída do transcondutor e o transresistor com transresistência $1/G_m$. Aplicando-se as reduções causadas pelos amplificadores, que somam as equações 1, 2 e 3, eliminam a equação 6, e eliminam as colunas 3, 4 e 5, resulta o sistema abaixo, simples de verificar que está correto. O capacitor não aparece pois não afeta as correntes de malha.

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & G_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_6(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Planaridade

Como a análise das malhas parte de um circuito planar, ela não pode ser aplicada diretamente a circuitos não planares. E pode se tornar um problema complexo desenhar um circuito complexo em forma planar. Os grafos não planares mais simples são mostrados na figura 2.15. O Teorema de Kuratowski diz que se um grafo contiver um destes dois grafos como um subgrafo, mesmo com alguns ramos tendo nós no caminho, ele é não planar. A figura 2.16 mostra um grafo (que parece ser mínimo, mas não é) que recai neste caso. Circuitos com grafo não planar também não possuem circuito dual.

A análise de malhas realiza todas as análises estudadas com a análise nodal, com a única restrição de exigir grafo planar. Embora seja possível usar a análise de malhas para análise de circuitos genéricos

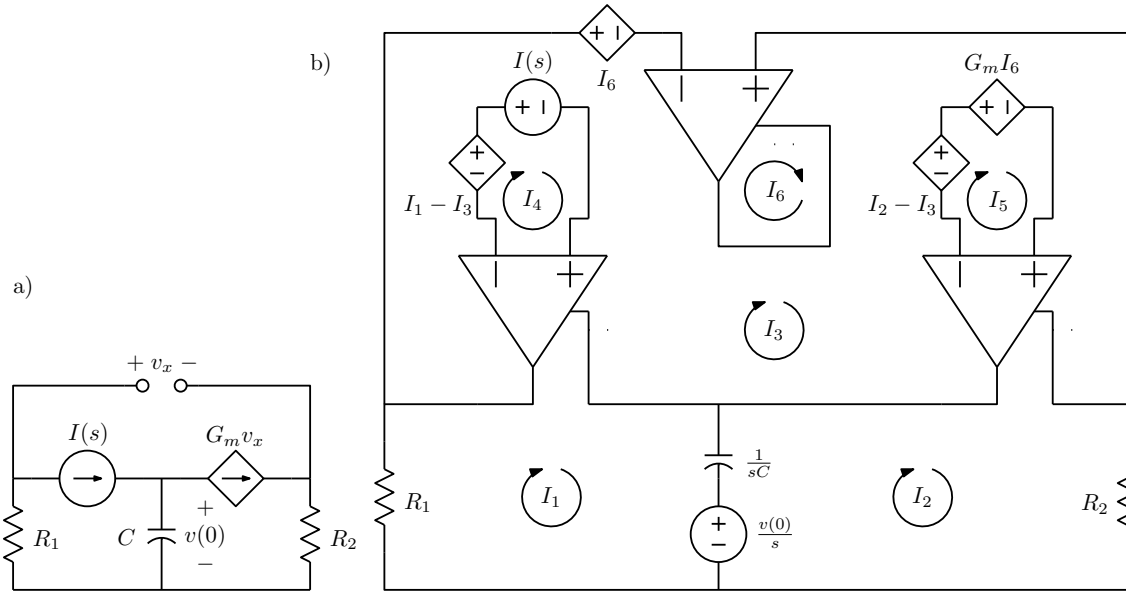


Figura 2.14: Circuito a analisar (a) e modelo usando amplificadores operacionais ideais (b).

em computador, o que como já foi visto recai em exatamente os mesmos algoritmos usados para a análise nodal, bastando alterar a forma como o circuito a analisar é passado ao algoritmo (com um “netlist” baseado nas malhas onde estão os elementos), seu uso prático fica usualmente restrito à análise de circuitos simples ou específicos, quando a estrutura torna o sistema das malhas mais simples que o sistema nodal.

2.2 Análises dos ciclos e dos cortes

A análise de malhas pode ser generalizada para circuitos com qualquer topologia, não necessariamente planares, da seguinte forma:

- Desenha-se sobre o grafo do circuito uma “árvore”, que é um conjunto de ramos que toca todos os nós e não forma circuitos fechados. Isto pode ser feito de muitas formas. Os ramos que fazem parte da árvore são então os “ramos da árvore”. É fácil ver que o número de ramos da árvore é o número de nós menos um.
- Os ramos não incluídos na árvore são os “elos da árvore”. Cada elo fecha um caminho único através de ramos da árvore, contendo como ramos o elo e vários ramos da árvore, que define um “ciclo fundamental”. É fácil ver que, para um grafo planar, o número de elos é igual ao número de malhas, embora os ciclos não sejam necessariamente malhas.
- Para cada ciclo fundamental, escreve-se uma equação similar a uma equação de malha, usando como incógnitas as “correntes de ciclo”, que são as correntes nos elos da árvore.

O sistema assim montado é o “sistema dos ciclos”, que é do mesmo tamanho do sistema de malhas, no caso planar, e calcula diretamente as correntes nos elos da árvore \vec{j}_l .

A partir da árvore pode-se também fazer uma outra análise que é uma versão mais geral da análise nodal:

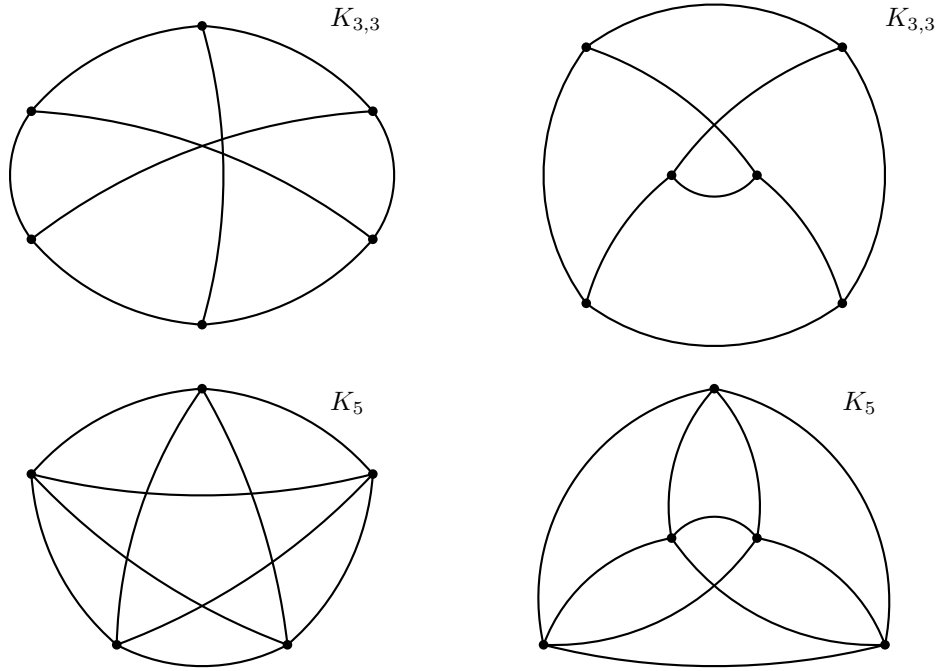


Figura 2.15: Grafos não planares mais simples, chamados $K_{3,3}$ e K_5 na teoria dos grafos.

- Desenha-se a árvore, como no sistema dos ciclos.
- Cada ramo da árvore, se cortado junto com um conjunto de elos, separa o grafo em duas partes. Este conjunto de ramos, associado com um único ramo da árvore, define um “corte fundamental”.
- Para cada corte fundamental, escreve-se uma equação \sum correntes cruzando o corte = 0, usando como incógnitas as “tensões de corte”, que são as tensões sobre os ramos da árvore.

O sistema assim montado é o “sistema dos cortes”, que é do mesmo tamanho do sistema nodal, e calcula diretamente as tensões sobre os ramos da árvore \vec{v}_c .

A geração sistemática destes sistemas parte da definição da árvore, que pode ser feita com base em ciclos ou com base em cortes. A descrição com base em ciclos define a matriz $[B]$, com dimensão número de ciclos \times número de ramos, da forma:

$B_{ik} = 1$ se o ramo k está no ciclo i e suas direções concordam.

$B_{ik} = -1$ se o ramo k está no ciclo i e suas direções discordam.

$B_{ik} = 0$ se o ramo k não está no ciclo i .

As leis de Kirchhoff dizem então que:

KVL: $[B]\vec{v} = 0$

KCL: $\vec{j} = [B]^T \vec{j}_l$

Partindo das mesmas equações dos ramos definidas para a análise das malhas, o sistema dos ciclos é obtido por operações similares às usadas para o sistema das malhas:

$$\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$$

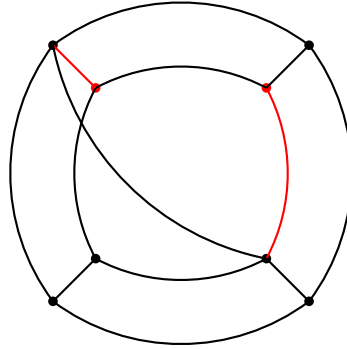


Figura 2.16: Grafo não planar correspondendo a um cubo com diagonal central. Os ramos e os nós em vermelho podem ser eliminados, restando um grafo $K_{3,3}$.

$$\begin{aligned} [B]\vec{v} &= [B][R][B]^T \vec{j}_l + [B]\vec{v}_s \\ [B][R][B]^T \vec{j}_l &= -[B]\vec{v}_s \\ [R_l]\vec{j}_l &= \vec{v}_l \end{aligned}$$

A matriz $[R_l] = [B][R][B]^T$ é a “matriz de resistência dos ciclos”, e o vetor $\vec{v}_l = -[B]\vec{v}_s$ é o “vetor de fontes de tensão nos ciclos”.

Uma vez calculadas as correntes de ciclo \vec{j}_l , as correntes de ramo são calculadas por $\vec{j} = [B]^T \vec{j}_l$, e as tensões de ramo por $\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$.

Para o sistema dos cortes, a formalização é similar. A árvore é descrita com base em cortes pela matriz $[Q]$, de dimensão número de cortes \times número de ramos:

- $Q_{ik} = 1$ se o ramo k está no corte i e suas direções concordam.
- $Q_{ik} = -1$ se o ramo k está no corte i e suas direções discordam.
- $Q_{ik} = 0$ se o ramo k não está no corte i .

As leis de Kirchhoff dizem então que:

$$\begin{aligned} \text{KCL: } [Q]\vec{j} &= 0 \\ \text{KVL: } \vec{v} &= [Q]^T \vec{v}_c \end{aligned}$$

Partindo das mesmas equações dos ramos definidas para a análise nodal, o sistema dos cortes é obtido por operações similares às usadas para o sistema nodal:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= [G]\vec{v} + \vec{i}_s \\ [Q]\vec{j} &= [Q][G][Q]^T \vec{v}_c + [Q]\vec{i}_s \\ [Q][G][Q]^T \vec{v}_c &= -[Q]\vec{i}_s \\ [G_c]\vec{v}_c &= \vec{i}_c \end{aligned}$$

A matriz $[G_c] = [Q][G][Q]^T$ é a “matriz de condutância dos cortes”, e o vetor $\vec{i}_c = -[Q]\vec{i}_s$ é o “vetor de fontes de corrente nos cortes”. Uma vez calculadas as tensões de corte \vec{v}_c , as correntes de ramo são calculadas por $\vec{v} = [Q]^T \vec{v}_c$, e as correntes de ramo por $\vec{j} = [G]\vec{v} + \vec{i}_s$.

É conveniente, para as análises de ciclos e cortes, numerar os ramos da árvore começando pelos elos da árvore. Assim a matriz $[B]$ fica na forma:

$$[B] = [[I_l][F]]$$

onde $[I_l]$ é uma matriz identidade de dimensão $n_l \times n_l$, sendo n_l o número de ciclos. Ocorre então que a matriz $[Q]$ fica na forma:

$$[Q] = [[E][I_c]]$$

onde $[I_c]$ é uma matriz identidade de dimensão $n_c \times n_c$, sendo n_c o número de cortes. É possível mostrar que há uma relação simples entre as matrizes $[B]$ e $[Q]$ observando como são geradas, com a numeração nesta forma:

$$[B] = [[I_l][F]] \Rightarrow [Q] = [-F]^T [I_c]$$

Existem também as relações $[B][Q]^T = [0]$ e $[Q][B]^T = [0]$. Os sistemas de ciclos e cortes não são práticos de serem montados por estampas, pois um ramo pode aparecer em qualquer número de ciclos ou de cortes, e ter ciclos ou cortes passando por ele em quaisquer direções, tornando os tamanhos das estampas variáveis e os sinais dos termos a adicionar ao sistema também variáveis. É simples entretanto montar os sistemas sistematicamente usando as formalizações acima. O mais difícil é obter a árvore e uma das matrizes, $[B]$ ou $[Q]$, pois uma pode ser obtida da outra. É possível fazer isto a partir de um netlist nodal com algoritmos de busca. O que tem que ser encontrado é, no caso dos ciclos, qual o caminho através da árvore entre as extremidades de cada elo. No caso dos cortes também, pois os cortes que cruzam um elo são gerados pelos ramos da árvore do caminho pela árvore entre suas extremidades.

Os sistemas podem ser montados manualmente, de forma similar aos de nós e malhas. Seja a análise dos cortes. Começa-se por transformar o circuito deixando apenas resistores, transdutores controlados por somas ou subtrações de tensões de corte e fontes de corrente. Trata-se temporariamente os transdutores como fontes independentes de corrente. O sistema fica então com a matriz $[G_c]$ simétrica, com:

$$G_{c\,kk} = \sum \text{condutâncias no corte } k.$$

$G_{c\,ki}, i \neq k = \sum \pm \text{condutâncias comuns aos cortes } k \text{ e } i$, positivas se as direções dos cortes concordam, negativas se discordam.

$i_{c\,k} = \sum \pm \text{fontes de corrente no corte } k$, positivas se as correntes discordam da direção do corte, negativas se concordam.

A seguir são retornadas à matriz $[G_c]$ termos controlados em \vec{i}_c .

Para o caso da análise dos ciclos, o procedimento é similar ao da análise das malhas. Começa-se por transformar o circuito deixando apenas resistores, transresistores controlados por somas e subtrações de correntes de ciclo e fontes de tensão. Trata-se temporariamente os transresistores como fontes independentes de tensão. Assim, o sistema fica com a matriz $[R_l]$ simétrica, com:

$$R_{l\,kk} = \sum \text{resistências no ciclo } k.$$

$$R_{l\,ki}, i \neq k = - \sum \text{resistências comuns aos ciclos } k \text{ e } i.$$

$$v_{l\,k} = \sum \pm \text{fontes de tensão no ciclo } k, \text{ positivas se a corrente } i_k \text{ sai pelo terminal positivo.}$$

A seguir retornam-se para a matriz $[R_l]$ os termos controlados no vetor \vec{v}_l .

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 2.17 por ciclos e por cortes e transformada de Laplace. O capacitor tem tensão inicial v_c e o indutor corrente inicial j_L .

Para a análise de cortes, o transresistor deve ser deslocado, e as condições iniciais no capacitor e no indutor representadas por fontes de corrente. Realizando estas operações resulta o circuito da figura 2.18. A tensão de controle $V_y(s)$ passa a valer $V_y(s) = V_2(s) - AV_1(s)$. No circuito original, $V_1(s)$ é a tensão sobre R_1 e $V_2(s)$ a tensão sobre o transcondutor. O sistema dos cortes, montado pelo processo manual, primeiramente com as fontes controladas tratadas como independentes, representadas entre parêntesis, e depois na forma final é então:

$$\begin{bmatrix} sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & sC + \frac{1}{sL} \\ sC + \frac{1}{sL} & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cv_c - \frac{j_L}{s} \\ Cv_c - \frac{j_L}{s} \end{bmatrix} \left(-GV_2 + GAV_1 + \frac{A}{R_2}V_1 - \frac{A}{sL}V_1 \right)$$

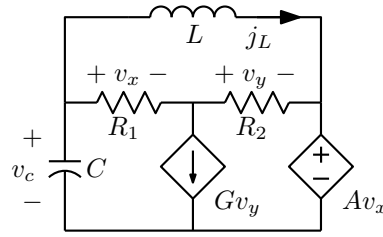


Figura 2.17: Circuito a ser analisado por ciclos e por cortes.

$$\begin{bmatrix} sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} - \frac{A}{sL} & sC + \frac{1}{sL} - \frac{A}{sL} \\ sC + \frac{1}{sL} - AG - \frac{A}{R_2} + \frac{A}{sL} & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} + G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cv_c - \frac{j_L}{s} \\ Cv_c - \frac{j_L}{s} \end{bmatrix}$$

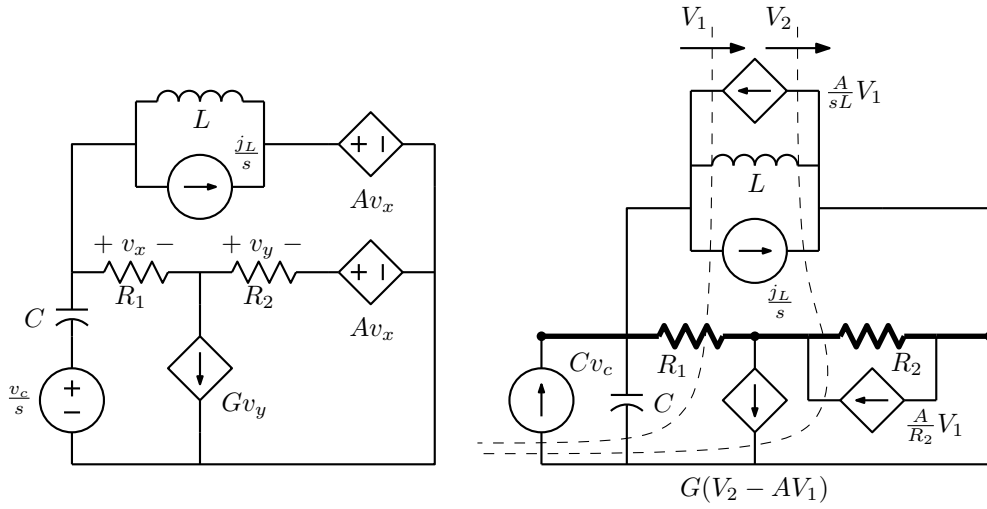


Figura 2.18: Transformações para análise por cortes. Deslocamentos e modelo final.

O sistema dos ciclos requer o deslocamento do transcondutor e as condições iniciais representadas como fontes de tensão, como na figura 2.19. Algumas transformações são requeridas nos controles das fontes: $V_y(s) = R_2 J_1(s)$, $V_x(s) = R_1 J_1(s) + G V_2(s) R_1 = (1 + G R_2) R_1 J_1(s)$. No circuito original, $J_1(s)$ é a corrente no transresistor e $J_2(s)$ a corrente no indutor. O sistema de equações, também primeiramente com as fontes controladas tratadas como independentes e depois na forma final, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sC} + R_1 + R_2 & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_c}{s} \\ \frac{v_c}{s} + L j_L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{G R_2}{sC} J_1 - A(1 + G R_2) R_1 J_1 - G R_1 R_2 J_1 \\ -\frac{G R_2}{sC} J_1 - A(1 + G R_2) R_1 J_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sC} + R_1 + R_2 + \frac{G R_2}{sC} + A(1 + G R_2) R_1 + G R_1 R_2 & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} + \frac{G R_2}{sC} + A(1 + G R_2) R_1 & \frac{1}{sC} + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_c}{s} \\ \frac{v_c}{s} + L j_L \end{bmatrix}$$

Os sistemas de ciclos e cortes permitem todas as análises estudadas para os sistemas de nós e malhas, sem restrições de estrutura. Existem também sistemas modificados para as duas análises, similares aos sistemas modificados de malhas e nós, respectivamente.

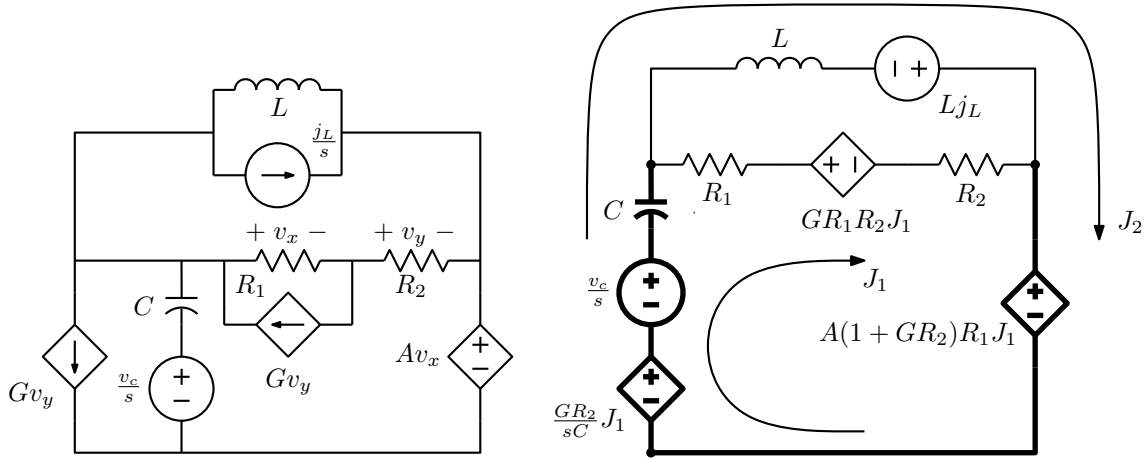


Figura 2.19: Transformações para análise por ciclos. Deslocamentos e modelo final.

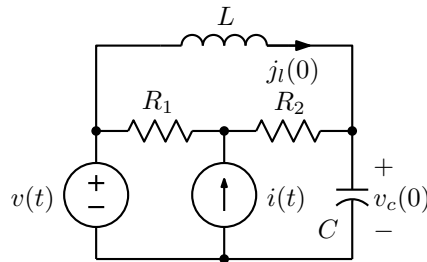


Figura 2.20: Circuito a analisar com análises modificadas de ciclos e cortes.

Exemplo: Seja analisar em transformada de Laplace o circuito da figura 2.20 por ciclos e por cortes. Para obter análises modificadas, na análise de ciclos são acrescentadas como incógnitas as tensões na fonte de corrente e no capacitor, e na análise de cortes as correntes na fonte de tensão e no indutor. Usando a mesma árvore nas duas análises resultam os modelos da figura 2.21, também idênticos pois não é necessária nenhuma transformação. Apenas as variáveis calculadas pelos sistemas são diferentes. Para ciclos, o sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} R_1 + R_2 + sL & -R_1 & -R_1 - R_2 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_1 & R_1 & -1 & 0 \\ -R_1 - R_2 & R_1 & R_1 + R_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & sC \end{array} \right] \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ J_3(s) \\ V_4(s) \\ V_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lj_l(0) \\ V \\ V \\ -I \\ Cv_c(0) \end{bmatrix}$$

e para ciclos, resulta:

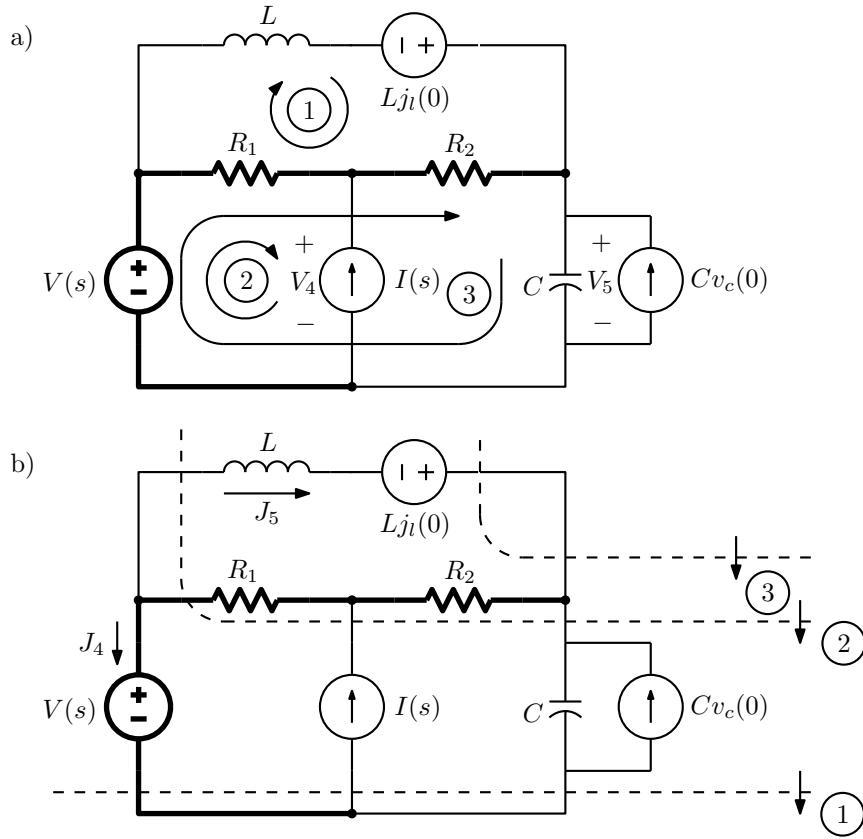


Figura 2.21: Modelos para análises modificadas de ciclos (a) e de cortes (b).

$$\begin{bmatrix} sC & sC & sC & 1 & 0 \\ sC & sC + 1/R_1 & sC & 0 & -1 \\ sC & sC & sC + 1/R_2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ J_4(s) \\ J_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I - Cv_c(0) \\ -I - Cv_c(0) \\ -Cv_c(0) \\ -V \\ Lj_l(0) \end{bmatrix}$$

Para as polaridades das equações acrescentadas foi seguido o critério de manter positivos termos na diagonal no quadrante inferior direito da matriz do sistema.

2.2.1 Amplificador operacional nas análises de ciclos e cortes

É também possível reduzir os sistemas modificados de ciclos e cortes quando os circuitos contêm amplificadores operacionais ideais, e usar modelos baseados em amplificadores operacionais para os elementos que os métodos não tratam diretamente, com reduções similares às obtidas para os sistemas de malhas e nós. Há uma importante diferença, entretanto. Nas análises nodal e de malhas os ramos de entrada e saída dos amplificadores estavam entre dois nós (um talvez o de terra) ou eram atravessados por duas correntes de malha (uma talvez a externa), e assim as reduções a fazer se reduziam a somar ou eliminar

equações ou colunas da matriz do sistema. No caso de ciclos e cortes, os mesmos ramos são atravessados por várias correntes de ciclo ou cruzados por vários cortes, e as reduções podem exigir operações mais complexas. O tratamento fica simples, entretanto, se na análise dos ciclos os ramos de entrada e de saída forem elos da árvore, e se na análise dos cortes forem ramos da árvore. As reduções então se resumem a eliminar a equação da variável de saída e a coluna do sistema correspondente à variável de entrada.

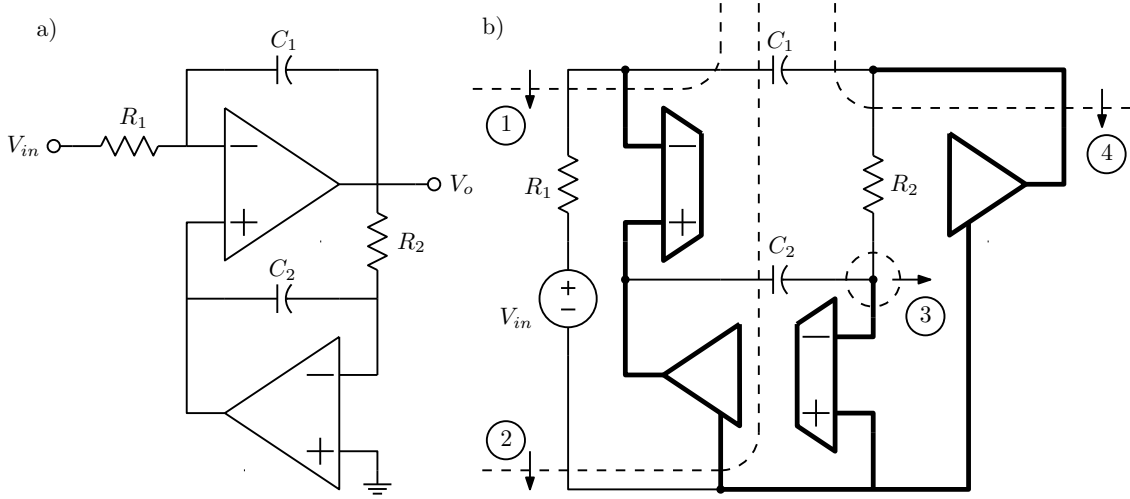


Figura 2.22: Circuito com amplificadores operacionais a analisar por cortes (a), e seu modelo com árvore e cortes indicados (b).

Exemplo: Seja calcular a função de transferência $V_o/V_{in}(s)$ no circuito da figura 2.22a. O modelo para a análise por cortes é o da figura 2.22b, onde os amplificadores foram partidos em ramos de entrada e de saída, e a árvore foi escolhida de forma a passar por todos estes ramos. Um equivalente Norton pode ser usado para a fonte V_{in} . As equações dos cortes, sem o efeito dos amplificadores, são:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & \frac{1}{R_1} + sC_1 & 0 & -sC_1 \\ \frac{1}{R_1} + sC_1 & \frac{1}{R_1} + sC_1 + sC_2 & -sC_2 & -sC_1 \\ 0 & -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -\frac{1}{R_2} \\ -sC_1 & -sC_1 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As restrições impostas pelos dois amplificadores eliminam as colunas 1 e 2, pois $V_1(s)$ e $V_2(s)$ são nulas, e as equações 2 e 4, que são dos ramos de saída dos amplificadores. O sistema restante, obtido do anterior apenas por eliminação de termos, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & -sC_1 \\ -sC_2 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução então vale, usando o método de Cramer:

$$\frac{V_4(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{sC_2}{R_1}}{-\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{sC_1}{R_2} - s^2 C_1 C_2} = \frac{-\frac{1}{R_1 C_2} s}{s^2 + \frac{1}{R_2 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_2}}$$

É um filtro passa-faixa de segunda ordem inversor. A análise por ciclos usaria a árvore passando pelos resistores e capacitores e pela fonte V_{in} , e calcularia diretamente as correntes de saída nos dois amplificadores.

2.3 Equações de estado

O sistema de equações de estado [24] é um sistema de equações diferenciais em que em cada equação aparece apenas a primeira derivada de uma só variável, de forma que no caso geral, não linear variante no tempo, possa-se escrever um sistema na forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), t, \vec{u}(t))$$

onde $\vec{x}(t)$ é o vetor de “variáveis de estado” e $\vec{u}(t)$ é um vetor de entradas. Esse sistema pode ser resolvido numericamente com relativa facilidade, o que é uma vantagem do método. Usando o método “forward” de Euler a solução é particularmente simples⁴:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &= \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{F}(\vec{x}(t), t, \vec{u}(t)) dt \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0))\end{aligned}$$

Também é possível usar outros métodos. Usando o método “backward” de Euler:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t))$$

Este é um sistema de equações não lineares para achar $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$, que pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson multidimensional. Usando o método dos trapézios:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0)) + \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t)))$$

Também um sistema não linear, o que também resulta dos métodos implícitos de Adams-Moulton e de Gear, como o de Gear de segunda ordem⁵:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3}\vec{x}(t_0) - \frac{1}{3}\vec{x}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t))$$

No caso linear invariante no tempo o sistema toma a forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}(t) + [B]\vec{u}(t)$$

E aí os métodos numéricos resultam em sistemas lineares. O método “forward” de Euler continua o mais simples:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{x}(t_0) + \Delta t ([A]\vec{x}(t_0) + [B]\vec{u}(t_0))$$

O método “backward” de Euler resulta em um sistema de equações lineares, mas se o intervalo Δt for fixo, a matriz do sistema é constante, e pode ser invertida apenas uma vez:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{x}(t_0) + \Delta t ([A]\vec{x}(t_0 + \Delta t) + [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t)) \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx ([I] - \Delta t [A])^{-1} (\vec{x}(t_0) + \Delta t [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t))\end{aligned}$$

⁴Igualmente com os métodos explícitos de Adams-Bashforth, usando \vec{F} em tempos anteriores.

⁵Uma possibilidade é transformar estes métodos implícitos em explícitos, calculando $\vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t))$ usando um método explícito, nos métodos “preditores-corretores”. Por exemplo, pode-se usar o método “forward” de Euler para calcular uma predição $\vec{x}_p(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0))$, e então calcular uma versão corrigida pelo método dos trapézios, $\vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0)) + \vec{F}(\vec{x}_p(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t)))$, no que é conhecido como “método de Heun” (Karl Heun, 1900). É possível melhorar o preditor usando os métodos de Adams-Bashforth de ordem maior, e usar com o corretor os métodos de Adams-Moulton e de Gear.

Algo similar acontece com o método dos trapézios, e analogamente com os de Adams-Moulton de ordens maiores:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} ([A]\vec{x}(t_0) + [B]\vec{u}(t_0) + [A]\vec{x}(t_0 + \Delta t) + [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t)) \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \left([I] - \frac{\Delta t}{2}[A] \right)^{-1} \left(\vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} ([A]\vec{x}(t_0) + [B](\vec{u}(t_0) + \vec{u}(t_0 + \Delta t))) \right)\end{aligned}$$

E também com os métodos de Gear, como o de segunda ordem:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{4}{3}\vec{x}(t_0) - \frac{1}{3}\vec{x}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t([A]\vec{x}(t_0 + \Delta t) + [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t)) \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \left([I] - \frac{2}{3}\Delta t[A] \right)^{-1} \left(\frac{4}{3}\vec{x}(t_0) - \frac{1}{3}\vec{x}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t[B]\vec{u}(t_0 + \Delta t) \right)\end{aligned}$$

Os dois últimos métodos acima, trapézios e Gear de segunda ordem, são especialmente úteis em simulações de sistemas lineares.

2.3.1 Como escrever equações de estado

Primeiramente de forma não muito formal: Dado um circuito, deve-se escolher como variáveis de estado as tensões sobre os capacitores \vec{v}_C e as correntes nos indutores \vec{j}_L , e escrever, para esses elementos:

Capacitores: Corrente no capacitor = $f_C(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))$

Indutores: Tensão sobre o indutor = $f_L(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))$

O vetor $\vec{v}_C(t)$ inclui tensões em capacitores v_k e o vetor $\vec{j}_L(t)$ inclui as correntes em indutores j_k . Em um sistema linear invariante no tempo, resultam equações lineares, facilmente rearranjadas na forma padrão:

$$\begin{aligned}\frac{dv_k}{dt} &= \frac{1}{C_k} f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{dj_k}{dt} &= \frac{1}{L_k} f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

Se o sistema for linear variante no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= \frac{d}{dt}(C_k v_k) = C_k(t) \frac{dv_k}{dt} + v_k(t) \frac{dC_k}{dt} = f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= \frac{d}{dt}(L_k j_k) = L_k(t) \frac{dj_k}{dt} + j_k(t) \frac{dL_k}{dt} = f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

Há então duas possibilidades. Pode-se usar como variáveis de estado as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores, colocando os termos envolvendo as derivadas de $C_k(t)$ e $L_k(t)$ na matriz $[A]$:

$$\begin{aligned}\frac{dv_k}{dt} &= \frac{1}{C_k(t)} \left(f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) - v_k(t) \frac{dC_k}{dt} \right) \\ \frac{dj_k}{dt} &= \frac{1}{L_k(t)} \left(f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) - j_k(t) \frac{dL_k}{dt} \right)\end{aligned}$$

ou então usar como variáveis as cargas nos capacitores e os fluxos nos indutores, dividindo as tensões e correntes $v_k(t)$ e $j_k(t)$ no lado direito pelas funções $C_k(t)$ e $L_k(t)$ para obter cargas e fluxos. Essa forma é usualmente mais prática. Naturalmente, pode-se usar cargas e fluxos também no caso invariante no tempo.

$$\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= f_{C_k} \left(\frac{q_1(t)}{C_1(t)}, \frac{q_2(t)}{C_2(t)}, \dots, \frac{\phi_1(t)}{L_1(t)}, \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)}, \dots \right) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= f_{L_k} \left(\frac{q_1(t)}{C_1(t)}, \frac{q_2(t)}{C_2(t)}, \dots, \frac{\phi_1(t)}{L_1(t)}, \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)}, \dots \right)\end{aligned}$$

No caso não linear, tem-se:

$$\begin{aligned}q_k(t) &= f_{qk}(v_k(t)) \\ \phi_k(t) &= f_{\phi k}(j_k(t)) \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{d}{dt} f_{qk}(v_k(t)) = \frac{d}{dv_k} f_{qk}(v_k(t)) \frac{dv_k}{dt} = f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= \frac{d}{dt} f_{\phi k}(j_k(t)) = \frac{d}{dj_k} f_{\phi k}(j_k(t)) \frac{dj_k}{dt} = f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

Há também duas possibilidades: Usando tensões e correntes, usando a regra da cadeia da derivação para separar as derivadas das funções não lineares:

$$\begin{aligned}\frac{dv_k}{dt} &= \frac{1}{\frac{d}{dv_k} f_{qk}(v_k(t))} f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{dj_k}{dt} &= \frac{1}{\frac{d}{dj_k} f_{\phi k}(j_k(t))} f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

Ou então, usando cargas e fluxos, é necessário inverter as funções:

$$\begin{aligned}v_k(t) &= f_{qk}^{-1}(q_k(t)) \\ j_k(t) &= f_{\phi k}^{-1}(\phi_k(t)) \\ \frac{dq_k}{dt} &= f_{C_k}(f_{q1}^{-1}(q_1(t)), f_{q2}^{-1}(q_2(t)), \dots, f_{\phi 1}^{-1}(\phi_1(t)), f_{\phi 2}^{-1}(\phi_2(t)), \dots) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= f_{L_k}(f_{q1}^{-1}(q_1(t)), f_{q2}^{-1}(q_2(t)), \dots, f_{\phi 1}^{-1}(\phi_1(t)), f_{\phi 2}^{-1}(\phi_2(t)), \dots)\end{aligned}$$

Notar que a formulação não admite capacitâncias ou indutâncias nulas. No caso não linear estas aparecem na forma incremental quando são usadas tensões e correntes, $\frac{d}{dv_k} f_{qk}(v_k(t))$ e $\frac{d}{dj_k} f_{\phi k}(j_k(t))$ também dividindo as equações. No caso com cargas e fluxos, as funções inversas de funções com derivada nula não são unívocas.

Exemplo:

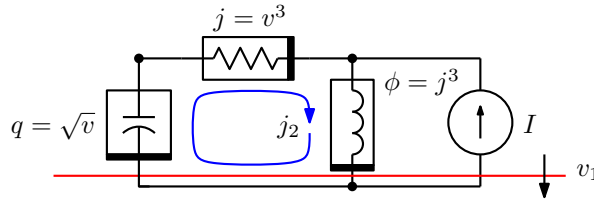


Figura 2.23: Circuito não linear para análise por equações de estado

Seja o circuito não linear da figura 2.23. Ele gera duas equações de estado, a partir da equação do corte passando pelo capacitor e do ciclo passando pelo indutor:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} + j_2 - I &= 0 \\ \frac{d\phi}{dt} - v_1 + \sqrt[3]{j_2 - I} &= 0\end{aligned}$$

Usando apenas a carga q e o fluxo ϕ como variáveis de estado, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= -\sqrt[3]{\phi} + I \\ \frac{d\phi}{dt} &= q^2 - \sqrt[3]{\sqrt[3]{\phi} - I}\end{aligned}$$

E usando apenas a tensão v_1 e a corrente j_2 tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= 2\sqrt{v_1}(-j_2 + I) \\ \frac{dj_2}{dt} &= \frac{1}{3j_2^2} \left(v_1 - \sqrt[3]{j_2 - I} \right)\end{aligned}$$

Em geral é simples separar as derivadas das variáveis de estado nas equações não lineares, mas a eliminação de variáveis auxiliares pode resultar em um sistema de equações não lineares requerendo solução numérica.

O caso não linear variante no tempo pode ser tratado da mesma forma, apenas utilizando-se as funções não lineares com seus valores nos instantes considerados. Note-se que o caso linear variante no tempo é apenas um caso particular do tratamento do caso não linear variante no tempo.

Exemplo: Um capacitor que siga a função:

$$q(t) = Ktv(t)^3$$

gera a equação de estado:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \sum \text{correntes} \\ K(t3v(t)^2 \frac{dv}{dt} + v(t)^3) &= \sum \text{correntes} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{3Ktv(t)^2} \left(\sum \text{correntes} - Kv(t)^3 \right)\end{aligned}$$

Se a função fosse $q(t) = C(t)v(t)$, caso linear variante no tempo, a equação de estado seria gerada de forma similar como:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \sum \text{correntes} \\ C(t) \frac{dv}{dt} + v(t) \frac{dC}{dt} &= \sum \text{correntes} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{C(t)} \left(\sum \text{correntes} - \frac{dC}{dt} v(t) \right)\end{aligned}$$

2.3.1.1 Montagem sistemática do sistema de equações de estado

Para obter o sistema de forma sistemática uma ideia é:

Obtém-se uma “árvore normal” sobre o grafo do sistema. Esta árvore inclui os ramos em uma ordem de prioridade:

1. Todas as fontes de tensão, independentes ou controladas.
2. Todos os capacitores.
3. Resistores como necessário.
4. Nenhum indutor.
5. Nenhuma fonte de corrente, independente ou controlada.

Se for possível obter uma árvore assim, definidos os ciclos e cortes fundamentais, define-se como incógnitas as tensões sobre o ramo da árvore e as correntes nos elos da árvore. Algumas das tensões são tensões sobre capacitores e algumas correntes são correntes em indutores. As equações geradas por estes elementos, de cortes para capacitores e de ciclos para indutores, serão as equações de estado, na forma, para o caso linear invariante no tempo:

$$C_i \frac{dv_{C_i}}{dt} = f_i(\vec{v}_c, \vec{j}_l)$$

$$L_i \frac{dj_{L_i}}{dt} = f_i(\vec{v}_c, \vec{j}_l)$$

As demais equações de ciclos e cortes permitem eliminar as demais variáveis. Note-se que as equações geradas por fontes de tensão são de cortes, e então devem ser “equações modificadas”, simplesmente definindo diretamente as tensões naqueles ramos. Analogamente, as equações geradas por fontes de corrente são de ciclos, “modificadas” também, definindo diretamente as correntes naqueles ramos. Os casos variante no tempo e não linear podem ser tratados conforme a discussão anterior.

Exemplo:

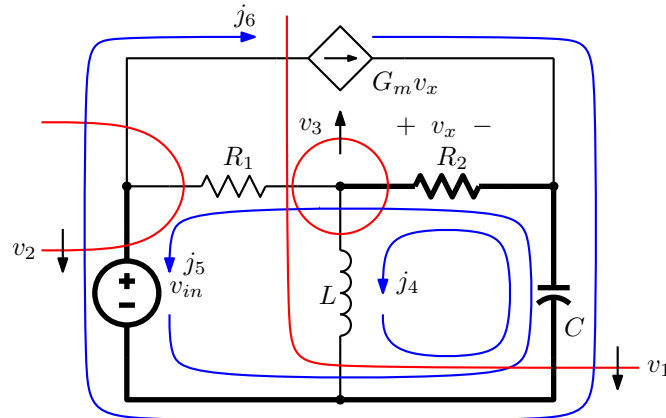


Figura 2.24: Circuito com equações de estado não triviais

Seja o circuito da figura 2.24. Com a árvore normal mostrada, existem 6 variáveis, sendo 3 tensões de corte e 3 correntes de ramo. As 6 equações são:

- 1) $C \frac{dv_1}{dt} + j_4 + j_5 - j_6 = 0$
- 2) $v_2 = v_{in}$
- 3) $\frac{v_3}{R_2} + j_4 + j_5 = 0$
- 4) $L \frac{dj_4}{dt} - v_1 - v_3 = 0$
- 5) $R_1 j_5 + v_2 - v_1 - v_3 = 0$
- 6) $j_6 = G_m v_3$

Para obter as equações de estado, todas as variáveis exceto v_1 e j_4 devem ser eliminadas. v_3 e j_5 vem da solução de um sistema de duas equações:

$$\begin{aligned}\frac{v_3}{R_2} + j_4 + j_5 &= 0 \\ R_1 j_5 + v_{in} - v_1 - v_3 &= 0\end{aligned}$$

Calculando v_3 e j_5 :

$$\begin{aligned}j_5 &= -\frac{v_3}{R_2} - j_4 \\ R_1 \left(-\frac{v_3}{R_2} - j_4\right) + v_{in} - v_1 - v_3 &= 0 \\ v_3 &= \frac{-R_1 j_4 + v_{in} - v_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \quad j_5 = \frac{R_1 j_4 - v_{in} + v_1}{R_1 + R_2} - j_4 = \frac{-R_2 j_4 - v_{in} + v_1}{R_1 + R_2}\end{aligned}$$

Montando as equações de estado:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{-j_4 - j_5 + G_m v_3}{C} \\ \frac{dj_4}{dt} &= \frac{v_1 + v_3}{L} \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{-j_4 - \frac{-R_2 j_4 - v_{in} + v_1}{R_1 + R_2} + G_m \frac{-R_1 j_4 + v_{in} - v_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}}{C} \\ \frac{dj_4}{dt} &= \frac{v_1 + \frac{-R_1 j_4 + v_{in} - v_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}}{L}\end{aligned}$$

Colocando na forma padrão matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1+R_2)C} - \frac{G_m R_2}{(R_1+R_2)C} & -\frac{1}{C} + \frac{R_2}{(R_1+R_2)C} - \frac{G_m R_1 R_2}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{1}{L} - \frac{R_2}{(R_1+R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ j_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1+R_2)C} + \frac{G_m R_2}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} v_{in}$$

Exemplo:

O procedimento para circuitos não lineares e/ou variantes no tempo é o mesmo. Seja o circuito da figura 2.25, que contém um indutor não linear e um capacitor variante no tempo. As equações dos três cortes e dos três ciclos são:

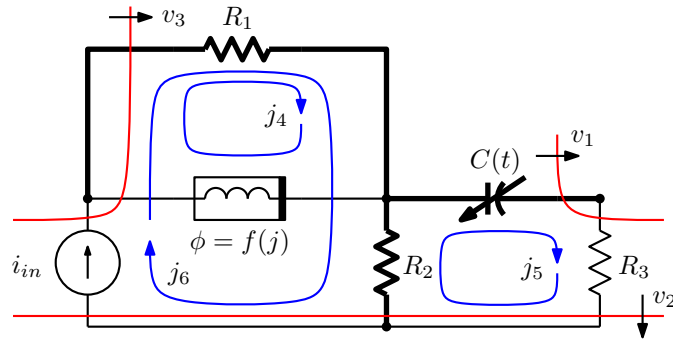


Figura 2.25: Circuito não linear variante no tempo, ciclos e cortes.

$$\begin{aligned}
 1) & \quad C \frac{dv_1}{dt} + v_1 \frac{dC}{dt} - j_5 = 0 \\
 2) & \quad \frac{v_2}{R_2} + j_5 - j_6 = 0 \\
 3) & \quad \frac{df}{dj}(j_4) \frac{dj_4}{dt} - v_3 = 0 \\
 4) & \quad \frac{v_3}{R_1} + j_4 - j_6 = 0 \\
 5) & \quad R_3 j_5 + v_1 - v_2 = 0 \\
 6) & \quad j_6 = i_{in}
 \end{aligned}$$

As equações 2 e 5 permitem calcular v_2 e j_5 (apenas j_5 é necessário), e a equação 3 dá v_3 .

$$\begin{aligned}
 v_2 &= R_2 i_{in} - R_2 j_5 \\
 R_3 j_5 + v_1 - R_2 i_{in} + R_2 j_5 &= 0 \\
 j_5 &= \frac{R_2 i_{in} - v_1}{R_2 + R_3} \\
 v_3 &= R_1 i_{in} - R_1 j_4
 \end{aligned}$$

O sistema de equações de estado vem da substituição destas variáveis nas equações 1 e 4:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \left(\frac{R_2 i_{in} - v_1}{R_2 + R_3} - \frac{dC}{dt} v_1 \right) \\ \frac{1}{\frac{df}{dj}(j_4)} (R_1 i_{in} - R_1 j_4) \end{bmatrix}$$

No caso foi possível separar as variáveis e a entrada, o que não ocorre no caso geral. Mesmo o sistema de equações envolvendo as variáveis auxiliares v_2 , v_3 e j_5 poderia ter sido não linear, tendo apenas solução numérica.

Exemplo: Para ilustrar que pode ocorrer um impasse em casos não lineares, seja o circuito da figura 2.26. As equações dos ciclos e dos cortes geram as equações:

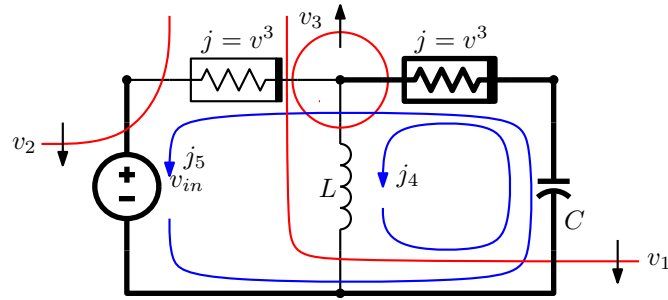


Figura 2.26: Circuito não linear em que escrever as equações de estado requer resolver um sistema não linear de equações.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & C \frac{dv_1}{dt} + j_4 + j_5 = 0 \\
 2) \quad & v_2 = v_{in} \\
 3) \quad & v_3^3 + j_4 + j_5 = 0 \\
 4) \quad & L \frac{dj_4}{dt} - v_1 - v_3 = 0 \\
 5) \quad & -\sqrt[3]{j_5} + v_2 - v_1 - v_3 = 0
 \end{aligned}$$

Para ter as equações de estado, obtidas das equações 1 e 4, é necessário eliminar v_3 e j_5 , o que neste caso gera um sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned}
 v_3^3 + j_4 + j_5 &= 0 \\
 -\sqrt[3]{j_5} + v_{in} - v_1 - v_3 &= 0
 \end{aligned}$$

A solução deve ser numérica.

No caso geral, tem-se as variáveis de estado \vec{x} , as variáveis auxiliares \vec{y} e as entradas \vec{u} , nas equações:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{u}(t)); \quad \vec{G}(\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{u}(t)) = 0$$

No método “forward” de Euler, e similarmente em outros métodos explícitos, basta resolver as equações auxiliares \vec{G} para $\vec{y}(t_0)$:

$$\vec{G}(\vec{x}(t_0), \vec{y}(t_0), \vec{u}(t_0)) = 0; \quad \vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0), \vec{y}(t_0), \vec{u}(t_0))$$

No método “backward” de Euler, e similarmente em outros métodos implícitos, pode-se usar um preditor como o “forward” acima para $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$ e resolver \vec{G} para $\vec{y}(t_0 + \Delta t)$, usando o sistema de equações de estado como corretor⁶:

$$\begin{aligned}
 \vec{G}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) &= 0 \\
 \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t))
 \end{aligned}$$

ou então, o que parece melhor, resolver simultaneamente um sistema não linear envolvendo as equações auxiliares e as da integração:

⁶Métodos preditores-corretores só são usualmente considerados a partir do método dos trapézios como corretor.

$$\begin{cases} \vec{G}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) = 0 \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) \end{cases}$$

2.3.1.2 Casos em que a árvore não é normal

É muito comum que não seja possível incluir todos os capacitores na árvore, ou que seja necessário incluir alguns indutores nela. Neste caso a árvore não é mais “normal”, mas o sistema usualmente ainda pode ser escrito. Equações de cortes contendo capacitores nos elos incluem termos com derivadas de somas ou subtrações de tensões de corte nos termos gerados por estes capacitores. Analogamente, equações de ciclos contendo indutores nos ramos da árvore incluem termos com derivadas de somas e subtrações de correntes de ciclo. O sistema, no caso linear invariante no tempo, toma a forma:

$$[K] \frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}(t) + [B]\vec{u}(t)$$

onde a matriz $[K]$, que normalmente seria uma identidade, não é mais. Se $[K]$ for inversível, basta multiplicar a equação pela inversa de $[K]$ para obter um sistema de equações de estado.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [K]^{-1}[A]\vec{x}(t) + [K]^{-1}[B]\vec{u}(t)$$

Em sistemas modelados realisticamente $[K]$ é sempre inversível. Circuitos contendo ciclos de capacitores e fontes de tensão e circuitos contendo cortes com indutores e fontes de corrente sempre recaem neste caso. Circuitos contendo transformadores geram um problema similar, pois aparecem derivadas das correntes em todos os indutores acoplados nas equações. A solução é idêntica, mas neste caso todas as correntes nos indutores são variáveis de estado. Circuitos com transformadores com acoplamento cerrado geram $[K]$ não inversível, e então não é possível gerar diretamente o sistema. Pode-se resolver este caso modelando o transformador com um modelo usando indutores e transformadores ideais, que tem um indutor a menos que o total.

Quando os ciclos capacitivos ou os cortes indutivos incluem fontes de tensão ou de corrente, respectivamente, as derivadas dos valores dessas fontes aparecem como entradas, geradas por termos exprimindo correntes em capacitores nos elos da árvore ou termos exprimindo tensões em indutores nos ramos da árvore. Essas derivadas podem ser tratadas como outras entradas no sistema.

Exemplo:

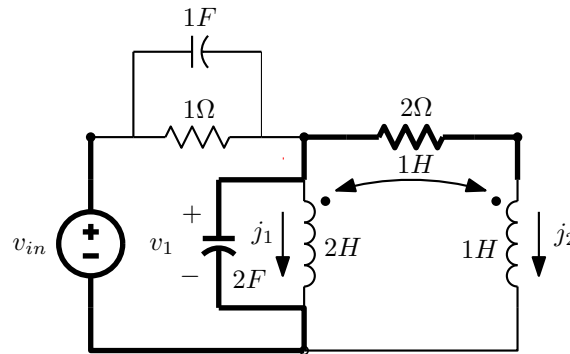


Figura 2.27: Circuito com ciclo de capacitores e fonte de tensão e transformador.

Seja o circuito da figura 2.27, que tem um transformador e um ciclo contendo a fonte de tensão e dois capacitores. Uma árvore nele não é normal, devido ao ciclo. Usando como variáveis de estado a tensão v_1 e as correntes j_1 e j_2 , o sistema pode ser escrito diretamente, na forma, em transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} 1) \quad & s2V_1 = V_{in} - V_1 + s(V_{in} - V_1) - J_1 - J_2 \\ 2) \quad & s2J_1 + sJ_2 = V_1 \\ 3) \quad & sJ_1 + sJ_2 = V_1 - 2J_2 \end{aligned}$$

A primeira equação gera uma nova entrada, a derivada de V_{in} :

$$s3V_1 = -V_1 - J_1 - J_2 + V_{in} + sV_{in}$$

As duas outras geram um sistema de equações:

$$s \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 - 2J_2 \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz $[L]$ tem-se as equações:

$$s \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 - 2J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2J_2 \\ V_1 - 4J_2 \end{bmatrix}$$

Combinando as 3 equações tem-se o sistema desejado:

$$s \begin{bmatrix} V_1 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in} \\ sV_{in} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Solução do caso linear invariante no tempo

Uma importante propriedade das equações de estado é que o caso linear invariante no tempo admite uma solução exata relativamente simples. Sejam as equações:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}(t) + [B]\vec{u}(t)$$

Aplicando transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= [A]\vec{X}(s) + [B]\vec{U}(s) \\ \vec{X}(s) &= (s[I] - [A])^{-1}\vec{x}(0) + (s[I] - [A])^{-1}[B]\vec{U}(s) \end{aligned}$$

Voltando para o domínio do tempo:

$$\vec{x}(t) = e^{[A]t}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{[A]\tau}[B]\vec{u}(t-\tau)d\tau$$

onde a transformada inversa de Laplace de $(s[I] - [A])^{-1}$ é identificada com a função exponencial de matriz $e^{[A]t}$. A primeira parte é a resposta à entrada zero do sistema, e a segunda parte, uma convolução da resposta impulsional com as entradas, é a resposta ao estado zero. A função $e^{[A]t}$ pode ser obtida através da transformada de Laplace, através de autovalores e autovetores (o que é essencialmente o mesmo cálculo), ou através da série de Taylor de e^x , que também é válida nesse caso:

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{1}{2}[A]^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}[A]^nt^n$$

Numericamente, a resposta em um tempo qualquer pode ser obtida da expressão geral, ou, de forma mais simples, pode-se calcular a solução a intervalos Δt :

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) = e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau} [B] \vec{u}(t_0 + \Delta t - \tau) d\tau$$

A integral de convolução pode ser aproximada de várias formas, por exemplo assumindo as entradas como constantes dentro do intervalo:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau} [B] \vec{u}(t_0) d\tau = \\ &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \left[[A]^{-1} e^{[A]t} [B] \vec{u}(t_0) \right]_0^{\Delta t} = \\ &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + [A]^{-1} \left(e^{[A]\Delta t} - [I] \right) [B] \vec{u}(t_0) \end{aligned}$$

Pode-se também aproximar a entrada por trapézios, com $\vec{u}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ dentro de cada intervalo de tempo:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau} [B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t - \tau) + \vec{b} \right) d\tau = \\ &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \left[[A]^{-2} \left(e^{[A]\tau} [B] \vec{a} + [A] e^{[A]\tau} [B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t - \tau) + \vec{b} \right) \right) \right]_0^{\Delta t} = \\ &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + [A]^{-2} \left(e^{[A]\Delta t} [B] \vec{a} + [A] e^{[A]\Delta t} [B] \left(\vec{a}t_0 + \vec{b} \right) - [I][B] \vec{a} - [A][I][B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t) + \vec{b} \right) \right) = \\ &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + [A]^{-2} \left(e^{[A]\Delta t} - [I] \right) [B] \vec{a} + [A]^{-1} \left(e^{[A]\Delta t} [B] \left(\vec{a}t_0 + \vec{b} \right) - [B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t) + \vec{b} \right) \right) \end{aligned}$$

Colocando a expressão apenas em termos de $\vec{u}(t_0)$ e $\vec{u}(t_0 + \Delta t)$ e procurando simplificar:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + [G] \vec{u}(t_0) + [H] \vec{u}(t_0 + \Delta t) \\ [G] &= \left([A]^2 \Delta t^2 \right)^{-1} \left(e^{[A]\Delta t} (-[I] + [A]\Delta t) + [I] \right) [B] \Delta t \\ [H] &= \left([A]^2 \Delta t^2 \right)^{-1} \left(e^{[A]\Delta t} - [I] + [A]\Delta t \right) [B] \Delta t \end{aligned}$$

Nos dois casos, há um conjunto fixo de matrizes a calcular, apenas uma vez se Δt for fixo.

É ainda possível aproximar a integral, sem tentar resolvê-la como acima. Usando a aproximação “backward” de Euler:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau} [B] \vec{u}(t_0 + \Delta t - \tau) d\tau \approx \\ &\approx e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \Delta t e^{[A]\Delta t} [B] \vec{u}(t_0) \end{aligned}$$

Ou, usando o método dos trapézios:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx e^{[A]\Delta t} \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} \left(e^{[A]\Delta t} [B] \vec{u}(t_0) + [I][B] \vec{u}(t_0 + \Delta t) \right)$$

Exemplos:

Seja o sistema de equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1(0)}{dt} \\ \frac{x_2(0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução explícita é, usando a integral na forma $\int_0^t e^{[A]\tau} [B] u(t-\tau) d\tau$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

Para calcular $e^{[A]t}$ começa-se por calcular os autovalores de $[A]$:

$$\det(s[I] - [A]) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 \therefore \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

A seguir os autovetores correspondentes aos autovalores são calculados:

$$s_i \vec{u}_i = [A] \vec{u}_i$$

Para $s_1 = -1$:

$$-1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} -a = -a \\ -b = a - 2b \end{cases} \therefore a = b \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $s_2 = -2$:

$$-2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} -2a = -a \\ -2b = a - 2b \end{cases} \therefore a = 0 \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcula-se então a função da matriz na base dos autovetores, onde a matriz $[A]'$ tem os autovalores de $[A]$ na diagonal principal:

$$[A]' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \therefore [e^{[A]t}]' = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Então volta-se o resultado para a base original:

$$e^{[A]t} = [P][e^{[A]t}]'[P]^{-1}$$

onde $[P]$ é uma matriz montada com os autovetores encontrados:

$$[P] = [\vec{u}_1 \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$e^{[A]t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A solução então é:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ e^{-\tau} - e^{-2\tau} & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ e^{-\tau} - e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-\tau} \\ -e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-2\tau} \end{bmatrix}_0^t = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A solução pode ser obtida também por transformada de Laplace, onde as operações são essencialmente as mesmas:

$$(s[I] - [A]) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \therefore (s[I] - [A])^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \mathcal{L}(e^{[A]t})$$

Tendo a transformada da exponencial da matriz $[A]t$, basta montar a solução:

$$\vec{X}(s) = (s[I] - [A])^{-1} \vec{x}(0) + (s[I] - [A])^{-1} [B] \vec{U}(s)$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \frac{1}{s} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{s+1}}{s+2} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s} \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

E então a mesma solução é encontrada, formalmente para $t > 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t)$$

2.3.3 Eliminação da integral de convolução

A inconveniente integral de convolução pode ser eliminada se as entradas forem substituídas por circuitos que as gerem, a partir de condições iniciais. Assim passa-se a não ter mais entradas no circuito, mas apenas o estado inicial evoluindo. Fontes em degrau podem ser geradas com capacitores carregados conectados ao circuito por fontes controladas a tensão. Fontes senoidais podem ser geradas com tanques LC conectados de forma similar. Ver a figura 2.28. Outros tipos comuns, como rampas e exponenciais, são também de fácil implementação. O valor da fonte pode ser alterado ao longo da análise com a mudança das variáveis de estado correspondentes, gerando fontes em séries de degraus, segmentos de senóides, etc., sempre com solução exata.

Exemplo: Seja simular um circuito similar a uma bobina de Tesla, mas usando a resposta ao estado zero do sistema como excitação. Pode ser mostrado que estes sistemas podem ser projetados [15] de forma a gerar acúmulos de energia no capacitor de saída, de forma similar ao que acontece na bobina de Tesla convencional, que usa a resposta à entrada zero do sistema. A estrutura é mostrada na figura 2.29⁷. Uma fonte senoidal em série com o capacitor C_1 provê a excitação. Ela é acionada repentinamente, e gera um transiente perpétuo envolvendo três frequências, ω_0 e as frequências naturais de oscilação da rede. A eliminação da fonte senoidal é feita com o tanque L_0C_0 , tal que $j_0(0) = A\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$, para que quando toda a energia estiver em C_0 a tensão sobre o tanque seja de $\pm A$ V, e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$. Pode-se arbitrar L_0 , e calcular $C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L_0}$ e $j_0(0) = \frac{A}{\omega_0 L_0}$. As outras condições iniciais são nulas.

Escrevendo as equações de estado:

⁷Esta estrutura é também conhecida como “double resonance solid-state Tesla coil”, DRSSTC, devido ao circuito de acionamento, usualmente feito com transistores de potência.

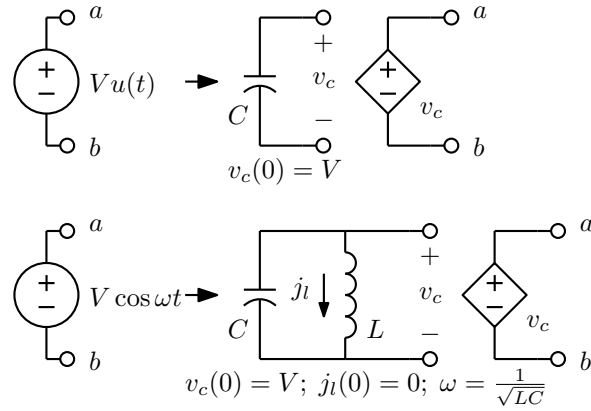


Figura 2.28: Substituição de fontes por variáveis de estado.

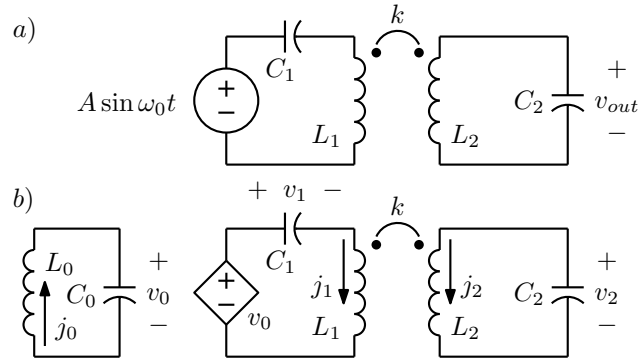


Figura 2.29: a) Circuito de múltipla ressonância de segunda ordem com excitação senoidal. b) Modelo para a geração de equações de estado.

$$\begin{aligned}
 C_0 \frac{dv_0}{dt} &= j_0 \\
 L_0 \frac{dj_0}{dt} &= -v_0 \\
 C_1 \frac{dv_1}{dt} &= j_1 \\
 C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -j_2 \\
 L_1 \frac{dj_1}{dt} + M \frac{dj_2}{dt} &= Av_0 - v_1 \\
 M \frac{dj_1}{dt} + L_2 \frac{dj_2}{dt} &= v_2
 \end{aligned}$$

As equações envolvendo o transformador devem ser rearranjadas para isolar as derivadas das correntes, com a inversão da matriz de indutância:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Av_0 - v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(Av_0 - v_1) - \Gamma_{12}v_2 \\ \Gamma_{21}(Av_0 - v_1) - \Gamma_{22}v_2 \end{bmatrix}$$

Colocando tudo na forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_0 \\ j_0 \\ v_1 \\ j_1 \\ v_2 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \Gamma_{11}A & 0 & -\Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ \Gamma_{21}A & 0 & -\Gamma_{21} & 0 & \Gamma_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ j_0 \\ v_1 \\ j_1 \\ v_2 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

As equações estão na forma $\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}$, e então a solução é simplesmente $\vec{x}(t_0 + \Delta t) = e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0)$, exatamente. A exponencial de matriz pode ser obtida facilmente por série de Taylor, e é sempre a mesma se Δt for fixo. Como exemplo do comportamento deste circuito, seja uma forma normalizada em que as três frequências estejam na razão 1:3:5⁸. Três dos elementos podem ser arbitrados, no caso C_1 , C_2 e L_2 e os outros parâmetros calculados como em [15]. Os parâmetros do oscilador senoidal ficam como mostrado:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \text{ F}; \quad L_1 = 4.2 \text{ H}; \quad C_2 = 0.01 \text{ F}; \quad L_2 = 100 \text{ H} \\ \omega_0 &= 1.341641 \text{ rad/s} \quad k = 0.872871 \\ L_0 &= 1 \text{ H}; \quad C_0 = 0.555556 \text{ F}; \quad j_0(0) = 0.745356 \text{ A} \end{aligned}$$

A matriz $e^{[A]\Delta t}$, para $\Delta t = 0.1$ s, obtida somando-se 16 termos da série de Taylor, $\sum_{n=0}^{15} \frac{[A]^n \Delta t^n}{n!}$, resulta como:

$$e^{[A]\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.99101 & 0.17946 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.099700 & 0.99101 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0049750 & 0.00029910 & 0.99501 & 0.099833 & -0.00089055 & 0.0029736 \\ 0.099002 & 0.0089550 & -0.099301 & 0.99501 & -0.017733 & 0.089055 \\ 0.088921 & 0.0053478 & -0.089055 & -0.0029736 & 0.97908 & -9.9301 \\ -0.017680 & -0.0016005 & 0.017733 & 0.00089055 & 0.0041653 & 0.97908 \end{bmatrix}$$

A figura 2.30 mostra as formas de onda de tensão calculadas na entrada e sobre os dois capacitores⁹. A 75% do ciclo da entrada toda a energia se acumula em C_2 , sendo depois retornada à fonte. A seguir o mesmo transiente se repete, invertido. Diferentemente da bobina de Tesla clássica, a relação entre a tensão de entrada e a máxima tensão de saída depende do número de ciclos usados para a transferência de energia, já que a energia é entregue ao circuito gradualmente pela fonte de excitação, em vez de ser constante no circuito o tempo todo. No caso, o ganho de tensão é de 11.18.

2.3.4 Uso de equações de estado em simulação de redes passivas com redes ativas

Uma importante aplicação do sistema de equações de estado é quando se deseja construir um circuito que realize a mesma função de uma rede passiva, usualmente um filtro¹⁰, mas sem usar indutores e

⁸A frequência de excitação é a central. Esta é a forma com mais rápida acumulação de energia. A forma regular seguinte seria com razão 3:5:7.

⁹Cálculo feito com um programa de cálculo algébrico, calculando $(e^{[A]\Delta t})^n \vec{x}(0)$, o que dá o estado nos tempos $n\Delta t$.

¹⁰A síntese de filtros passivos, usados como protótipos, é discutida na parte seguinte, mas este material está aqui por ser aplicação direta de equações de estado.

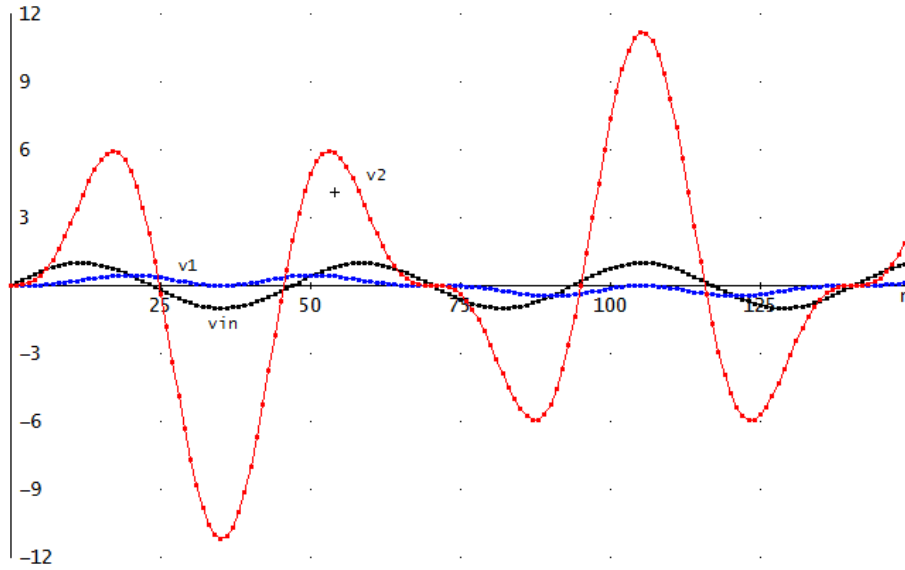


Figura 2.30: Tensões simuladas no circuito da figura 2.29 para entrada de amplitude unitária, para 150 intervalos de $\Delta t = 0.1$ s.

com uma estrutura suscetível de ser realizada em um circuito miniaturizado ou mesmo integrado. Uma simulação usando equações de estado preserva não só a função do protótipo mas também, usualmente, suas características de sensibilidade à variação dos valores dos componentes.

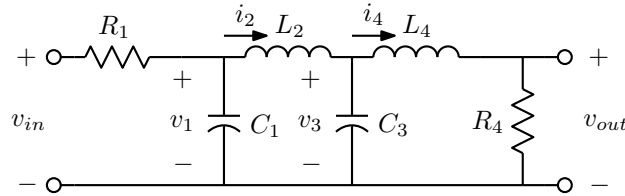


Figura 2.31: Filtro protótipo a simular.

Exemplo: Seja o circuito protótipo da figura 2.31, um filtro passa-baixas de quarta ordem. As equações de estado para ele podem ser escritas como integrações:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 \right) dt \\ i_2 &= \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt \\ v_3 &= \frac{1}{C_3} \int (i_2 - i_4) dt \\ i_4 &= \frac{1}{L_4} \int (v_3 - R_4 i_4) dt \end{aligned}$$

Os sinais das integrações podem ser organizados de forma a minimizar o número de inversões ne-

cessárias. Começa-se com um integrador somador inversor para gerar $-v_1$, e daí por diante procura-se aproveitar os sinais das variáveis. O resultado é uma série de integrações com sinais alternados, simulando as variáveis de tensão e de corrente do protótipo em escada. Uma outra versão pode ser obtida começando-se com uma integração não inversora.

$$\begin{aligned} -v_1 &= -\frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 \right) dt \\ -i_2 &= +\frac{1}{L_2} \int (-v_1 + v_3) dt \\ +v_3 &= -\frac{1}{C_3} \int (-i_2 + i_4) dt \\ +i_4 &= +\frac{1}{L_4} \int (v_3 - R_4 i_4) dt \end{aligned}$$

Estas equações são implementadas pelo circuito da figura 2.32, que é com conjunto de quatro integradores somadores com polaridades alternadas e conexões conforme as equações. Inversores são usados para gerar as integrações não inversoras¹¹. A saída do filtro seria a variável $R_4 i_4$, que se for usado um protótipo normalizado, com $R_4 = 1\Omega$, é diretamente disponível onde indicado. Note-se que o circuito está normalizado, e deve ser obtido a partir de um protótipo também normalizado. Assim todos os valores dos componentes ficam próximos de 1. Desnormalizações em frequência e impedância sobre os resistores e capacitores geram o circuito real.

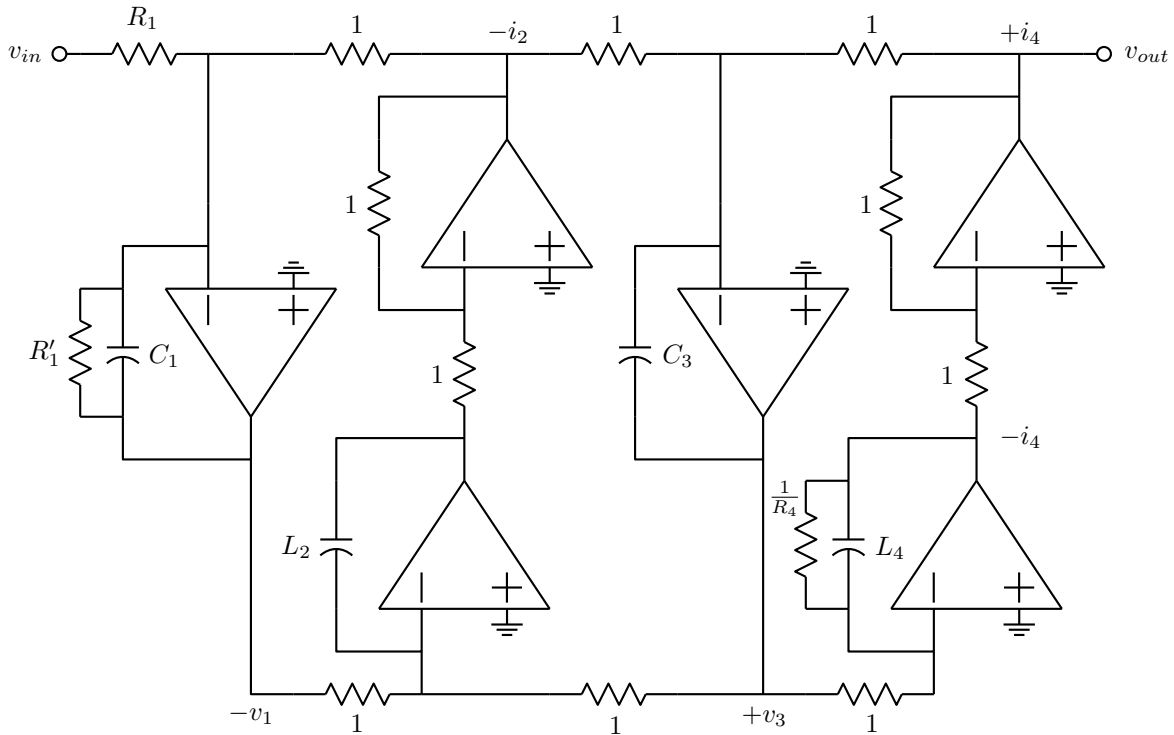


Figura 2.32: Simulação normalizada do protótipo baseada em equações de estado.

¹¹Este tipo de realização é conhecido na literatura como realização “leapfrog”, devido à forma como os ciclos de integradores se interconectam.

O circuito pode ser modificado de várias formas, mantendo a função do filtro. Pode-se mudar os níveis de sinal na saída dos integradores, para equalizar a faixa dinâmica dos sinais dentro do filtro, com o procedimento, seja para dividir a tensão de saída de um amplificador por M :

- Multiplicar as resistências de todos os resistores entrando no integrador por M .
- Dividir as resistências de todos os resistores saindo do integrador por M .

Resistores realimentando os integradores não são afetados. Se os valores dos vários M forem escolhidos como os máximos níveis de sinal para uma entrada unitária (senoidal, usualmente) dentro da banda passante do filtro, esta operação aplicada a todos os integradores vai gerar máximos níveis de sinal iguais ao nível do sinal da entrada em todos os integradores.

Pode-se também igualar os valores dos capacitores, alterando os níveis de impedância de todos os integradores. Seja tornar todos os capacitores iguais a C_0 . Para cada integrador:

- Multiplicar as resistências de todos os resistores entrando no integrador por C/C_0 .
- Multiplicar a capacitância do capacitor realimentando o integrador por C_0/C , o que a torna C_0 .

Se existirem capacitores entrando ou saindo dos integradores, estes devem ser modificados na forma inversa, já que suas impedâncias são proporcionais aos inversos das capacitâncias. Capacitores assim aparecem em simulações de estruturas contendo ciclos de capacitores ou cortes de indutores.

Exemplo: Seja simular o filtro da figura 2.33, um filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão. Devido ao ciclo de capacitores, as equações de estado na forma integral ficam na forma abaixo, onde a corrente no capacitor C_2 vale $C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3)$, com C_2 sendo tratado como uma impedância, e não são feitas as operações para gerar um verdadeiro sistema de equações de estado.

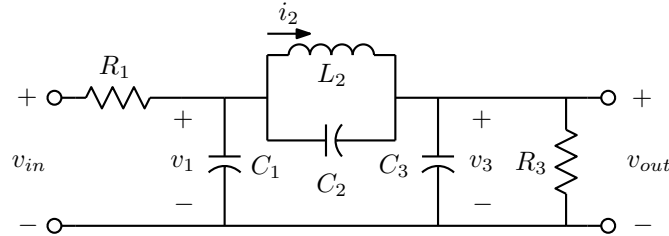


Figura 2.33: Filtro de ordem 3 com ciclo capacitivo.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 - C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) \right) dt \\
 i_2 &= \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt \\
 v_3 &= \frac{1}{C_3} \int \left(i_2 - \frac{v_3}{R_3} + C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) \right) dt
 \end{aligned}$$

Reorganizando os sinais como no exemplo anterior vem:

$$\begin{aligned}
-v_1 &= -\frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 + C_2 \frac{d}{dt}(-v_1 + v_3) \right) dt \\
-i_2 &= +\frac{1}{L_2} \int (-v_1 + v_3) dt \\
+v_3 &= -\frac{1}{C_3} \int \left(-i_2 + \frac{v_3}{R_3} + C_2 \frac{d}{dt}(-v_1 + v_3) \right) dt
\end{aligned}$$

O circuito que realiza o filtro, normalizado, é mostrado na figura 2.34. O capacitor C_2 aparece quatro vezes, em paralelo com C_1 e C_3 , e realizando ligações cruzadas entre o primeiro e o terceiro integradores. Notar que sem C_2 o circuito realiza a simulação por equações de estado do filtro protótipo exatamente. Com C_2 , a equalização da faixa dinâmica requer mudanças nos capacitores cruzados também, tratados por suas impedâncias.

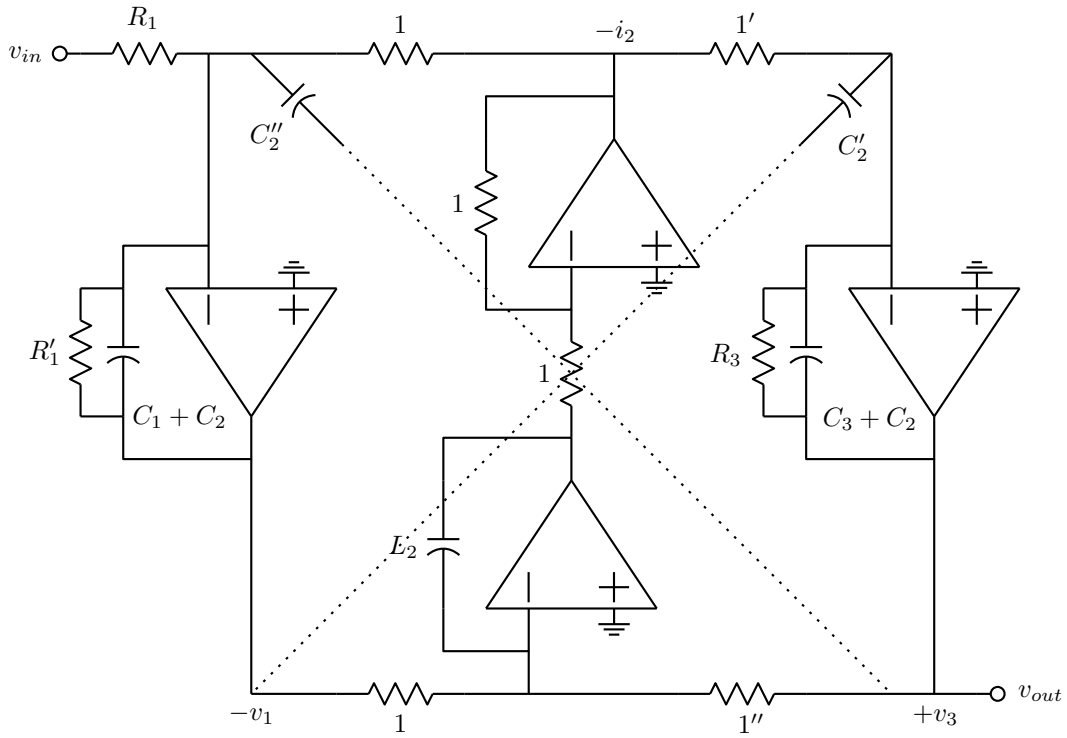


Figura 2.34: Circuito simulando o protótipo, com “capacitores cruzados”.

Exemplo: Como exemplo de desnormalização e ajuste da faixa dinâmica, seja projetar o filtro elíptico de terceira ordem com atenuação máxima na banda passante de 1 dB, atenuação mínima na banda passante de 40 dB, banda passante até 1 kHz, e resistores de 10 kΩ, com a estrutura da figura 2.34. O protótipo normalizado, com banda passante até 1 rad/s, na forma da figura 2.33, obtido com um programa de síntese de filtros (ou uma tabela), tem os valores na primeira coluna abaixo.

$$\begin{array}{lll}
R_1 : 1 \, \Omega & \Rightarrow & 10 \, \text{k}\Omega \\
R_3 : 1 \, \Omega & \Rightarrow & 10 \, \text{k}\Omega \\
C_1 : 1.909413 \, \text{F} & \Rightarrow & 30.3896 \, \text{nF} \\
C_2 : 0.145356 \, \text{F} & \Rightarrow & 2.3134 \, \text{nF} \\
L_2 : 0.904212 \, \text{H} & \Rightarrow & 14.3910 \, \text{nF} \\
C_3 : 1.909413 \, \text{H} & \Rightarrow & 30.3896 \, \text{nF}
\end{array}$$

Para escalar em impedância, resistências são multiplicadas por 10000 e capacitâncias divididas, e para escalar em frequência capacitâncias são divididas por $2\pi \times 1000$, resultando nos valores da segunda coluna. Os resistores unitários ficam todos com 10 k Ω . Para dobrar a tensão de saída, a resistência 1' fica com 5 k Ω , 1'' com 20 k Ω , C_2' fica com 2.3134×2 nF, e C_2'' com $2.3134 \div 2$ nF. Este escalamento torna unitário o ganho máximo de tensão do filtro, e deixa uma margem de duas vezes nas demais saídas dos amplificadores, pois note-se que em baixa frequência os ganhos da entrada até todas as variáveis de estado do protótipo normalizado valem 0.5 (−6.02 dB), tanto para as tensões quanto para a corrente (simulada por tensão) no indutor. O resultado nas respostas em frequência pode ser visto na figura 2.35. Uma pequena margem adicional seria desejável para i_2 .

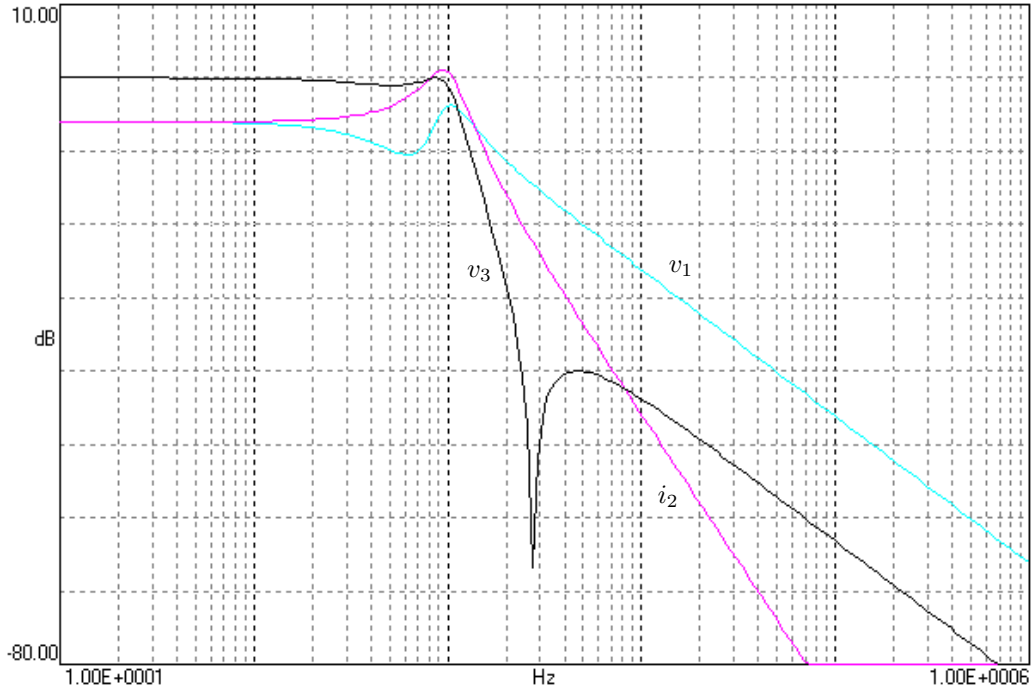


Figura 2.35: Módulos da resposta em frequência do filtro projetado, para as três variáveis de estado.

Exemplo: Um procedimento similar pode ser feito para geração de filtros usando transcondutores feitos com amplificadores operacionais de transcondutância¹² e capacitores, filtros “OTA-C”. Seja um filtro de quinta ordem com a estrutura da figura 2.36. As equações de estado para a estrutura, com a mesma modificação feita no tratamento dos capacitores suspensos do exemplo anterior, tomam a forma integral:

¹²Amplificadores similares a amplificadores operacionais, mas com corrente de saída controlada pela tensão de entrada, $i_o = G_m v_{in}$ e altas impedâncias de entrada e de saída.

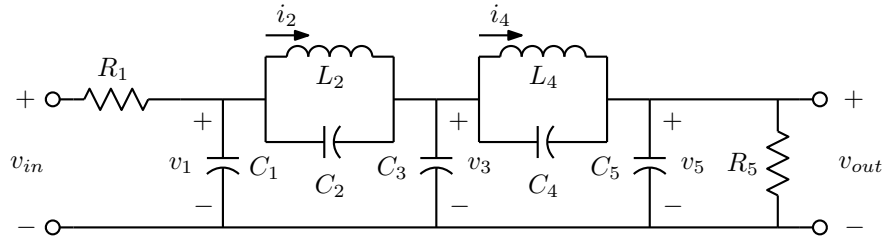


Figura 2.36: Filtro de ordem 5 com dois ciclos capacitivos.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 - C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) \right) dt \\
 i_2 &= \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt \\
 v_3 &= \frac{1}{C_3} \int \left(i_2 - i_4 + C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) - C_4 \frac{d}{dt}(v_3 - v_5) \right) dt \\
 i_4 &= \frac{1}{L_4} \int (v_3 - v_5) dt \\
 v_5 &= \frac{1}{C_5} \int \left(i_4 - \frac{v_5}{R_5} + C_4 \frac{d}{dt}(v_3 - v_5) \right) dt
 \end{aligned}$$

As integrações podem ser realizadas com amplificadores operacionais de transcondutância com $G_m = 1$ S na versão normalizada aplicando corrente em capacitores aterrados. Neste caso pode-se reconhecer que as correntes pelos capacitores suspensos podem ser obtidas apenas copiando a estrutura de rede capacitiva do protótipo, resultando a estrutura normalizada da figura 2.37. Foi assumido que o protótipo normalizado tem $R_5 = 1 \Omega$ na simulação da corrente por R_5 . Uma desnormalização do circuito em frequência e impedância gera o filtro final, com valores realísticos para as transcondutâncias. As tensões dentro do circuito ativo simulam as tensões e correntes no protótipo normalizado, como no exemplo anterior. Com este tipo de estrutura é mais difícil realizar o escalamento de faixa dinâmica, embora seja possível [12].



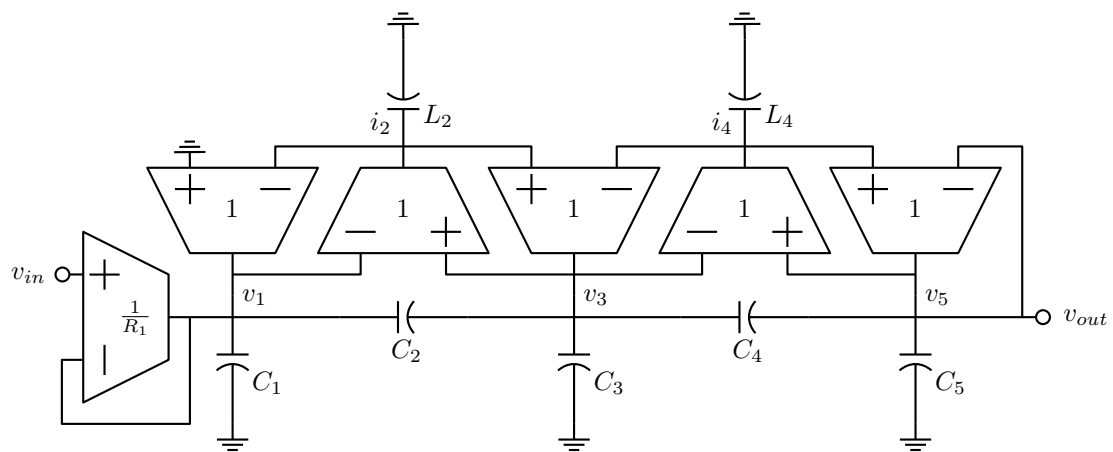


Figura 2.37: Filtro de ordem 5 com dois ciclos capacitivos simulado por uma estrutura com amplificadores operacionais de transcondutância e capacitores.

Parte II

Introdução à síntese de circuitos

Capítulo 3

Propriedades e teoremas básicos

As próximas seções discutem várias propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo. O objetivo final é chegar a processos de síntese para estes circuitos, em particular para filtros, mas alguns itens sobre análise ainda vão aparecer.

3.1 Propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo

As características dos sistemas lineares invariantes no tempo que são importantes para a síntese dos mesmos e para a análise de seu comportamento podem todas ser obtidas da caracterização usando transformadas de Laplace. Para o problema da análise, o tratamento já foi visto. A transformada de Laplace permite transformar um circuito geral em um circuito “resistivo”, que pode ser analisado com as mesmas técnicas usadas para estes circuitos, ou a transformada pode ser aplicada a sistemas de equações diferenciais como as equações de estado e a resposta é obtida pela volta ao domínio do tempo da solução encontrada pela transformada. Para o problema de síntese, o que se procura realizar, ou encontrar como construir, são funções de transferência, entre certas tensões e correntes no circuito.

3.1.1 Portas

É conveniente definir “portas” em um circuito, que são pares de terminais onde são medidas tensões em aberto ou correntes em curto. Uma porta pode ser aberta em um circuito geral por dois métodos:

- Entrada em série, ou “de alicate”, onde um ramo é cortado e as extremidades do corte usadas como porta.
- Entrada em paralelo, ou “de ferro de soldar”, onde dois nós do circuito são usados como porta.

A diferença essencial entre estes tipos de porta aparece quando se conecta fontes de entrada, de tensão ou de corrente, a estas portas, e quando se mede tensões em aberto ou correntes de curto nelas. Características importantes da rede, como as frequências naturais (ver a seguir), são preservadas quando se conecta uma fonte de tensão ou se mede uma corrente em uma porta aberta em série, e quando se conecta uma fonte de corrente ou se mede uma tensão em uma porta aberta em paralelo.

Existe também uma distinção entre as características das funções de transferência de “uma porta”, que se referem a relações entre tensão $V(s)$ e corrente $I(s)$ em uma mesma porta, e funções de transferência entre “duas portas” distintas. Para uma porta são definidas:

- Impedância: $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$.
- Admitância: $Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$.

Em um circuito RLCM, talvez com fontes controladas lineares, impedâncias e admitâncias são razões de polinômios de “s”. Seja $Z(s) = N(s)/D(s)$. $Z(s)$ é uma função de transferência que calcula a tensão na porta quando é aplicada uma corrente a ela. $Y(s)$ calcula a corrente na porta quando é aplicada uma tensão a ela. Para $Z(s)$ ser estável, as raízes de $D(s)$ tem que estar no semiplano lateral esquerdo, ou serem simples no eixo imaginário. Para $Y(s)$ ser estável, o mesmo vale para $N(s)$. Todos os circuitos RLCM com elementos positivos são estáveis, mas se existirem elementos negativos ou fontes controladas as funções de impedância e admitância podem ser instáveis, ambas ou apenas uma delas.

Para duas portas, nomeadas “1” e “2”, considerando entrada em 1 e saída em 2, existem impedâncias e admitâncias em ambas as portas, e também as funções de transferência:

- Ganho de tensão: $A(s) = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0}$.
- Ganho de corrente: $B(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0}$.
- Transadmitância: $Y_m(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0}$.
- Transimpedância: $Z_m(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0}$.

Existem também as mesmas funções para entrada na porta “2” e saída na porta “1”, naturalmente. Vai ser visto adiante que uma rede de 2 portas pode ser caracterizada por duas impedâncias e duas destas funções de transferência.

3.1.2 Resposta em frequência

Os procedimentos de síntese permitem obter estruturas que realizam estas funções, geralmente com finalidade de construir filtros. O procedimento para calcular funções de transferência já foi visto, na seção sobre análise no estado permanente senoidal. Aplicando-se um sinal senoidal a uma função de transferência, a saída em regime permanente é uma senoide da mesma frequência, mas com o módulo e o ângulo de fase modificado pela função. A operação é completamente descrita por um cálculo com fasores. Seja o caso de um ganho de tensão entre duas portas:

$$V_2(j\omega) = T(j\omega)V_1(j\omega) \Rightarrow A_2 + jB_2 = T(j\omega)(A_1 + jB_1)$$

onde $A_1 + jB_1$ é o fasor de entrada (correspondente ao sinal de entrada $A_1 \cos(\omega t) - B_1 \sin(\omega t)$), $T(j\omega)$ é a função de transferência $T(s)$ quando $s = j\omega$, e $A_2 + jB_2$ é o fasor correspondente ao sinal de saída. O módulo do fasor de entrada, $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, fica multiplicado por $|T(j\omega)|$, e a fase fica somada de $\angle T(j\omega)$. O efeito pode ser então caracterizado por gráficos de módulo e fase da função de transferência.

3.2 Frequências naturais

A resposta a uma excitação de um sistema linear invariante no tempo pode sempre ser decomposta em duas partes. Uma parte é forçada pela entrada, e é chamada de “resposta ao estado zero”. A outra depende apenas do estado inicial do sistema, e é chamada de “resposta à entrada zero”. A análise em transformada de Laplace calcula ambas simultaneamente, uma em função das entradas, somada à outra em função das condições iniciais. Observando como a análise em transformada de Laplace é feita, nota-se que qualquer variável calculada por um sistema de equações como os estudados (nós, malhas, etc.) tem uma transformada de Laplace que, pelo método de Cramer, é a razão de dois determinantes, $X_0(s) = N(s)/D(s)$. O numerador contém as transformadas de Laplace das entradas multiplicando numeradores de funções de transferência, e o denominador é sempre o mesmo para todas as variáveis. Em circuitos RLCM (compostos por resistores, indutores, capacitores e transformadores) $D(s)$ é um polinômio

de s , possivelmente com potências negativas de s também. Os termos do numerador multiplicando as entradas também são assim. A inversão da transformada, de volta ao domínio do tempo, requer a multiplicação de $N(s)$ e $D(s)$ por uma potência adequada de s para tornar o denominador em um polinômio com potências positivas (e talvez uma nula) de s . A seguir é feita uma expansão em frações parciais, e os termos resultantes são identificados com as correspondentes funções no tempo, somadas.

No caso da resposta à entrada zero ocorre o mesmo, com as condições iniciais atuando como entradas. A expansão em frações parciais normalmente é do tipo:

$$X_0(s) = \sum_i \frac{k_i}{s + s_i} \Rightarrow x_0(t) = \sum_i k_i e^{s_i t}$$

Os termos s_i são as “frequências naturais” do sistema, e podem ser dos tipos:

- $s_i = 0$, em zero. $x_{0i}(t) = k_i$
- $s_i = a_i$, real. $x_{0i}(t) = k_i e^{a_i t}$
- $s_i = a_i + j b_i$, complexo, sempre em pares conjugados para funções reais.

No caso de um par complexo conjugado, os resíduos também são complexos conjugados $k_{ri} \pm j k_{ii}$, e os dois termos se combinam gerando senoides multiplicando exponenciais:

$$\begin{aligned} x_{0i}(t) &= (k_{ri} + j k_{ii}) e^{(a_i + j b_i)t} + (k_{ri} - j k_{ii}) e^{(a_i - j b_i)t} \\ &= e^{a_i t} ((k_{ri} + j k_{ii})(\cos(b_i t) + j \sin(b_i t)) + (k_{ri} - j k_{ii})(\cos(b_i t) - j \sin(b_i t))) \\ &= e^{a_i t} (2k_{ri} \cos(b_i t) - 2k_{ii} \sin(b_i t)) \end{aligned}$$

No caso de raízes múltiplas do denominador, na expansão em frações parciais aparecem termos com todas as potências de $s - s_i$ no denominador, e no tempo aparecem os mesmos termos multiplicando potências do tempo. Por exemplo:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+3)^3} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3} + \frac{k_3}{(s+3)^2} + \frac{k_4}{(s+3)^3} \\ x(t) &= k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} + k_3 t e^{-3t} + k_4 \frac{t^2}{2} e^{-3t} \end{aligned}$$

onde $k_1 = 1/8$, $k_2 = -1/8$, $k_3 = -1/4$ e $k_4 = -1/2$. Note que a transformada inversa de Laplace de $\frac{1}{(s-a)^n}$ vale $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$. Frequências naturais complexas múltiplas podem ocorrer também. Estes casos raramente acontecem. Somente aparecem no caso ideal de circuitos especialmente projetados para isto.

As frequências naturais determinam a estabilidade de um sistema, ou de um circuito. Sistemas estáveis tem todas as f. n. no semiplano lateral esquerdo, ou simples no eixo imaginário, nunca gerando transientes crescentes. Circuitos LCM tem todas as f. n. no eixo imaginário ou em zero. Circuitos RC e RL tem todas no semieixo real negativo ou em zero, já que não podem gerar respostas oscilatórias. Circuitos RLCM são sempre passivos, e portanto estáveis. Instabilidade exige a presença de fontes controladas ou de elementos RLC negativos. Para um circuito RLCM ter $2k$ f. n. complexas, ele deve ter ao menos k capacitores e k indutores. Frequências naturais em zero aparecem quando existem ciclos de indutores e fontes de tensão ou cortes de capacitores e fontes de corrente, que são estruturas que geram tensões e correntes constantes na resposta à entrada zero. Circuitos passivos podem ter várias f. n. em zero ou no eixo imaginário, mas os resíduos dos termos multiplicando potências do tempo em qualquer resposta à entrada zero são sempre nulos, pois não há como serem geradas respostas crescentes. Estas f. n. nulas invariavelmente ocorrem para variáveis diferentes (ver abaixo).

3.2.1 Cálculo de frequências naturais

Como é o denominador das transformadas de Laplace que determina as f. n., basta observar como gerá-lo. Em uma análise nodal, o denominador é o determinante da matriz $[Y_n(s)]$, que é um polinômio de s e $1/s$. As f. n. são as raízes deste polinômio depois de uma multiplicação por uma potência adequada de s para eliminar os termos em potências de $1/s$. Como estas potências são geradas pelos indutores, esta potência é o número de indutores no circuito. Para análise de malhas vale a regra dual, e para cortes e ciclos as mesmas regras. Em análises modificadas, como a análise nodal modificada com as correntes nos indutores calculadas, o determinante não precisa de correção. No sistema de equações de estado, as f. n. são os autovalores da matriz $[A]$.

- Análise nodal: f. n. = raízes de $|Y_n(s)|s^{\text{número de indutores}}$.
- Análise das malhas: f. n. = raízes de $|Z_m(s)|s^{\text{número de capacitores}}$.
- Análise ndos cortes: f. n. = raízes de $|Y_c(s)|s^{\text{número de indutores}}$.
- Análise das ciclos: f. n. = raízes de $|Z_l(s)|s^{\text{número de capacitores}}$.
- Análise nodal ou dos cortes modificada com \vec{j}_L calculadas: f. n. = raízes de $|Y_n(s)|$ ou $|Y_c(s)|$.
- Análise das malhas ou dos ciclos modificada com \vec{v}_C calculadas: f. n. = raízes de $|Z_m(s)|$ ou $|Z_l(s)|$.
- Equações de estado: f. n. = raízes de $|s[I] - [A]|$, autovalores de $[A]$.

O cálculo obtém todas as frequências naturais do circuito, sem considerar onde aparecem nas variáveis do circuito.

3.2.2 Frequências naturais de uma variável

Quando se considera uma variável apenas, pode ocorrer que para ela não apareçam todas as f. n. do circuito. Isto é comum em vários casos:

- Circuitos desconexos: Circuitos compostos por blocos isolados, ou interligados por um único ramo, geram frequências naturais privadas destes blocos.
- Circuitos em blocos isolados em cascata: Os blocos que recebem sinais de outros recebem também as f. n. deles, mas com acoplamentos unidirecionais não transferem as suas f. n. privadas a eles. (É estranho neste caso que elementos possuam frequências naturais em suas variáveis sem tomar parte da geração delas, mas pela definição adotada de frequência natural, é isto o que ocorre.)
- Circuitos com simetria: Variáveis sobre o eixo de simetria não tem algumas das f. n. do circuito.
- Circuitos contendo “pontes” podem tornar elementos invisíveis a outras partes do circuito, e assim eles não fazem parte da geração das frequências naturais naquelas partes.
- Frequências naturais em zero: Usualmente apenas aparecem em correntes de ramos que fazem parte de ciclos de indutores e fontes de tensão, e em tensões em ramos que fazem parte de cortes de capacitores e fontes de corrente.

Sejam os circuitos da figura 3.1. O circuito (a) tem dois blocos ligados por menos de dois ramos. O bloco da esquerda tem frequências naturais $s = \pm j$, o bloco da direita tem $s = -1$. O circuito total tem as três. O circuito (b) tem dois blocos ligados em cascata. O da esquerda tem f. n. $s = \pm j$. O da direita tem $s = -1$ e $s = \pm j$, todas as do circuito. No circuito (c), a ponte equilibrada faz com que o capacitor da esquerda e o indutor não interajam. A rede tem 4 f. n., em $s = 0$, $s = -3$ e $s = -0.5 \pm j\sqrt{7}/2$, mas o capacitor da esquerda não tem as f. n. complexas em suas variáveis de tensão e corrente, enquanto para o indutor só elas aparecem.

Exemplo: Seja o circuito simétrico da figura 3.2. Calculando a tensão sobre o indutor central com uma análise nodal, para um conjunto genérico de condições iniciais, resulta o sistema, e a solução:

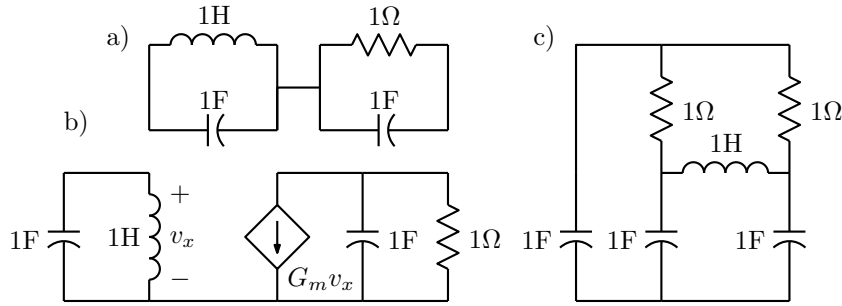


Figura 3.1: a) Circuito desconexo. b) Circuitos em cascata. c) Circuito com ponte equilibrada.

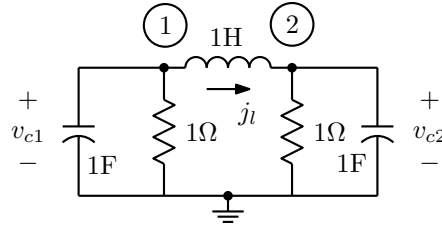


Figura 3.2: Circuito simétrico para cálculo de frequências naturais.

$$\begin{bmatrix} s + 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & s + 1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c1}(0) - \frac{j_l(0)}{s} \\ v_{c2}(0) + \frac{j_l(0)}{s} \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{(v_{c1}(0) - \frac{j_l(s)}{s})(s + 1 + \frac{1}{s}) + (v_{c2}(0) + \frac{j_l(s)}{s})\frac{1}{s}}{s^2 + 2s + 3 + \frac{2}{s}}$$

$$E_2(s) = \frac{(v_{c2}(0) + \frac{j_l(s)}{s})(s + 1 + \frac{1}{s}) + (v_{c1}(0) - \frac{j_l(s)}{s})\frac{1}{s}}{s^2 + 2s + 3 + \frac{2}{s}}$$

$$E_1(s) - E_2(s) = \frac{(v_{c1}(0) - v_{c2}(0) - \frac{2j_l(0)}{s})(s + 1)}{\frac{1}{s}(s^2 + s + 2)(s + 1)} = \frac{(s(v_{c1}(0) - v_{c2}(0)) - 2j_l(0))(s + 1)}{(s^2 + s + 2)(s + 1)}$$

Como o circuito tem um só indutor, numerador e denominador devem ser multiplicados por s para a contagem correta do número de frequências naturais em 0. É então visto que ocorre um cancelamento da frequência natural em $s = -1$ para qualquer conjunto de frequências naturais. A tensão sobre o indutor tem apenas as frequências naturais que são as raízes do polinômio $s^2 + s + 2$, $s = \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}$.

3.2.2.1 Uso da simetria

No caso de circuitos simétricos, a simetria pode ser usada para facilitar o cálculo das frequências naturais. Com condições iniciais simétricas nos dois lados, não circula corrente entre as duas metades, e o circuito pode ser simplificado abrindo-se as conexões entre as metades. Com condições iniciais opostas nos dois lados, as tensões entre os centros dos ramos cruzando o eixo de simetria se anulam, e então estes pontos podem ser curto-circuitados sem alteração das frequências naturais. O cálculo das frequências naturais nos dois circuitos simplificados resulta no conjunto completo delas.

Exemplo: No exemplo anterior, figura 3.2, com excitação $v_{c1}(0) = v_{c2}(0)$ e $j_l(0) = 0$ resulta o circuito da figura 3.3a, que tem frequência natural $s = -1$ (notar que só uma metade deve ser considerada). Com

excitação $v_{c1}(0) = -v_{c2}(0)$ e $j_l(0)$ qualquer resulta o circuito da figura 3.3b, que tem frequências naturais em $s = \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}$. Nos dois casos as frequências naturais são obtidas com uma análise nodal com um só nó.

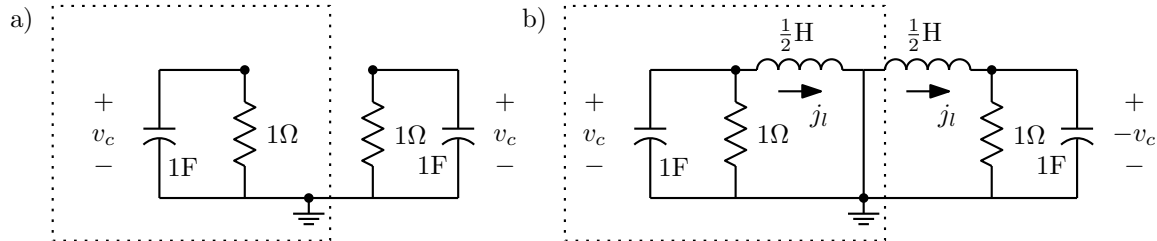


Figura 3.3: Circuito simétrico com excitações simétricas e antissimétricas.

3.3 Polos e zeros

Em uma função de transferência, incluindo impedâncias e admitâncias, os valores de “s” que tornam a função infinita são chamados de “polos”, e os valores que anulam a função de “zeros”. Se a função vale $T(s) = N(s)/D(s)$, razão de polinômios de “s”, os polos são as raízes de $D(s)$ e os zeros as raízes de $N(s)$. Observando a forma como funções de transferência são calculadas, é evidente que os polos são calculados da mesma forma que as frequências naturais da variável onde se mede a saída da função de transferência, e que portanto são as f. n. desta variável. Os zeros não tem uma relação clara com as f. n., e dependem de onde estão a entrada e a saída da função de transferência. Polos e zeros podem estar em qualquer parte do plano complexo, sempre em pares conjugados se forem complexos em circuitos reais. Em circuitos estáveis os polos ficam todos no semiplano lateral esquerdo ou são simples no eixo imaginário. Não há restrições de estabilidade sobre os zeros (a não ser nos casos de impedâncias e admitâncias, onde eles se tornam polos na função inversa, e tem as mesmas restrições dos polos). Polos e zeros podem estar também “no infinito”, quando existe diferença de graus entre $N(s)$ e $D(s)$.

3.3.1 Zeros em redes em escada

Como dito acima, zeros dependem do caminho entre entrada e saída, e em alguns casos podem ser gerados por estruturas reconhecíveis. No caso de uma rede em escada (“ladder”) formada por impedâncias em série $Z_i(s)$ e admitâncias em paralelo $Y_i(s)$ (figura 3.4), os zeros estão nos valores de “s” que fazem $Z_i(s) = \infty$ ou $Y_i(s) = \infty$, colocando circuitos abertos nos ramos série ou curto-circuitos nos ramos em paralelo. A figura 3.5 mostra alguns ramos que formam zeros de transmissão. Os casos mais úteis são os das redes LC que formam zeros em 0, ∞ ou $\pm j\omega$, mas estruturas RC e RL formando zeros no semieixo real negativo podem ser úteis também. Zeros complexos no semiplano lateral esquerdo podem ser formados com redes RLC, um caso sendo mostrado na figura. Outros casos envolvem o resistor, possivelmente mais de um, em outras posições, mas estes caso tem pouca utilidade, a não ser em análise de circuitos simples. Outras redes úteis que formam zeros podem ser geradas com o uso de transformadores, redes em “lattice” e estruturas como a do “duplo T”, esta mostrada na figura 3.6¹

¹O “duplo T” generalizado cria zeros complexos inclusive no semiplano lateral direito, mas com restrições. O numerador de sua função de transferência é um polinômio de terceiro grau completo com coeficientes positivos. Para realizar zeros em $\alpha \pm j\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, ele deve valer $(s^2 - 2\alpha s + \beta^2)(s + a)$, com $-a$ sendo um zero real também criado. É fácil ver que para todos os coeficientes serem positivos a condição é $\beta > 2\alpha$, ou o ângulo dos zeros ser maior que $\pi/3$. No caso geral de um polinômio positivo completo de grau n , o limite para os zeros é em ângulo maior que π/n [25].

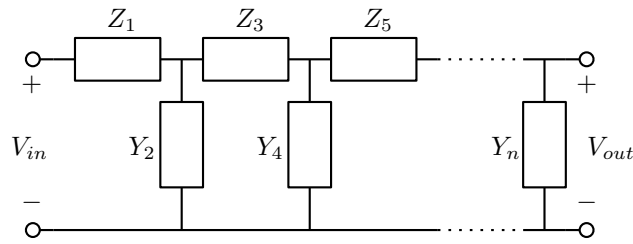


Figura 3.4: Rede em escada realizando um ganho de tensão.

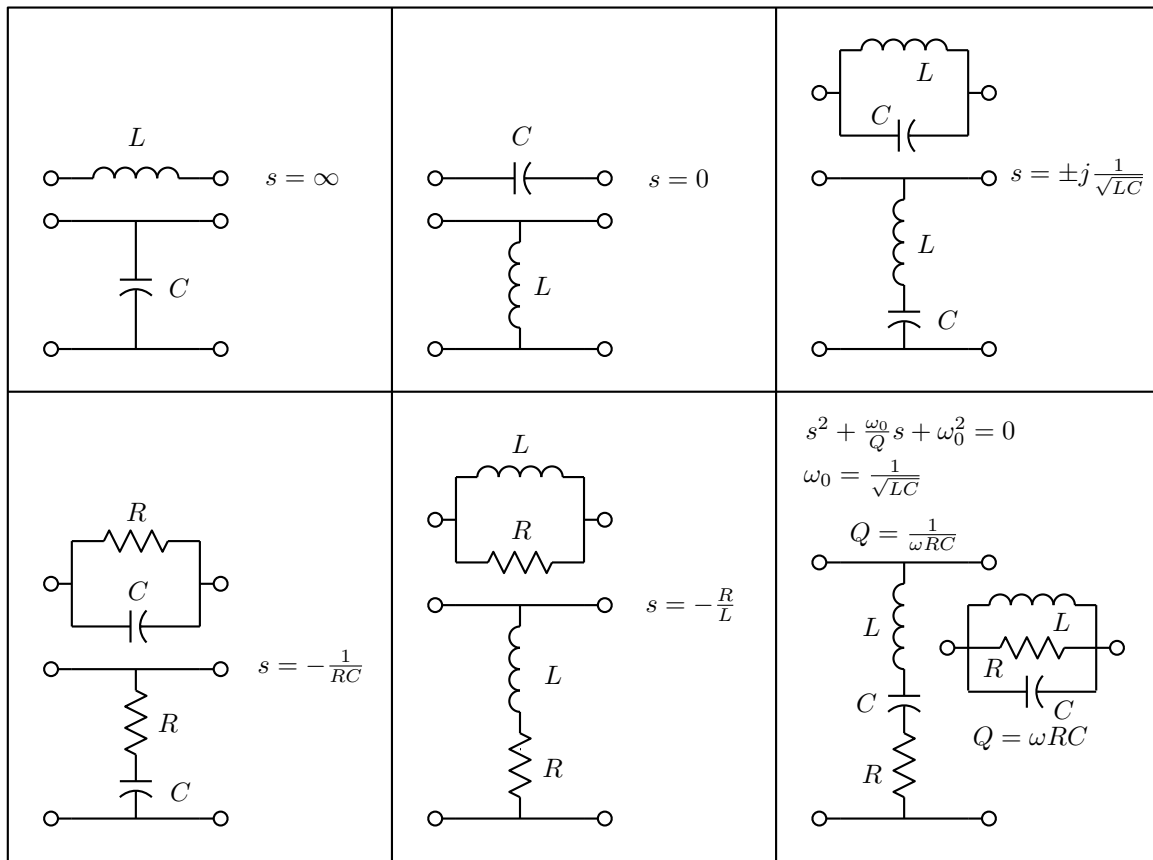


Figura 3.5: Estruturas de impedâncias em série e admitâncias em paralelo que formam zeros em redes em escada.

3.3.1.1 Divisores que não formam zeros

A formação de zeros nesta forma nem sempre ocorre, entretanto, pois podem ser formados divisores de impedâncias nulas ou infinitas na escada. Divisores são formados quando uma impedância em série é infinita, mas a impedância que a segue também é, ou quando uma admitância em paralelo é infinita, mas a admitância que a precede também é. Estes casos são muito comuns em filtros, especialmente com divisores formados em $s = 0$ ou $s = \infty$. A rede da figura 3.7 mostra alguns casos. Notar que a

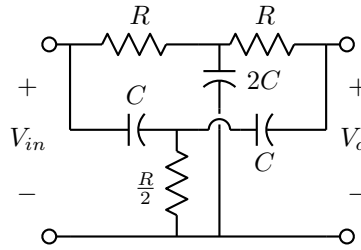


Figura 3.6: “Duplo T”, uma estrutura RC que cria zeros em $\pm j \frac{1}{RC}$.

formação de divisores está sempre associada a estruturas que reduzem a ordem de complexidade (ciclos capacitivos e cortes indutivos), e estruturas que formam frequências naturais nulas (ciclos indutivos e cortes capacitivos). A rede da figura tem 16 elementos reativos, é de ordem 14, e tem duas frequências naturais em zero. A ordem da função de transferência de tensão da esquerda para a direita é 12, e existem portanto também 12 zeros, 8 no eixo imaginário, 2 no ∞ e 2 em 0.

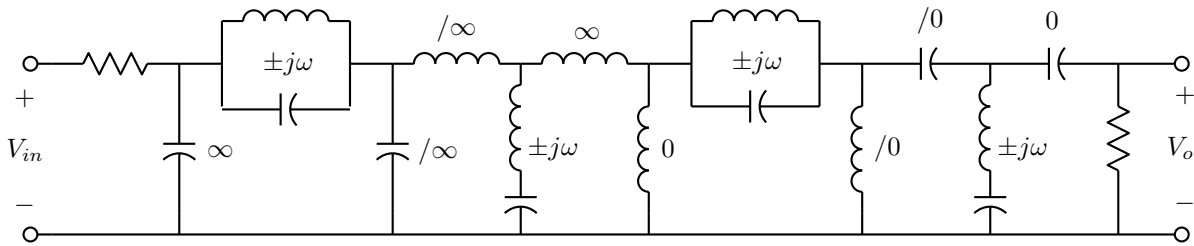


Figura 3.7: Formação de zeros, e divisores em 0 e ∞ em uma típica rede em escada.

Exemplo: Para ilustrar como aparecem tanques com resistores e cancelamentos devidos à estrutura, seja a rede simétrica da figura 3.2, com entrada e saídas acrescentadas como na figura 3.8. Com a saída em v_{c2} existem três zeros de transmissão em zero e v_{c2} observa as três frequências naturais da rede. Com a saída em v_{c1} , existe um zero no infinito e um par de zeros complexos formados pelo tanque RLC em $-\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$. As três frequências naturais são polos pois v_{c1} as observa. Com a saída em v_l , existem zeros no infinito, em zero e em -1 devido ao tanque RC, este obrigatoriamente cancelado com o polo em $s = -1$, pois o indutor não o observa². As funções de transferência tem então as formas, onde é fácil verificar que as constantes K_i são unitárias:

$$\begin{aligned} \frac{V_{c1}}{V_{in}}(s) &= \frac{K_1(s^2 + s + 1)}{(s + 1)(s^2 + s + 2)} \\ \frac{V_{c2}}{V_{in}}(s) &= \frac{K_2}{(s + 1)(s^2 + s + 2)} \\ \frac{J_l}{V_{in}}(s) &= \frac{K_3 s(s + 1)}{(s + 1)(s^2 + s + 2)} \end{aligned}$$

²É interessante notar que se este circuito é analisado com o “algoritmo da eliminação”, o cancelamento aparece feito.

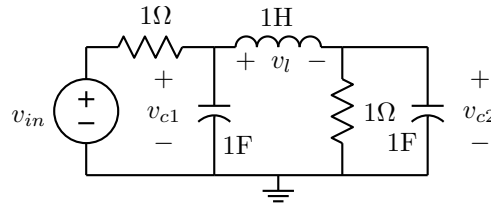


Figura 3.8: Circuito simétrico para cálculo de polos zeros.

3.4 Estruturas para filtros

A seção anterior indica como se pode prever estruturas para filtros RLC. Resistores não são requeridos para a formação de zeros em 0 , ∞ e $\pm j\omega$, e assim só são incluídos nas extremidades, como terminações da rede. É possível usar apenas uma terminação, na entrada ou na saída, ou duas, uma de cada lado. Esta forma é mais útil quando se quer conectar o filtro a outros circuitos, e também pode resultar em filtros com menor sensibilidade à variação dos elementos (ver adiante). Os filtros mais usuais, considerando a forma do módulo da função de transferência, são:

- Passa-baixas: Polos reais e complexos são posicionados em baixa frequência e zeros são posicionados em alta frequência, em pares imaginários ou no infinito.
- Passa-altas: Polos reais e complexos são posicionados em alta frequência e zeros são posicionados em baixa frequência, em pares imaginários ou em 0 .
- Passa-faixa: Polos complexos são posicionados na região da banda passante, e zeros são posicionados acima e abaixo da banda passante, em pares imaginários, 0 ou ∞ .
- Rejeita-faixa: Polos ficam em alta e em baixa frequência, com zeros imaginários na banda de rejeição.

Os filtros também podem ser caracterizados como “polinomiais”, se a função de transferência é caracterizada por um único polinômio, cujas raízes são os polos, com zeros localizados todos em zero, no infinito ou na mesma frequência no eixo imaginário, ou “racionais”, quando existem zeros em outras posições, usualmente em pares conjugados no eixo imaginário. Em filtros polinomiais os tanques LC necessários para isto não estão presentes nas estruturas em escada.

A figura 3.9 mostra típicas respostas em frequência destes filtros, as configurações de polos e zeros e possíveis estruturas correspondentes. Os filtros mostrados são do tipo racional, com funções de transferência com polos no semiplano lateral esquerdo e zeros no eixo imaginário. As estruturas são em escada LC duplamente terminada em resistores. O filtro passa-baixas é uma estrutura de ordem 5 realizando dois pares de zeros imaginários e um zero no infinito. O filtro passa-altas é de ordem 7, mas tem duas frequências naturais em zero que não aparecem na tensão de saída. Forma um filtro de ordem 5 com dois pares de zeros imaginários e um zero em zero. O filtro passa-faixa com a estrutura mostrada é a forma que resulta de uma “transformação passa-baixas para passa-faixa” (ver adiante), com ressonância dos tanques LC suspensos (ver síntese de impedâncias LC). É uma estrutura de ordem 7, com uma frequência natural em zero que não aparece na saída, realizando então um filtro de ordem 6, com dois pares de zeros imaginários e zeros em zero e no infinito. A estrutura rejeita-faixa também resulta de transformação de um filtro passa-baixas, e é mais estranha pois é de ordem 8 para realizar um filtro de ordem 6. Os tanques laterais e a combinação dos tanques suspensos ressonam em série na frequência central do filtro, e portanto os tanques suspensos não observam as terminações na frequência central. Isto cria um par de

frequências naturais imaginárias na frequência central do filtro. Os zeros centrais são na verdade uma combinação de dois pares de zeros e um de polos.

As estruturas contendo frequências naturais em zero, e especialmente a rejeita-faixa contendo frequências naturais no eixo imaginário, não devem ser usadas como protótipo para filtros ativos (a partir de equações de estado), pois os polos em zero geram níveis indeterminados de tensão ou corrente contínua dentro da estrutura, e os imaginários podem se mover para o semiplano lateral direito devido a efeitos parasitas e instabilizar o filtro. Em uma realização passiva não são problema, pois perdas sempre os movem ligeiramente para o semiplano lateral esquerdo.

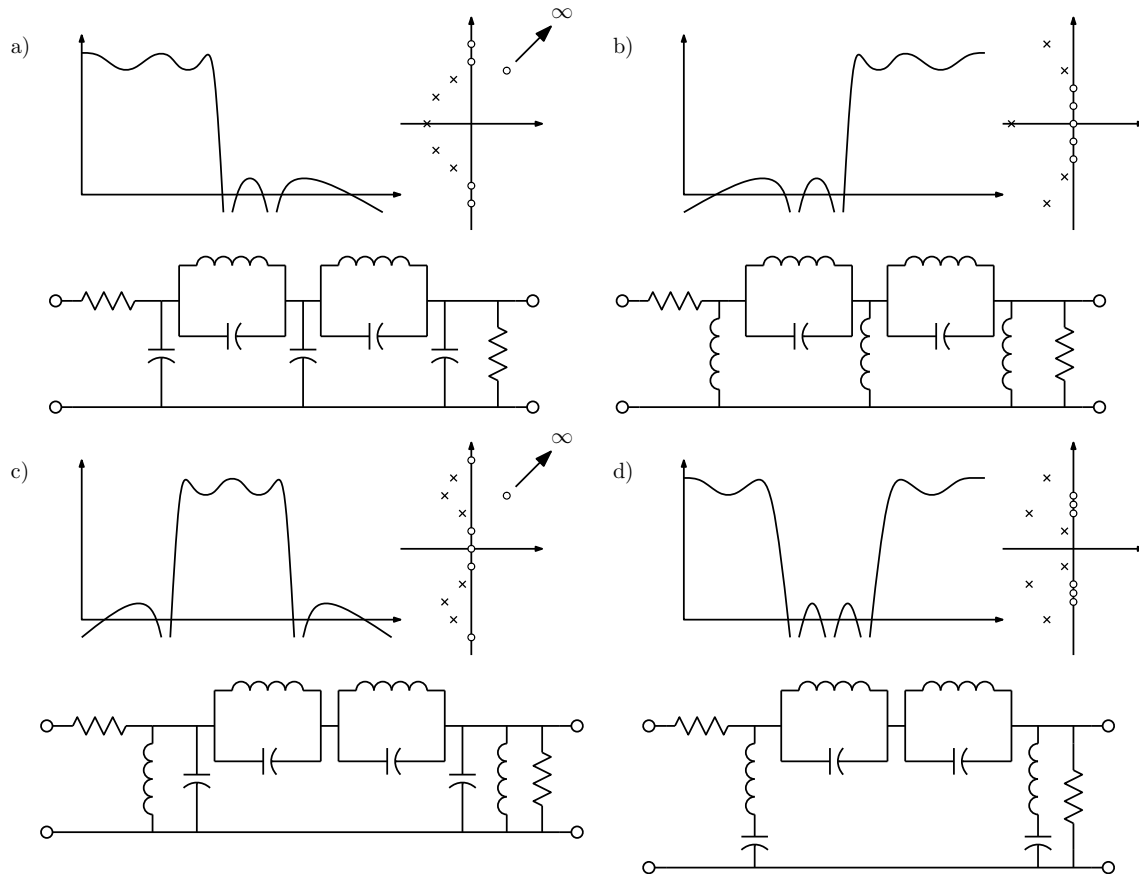


Figura 3.9: Respostas em frequência, configurações de polos e zeros e estruturas típicas para filtros. a) Passa-baixas. b) Passa-altas. c) Passa-faixa. d) Rejeita-faixa.

3.4.1 Aproximações

Apenas para informação, já que não se visa um estudo do assunto aqui, filtros operando sobre o módulo de um sinal são obtidos a partir de “aproximações”, que geram funções de transferência realizáveis aproximando filtros ideais, que deixariam passar os sinais inalterados nas “bandas passantes” e bloqueariam totalmente sinais nas “bandas de rejeição”. É impossível deixar passar sem atenuação e bloquear completamente sinais em bandas extensas, e assim o que se consegue realizar é algo como mostrado na figura 3.10, para o caso de um filtro “passa-baixas”. Há uma banda passante onde é especificada uma

atenuação máxima do sinal A_{max} , uma banda de rejeição onde é especificada uma atenuação mínima A_{min} , e uma banda de transição entre elas. As frequências onde não há atenuação são chamadas de “zeros de atenuação”, e as onde a atenuação é completa de “zeros de transmissão”. Os tipos clássicos de aproximação mais comuns podem ser classificados da forma abaixo, sempre no caso passa-baixas. Seja n a ordem do filtro, número de polos da função de transferência. As aproximações sempre geram n zeros de atenuação e n zeros de transmissão:

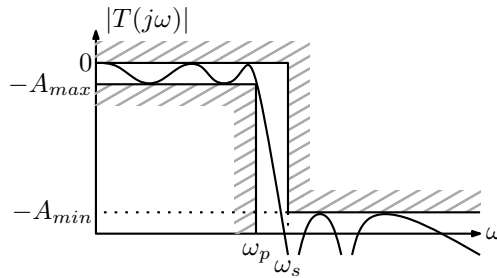


Figura 3.10: Especificação de um filtro passa-baixas.

- Aproximação de Butterworth: Apresenta n zeros de atenuação em 0 e n zeros de transmissão no infinito. Resulta uma banda passante maximamente plana e um filtro não muito seletivo, com atenuação de $20n$ dB por década a partir da borda da banda passante.
- Aproximação de Chebyshev: Apresenta 1 (n ímpar) ou 0 (n par) zeros de atenuação em zero, com os demais distribuídos na banda passante de forma a gerar uma oscilação (“ripple”) uniforme com a atenuação variando entre 0 e A_{max} dB. Os n zeros de transmissão ficam no infinito. Resulta a aproximação sem zeros finitos de transmissão com a maior atenuação possível na banda de rejeição.
- Aproximação de Chebyshev inversa: Apresenta n zeros de atenuação em 0, 1 (n ímpar) ou 0 (n par) zeros de transmissão no infinito, e os demais zeros de transmissão posicionados de forma a gerar oscilação uniforme na banda de rejeição, com atenuação variando entre A_{min} e ∞ . Resulta um filtro com banda passante maximamente plana, similar ao do filtro de Butterworth, mas com a mesma seletividade do filtro de Chebyshev.
- Aproximação de Cauer, ou elíptica: Apresenta banda passante como no caso da aproximação de Chebyshev e banda de rejeição como no caso da aproximação de Chebyshev inversa. É a mais seletiva de todas as aproximações.

Apenas considerando-se a seletividade, é sempre melhor usar a aproximação elíptica, mas considerações sobre as características de fase e atraso de grupo, ou resposta transiente, ou o desejo de não ter zeros de transmissão finitos, que podem criar dificuldades especialmente em filtros ativos, podem levar a preferência por outras aproximações. É possível gerar muitas outras aproximações alterando as posições dos zeros de transmissão e atenuação, e é possível modificar as características de fase sem alterar as de módulo com o uso de filtros “passa-tudo”, que tem zeros no semiplano lateral direito nas mesmas posições dos polos no lado esquerdo. A figura 3.11 mostra as características das aproximações descritas.

Filtros de Butterworth e de Chebyshev tem fórmulas explícitas conhecidas para os elementos. Os demais podem ser gerados a partir das técnicas descritas mais adiante. Tabelas e programas de síntese para as aproximações clássicas são fáceis de encontrar.

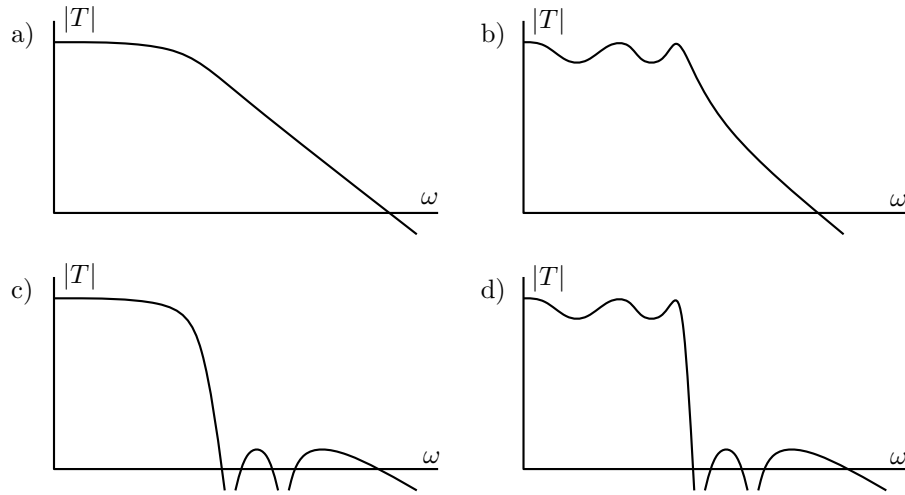


Figura 3.11: Curvas de módulo das aproximações mais usuais. a) Butterworth, b) Chebyshev, c) Chebyshev inversa d) Elíptica. Filtros de ordem 5.

3.4.2 Transformações de frequência

3.4.2.1 Escalamento em frequência e impedância

Um filtro projetado para operar em certa faixa de frequências e com terminações de certo valor pode ser facilmente modificado para operar em outra faixa ou com outro nível de impedância, bastando escalar os valores dos componentes. Seja alterar um filtro para operar em uma frequência F vezes maior e com nível de impedância R vezes maior:

- Todas as resistências são multiplicados por R .
- Todas as capacitâncias são divididas por R e divididas por F .
- Todas as indutâncias, próprias e mútuas, são multiplicadas por R e divididas por F .

Assim é possível projetar filtros originais sempre normalizados, para operação em 1 rad/s e com nível de impedância de 1 ohm, e transformá-los para os níveis finais por escalamento.

Com o uso de “transformações de reatância”, um filtro pode ser transformado em outro sem necessidade de um reprojetado completo. Um filtro passa-faixa pode ser convertido nas outras formas com simples transformações:

3.4.2.2 Transformação passa-baixas - passa-altas

Um filtro passa-baixas com frequência de corte em 1 rad/s é transformado em um filtro passa-altas com corte em ω_p pela transformação:

$$s \rightarrow \frac{\omega_p}{s}$$

A rede passiva pode ser diretamente transformada:

- Capacitores: $Y(s) = sC \rightarrow Y'(s) = \frac{\omega_p C}{s}$, indutor de valor $L' = \frac{1}{\omega_p C}$.
- Indutores: $Z(s) = sL \rightarrow Z'(s) = \frac{\omega_p L}{s}$, capacitor de valor $C' = \frac{1}{\omega_p L}$.

3.4.2.3 Transformação passa-baixas - passa-faixa

Um filtro passa-baixas com frequência de corte em 1 rad/s é transformado em um filtro passa-faixa com banda passante centrada geometricamente em ω_0 e banda passante B pela transformação:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

A rede passiva pode também ser diretamente transformada:

- Capacitores: $Y(s) = sC \rightarrow Y'(s) = \frac{s^2 C + \omega_0^2 C}{Bs} \rightarrow \frac{sC}{B} + \frac{\omega_0^2 C}{Bs}$, tanque paralelo com $C' = \frac{C}{B}$ e $L' = \frac{B}{\omega_0^2 C}$.
- Indutores: $Z(s) = sL \rightarrow Z'(s) = \frac{s^2 L + \omega_0^2 L}{Bs} \rightarrow \frac{sL}{B} + \frac{\omega_0^2 L}{Bs}$, tanque série com $L' = \frac{L}{B}$ e $C' = \frac{B}{\omega_0^2 L}$.

3.4.2.4 Transformação passa-baixas - rejeita-faixa

Um filtro passa-baixas com frequência de corte em 1 rad/s é transformado em um filtro rejeita-faixa com banda de rejeição centrada geometricamente em ω_0 e bandas passantes separadas por B pela transformação, que é uma combinação da transformação passa-baixas - passa-altas e passa-baixas - passa-faixa:

$$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$$

A rede passiva pode também ser diretamente transformada:

- Capacitores: $Y(s) = sC \rightarrow Y'(s) = \frac{CBs}{s^2 + \omega_0^2} \rightarrow 1/(\frac{s}{CB} + \frac{\omega_0^2}{CBs})$, tanque série com $C' = \frac{CB}{\omega_0^2}$ e $L' = \frac{1}{CB}$.
- Indutores: $Z(s) = sL \rightarrow Z'(s) = \frac{LBs}{s^2 + \omega_0^2} \rightarrow 1/(\frac{s}{LB} + \frac{\omega_0^2}{LBs})$, tanque paralelo com $L' = \frac{LB}{\omega_0^2}$ e $C' = \frac{1}{LB}$.

Exemplo: Seja obter um filtro passa-faixa de 6ª ordem com banda passante entre 1 e 2 kHz, com atenuação de 3.0103 dB ($1/\sqrt{2}$) nas bordas da banda e terminações de 50 ohms. No caso será usada a aproximação de Butterworth, que resulta em uma banda passante maximamente plana. O filtro passivo de Butterworth de 3ª ordem com esta atenuação em 1 rad/s é mostrado na figura 3.12. Notar que devido à estrutura duplamente terminada a atenuação mínima na banda passante é de 6.0206 dB ($1/2$).

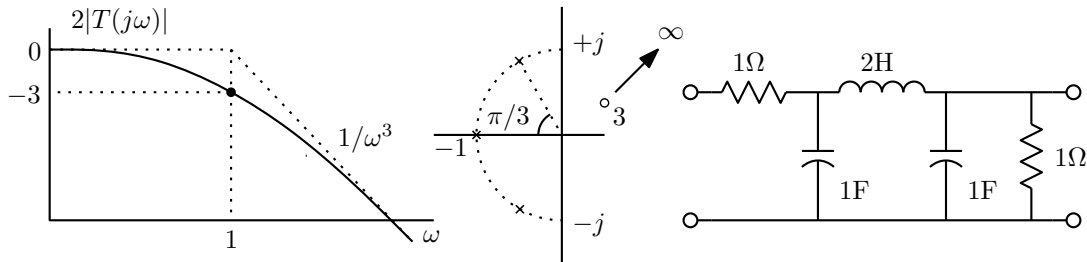


Figura 3.12: Resposta em frequência, configuração de polos e zeros e estrutura para um filtro de Butterworth normalizado de 3ª ordem.

A transformação passa-baixas - passa-faixa é então aplicada com os parâmetros $\omega_0 = 2\pi\sqrt{1000 \times 2000}$ e $B = 2\pi(2000 - 1000)$, seguida de um escalamento de impedância para 50 Ω, resultando na rede mostrada na figura 3.13.

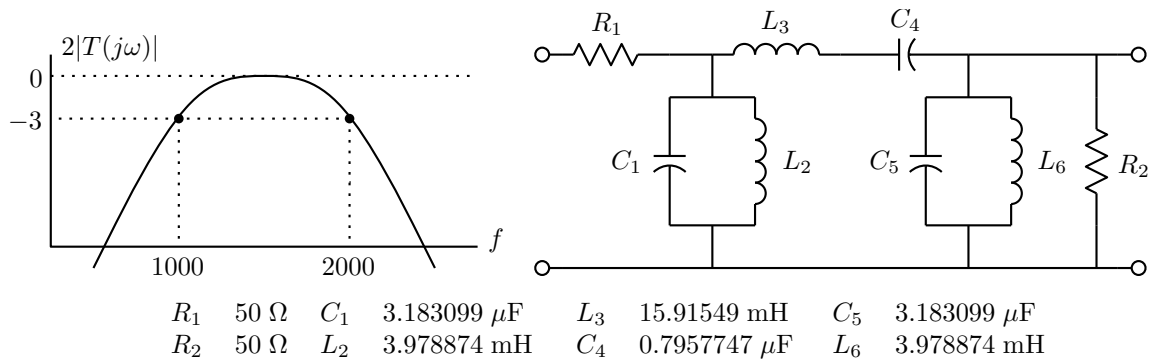


Figura 3.13: Resposta em frequência e estrutura para um filtro de Butterworth passa-faixa de 6ª ordem.

Exemplo: A transformação de um filtro com zeros pode envolver mais um passo, para a geração de tanques LC nas formas mostradas na figura 3.9. Seja o caso de um filtro passa-faixa de 6ª ordem, maximamente plano na banda passante, mas com zeros nos dois lados da banda passante, com as mesmas especificações do exemplo anterior. O filtro protótipo pode ser obtido pela aproximação de Chebyshev inversa, com $A_{max} = 3.0103$ dB e, por exemplo, $A_{min} = 40$ dB, e é mostrado na figura 3.14.

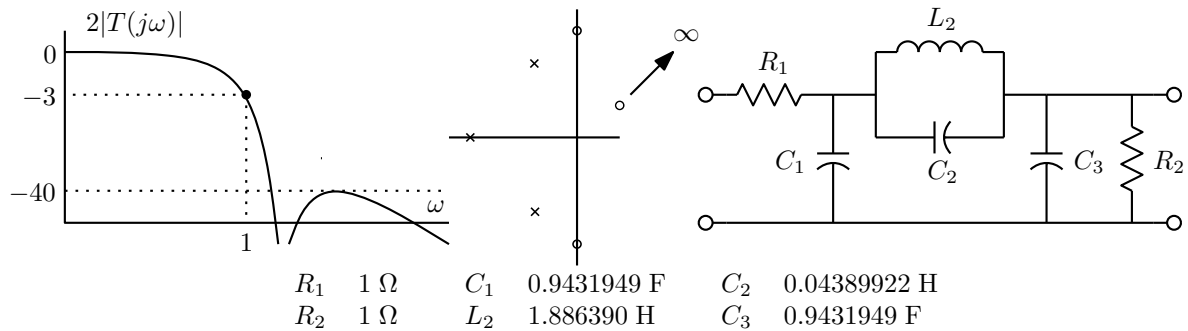


Figura 3.14: Resposta em frequência, configuração de polos e zeros e estrutura para um filtro de Chebyshev inverso normalizado de 3ª ordem.

A transformação passa-baixas - passa-faixa gera a estrutura da figura 3.15. Em casos de banda passante estreita a dispersão de valores entre elementos do mesmo tipo no tanque LC composto gerado pela transformação do tanque do protótipo pode ficar grande demais. Uma forma mais conveniente pode ser obtida resintonizando a rede LC do tanque composto na “primeira forma de Foster” (ver adiante), obtendo-se a rede da figura 3.15, que também é mais fácil de sintonizar, pois cada tanque controla a frequência de um zero de transmissão. Fórmulas explícitas para esta transformação podem ser obtidas.

A transformação passa-baixas - rejeita-faixa, no caso de filtros com zeros finitos de transmissão, também pode usar esta transformação de tanques LC compostos em pares de tanques simples.

3.4.2.5 Número de elementos necessários

Nos filtros polinomiais o número de elementos reativos é a ordem do filtro, mas nos filtros racionais a rede tem mais componentes reativos que a ordem do filtro realizado. Isto se deve aos graus extra de liberdade necessários à realização dos zeros de transmissão. Ao menos um resistor deve sempre existir, para a

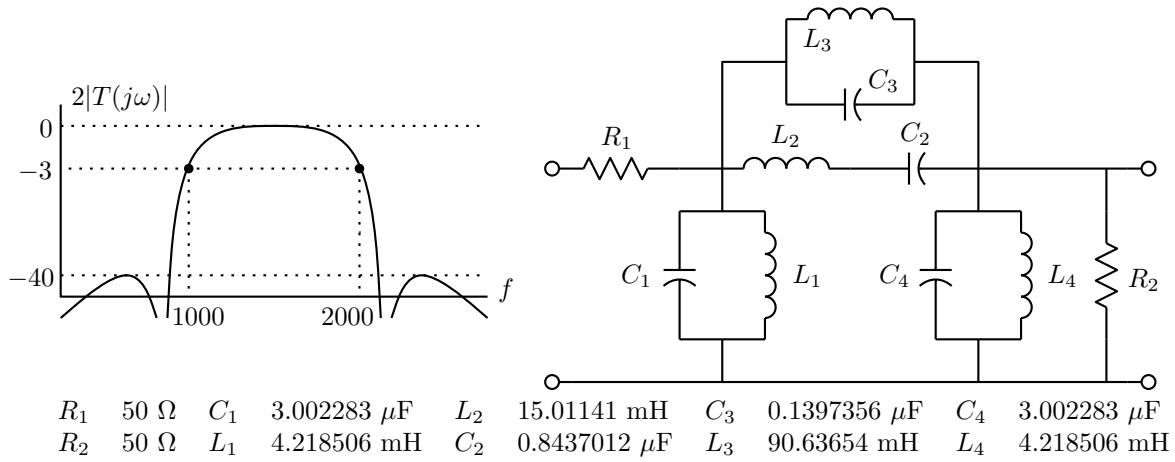


Figura 3.15: Resposta em frequência e estrutura para um filtro de Chebyshev inverso passa-faixa de 6ª ordem.

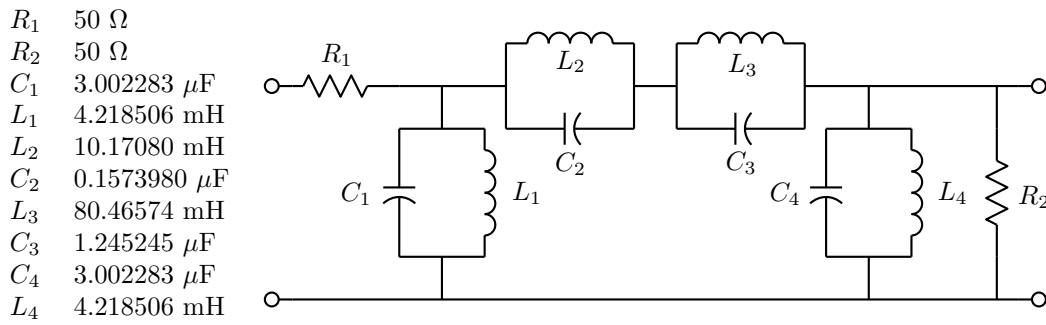


Figura 3.16: Estrutura para um filtro de Chebyshev inverso passa-faixa de 6ª ordem com o tanque LC composto ressintetizado.

realização de polos no semiplano lateral esquerdo. Resistores são sempre colocados como terminações, na entrada ou na saída. É conveniente usar duas terminações resistivas, por facilidade de conexão com outros circuitos e por questões de sensibilidade à variação dos elementos (ver adiante). O número de elementos reativos necessário pode ser obtido contando-se os coeficientes necessários para especificar a forma da função de transferência. Um filtro elíptico de quinta ordem, por exemplo, tem uma função de transferência da forma:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = k \frac{s^4 + b_2 s^2 + b_0}{s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

e a forma da curva é especificada por 7 coeficientes (ignorando-se o ganho). São necessários 7 componentes reativos e ao menos um resistor.

Para a realização de polos complexos, ao menos um indutor e um capacitor são necessários para cada par. Por exemplo, seja um filtro similar a um filtro passa-baixas de quinta ordem, mas com um zero de transmissão extra em zero, da figura 3.17. O filtro tem então ordem 6, com uma estrutura similar a de um filtro passa-baixas, mas com um indutor em paralelo ou um capacitor em série em algum lugar. Se a

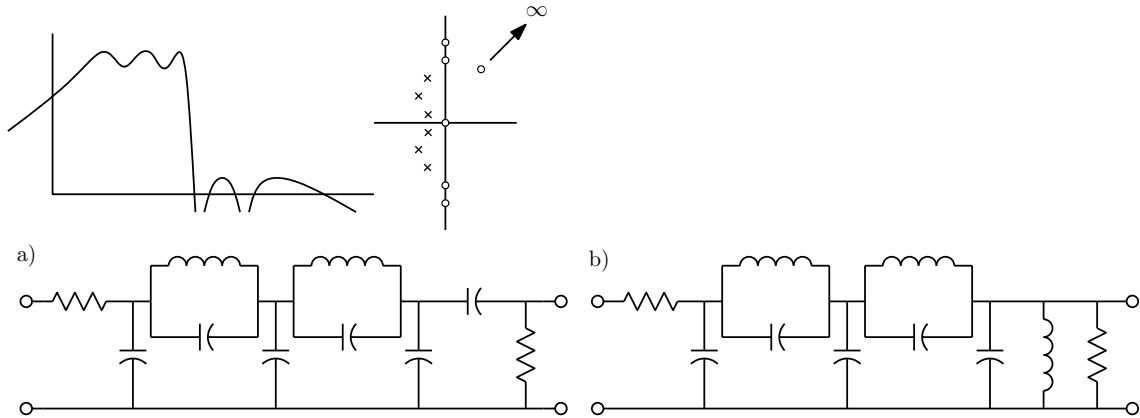


Figura 3.17: Estruturas para um filtro passa-faixa irregular de 6a. ordem. A estrutura (a) realiza os zeros corretamente, mas não tem indutores suficientes para os três pares de polos complexos. A estrutura (b) está correta.

versão passa-baixas tem 2 indutores, o novo elemento tem que ser um indutor. Se tem 2 capacitores, o novo elemento tem que ser um capacitor.

3.5 Teoremas

A seguir são discutidos alguns teoremas básicos de circuitos, que tem implicações importantes na dedução de como a síntese de estruturas passivas pode ser feita.

3.5.1 Teorema da substituição

Um ramo onde se conhece a tensão $v(t)$ pode ser substituído por uma fonte de tensão de valor $v(t)$. Um ramo onde se conhece a corrente $i(t)$ pode ser substituído por uma fonte de corrente de valor $i(t)$. Mais geralmente, o ramo pode ser substituído por qualquer circuito que gere a mesma tensão ou, o que é equivalente, a mesma tensão. Estas substituições não afetam a solução do circuito. Este teorema vale para qualquer circuito, é apenas consequência da álgebra da análise de circuitos.

3.5.2 Teorema da superposição

Em circuitos lineares, variantes ou não no tempo, o efeito de um conjunto de fontes independentes de tensão e corrente no valor de uma variável é a soma dos efeitos obtidos aplicando-se as fontes separadamente, com as demais zeradas. O teorema é consequência da linearidade, e inclui o caso de a aplicação de uma entrada única K vezes maior gerar uma saída também K vezes maior:

$$f(Ax(t) + By(t)) = Af(x(t)) + Bf(y(t))$$

3.5.3 Teoremas de Thévenin e Norton

O teorema de Thévenin³(ver figura 3.18) diz que uma rede linear contendo fontes independentes ligada a uma carga qualquer por uma porta pode ser substituída por uma cópia da rede com as fontes zeradas

³Léon Charles Thévenin, 1883.

em série com uma fonte de tensão V_{th} que tem o valor da tensão na porta v quando $i = 0$, ou seja, com a porta em aberto.

O teorema de Norton⁴ é a versão dual do de Thévenin, e diz que uma rede linear contendo fontes independentes ligada a uma carga arbitrária por uma porta pode ser substituída por uma cópia da rede com as fontes zeradas, a mesma rede do equivalente de Thévenin, em paralelo com uma fonte de corrente I_n que tem como valor i quando $v = 0$, ou seja, a corrente saindo da porta com esta em curto-circuito.

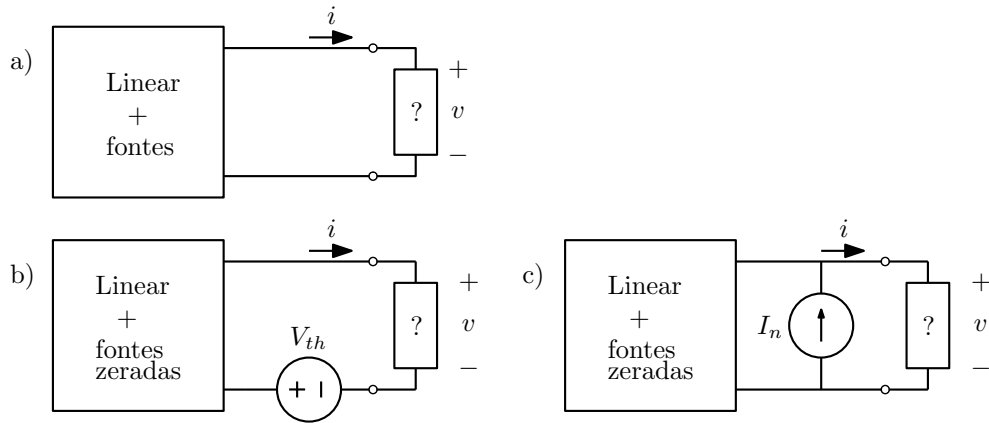


Figura 3.18: Equivalentes de Thévenin (b) e de Norton (c) para um circuito linear com fontes independentes (a) ligado a uma carga arbitrária.

Para provar os dois teoremas, no caso do de Thévenin (ver figura 3.19) aplica-se o teorema da substituição à carga arbitrária, que é substituída por uma fonte de corrente de valor i . O circuito é agora todo linear, e se pode aplicar o teorema da superposição. Este diz que a tensão sobre a porta v é a soma dos efeitos das fontes internas da rede quando $i=0$, que é a definição de V_{th} , com o efeito da corrente i na rede com as fontes zeradas, o que corresponde exatamente ao equivalente. No caso do equivalente de Norton a carga é substituída por uma fonte de tensão de valor v . O circuito é então todo linear, e o teorema da superposição diz que a corrente na porta é a soma dos efeitos das fontes internas quando $v = 0$, o que é a definição de I_n , com o efeito de v na rede com as fontes internas zeradas. Novamente, isto corresponde ao equivalente.

Os dois teoremas se aplicam a circuitos lineares variantes ou não no tempo ligados a uma carga qualquer. No caso de circuitos invariantes no tempo (figura 3.20), a rede com as fontes internas zeradas pode ser representada pela relação constante entre tensão e corrente sobre ela, que define uma impedância $Z = V/I$ ou uma admitância $Y = I/V$, em transformada de Laplace ou no estado permanente senoidal, as mesmas nos dois equivalentes. No caso de um circuito resistivo, aparece uma resistência ou uma condutância. O equivalente Thévenin é então uma impedância Z_{th} em série com uma fonte de tensão V_{th} , e o equivalente Norton um impedância $Z_n = Z_{th}$ em paralelo com uma fonte de corrente I_n , e valem as relações $V_{th} = Z_{th}I_n$ e $I_n = V_{th}/Z_{th}$, úteis para simplificar circuitos em análises simples.

Exemplo: Seja a rede a analisar da figura 3.21, que pode ser resolvida para V_0 considerando um duplo divisor de tensão ou um equivalente Thévenin na primeira seção. No primeiro caso, tem-se:

$$V_0 = V \frac{R_2 / (sL_3 + \frac{1}{sC_4})}{\frac{1}{sC_1} + R_2 / (sL_3 + \frac{1}{sC_4})} \frac{\frac{1}{sC_4}}{sL_3 + \frac{1}{sC_4}}$$

No segundo caso a expressão é um pouco mais fácil de simplificar, com $V_{th} = V \frac{R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2}$:

⁴Edward Lawry Norton, 1926.

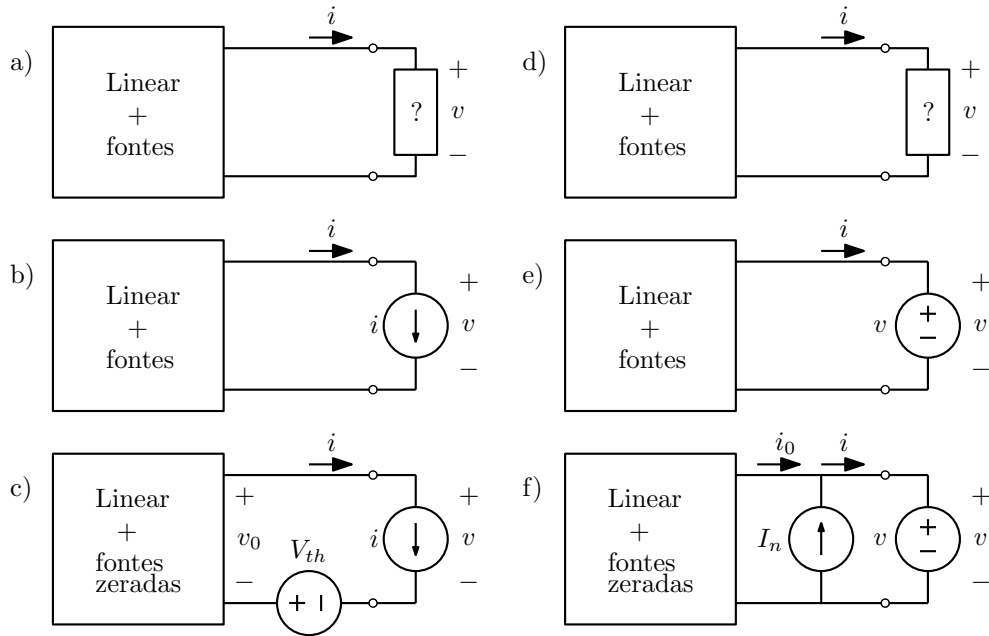


Figura 3.19: Provas dos equivalentes Thévenin e Norton.

$$V_0 = V \frac{R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2} \frac{\frac{1}{sC_4}}{R_2 // \frac{1}{sC_1} + sL_3 + \frac{1}{sC_4}}$$

3.6 Redes de duas portas

Quando se consideram duas portas abertas em uma rede linear, invariante no tempo, sem fontes internas, o equivalente visto por uma das portas tem que levar em conta o que está aplicado na outra. Pelo teorema da substituição, o circuito ligado à porta que não está sendo observada pode ser substituído por uma fonte de tensão ou de corrente. O equivalente visto então pode ser um equivalente Thévenin ou Norton, onde a impedância é obtida zerando-se a fonte na outra porta, e a fonte do equivalente é proporcional ao valor da fonte na outra porta. Uma fonte controlada portanto. Existem quatro possibilidades:

1. Fonte de tensão na outra porta, equivalente Thévenin. Z_{th} é calculado com um curto-circuito na outra porta, e a fonte do equivalente é um amplificador de tensão.
2. Fonte de corrente na outra porta, equivalente Thévenin. Z_{th} é calculado com a outra porta em aberto, e a fonte do equivalente é um transresistor.
3. Fonte de tensão na outra porta, equivalente Norton. Z_n é calculado com um curto-circuito na outra porta, e a fonte do equivalente é um transcondutor.
4. Fonte de corrente na outra porta, equivalente Norton. Z_n é calculado com a outra porta em aberto, e a fonte do equivalente é um amplificador de corrente.

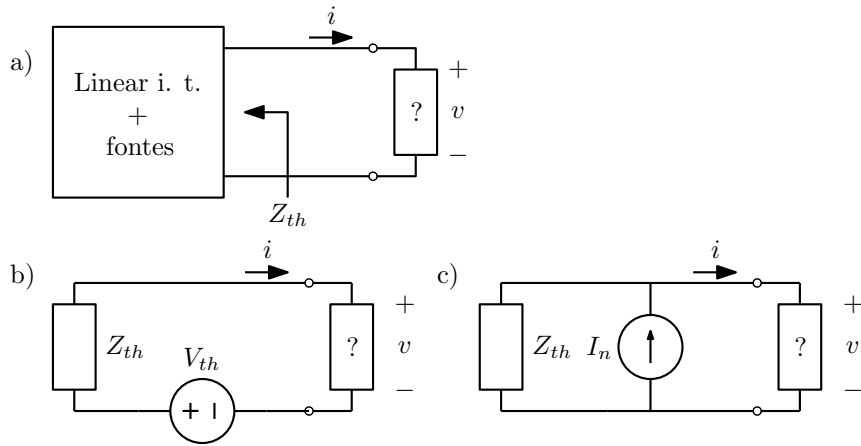


Figura 3.20: Equivalentes Thévenin e Norton para circuitos lineares invariantes no tempo.

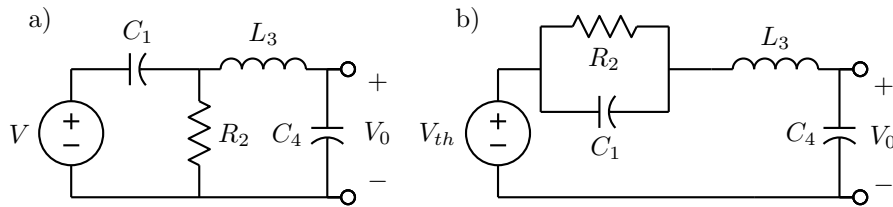


Figura 3.21: Usando o equivalente Thévenin em uma análise simples. a) com divisor de tensão duplo, b) com divisor simples e equivalente Thévenin.

Considerando as duas portas, existem 16 equivalentes possíveis para uma rede de duas portas. As quatro formas mais importantes são descritas a seguir, com os modelos mostrados na figura 3.22. As outras podem ser obtidas com equivalentes Thévenin ou Norton nas duas portas, mantendo as variáveis controladoras.

3.6.1 Parâmetros Z

São usados equivalentes Thévenin controlados a corrente nas duas portas $\vec{V} = [Z]\vec{I}$:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

3.6.2 Parâmetros Y

São usados equivalentes Norton controlados a tensão nas duas portas $\vec{I} = [Y]\vec{V}$:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

Notar que como $\vec{V} = [Z]\vec{I}$, $\vec{I} = [Z]^{-1}\vec{V}$, e então $[Y] = [Z]^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

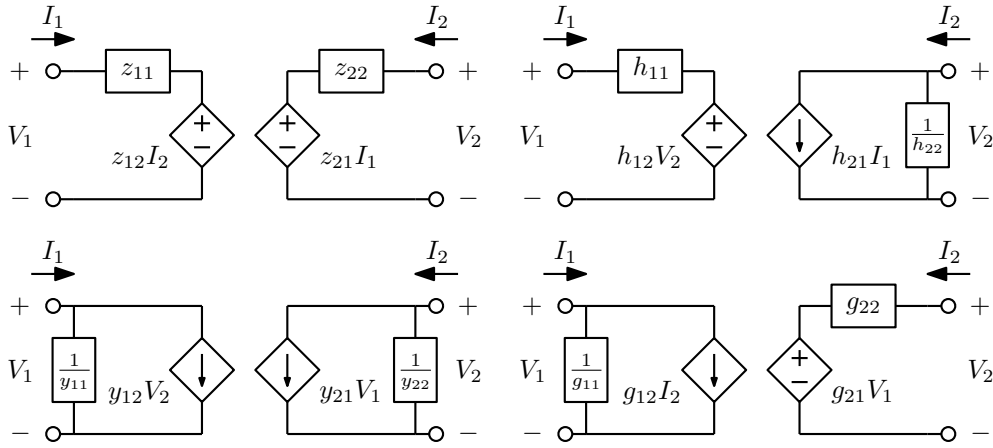


Figura 3.22: Redes de duas portas. Parâmetros Z e Y (esquerda), e parâmetros h e g (direita).

3.6.3 Parâmetros h e g

Os parâmetros “híbridos h ” são definidos como:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

e os parâmetros “híbridos g ” por:

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

As matrizes de parâmetros h e g são inversas uma da outra, $[g] = [h]^{-1}$. As estruturas dos modelos equivalentes, como mostrado na figura 3.22, são uma o inverso da outra também. Estes parâmetros são comuns em modelamento de pequenos sinais de dispositivos como transistores (o híbrido h) e amplificadores. Para um transistor bipolar na configuração de emissor comum (figura 3.23), é usual se escrever:

$$v_{be} = h_{ie}i_b + h_{re}v_{ce}$$

$$i_c = h_{fe}i_b + h_{oe}v_{ce}$$

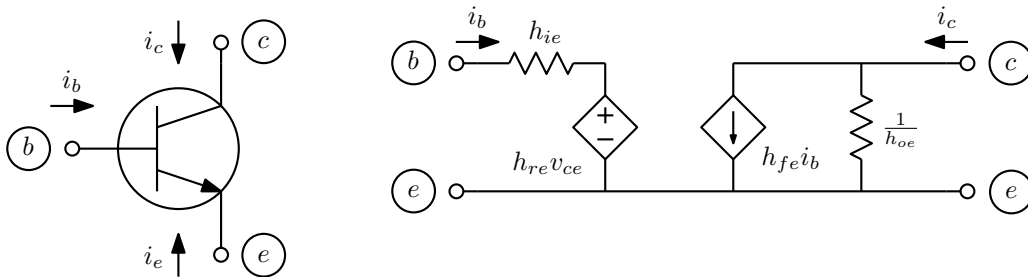


Figura 3.23: Modelo híbrido h para um transistor bipolar em emissor comum.

Para transistores usuais, h_{re} é pequeno e frequentemente h_{oe} é desprezível também, levando a um modelo simples com apenas h_{ie} e h_{fe} .

3.6.4 Teorema da reciprocidade

Considerando duas versões η e $\hat{\eta}$ de uma mesma rede de 2 portas e aplicando o teorema de Tellegen na forma cruzada, tem-se:

$$\begin{aligned} -v_1\hat{j}_1 - v_2\hat{j}_2 + \sum_{i=3}^b v_i\hat{j}_i &= 0 \\ -\hat{v}_1j_1 - \hat{v}_2j_2 + \sum_{i=3}^b \hat{v}_ij_i &= 0 \end{aligned}$$

Considere-se as redes lineares, invariantes no tempo, e compostas de impedâncias Z_i , de forma que $v_i = Z_ij_i$ e $\hat{v}_i = Z_i\hat{j}_i$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_1\hat{j}_1 + v_2\hat{j}_2 &= \sum_{i=3}^b Z_ij_i\hat{j}_i \\ \hat{v}_1j_1 + \hat{v}_2j_2 &= \sum_{i=3}^b Z_i\hat{j}_ij_i \end{aligned}$$

E portanto, como a ordem do produto das correntes não importa, resulta uma igualdade que é a forma geral do “Teorema da Reciprocidade”:

$$v_1\hat{j}_1 + v_2\hat{j}_2 = \hat{v}_1j_1 + \hat{v}_2j_2$$

Os somatórios são também iguais se a rede contiver transformadores, ou grupos de fontes controladas ligadas de forma similar às que aparecem nos modelos de transformadores. Redes onde a igualdade ocorre são chamadas de “redes recíprocas”. Todas as redes RLCM são recíprocas. Redes ativas, que contém fontes controladas, usualmente não são. Uma rede ativa pode apresentar reciprocidade entre algumas portas e não apresentar entre outras. Casos assim ocorrem em circuitos ativos que simulam redes passivas, usando giradores e capacitores para simular indutores. Entre portas que também existem na rede protótipo passiva, a reciprocidade existe. Entre outras portas nem sempre. Sobre portas em dois lados de um girador não existe reciprocidade.

A forma geral gera três casos particularmente interessantes quando uma fonte de tensão ou corrente é aplicada a uma das portas e uma tensão ou corrente é medida na outra porta (ver figura 3.24):

1. Se são aplicadas fontes de corrente j_1 e \hat{j}_2 e medidas tensões em aberto v_2 e \hat{v}_1 :

$$\begin{aligned} v_10 + v_2\hat{j}_2 &= \hat{v}_1j_1 + \hat{v}_20 \\ \frac{v_2}{j_1} &= \frac{\hat{v}_1}{\hat{j}_2} \Rightarrow z_{21} = z_{12} \end{aligned}$$

2. Se são aplicadas fontes de tensão v_1 e \hat{v}_2 e medidas correntes em curto-circuito j_2 e \hat{j}_1 :

$$\begin{aligned} v_1\hat{j}_1 + 0\hat{j}_2 &= 0j_1 + \hat{v}_2j_2 \\ \frac{j_2}{v_1} &= \frac{\hat{j}_1}{\hat{v}_2} \Rightarrow y_{21} = y_{12} \end{aligned}$$

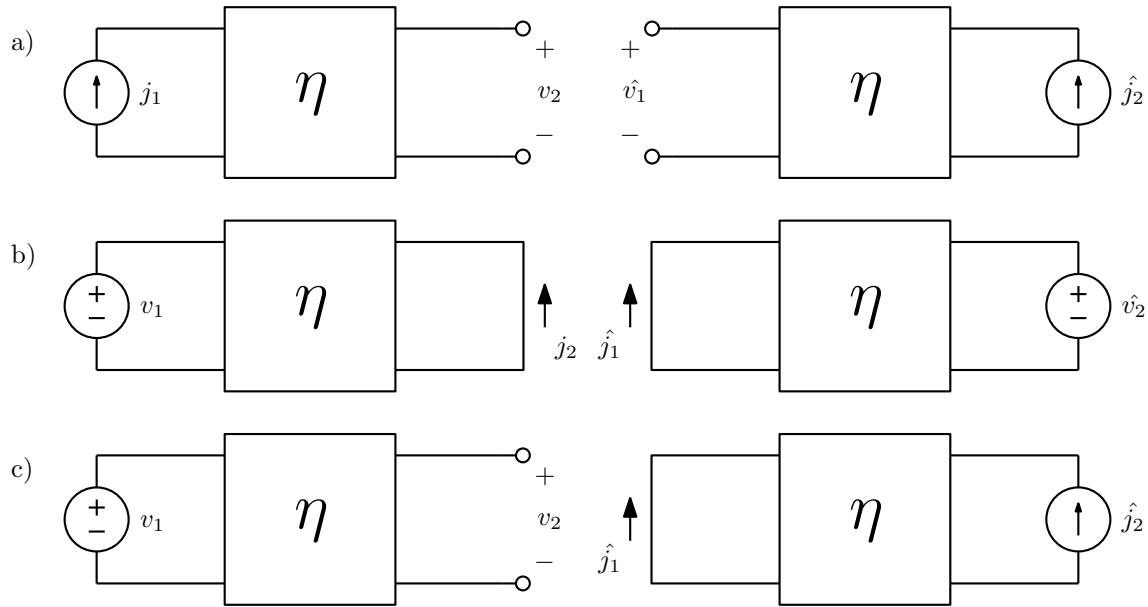


Figura 3.24: Os três casos básicos de reciprocidade. a) Transimpedâncias. b) Transcondutâncias. c) Ganho de tensão e ganho de corrente.

3. Se é aplicada a tensão v_1 e medida a tensão v_2 em aberto, e aplicada a corrente \hat{j}_2 e medida a corrente \hat{j}_1 em curto-circuito:

$$v_1 \hat{j}_1 + v_2 \hat{j}_2 = 0j_1 + \hat{v}_2 0$$

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{\hat{j}_1}{\hat{j}_2} \Rightarrow g_{21} = -g_{12}$$

Analogamente, invertendo as portas, tem-se o mesmo caso:

$$v_1 \hat{j}_1 + v_2 \hat{j}_2 = \hat{v}_1 0 + 0j_2$$

$$\frac{j_2}{j_1} = -\frac{\hat{v}_1}{\hat{v}_2} \Rightarrow h_{21} = -h_{12}$$

Assim, o teorema da reciprocidade diz que entre duas portas abertas em uma rede recíproca, transimpedâncias são iguais, transadmitâncias são iguais, e o ganho de tensão para um lado é o negativo do ganho de corrente para o outro.

Exemplo: Seja o caso mostrado na figura 3.25. A partir das medidas na rede resistiva linear η mostradas nos casos (a) e (b), deseja-se calcular as duas correntes indicadas no terceiro caso (c). Uma forma de solucionar o problema é achando primeiro o equivalente Thévenin da rede como vista pelo resistor, que tem uma fonte controlada de tensão, pois a fonte tem que ser linearmente proporcional à única fonte independente no circuito. Os modelos necessários são mostrados na figura 3.26. As medidas resultam no modelos (a) e (b), e nas equações:

$$0.2 = \frac{K}{R+1}; \quad 2 = \frac{14K}{R+2}$$

Resolvendo para K e R vem $K = 1/2$ e $R = 3/2 \Omega$. A corrente i_1 é obtida imediatamente a partir do modelo (c) como $i_1 = 10/R = 20/3$ A. A corrente i_2 é obtida pela aplicação direta do teorema da

reciprocidade no caso de transcondutâncias nos modelos (d) e (e), resultando em $i_2 = i_x = 10K/R = 10/3$ A.

O mesmo problema pode ser resolvido apenas por reciprocidade. Considere-se os modelos mostrados na figura 3.27, onde o resistor nos circuitos medidos é incorporado à rede η . Como os ganhos de transcondutância são iguais, são obtidas duas equações:

$$\frac{1/5}{1} = \frac{i_2}{10 + i_1} \quad \frac{2}{14} = \frac{i_2}{10 + 2i_2}$$

Resolvendo o sistema de equações para i_1 e i_2 vem o mesmo resultado anterior.

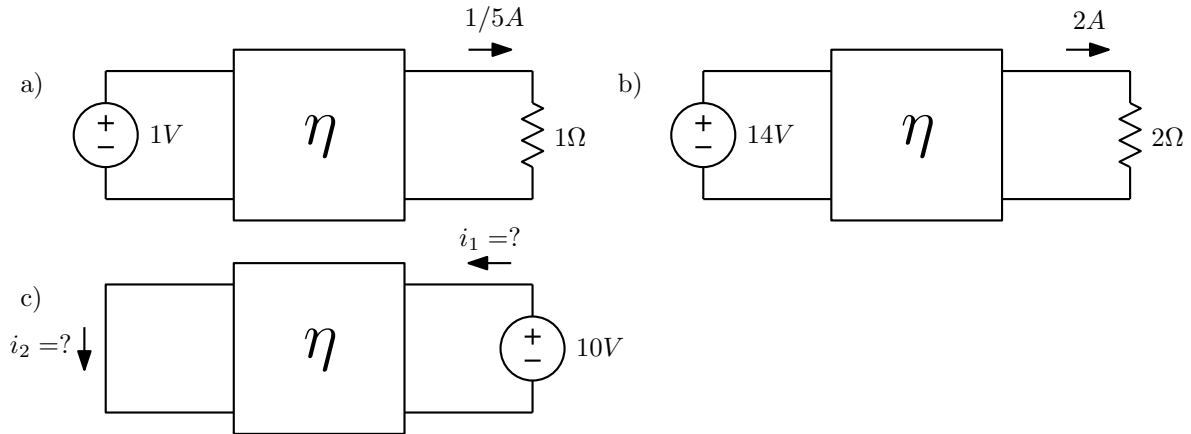


Figura 3.25: Conhecendo as medidas a) e b) na rede η , deseja-se calcular i_1 e i_2 na configuração c).

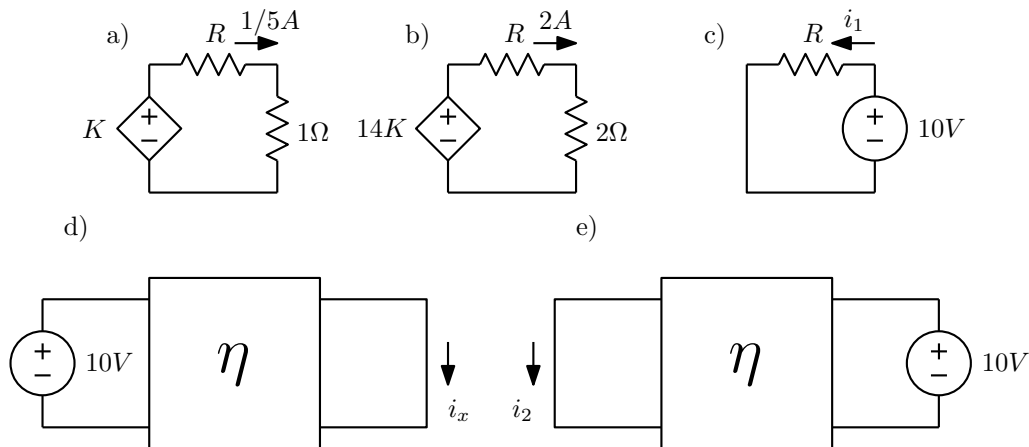


Figura 3.26: Solução usando equivalentes Thévenin e reciprocidade.

3.6.5 Parâmetros ABCD

Uma representação um pouco diferente para redes de duas portas são os “parâmetros de transmissão”, ou parâmetros ABCD. São definidos na forma:

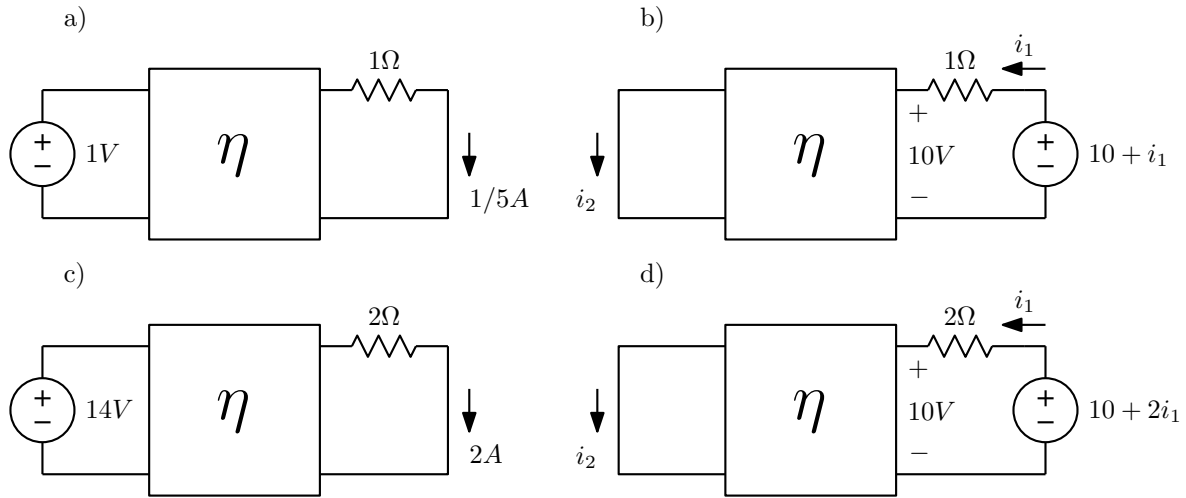


Figura 3.27: Solução usando reciprocidade apenas.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

O motivo desta formulação é que para sistemas de redes de duas portas em cascata fica simples a obtenção da matriz de transmissão de todo o sistema, que é simplesmente o produto de todas as matrizes. Sejam n redes:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T_1][T_2] \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix} = \cdots = [T_1] \cdots [T_n] \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ -I_{n+1} \end{bmatrix}$$

Os parâmetros de transmissão tem as seguintes interpretações:

$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$, inverso do ganho de tensão.

$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$, inverso da transcondutância.

$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$, inverso da transresistência.

$D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$, inverso do ganho de corrente.

Note-se que a transcondutância e o ganho de corrente são considerados com a corrente na saída “saído”. Estes parâmetros podem ser usados na análise de redes em escada. Um ramo série com impedância Z tem a representação:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Um ramo em paralelo de impedância Z tem a representação:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Um circuito em L , com um ramo em série seguido de outro em paralelo, com impedâncias Z_1 e Z_2 tem então a representação:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Como as operações necessárias envolvem apenas multiplicações e somas, o método é conveniente para análise algébrica ou semi-algébrica de circuitos lineares, embora não seja necessariamente a forma mais eficiente para isto. É uma forma simples para uso em programas de cálculo algébrico, e é também muito simples calcular respostas em frequência de filtros em escada por este meio.

Exemplo: Seja calcular a função de transferência de tensão da rede da figura 3.21. A rede pode ser decomposta em elementos em série e em paralelo ou em circuitos em L diretamente:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & sL_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{sC_1R_2} & \frac{1}{sC_1} \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + s^2L_3C_4 & sL_3 \\ sC_4 & 1 \end{bmatrix}$$

A última multiplicação produz a matriz de transmissão da rede completa:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_1R_2L_3C_4s^3 + L_3C_4s^2 + R_2(C_1 + C_4)s + 1}{C_1R_2s} & \frac{C_1R_2L_3s^2 + L_3s + R_2}{C_1R_2s} \\ \frac{L_3C_4s^2 + R_2C_4 + 1}{R_2} & \frac{L_3s + R_2}{R_2} \end{bmatrix}$$

O ganho de tensão desejado é então:

$$\left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{A} = \frac{C_1R_2s}{C_1R_2L_3C_4s^3 + L_3C_4s^2 + R_2(C_1 + C_4)s + 1}$$

Notar que as expressões para B e C são de grau menor pois o quarto ramo é visto em curto. A expressão para o termo C ficou ainda mais simples, pois o primeiro ramo está em série com uma fonte de corrente.

Capítulo 4

Síntese de circuitos passivos

4.1 Propriedades das impedâncias e admitâncias RLCM

IMPEDÂNCIAS ou admitâncias, ou, usando apenas um termo, “imitâncias”, formam um caso particular do caso das funções de transferência em circuitos lineares invariantes no tempo. O caso geral das imitâncias RLCM, em transformadas de Laplace, tem as seguintes propriedades:

- São razões de polinômios reais de s , com coeficientes positivos.
- Os polinômios do numerador e do denominador tem todas as raízes no semiplano lateral esquerdo, reais ou em pares complexos conjugados ou no eixo imaginário, em zero ou em pares conjugados. Raízes no eixo imaginário são simples. Isto é consequência de que respostas transientes à entrada zero não podem conter exponenciais crescentes, e, no caso de frequências naturais no eixo imaginário ou em zero, não podem conter multiplicações por potências do tempo. Isto tem que valer tanto para impedâncias quanto para admitâncias, ou seja, a rede tem que ser estável com os terminais em aberto ou em curto.
- A diferença de graus entre numerador ou denominador deve ser de $+1$, 0 ou -1 , conforme o comportamento em alta frequência da imitância, que pode ser indutiva, capacitiva ou resistiva, e não mais complicada que isto.
- A parte real da imitância para $s = j\omega$ tem que ser sempre positiva ou nula. Isto é requerido pela passividade da rede, já que parte real negativa geraria potência.

Como se verá adiante, satisfeitas estas condições sempre há formas para se obter a rede que realiza a imitância. Os casos mais simples são as redes compostas de 2 elementos, LC, RC e RL.

4.1.1 Imitâncias LC

Quando existem apenas indutores e capacitores, ocorrem as seguintes particularidades nas imitâncias:

- São razões de polinômios de s , sempre na forma de polinômios par/ímpar ou ímpar/par, com coeficientes positivos. Isto ocorre devido à existência de um polo ou um zero simples em zero, já que a imitância não pode ser resistiva em $s = 0$, e da posição dos outros polos e zeros.
- As frequências naturais da rede em aberto e em curto, e portanto os polos e os zeros da imitância, ficam restritas a estarem no eixo imaginário, em pares conjugados, ou em zero, todas simples.

- A diferença de graus entre numerador e denominador é sempre de $+1$ ou -1 , pois a rede só pode ser indutiva ou capacitiva em alta frequência.
- A parte real da imitância para $s = j\omega$ é nula.
- As mesmas propriedades valem para impedâncias e admitâncias, pois o dual de uma rede LC é também uma rede LC.

Há ainda outra restrição: Tomando-se, por exemplo, a impedância, a reatância vale:

$$X(\omega) = \frac{Z(j\omega)}{j}$$

Expandindo a impedância em frações parciais, obtém-se:

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \left(\frac{k_i}{s + j\omega_i} + \frac{k_i}{s - j\omega_i} \right)$$

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

Observe-se que cada termo da expansão corresponde a um polo, ou a um par deles, e domina sobre os demais quando está na vizinhança do polo. Como a rede tem que se comportar sempre como composta de elementos positivos, nota-se que k_∞ e k_0 tem que ser positivos ou nulos, para que a rede se comporte como indutor positivo em alta frequência e capacitor positivo em baixa frequência, respectivamente. Os termos no somatório correspondem a circuitos tanque paralelos LC, e para que os elementos sejam positivos, os k_i também devem ser todos positivos.

A reatância vale portanto:

$$X(\omega) = k_\infty \omega - \frac{k_0}{\omega} + \sum_i \frac{2k_i \omega}{-\omega^2 + \omega_{pi}^2}$$

A derivada desta função é sempre positiva, e como ela tem polos em que o valor de $X(\omega)$ é positivo para ω menor e negativo para ω maior que a frequência do polo, obrigatoriamente existem zeros entre os polos, incluindo zero no infinito se não há polo no infinito. Os polos e zeros de $X(\omega)$ então se alternam no eixo real, e os polos e zeros de $Z(s)$ se alternam no eixo imaginário. Não podem existir dois polos sucessivos sem um zero entre eles, nem dois zeros sucessivos sem um polo entre eles. A regra para admitâncias LC é a mesma.

4.1.1.1 Realização de imitâncias LC

A discussão anterior já apresenta uma possível realização, através da expansão em frações parciais da impedância. O mesmo pode ser feito com a admitância. Estas formas de realização são chamadas “formas de Foster”. São “formas canônicas”, que usam o mínimo número de componentes.

Primeira forma de Foster LC: Expansão em frações parciais de $Z(s)$

$$Z_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

Segunda forma de Foster LC: Expansão em frações parciais de $Y(s)$

$$Y_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

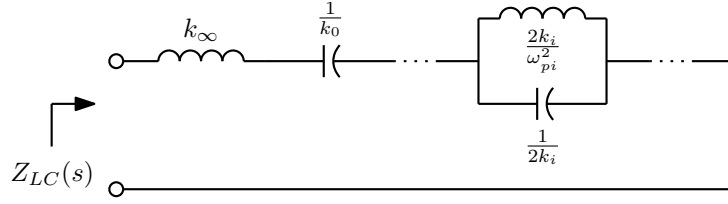


Figura 4.1: Primeira forma de Foster LC.

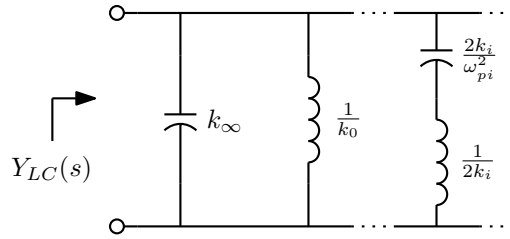


Figura 4.2: Segunda forma de Foster LC.

Note-se que as expansões podem ser feitas de forma parcial. Cada termo da expansão em frações parciais realiza um polo, ou um par conjugado deles. A subtração destes termos da função original resulta em uma nova função, de menor ordem, que não tem mais os polos correspondentes. Subtrações de termos da expansão da função original são então chamadas de “extrações completas de polos”. Formas em escada podem ser obtidas pela alternância de extração de polos de impedância e de admitância. As formas mais simples são as “formas de Cauer”, que são também canônicas:

Primeira forma de Cauer LC: Alternância entre extração do polo no infinito da impedância e da admitância.

A estrutura pode ser obtida pela identificação da rede com uma expansão em fração contínua:

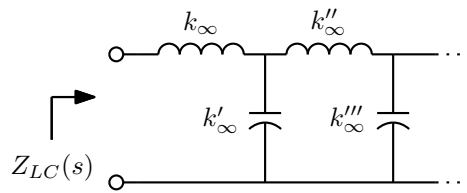


Figura 4.3: Primeira forma de Cauer LC.

$$Z_{LC}(s) = k_{\infty}s + \frac{1}{k'_{\infty}s + \frac{1}{k''_{\infty}s + \frac{1}{\dots}}}$$

Se $Z(s)$ não tem polo no infinito, começa-se a expansão com o inverso, $Y(s)$, que tem, e a expansão se inicia por um capacitor em paralelo.

Segunda forma de Cauer LC: Alternância entre extração do polo na origem da impedância e da admitância.

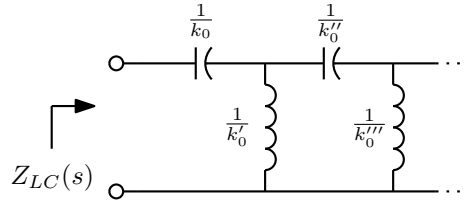


Figura 4.4: Segunda forma de Cauer LC.

Também existe a identificação com uma expansão em fração contínua:

$$Z_{LC}(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + \frac{1}{\frac{k''_0}{s} + \frac{1}{\dots}}}$$

Também aqui, se $Z(s)$ não tem polo em zero, inicia-se a expansão por $Y(s)$, que tem, e a expansão se inicia por um indutor em paralelo.

Exemplo: Seja realizar a impedância normalizada:

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)} = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^3 + 2s}$$

A realização na primeira forma de Foster vem da expansão em frações parciais:

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_1 s}{s^2 + 2} = s + \frac{\frac{3}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 2}$$

onde os resíduos da expansão foram calculados como:

$$k_\infty = \left. \frac{Z(s)}{s} \right|_{s \rightarrow \infty} = 1; \quad k_0 = sZ(s)|_{s=0} = \frac{3}{2}; \quad 2k_1 = \left. \frac{s^2 + 2}{s} Z(s) \right|_{s^2 = -2} = \frac{1}{2}$$

A realização na segunda forma de Foster vem da expansão em frações parciais da admitância:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} = \frac{2k_1 s}{s^2 + 1} + \frac{2k_2 s}{s^2 + 3} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3}$$

onde os resíduos da expansão foram calculados como:

$$2k_1 = \left. \frac{s^2 + 1}{s} Y(s) \right|_{s^2 = -1} = \frac{1}{2}; \quad 2k_2 = \left. \frac{s^2 + 3}{s} Y(s) \right|_{s^2 = -3} = \frac{1}{2}$$

A primeira forma de Cauer vem da expansão em fração contínua de $Z(s)$ na forma normal, já que $Z(s)$ tem polo no infinito, e a segunda forma de Cauer da expansão em fração contínua com os polinômios invertidos, já que $Z(s)$ tem polo em zero. A figura 4.7 mostra as quatro realizações, todas diferentes. As realizações podem ser verificadas observando-se que em todas elas a indutância vista em alta frequência vale $k_\infty = 1$ H e a capacitância vista em baixa frequência vale $\frac{1}{k_0} = \frac{2}{3}$ F.

$$\begin{array}{r}
s^4 + 4s^2 + 3 \overline{\left| s^3 + 2s \right.} \\
-s^4 - 2s^2 \quad s \\
\hline
s^3 + 2s \overline{\left| 2s^2 + 3 \right.} \\
-s^3 - \frac{3}{2}s \quad \frac{1}{2}s \\
\hline
2s^2 + 3 \overline{\left| \frac{1}{2}s \right.} \\
-2s \quad 4s \\
\hline
\frac{1}{2}s \overline{\left| 3 \right.} \\
-\frac{1}{2}s \quad \frac{1}{6}s \\
\hline
0
\end{array}$$

Figura 4.5: Expansão na primeira forma de Cauer para $Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s}$.

$$\begin{array}{r}
3 + 4s^2 + s^4 \overline{\left| 2s + s^3 \right.} \\
-3 - \frac{3}{2}s^2 \quad \frac{3}{2s} \\
\hline
2s + s^3 \overline{\left| \frac{5}{2}s^2 + s^4 \right.} \\
-2s - \frac{4}{5}s^3 \quad \frac{4}{5s} \\
\hline
\frac{5}{2}s^2 + s^4 \overline{\left| \frac{1}{5}s^3 \right.} \\
-\frac{5}{2}s^2 \quad \frac{25}{2s} \\
\hline
\frac{1}{5}s^3 \overline{\left| s^4 \right.} \\
-\frac{1}{5}s^3 \quad \frac{1}{5s} \\
\hline
0
\end{array}$$

Figura 4.6: Expansão na segunda forma de Cauer para $Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s}$.

4.1.2 Imitâncias RC e RL

Para gerar uma impedância RC, pode-se transformar uma já conhecida impedância LC, dividindo a impedância por s e trocando os resultantes s^2 por s . Os termos correspondentes aos polos imaginários passam a se referir a polos reais, no semieixo real negativo.

$$\begin{aligned}
Z_{LC}(s) &= k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2} \\
Z_{RC}(s) &= k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k'_i}{s + p_i}
\end{aligned}$$

Observa-se então as propriedades de $Z_{RC}(s)$:

- É constante ou nula no infinito.
- É infinita ou constante em frequência zero.
- É uma razão de polinômios completos de s , a menos de possível falta do termo constante no denominador, e o grau do denominador é igual a ou um grau maior que o grau do numerador.

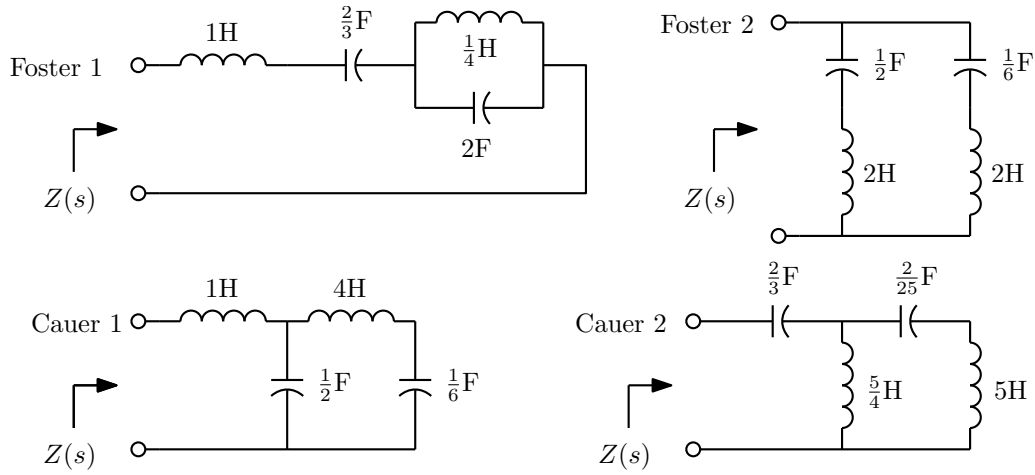


Figura 4.7: Formas de Foster e Cauer para $Z(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^3 + 2s}$.

- Os polos e zeros se alternam no semieixo real negativo. A singularidade de mais baixa frequência é um polo, que pode estar na origem.
- $|Z(j(\omega))|$ cai monotonicamente com a frequência, pois as impedâncias dos capacitores diminuem com a frequência.

Para gerar uma impedância RL, pode-se também transformar uma impedância LC, mas multiplicando a impedância por s e trocando os resultantes s^2 por s . Os polos imaginários novamente se convertem em polos no semieixo real negativo.

$$Z_{LC}(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

$$Z_{RL}(s) = k_{\infty}s + k_0 + \sum_i \frac{k'_i s}{s + p_i}$$

As propriedades de $Z_{RL}(s)$ são então:

- É constante ou infinita no infinito.
- É nula ou constante em frequência zero.
- É uma razão de polinômios completos de s , a menos de possível falta do termo constante no numerador, e o grau do denominador é igual a ou um grau menor que o grau do numerador.
- Os polos e zeros se alternam no semieixo real negativo. A singularidade de mais baixa frequência é um zero, que pode estar na origem.
- $|Z(j(\omega))|$ aumenta monotonicamente com a frequência, pois as impedâncias dos indutores aumentam com a frequência.

Para gerar uma admitância RC a partir de uma admitância LC, o procedimento é idêntico ao usado para gerar uma impedância RL, e para gerar uma admitância RL, o procedimento é idêntico ao usado para gerar uma impedância RC. Conclui-se então que admitâncias RC tem as mesmas propriedades das

impedâncias RL, e que admitâncias RL tem as mesmas propriedades das impedâncias RC. Isto decorre naturalmente da dualidade, pois o dual de uma rede RC é uma rede RL. No caso das redes LC as propriedades de impedâncias e admitâncias são idênticas pois o dual de uma rede LC é uma rede LC também.

4.1.2.1 Realização de imitâncias RC e RL

Como acontece com as formas LC, também se pode definir as quatro formas canônicas, de Foster e de Cauer.

Primeira forma de Foster RC: Expansão em frações parciais de $Z(s)$:

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s + p_i}$$

Segunda forma de Foster RC: Expansão em frações parciais de $Y(s)$:

$$Y_{RC}(s) = k_{\infty}s + k_0 + \sum_i \frac{k_i s}{s + p_i}$$

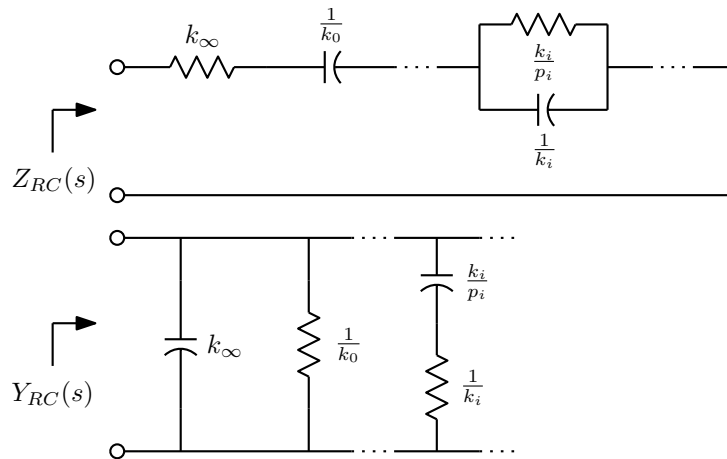


Figura 4.8: Formas de Foster RC.

Primeira forma de Cauer RC: Alternância entre extração da constante no infinito de $Z(s)$ e do polo no infinito de $Y(s)$.

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{1}{k'_{\infty}s + \frac{1}{k''_{\infty} + \frac{1}{\dots}}}$$

Se $Z(s)$ não tem constante no infinito, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem polo no infinito, e a expansão se inicia por um capacitor em paralelo.

Segunda forma de Cauer RC: Alternância entre extração do polo na origem de $Z(s)$ e da constante na origem de $Y(s)$.

$$Z_{RC}(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{k'_0 + \frac{1}{\frac{k''_0}{s} + \frac{1}{\dots}}}$$

Se $Z(s)$ não tem polo na origem, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem constante na origem, e a expansão se inicia com um resistor em paralelo.

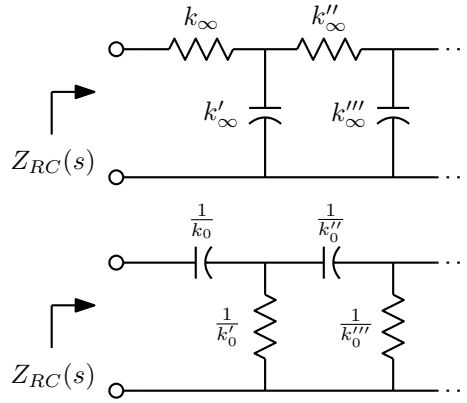


Figura 4.9: Formas de Cauer RC.

Primeira forma de Foster RL: Expansão em frações parciais de $Z(s)$:

$$Z_{RL}(s) = k_\infty s + k_0 + \sum_i \frac{k_i s}{s + p_i}$$

Segunda forma de Foster RL: Expansão em frações parciais de $Y(s)$:

$$Y_{RL}(s) = k_\infty + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s + p_i}$$

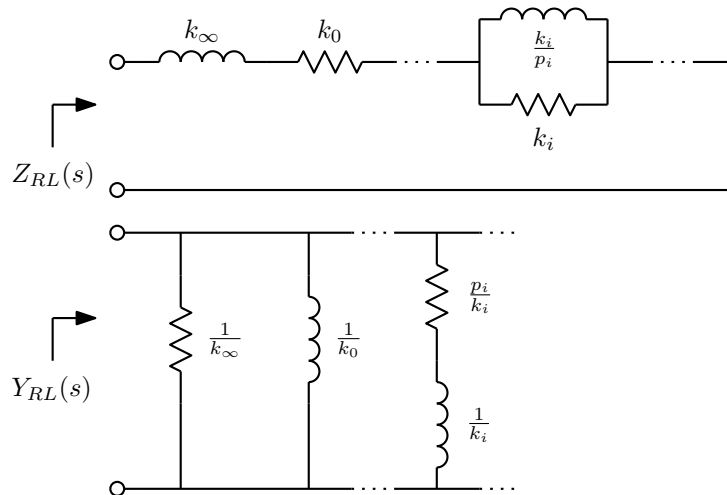


Figura 4.10: Formas de Foster RL.

Primeira forma de Cauer RL: Alternância entre extração do polo no infinito de $Z(s)$ e da constante no infinito de $Y(s)$.

$$Z_{RL}(s) = k_{\infty}s + \frac{1}{k'_{\infty} + \frac{1}{k''_{\infty}s + \dots}}$$

Se $Z(s)$ não tem polo no infinito, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem constante infinito, e a expansão se inicia por um resistor em paralelo.

Segunda forma de Cauer RL: Alternância entre extração da constante na origem de $Z(s)$ e do polo na origem de $Y(s)$.

$$Z_{RL}(s) = k_0 + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + \frac{1}{k''_0 + \dots}}$$

Se $Z(s)$ não tem constante na origem, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem polo na origem, e a expansão se inicia com um indutor em paralelo.

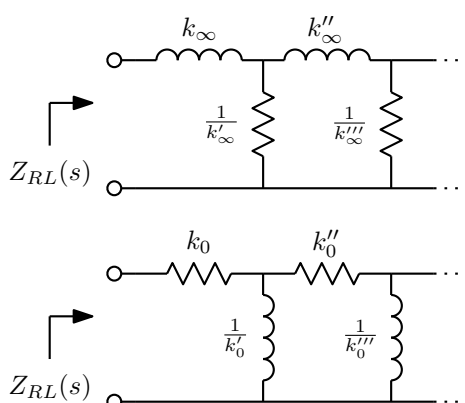


Figura 4.11: Formas de Cauer RL.

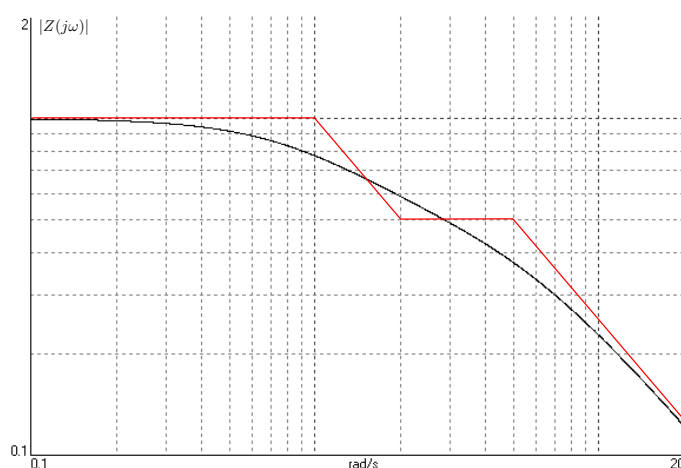


Figura 4.12: Módulo de uma impedância a realizar. Plotado também o digrama de Bode correspondente.

Exemplo: Seja realizar a impedância normalizada que tem a característica de módulo mostrada na figura 4.12. Ela tem polos reais em $s = -1$ e $s = -5$, zero real em $s = -2$ e constante multiplicativa de $\frac{5}{2}$ para que a impedância em baixa frequência seja de 1Ω . Como tem como primeira singularidade um polo, e polos e zeros estão alternados, admite uma realização RC. As primeira e segunda formas de Foster são obtidas como:

$$Z(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)} = \frac{\frac{5}{8}}{s+1} + \frac{\frac{15}{8}}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{2.5(s+2)} = \frac{2}{5}s + 1 + \frac{\frac{3}{5}s}{s+2}$$

As primeira e segunda formas de Cauer vem das expansões em fração contínua mostradas na figura 4.13.

$$\begin{array}{r} s^2 + 6s + 5 \quad \left| \frac{5}{2}s + 5 \right. \\ \underline{-s^2 - 2s} \quad \frac{2}{5}s \\ \frac{5}{2}s + 5 \quad \left| 4s + 5 \right. \\ \underline{-\frac{5}{2}s - \frac{25}{8}} \quad \frac{5}{8} \\ 4s + 5 \quad \left| \frac{15}{8} \right. \\ \underline{-4s} \quad \frac{32}{15}s \\ \frac{15}{8} \quad \left| 5 \right. \\ \underline{-\frac{15}{8}} \quad \frac{3}{8} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 + 6s + s^2 \quad \left| 5 + \frac{5}{2}s \right. \\ \underline{-5 - \frac{5}{2}s} \quad 1 \\ 5 + \frac{5}{2}s \quad \left| \frac{7}{2}s + s^2 \right. \\ \underline{-5 - \frac{10}{7}s} \quad \frac{10}{7s} \\ \frac{7}{2}s + s^2 \quad \left| \frac{15}{14}s \right. \\ \underline{-\frac{7}{2}s} \quad \frac{49}{15} \\ \frac{15}{14}s \quad \left| s^2 \right. \\ \underline{-\frac{15}{14}s} \quad \frac{15}{14s} \\ 0 \end{array}$$

Figura 4.13: Expansões em fração contínua de $Z(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)}$ nas duas formas de Cauer.

As realizações correspondentes são mostradas na figura 4.14. Como verificação, pode-se notar que a resistência vista em baixa frequência é de 1Ω , e que a capacitância vista em alta frequência vale $\frac{2}{5} \text{ F}$.

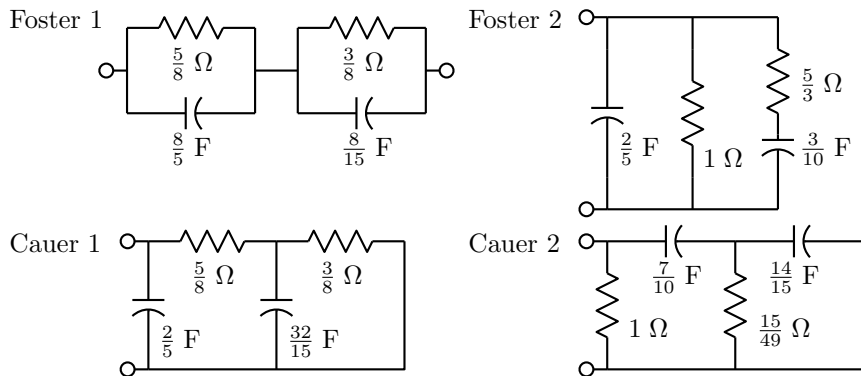


Figura 4.14: Realizações da impedância RC $Z(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)}$ nas formas de Foster e Cauer.

Se a mesma função fosse uma admitância, seria então RL, com as realizações mostradas na figura 4.15. Os cálculos são idênticos aos feitos para impedância RC, com as realizações tomando formas duais

às da figura 4.14. Notar que o dual de uma estrutura na primeira forma de Foster fica na segunda forma, e vice-versa. Os duais das formas de Cauer continuam nas mesmas formas.

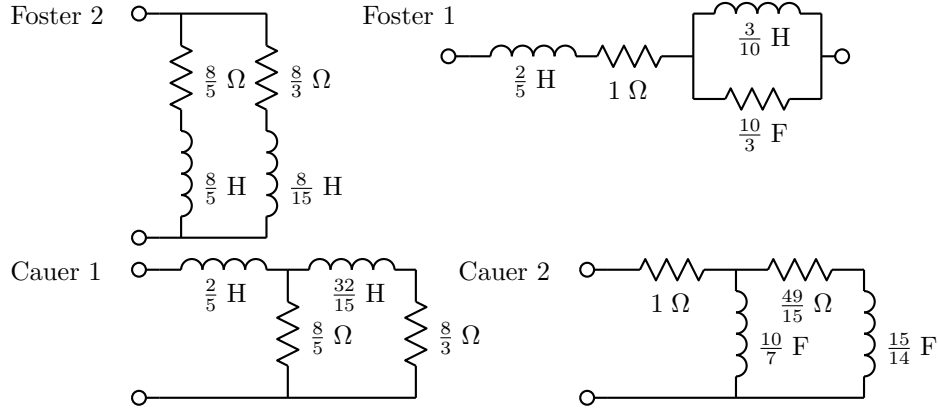


Figura 4.15: Realizações da admitância RL $Y(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)}$ nas formas de Foster e Cauer.

Exemplo: A síntese de admitâncias RC e RL, pode ser aplicada em síntese de funções de transferência de redes em escada “não terminadas” realizando filtros simples bastante úteis, desde que todos os polos da função de transferência sejam reais. É simples obter zeros de transmissão em zero e no infinito. Seja realizar a função de transferência normalizada:

$$\frac{V_o}{V_{in}(s)} = \frac{ks}{(s+1)(s+2)}$$

Uma rede que pode realizar a função é mostrada abaixo. Ela realiza dois polos, reais pois é uma rede RC, um zero em zero e um zero no infinito.

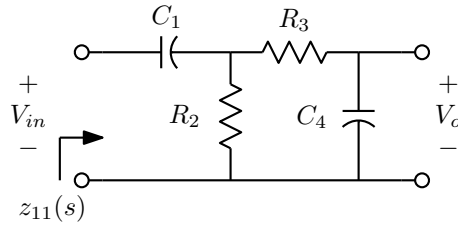


Figura 4.16: Possível estrutura para o filtro RC.

Analisando a rede como uma rede de 2 portas por parâmetros Z, considerando que a porta de saída está sem carga, vem:

$$V_{in} = z_{11}I_{in} + z_{12} 0$$

$$V_o = z_{21}I_{in} + z_{22} 0$$

E, considerando que os parâmetros Z tem o mesmo denominador, a menos de cancelamentos:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{N_{21}/D}{N_{11}/D} = \frac{N_{21}}{N_{11}}$$

O numerador de z_{11} é então conhecido. Resta determinar um denominador adequado, sabendo que os polos e zeros de z_{11} devem se alternar no semieixo real negativo, e que a singularidade de mais baixa frequência é um polo, que pode estar na origem. A estrutura já indica que z_{11} tem polo na origem, devido ao bloqueio de corrente contínua pelos capacitores. O outro polo deve ficar em alguma posição entre -1 e -2 . Seja em -1.5 .

$$z_{11}(s) = \alpha \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1.5)} = \alpha \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 1.5s}$$

O fator α define o nível de impedância do circuito, que pode ser ajustado como conveniente após a síntese. Seja $\alpha = 1$ por enquanto. A estrutura da rede é a da segunda forma de Cauer, com a saída tomada sobre o segundo capacitor, para a realização correta dos zeros. A expansão de z_{11} em fração contínua nesta forma é mostrada na figura 4.17.

$$\begin{array}{r} 2 + 3s + s^2 \left| \frac{\frac{3}{2}s + s^2}{\frac{4}{3s}} \right. \\ \hline -2 - \frac{4}{3}s \\ \frac{\frac{3}{2}s + s^2}{\frac{5}{3}s + s^2} \left| \frac{\frac{5}{3}s + s^2}{\frac{9}{10}} \right. \\ \hline -\frac{3}{2}s - \frac{9}{10}s^2 \\ \frac{\frac{5}{3}s + s^2}{\frac{1}{10}s^2} \left| \frac{\frac{1}{10}s^2}{\frac{50}{3s}} \right. \\ \hline -\frac{5}{3}s \\ \frac{\frac{1}{10}s^2}{\frac{1}{10}} \left| \frac{s^2}{\frac{1}{10}} \right. \\ \hline -\frac{1}{10}s^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 4.17: Expansão em fração contínua na segunda forma de Cauer RC.

A rede obtida é então a da figura 4.18.

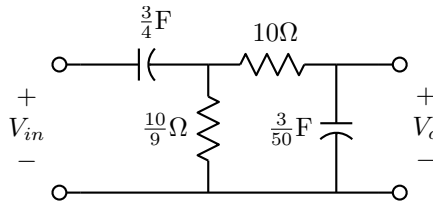


Figura 4.18: Estrutura obtida para o filtro RC.

A função de transferência realizada foi¹:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{\frac{5}{3}s}{s^2 + 3s + 2}$$

Uma outra forma de resolver o mesmo problema é expandir a rede na primeira forma de Cauer e então trocar as posições dos dois primeiros elementos. Isto dá certo porque as frequências naturais da rede não

¹Basta ver que o limite em alta frequência da função $\frac{ks}{(s+P_1)(s+P_2)}$ vale $\frac{k}{s}$, que a partir da figura 4.16 vale $\frac{1}{sR_3C_4}$, e então $k = \frac{1}{R_3C_4}$. Também é possível observar o comportamento em baixa frequência, obtendo $\frac{ks}{P_1P_2} = sC_1R_2$ e $k = C_1R_2P_1P_2$.

são alteradas pela operação, pois assume-se uma fonte de tensão na entrada, e os zeros são realizados corretamente. A rede obtida é diferente da anterior porque o polo de z_{11} na rede final não está mais em -1.5 , e há uma mudança no nível de impedância.

A expansão de z_{11} em fração contínua, na primeira forma de Cauer, é mostrada na figura 4.19.

$$\begin{array}{r}
 s^2 + 3s + 2 \quad \left| s^2 + \frac{3}{2}s \right. \\
 \hline
 -s^2 - \frac{3}{2}s \quad 1 \\
 \hline
 s^2 + \frac{3}{2}s \quad \left| \frac{3}{2}s + 2 \right. \\
 \hline
 -s^2 - \frac{4}{3}s \quad \frac{2}{3}s \\
 \hline
 \frac{3}{2}s + 2 \quad \left| \frac{1}{6}s \right. \\
 \hline
 -\frac{3}{2}s \quad 9 \\
 \hline
 \frac{1}{6}s \quad \left| 2 \right. \\
 \hline
 -\frac{1}{6}s \quad \frac{1}{12}s \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Figura 4.19: Expansão em fração contínua na primeira forma de Cauer RC.

A rede alternativa obtida é então a da figura 4.20.

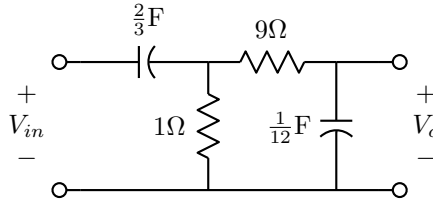


Figura 4.20: Estrutura alternativa obtida para o filtro RC.

E uma análise como no caso anterior mostra que a função de transferência realizada foi:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{\frac{4}{3}s}{s^2 + 3s + 2}$$

z_{11} com esta estrutura, que é diferente do do caso anterior, vale:

$$z_{11}(s) = 0.9 \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 1.2s}$$

É possível também obter duas outras redes trocando as posições dos capacitores e resistores nas duas seções das redes. Isto dá certo pois as frequências naturais não são alteradas, e os zeros ficam nas posições certas. A mesma técnica se aplica a realização de funções de transferência de redes LC, mas estes filtros não terminados não são tão úteis.

É interessante ver o que acontece quando a posição do polo colocado entre os dois zeros é modificada. Seja realizar a síntese do caso geral passa-faixa, com a função de transferência:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{ks}{(s + Z_1)(s + Z_2)}$$

A impedância z_{11} normalizada em impedância vale:

$$z_{11}(s) = \frac{(s + Z_1)(s + Z_2)}{s(s + P)}$$

Realizando a expansão na primeira forma de Cauer, os elementos obtidos, como na figura 4.16, são:

$$\begin{aligned} R_2 &= 1 \\ C_1 &= \frac{1}{Z_1 + Z_2 - P} \\ R_3 &= \frac{(Z_1 + Z_2 - P)^2}{P(Z_1 + Z_2) - P^2 - Z_1 Z_2} \\ C_4 &= \frac{P(Z_1 + Z_2) - P^2 - Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2 - P)Z_1 Z_2} \end{aligned}$$

Note-se que o valor de R_3 tem polos para $P = Z_1$ e $P = Z_2$, enquanto C_4 tem zeros. Ao se aproximar o polo de qualquer dos zeros a dispersão de valores aumenta, com as duas seções tendendo a ficar desacopladas, com a segunda seção ficando com muito maior nível de impedância que a primeira. Se P ficar fora do intervalo entre os zeros, R_3 fica negativo (nulo se $P = Z_1 + Z_2$, mas então $C_4 = \infty$), em coerência com a não realizabilidade da rede. Há um valor do polo que minimiza a dispersão dos valores dos resistores, no caso minimizando o valor de R_3 :

$$\frac{d}{dP} \frac{(Z_1 + Z_2 - P)^2}{P(Z_1 + Z_2) - P^2 - Z_1 Z_2} = 0 \implies P = \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{Z_1 + Z_2}$$

O que leva aos componentes ótimos, exemplificados com o exemplo de $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$ e $P = \frac{5}{3}$:

$$\begin{aligned} R_2 &= 1 \implies 1 \, \Omega \\ C_1 &= \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1 Z_2} \implies \frac{3}{4} \, \text{F} \\ R_3 &= \frac{4Z_1 Z_2}{Z_1^2 - 2Z_1 Z_2 + Z_2^2} \implies 8 \, \Omega \\ C_4 &= \frac{Z_1^2 - 2Z_1 Z_2 + Z_2^2}{2Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_2)} \implies \frac{1}{12} \, \text{F} \end{aligned}$$

Os valores ficaram semelhantes aos obtidos com $P = 1.5$, que é próximo do ótimo. Uma análise semelhante pode ser feita partindo da expansão na segunda forma de Cauer, resultando em $P = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$, diferente devido à estrutura diferente. A rede com mínima dispersão de resistências, entretanto, resulta a mesma se $R_2 = 1 \, \Omega$.

4.1.3 Imitâncias RLCM

Este caso é mais complexo, e pode facilmente recair em uma situação em que uma rede não canônica, ou usando transformadores, é requerida. Mas soluções sempre existem para a realização se a função satisfizer as propriedades gerais das imitâncias RLCM. Um procedimento geral é o chamado “método chop-chop”:

1. Se $Z(s)$ ou $Y(s)$ tem polos em zero, infinito, ou no eixo imaginário, extrair estes polos com seções de Foster LC. As extrações são sempre possíveis, pois nas vizinhanças dos polos a rede se comporta como uma rede LC.

2. A rede resultante é resistiva em frequências zero e infinito. Deve-se então extrair um resistor, em série ou em paralelo. Sempre existem essas duas possibilidades. Um resistor em série deve ser igual a R_{min} , e um condutor em paralelo deve ser igual a G_{min} , os mínimos valores das partes reais da impedância ou da admitância. Mais não pode ser retirado, pois as partes reais tem que continuar maiores ou iguais a zero.

$$R_{min} = \min(\operatorname{Re} Z(j\omega))$$

$$G_{min} = \min(\operatorname{Re} Y(j\omega))$$

3. A admitância que resta desta operação tem ao menos uma frequência em que sua parte real é nula, justamente a frequência onde ocorria o mínimo da parte real extraída, ω_0 . Se a extração ocorreu em frequência zero ou infinita, a parte imaginária é zerada também, e pode-se voltar ao passo 1 para extrair o polo em zero ou infinito criado. Para outros valores de ω_0 , se por coincidência a parte imaginária em ω_0 também foi zerada pela extração, também pode-se voltar ao passo 1 e extrair os polos imaginários criados.
4. Se a admitância que restou tem parte imaginária não nula na frequência ω_0 , é chamada então de “admitância mínima”, pois não tem polos em zero, infinito ou no eixo imaginário, e tem parte real mínima nula. Nada pode ser extraído dela imediatamente. Existem entretanto vários métodos para contornar o problema.

4.1.3.1 Síntese de Brune

O mais simples é o “ciclo de Brune” [7], que vai requerer um transformador, e é realizado assim:

1. Extraí-se de $Z(s)$ um indutor série que tenha a impedância $Z(j\omega_0)$. Este indutor pode ser negativo. Está sendo criado um polo no infinito artificialmente:

$$L_1 = \frac{Z(j\omega_0)}{j\omega_0}$$

2. A impedância agora tem zeros em $\pm j\omega_0$, e pode-se extrair os polos de admitância como um tanque série L_2 , C_2 em paralelo. Se a impedância original era válida, o resíduo será positivo, e os dois componentes também.
3. A seguir extraí-se o polo no infinito de $Z(s)$ criado pela extração do primeiro indutor como outro indutor L_3 em série. Se L_1 era negativo, L_3 é positivo, e vice-versa. A impedância restante é novamente resistiva em zero e infinito, e volta-se à extração da resistência ou condutância mínima.

Pode ser necessário repetir o ciclo de Brune várias vezes para terminar a síntese. O bloco gerado pelo ciclo de Brune contém na realidade um transformador com acoplamento cerrado, obtido da transformação do “T” de indutores gerado pelo ciclo. Com esse transformador a impedância resistiva no infinito que resta é transformada na impedância também resistiva no infinito que foi obtida após a extração da resistência ou condutância mínima. A rede de indutores não corresponde a polo no infinito.

A realização (figura 4.21) não é muito realística, devido ao transformador com acoplamento cerrado. Mas se a rede possuir um indutor série à esquerda, antes da extração de R_{min} em série, é possível absorver o indutor no transformador e obter um transformador com acoplamento não unitário, mais realístico.

Exemplo: Seja realizar a impedância:

$$Z(s) = \frac{5s^2 + 18s + 8}{s^2 + s + 10}$$

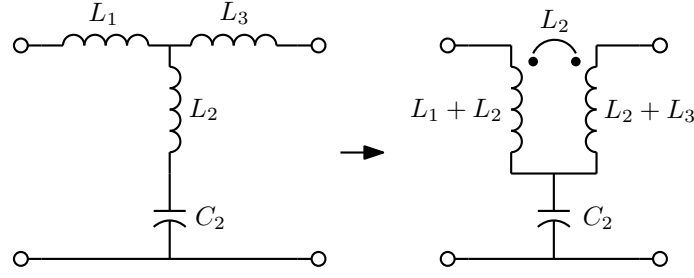


Figura 4.21: Estrutura retirada pelo ciclo de Brune.

Os polos e zeros são complexos no SPLE, não há polos de impedância ou admitância no eixo imaginário. A resistência mínima não fica nem em zero nem no infinito. A parte real deve ser examinada. Uma forma para obter a parte real com menos cálculos é considerar que a impedância está na forma:

$$Z(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o}$$

onde os sufixos denotam as partes par (e) e ímpar (o) dos polinômios de s do numerador e do denominador. No caso, $N_e = 5s^2 + 8$, $N_o = 18s$, $D_e = s^2 + 10$ e $D_o = s$. A multiplicação pelo complexo conjugado do denominador, que seria feita para eliminar a parte imaginária do denominador para $s = j\omega$, equivale a multiplicar numerador e denominador por $D_e - D_o$:

$$Z(s) = \frac{(N_e + N_o)(D_e - D_o)}{D_e^2 - D_o^2} = \frac{N_e D_e - N_o D_o}{D_e^2 - D_o^2} + \frac{N_o D_e - D_o N_e}{D_e^2 - D_o^2}$$

A primeira parte é par/par, e portanto par, enquanto a segunda é ímpar/par, e portanto ímpar. Para $s = j\omega$ a parte par é real e a parte ímpar é imaginária. Assim:

$$Re(Z(j\omega)) = \frac{N_e D_e - N_o D_o}{D_e^2 - D_o^2} \Big|_{s=j\omega} \quad Im(Z(j\omega)) = \frac{N_o D_e - D_o N_e}{D_e^2 - D_o^2} \Big|_{s=j\omega}$$

No caso:

$$Re(Z(j\omega)) = \frac{(5s^2 + 8)(s^2 + 10) - 18s^2}{(s^2 + 10)^2 - s^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{5s^4 + 40s^2 + 80}{s^4 + 19s^2 + 100} \Big|_{s=j\omega}$$

$$Re(Z(j\omega)) = \frac{5\omega^4 - 40\omega^2 + 80}{\omega^4 - 19\omega^2 + 100} = \frac{5(\omega^2 - 4)}{\omega^4 - 19\omega^2 + 100}$$

onde se observa que a parte real vale zero para $\omega = 2$ rad/s (Ver as partes real e imaginária plotadas na figura 4.22). Nenhum resistor pode ser extraído então. $Z(j2) = \frac{-12+36j}{6+2j} = 6j$, puramente imaginário e não nulo. O ciclo de Brune permite sair do impasse. O indutor série a extrair vale:

$$L_1 = \frac{Z(j2)}{j2} = \frac{6j}{2j} = 3H$$

Extraindo este indutor de $Z(s)$:

$$Z'(s) = Z(s) - 3s = \frac{5s^2 + 18s + 8}{s^2 + s + 10} - 3s = \frac{-3s^3 + 2s^2 - 12s + 8}{s^2 + s + 10} = \frac{-3(s - 2/3)(s^2 + 4)}{s^2 + s + 10}$$

Extraindo o tanque LC que realiza os polos em $\pm 2j$ em $Y'(s) = 1/Z'(s)$:

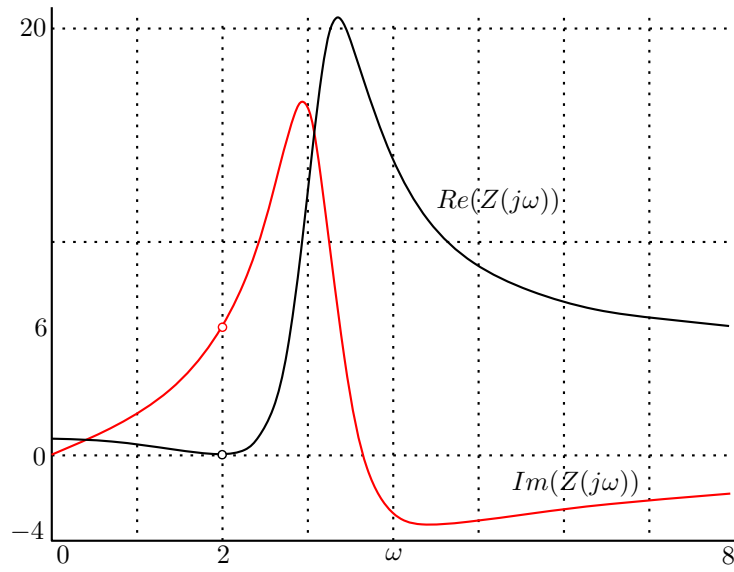


Figura 4.22: Partes real e imaginária da impedância.

$$Y''(s) = Y'(s) - \frac{2ks}{s^2 + 4}$$

$$2k = \frac{s^2 + 4}{s} Y'(s) \Big|_{s=\pm 2j} = \frac{1}{2}$$

$$Y''(s) = \frac{s^2 + s + 10}{-3(s - 2/3)(s^2 + 4)} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 4} = \frac{2.5(s^2 + 4)}{-3(s - 2/3)(s^2 + 4)} = \frac{-2.5}{3s - 2}$$

O que restou é a impedância $Z''(s) = 1/Y''(s)$:

$$Z''(s) = \frac{3s - 2}{-2.5} = -1.2s + 0.8$$

A realização tem então a forma da figura 4.23, com o transformador equivalente aos indutores mostrados.

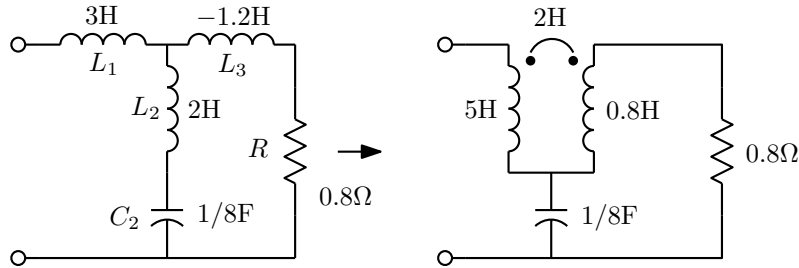


Figura 4.23: Exemplo de realização pelo ciclo de Brune.

Note-se que a indutância vista na entrada da rede em alta frequência vale $L_1 + L_2 // L_3 = 0$, implicando em $1/L_1 + 1/L_2 + 1/L_3 = 0$, o que sempre acontece. Um dos indutores, L_1 ou L_3 é sempre negativo.

4.1.3.2 Síntese de Bott e Duffin²

O uso de transformador não é obrigatório. Existe o método de Bott e Duffin [8], que obtém a realização sem o uso de transformador, às custas de uma rede não canônica usando pontes.

A idéia é obter uma realização através de uma associação em série (ou em paralelo) de duas redes de ordem igual, mas que não são imitâncias mínimas. A realização é baseada no teorema de Richards [9], que diz que se $Z(s)$ é uma função positiva real, e portanto uma imitância RLCM válida, a função $R(s)$ também o é:

$$R(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)}$$

Isto vale para qualquer valor real positivo de k , e o grau de $R(s)$ não é maior que o de $Z(s)$. Seja $Z(s)$ a impedância mínima a realizar. Ela pode ser expressa como:

$$Z(s) = \frac{kZ(k)R(s)}{k + sR(s)} + \frac{Z(k)s}{k + sR(s)} = \frac{1}{\frac{1}{Z(k)R(s)} + \frac{s}{kZ(k)}} + \frac{1}{\frac{k}{Z(k)s} + \frac{R(s)}{Z(k)}}$$

Esta realização corresponde à estrutura da figura 4.24, que é uma ponte equilibrada de quatro impedâncias, onde $Z_1(s) = Z(k)R(s)$ e $Z_2(s) = \frac{Z(k)}{R(s)}$.

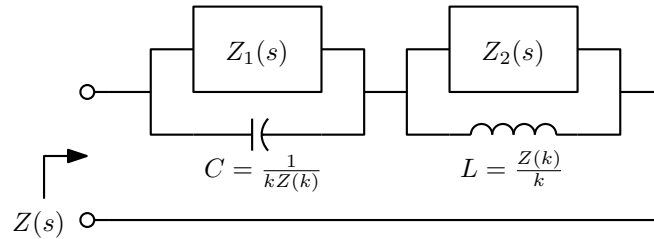


Figura 4.24: Estrutura da realização de Bott e Duffin.

Para que as impedâncias $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ sejam de mais simples realização que $Z(s)$, elas devem ter polos ou zeros no eixo imaginário, implicando na existência destes em $R(s)$. Sabe-se que $Z(s)$ tem parte real nula em ω_0 , e que $Z(j\omega_0) = jX(\omega_0)$. Existem dois casos, dependendo do sinal de $X(\omega_0)$. Se $X(\omega_0) > 0$ pode-se usar a definição de $R(s)$ para fazer com que $R(s)$ tenha zeros em $\pm j\omega_0$, escolhendo um valor adequado para a constante k a partir da equação:

$$kZ(j\omega_0) - j\omega_0 Z(k) = 0$$

Daí vem um polinômio em k , que deve ter uma raiz positiva real e raízes em $\pm j\omega_0$. Obtida k , a raiz real, o capacitor e o indutor da ponte estão determinados, e são positivos:

$$C = \frac{1}{kZ(k)} \quad L = \frac{Z(k)}{k}$$

Como $R(s)$ tem zeros em $\pm j\omega_0$, as duas outras impedâncias da ponte se expandem como:

²Formulação como no livro “Classical Circuit Theory”, de Omar Wing, 2008. Esta síntese não é normalmente detalhada no curso, mas é colocada aqui para completar o material.

$$\frac{1}{Z_1(s)} = \frac{1}{Z(k)R(s)} = \frac{2k_1s}{s_2 + \omega_0^2} + Y_3(s)$$

$$Z_2(s) = \frac{Z(k)}{R(s)} = \frac{2k_2s}{s_2 + \omega_0^2} + Z_4(s)$$

A realização tem então a forma da figura 4.25, onde as redes $Y_3(s)$ e $Z_4(s)$ tem dois graus a menos que $Z(s)$ e os elementos são:

$$L_1 = \frac{1}{2k_1} \quad C_1 = \frac{2k_1}{\omega_0^2} \quad L_2 = \frac{2k_2}{\omega_0^2} \quad C_2 = \frac{1}{2k_2}$$

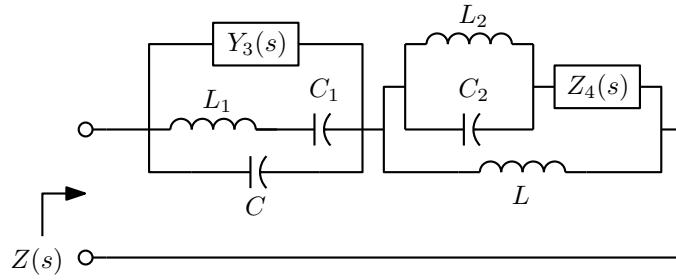


Figura 4.25: Estrutura da realização de Bott e Duffin quando $X(\omega_0) > 0$.

Quando $X(j\omega_0) < 0$, $R(s)$ deve ter um par de polos em $s = \pm j\omega_0$. Da definição de $R(s)$ vem a equação:

$$kZ(k) - j\omega_0 Z(j\omega_0) = 0$$

o que dá outro polinômio que tem uma raiz positiva k . As duas impedâncias $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são então:

$$Z_1(s) = Z(k)R(s) = \frac{2k_1s}{s_2 + \omega_0^2} + Z_3(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{R(s)}{Z(k)} = \frac{2k_2s}{s_2 + \omega_0^2} + Y_4(s)$$

A realização tem então a forma da figura 4.26, onde as redes $Z_3(s)$ e $Y_4(s)$ tem também dois graus a menos que $Z(s)$, e os elementos são:

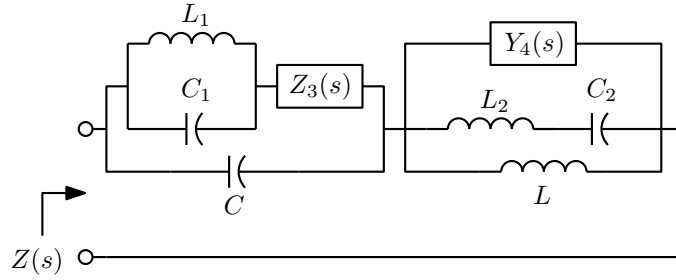
$$C_1 = \frac{1}{2k_1} \quad L_1 = \frac{2k_1}{\omega_0^2} \quad C_2 = \frac{2k_2}{\omega_0^2} \quad L_2 = \frac{1}{2k_2}$$

Exemplo: Seja realizar a mesma impedância realizada pelo método de Brune, $Z(s) = \frac{5s^2+18s+8}{s^2+s+10}$, que vale $Z(j\omega_0) = 6j$ para $\omega_0 = 2$. A primeira coisa a fazer é achar k :

$$kZ(j2) - j2Z(k) = 0 \Rightarrow 6k^3 - 4k + 24k - 16 = 0 \Rightarrow (k^2 + 4)(6k - 4) = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Precisa-se também de $Z(k) = \frac{5k^2+18k+8}{k^2+k+10} = 2$. Os elementos C e L já podem ser calculados como $C = \frac{1}{kZ(k)} = \frac{3}{4}\text{F}$ e $L = \frac{Z(k)}{k} = 3\text{H}$. A seguir calcula-se $R(s)$ como:

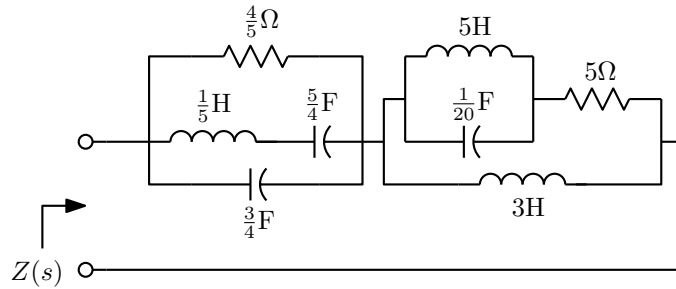
$$R(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)} = \frac{2(s^2 + 4)}{5s^2 + 20s + 20}$$

Figura 4.26: Estrutura da realização de Bott e Duffin quando $X(\omega_0) < 0$.

As duas impedâncias Z_1 e Z_2 são então calculadas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_1(s)} = Y_1(s) &= \frac{1}{Z(k)R(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{4(s^2 + 4)} = \frac{2k_1s}{s^2 + 4} + Y_3(s) = \frac{5s}{s^2 + 4} + \frac{5}{4} \\ Z_2(s) = \frac{Z(k)}{R(s)} &= \frac{5s^2 + 20s + 20}{s^2 + 4} = \frac{2k_2s}{s^2 + 4} + Z_4(s) = \frac{20s}{s^2 + 4} + 5 \end{aligned}$$

As expansões correspondem à rede da figura 4.27. Note-se que a rede é de ordem 6 realizando uma impedância de ordem 2. Existem quatro polos e quatro zeros extra cancelados. Existem outras soluções conhecidas para o problema da imitância mínima, mas são todas problemáticas, usando transformadores ideais ou muitos elementos.

Figura 4.27: Realização de Bott e Duffin para $Z(s) = \frac{5s^2 + 18s + 8}{s^2 + s + 10}$.

Exemplo: Para verificar a síntese quando $X(\omega_0) < 0$, seja realizar a impedância dual da realizada, $Z(s) = \frac{s^2 + s + 10}{5s^2 + 18s + 8}$, que vale $Z(j\omega_0) = -\frac{1}{6}j$ em $\omega_0 = 2$. Achando k :

$$kZ(k) - j2Z(j2) = 0 \Rightarrow k^3 - \frac{2}{3}k^2 + 4k - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow (k^2 + 4)(k - \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Achando então $Z(k) = \frac{k^2 + k + 10}{5k^2 + 18k + 8} = \frac{1}{2}$, tem-se $C = \frac{1}{kZ(k)} = 3F$ e $L = \frac{Z(k)}{k} = \frac{3}{4}H$, e $R(s)$ o inverso da anterior:

$$R(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{2(s^2 + 4)}$$

As duas impedâncias são então:

$$Z_1(s) = Z(k)R(s) = \frac{5s^2 + 20s + 20}{4(s^2 + 4)} = \frac{2k_1s}{s^2 + 4} + Z_3(s) = \frac{5s}{s^2 + 4} + \frac{5}{4}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{Z(k)}{R(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{s^2 + 4} = \frac{2k_2s}{s^2 + 4} + Y_4(s) = \frac{20s}{s^2 + 4} + 5$$

A realização é mostrada na figura 4.28. Note-se que não tem a forma da rede dual da rede da figura 4.27, mas como a estrutura é uma ponte equilibrada, pode-se redesenhar a estrutura na forma de duas redes em paralelo, com o indutor L em série com $Z_1(s)$ em paralelo com o capacitor C em série com $Z_2(s)$. Esta versão tem a estrutura correta para a rede dual.

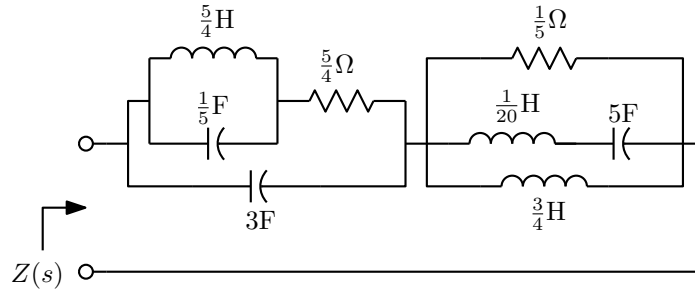


Figura 4.28: Realização de Bott e Duffin para $Z(s) = \frac{s^2 + s + 10}{5s^2 + 18s + 8}$.

4.1.3.3 Análogos mecânicos

Recentemente, houve uma volta ao interesse de encontrar realizações simples para imitâncias, com aplicação em problemas mecânicos usando análogos de redes elétricas, onde redes compostas de amortecedores, molas e “inerters” equivalem a redes RLC. A principal aplicação é em sistemas de suspensão para veículos. Neste análogo mecânico força equivale a corrente e velocidade a tensão. Considere-se V_1 e V_2 velocidades nos dois terminais do elemento mecânico, correspondendo a tensões v_1 e v_2 nos terminais do componente elétrico. Para um amortecedor pode-se escrever $F = c(V_1 - V_2)$, equivalendo a um resistor onde $i = (1/R)(v_1 - v_2)$. Para uma mola se escreve $\frac{dF}{dt} = K(V_1 - V_2)$, correspondendo a um indutor onde $\frac{di}{dt} = (1/L)(v_1 - v_2)$. E para o “inertor” se escreve $F = b \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}$, equivalendo a um capacitor onde $i = C \frac{d(v_1 - v_2)}{dt}$. O “inertor” é o equivalente mecânico do capacitor suspenso. Tem dois terminais mecânicos disponíveis, ao contrário do análogo usual neste caso, uma massa, que só tem um terminal disponível e equivale a um capacitor aterrado. Uma das formas de construir o “inertor” é com um disco montado em uma estrutura que é um dos terminais, que é girado por uma engrenagem plana, que é o outro terminal, ligada a uma pequena engrenagem circular em seu eixo.

4.2 Realização de funções de transferência na forma LC simplesmente terminada

Já foi vista uma forma para a construção de filtros simples, com o uso de redes de dois componentes. Esses filtros ficam entretanto restritos a terem polos reais ou imaginários, o que exclui filtros mais interessantes e úteis, com polos complexos. Em todos os casos, entretanto, é possível reduzir a síntese necessária à de uma imitância LC a ser ligada entre terminações resistivas na entrada e na saída. Existem dois casos simples, com a terminação resistiva na entrada e na saída, e o mais complexo, com duas terminações.

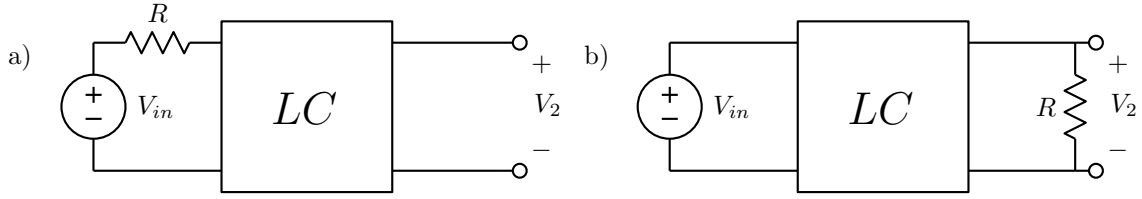


Figura 4.29: Filtros LC simplesmente terminados. a) Terminação na entrada. b) Terminação na saída.

4.2.1 Terminação na entrada

Observando a figura 4.29a, nota-se que a impedância vista após a terminação resistiva na entrada é de uma rede LC. Analisando com parâmetros Z :

$$\begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= V_1 \\ z_{12}I_1 + z_{22}I_2 &= V_2 \\ V_1 &= V_{in} - RI_1 \\ I_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= z_{21}I_1 \\ V_{in} &= (z_{11} + R)I_1 \\ \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{z_{21}}{R + z_{11}} \end{aligned}$$

O denominador da função de transferência do filtro é um polinômio de Hurwitz, com todos os coeficientes positivos, $D = D_o + D_e$, onde os sufixos denotam os coeficientes de ordem par (e , de “even”) e de ordem ímpar (o , de “odd”). O numerador da função de transferência tem raízes que são zeros formados pela rede LC, e portanto só pode ser puramente par ou ímpar, $N = N_e$ ou $N = N_o$. Um filtro passa-baixas com zeros de transmissão imaginários ou no infinito sempre tem numerador par, por exemplo. É possível então identificar os parâmetros da rede LC. Para o caso de numerador par:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{z_{21}}{R + z_{11}} = \frac{N_e}{D_o + D_e} \\ \frac{\frac{z_{21}}{R}}{1 + \frac{z_{11}}{R}} &= \frac{\frac{N_e}{D_o}}{1 + \frac{D_e}{D_o}} \\ \frac{z_{11}}{R} &= \frac{D_e}{D_o} \end{aligned}$$

E para o caso de numerador ímpar:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{z_{21}}{R + z_{11}} = \frac{N_o}{D_o + D_e} \\ \frac{\frac{z_{21}}{R}}{1 + \frac{z_{11}}{R}} &= \frac{\frac{N_o}{D_e}}{1 + \frac{D_o}{D_e}} \\ \frac{z_{11}}{R} &= \frac{D_o}{D_e} \end{aligned}$$

Basta então separar as partes par e ímpar do denominador e expandir sua razão, em uma ou outra forma dependendo da paridade de N , em uma forma que realize os zeros de transmissão desejados, que

são também os zeros de z_{12} . Um escalamento de nível de impedância pelo fator R obtém o z_{11} correto. Para um filtro polinomial passa-baixas, basta expandir z_{11} na primeira forma de Cauer, colocando a saída sobre o último elemento (capacitor em //). Para um filtro passa-altas seria usada a segunda forma de Cauer. Para filtros com zeros de transmissão em zero e no infinito, uma mistura das duas formas de Cauer obtém o circuito. Para filtros com zeros finitos de transmissão o procedimento é descrito mais adiante.

Exemplo: Seja gerar um filtro de Butterworth de terceira ordem, com corte de 3.01 dB em 1 kHz e terminação na entrada de 50 Ω . As especificações normalizadas para corte em 1 rad/s e 1 Ω de terminação geram a função de transferência:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Para terminação na entrada tem-se:

$$\frac{z_{11}(s)}{R} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

Esta impedância normalizada para $R = 1 \Omega$ e expandida na primeira forma de Cauer, com a saída sobre o último capacitor para formação dos 3 zeros de transmissão no infinito, fica na forma de figura 4.30a. Desnormalizando em frequência (para 1 kHz) e impedância (para 50 Ω) resulta a estrutura da figura 4.30b.

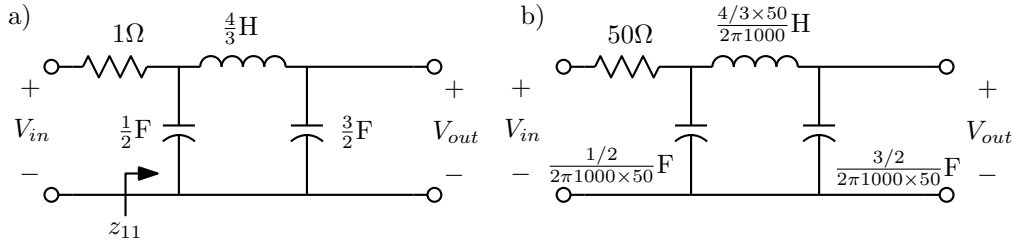


Figura 4.30: Terminação na entrada. a) Filtro normalizado. b) Filtro desnormalizado.

4.2.2 Terminação na saída

Observando a figura nota-se que a admitância vista antes da terminação resistiva na saída é de uma rede LC. Analisando com parâmetros Y:

$$\begin{aligned} y_{11}V_1 + y_{12}V_2 &= I_1 \\ y_{12}V_1 + y_{22}V_2 &= I_2 \\ V_1 &= V_{in} \\ I_2 &= -\frac{V_2}{R} \\ -\frac{V_2}{R} &= y_{21}V_{in} + y_{22}V_2 \\ \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{-y_{21}}{\frac{1}{R} + y_{22}} \end{aligned}$$

A forma obtida para y_{22} é similar à obtida para z_{11} no caso da terminação na entrada. Fazendo as mesmas comparações com a função de transferência de tensão, para numerador par tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_{in}} &= -\frac{y_{21}}{\frac{1}{R} + y_{11}} = \frac{N_e}{D_o + D_e} \\ \frac{-Ry_{21}}{1 + Ry_{22}} &= \frac{\frac{N_e}{D_o}}{1 + \frac{D_e}{D_o}} \\ Ry_{22} &= \frac{D_e}{D_o}\end{aligned}$$

E para o caso de numerador ímpar:

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_{in}} &= -\frac{y_{21}}{\frac{1}{R} + y_{11}} = \frac{N_o}{D_o + D_e} \\ \frac{-Ry_{21}}{1 + Ry_{22}} &= \frac{\frac{N_o}{D_e}}{1 + \frac{D_o}{D_e}} \\ Ry_{22} &= \frac{D_o}{D_e}\end{aligned}$$

A síntese é similar à do outro caso. Na verdade, gera a rede dual da que é ligada ao resistor no primeiro caso. Para o exemplo anterior, resulta:

$$Ry_{22}(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

As redes normalizada e desnormalizada são mostradas na figura 4.31. A entrada é colocada em série com o primeiro indutor para que sejam criados os 3 zeros de transmissão no infinito.

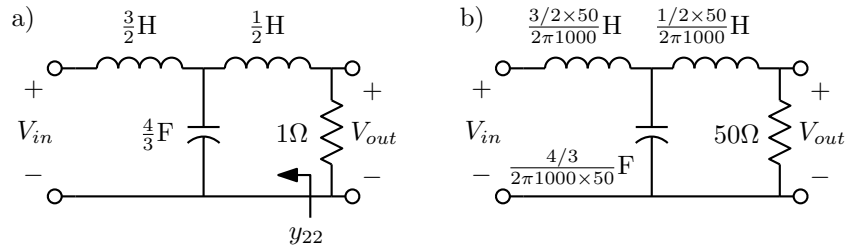


Figura 4.31: Terminação na saída. a) Filtro normalizado. b) Filtro desnormalizado.

4.3 Realização de zeros finitos de transmissão em redes “ladder”

Quando são necessários zeros de transmissão em pares imaginários conjugados, estes podem ser criados pela técnica de deslocamento de zeros por extração parcial de polos. Nesta técnica um bloco que criaria um polo de impedância ou admitância, ou um par conjugado, segundo as expansões de Foster, é extraído parcialmente, deixando o polo ou polos correspondentes ainda presentes na admitância, mas mudando de posição os zeros, inclusive um par imaginário que é movido para a posição dos zeros de transmissão a criar. Os zeros assim criados são então removidos por uma extração completa de um bloco da expansão da outra expansão de Foster. A forma mais comum, para filtros passa-baixas, é a utilização do polo no infinito para esta finalidade. Dois casos duais podem ser identificados, a forma “T” e a forma “ π ”.

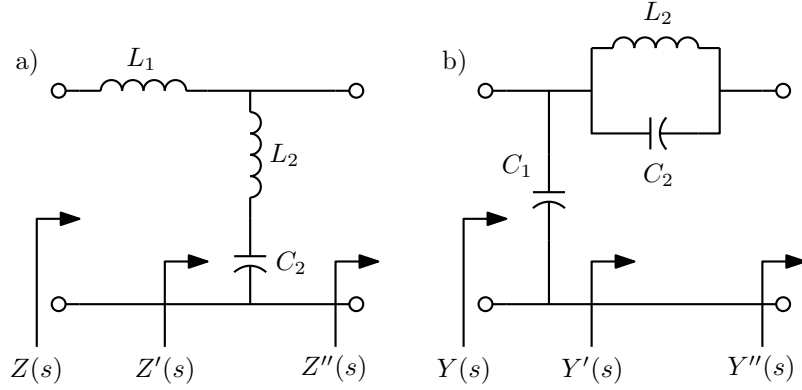


Figura 4.32: Criação de zeros finitos de transmissão. a) Forma T. b) Forma π .

Na forma T, a impedância $Z(s)$ tem polo no infinito, como visto na figura 4.32a. Faz-se o primeiro indutor ter toda a impedância vista na frequência ω_z dos zeros a criar.

$$Z(j\omega_z) = j\omega_z L_1 \Rightarrow L_1 = \frac{Z(j\omega_z)}{j\omega_z}$$

Esta operação é possível se $0 \leq L_1 \leq L_\infty$, onde L_∞ é o resíduo do polo no infinito, valor da indutância série que seria extraída na primeira forma de Foster para $Z(s)$. Se isto não ocorrer, em princípio a operação não pode ser feita.

Retirado L_1 , a impedância restante $Z'(s) = Z(s) - sL_1$ tem zeros em $\pm j\omega_z$, e a admitância $Y'(s) = 1/Z'(s)$ tem polos em $\pm j\omega_z$ que podem ser extraídos como uma seção da segunda forma de Foster, um tanque LC série em paralelo. A expansão de $Y'(s)$ na segunda forma de Foster seria:

$$Y'(s) = \dots + \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}$$

$$2k = Y'(s) \frac{s^2 + \omega_z^2}{s} \Big|_{s^2 = -\omega_z^2}$$

$$L_2 = \frac{1}{2k}; \quad C_2 = \frac{2k}{\omega_z^2}$$

A admitância restante $Y''(s)$ e a impedância correspondente $Z''(s)$ valem:

$$Y''(s) = Y'(s) - \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}; \quad Z''(s) = \frac{1}{Y''(s)}$$

A impedância $Z''(s)$ ainda tem polo no infinito, e o processo pode ser repetido para a criação de outro par de zeros, se o grau da impedância, que cai dois graus com a operação, ainda permitir.

A forma π é exatamente o dual. Repetindo as mesmas operações com dualização, a admitância $Y(s)$ tem polo no infinito, como visto na figura 4.32b. Faz-se o primeiro capacitor ter toda a admitância vista na frequência ω_z dos zeros a criar.

$$Y(j\omega_z) = j\omega_z C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{Y(j\omega_z)}{j\omega_z}$$

Esta operação é possível se $0 \leq C_1 \leq C_\infty$, onde C_∞ é o resíduo do polo no infinito, valor da capacitância em paralelo que seria extraída na segunda forma de Foster para $Y(s)$. Se isto não ocorrer, em princípio a operação não pode ser feita.

Retirado C_1 , a admitância restante $Y'(s) = Y(s) - sC_1$ tem zeros em $\pm j\omega_z$, e a impedância $Z'(s) = 1/Y'(s)$ tem polos em $\pm j\omega_z$ que podem ser extraídos como uma seção da primeira forma de Foster, um tanque LC paralelo em série. A expansão de $Z'(s)$ na primeira forma de Foster seria:

$$\begin{aligned} Z'(s) &= \cdots + \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2} \\ 2k &= Z'(s) \left. \frac{s^2 + \omega_z^2}{s} \right|_{s^2 = -\omega_z^2} \\ C_2 &= \frac{1}{2k}; \quad L_2 = \frac{2k}{\omega_z^2} \end{aligned}$$

A impedância restante $Z''(s)$ e a admitância correspondente $Y''(s)$ valem:

$$Z''(s) = Z'(s) - \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}; \quad Y''(s) = \frac{1}{Z''(s)}$$

A admitância $Y''(s)$ ainda tem polo no infinito, e o processo pode ser repetido para a criação de outro par de zeros, se o grau da impedância, que cai dois graus com a operação, ainda permitir.

As estruturas resultantes ficam com as formas características T ou π como na figura 4.33. Em uma realização prática a forma π seria preferível, devido ao número menor de indutores. Para uma simulação ativa por equações de estado as redes resultantes são idênticas. É possível também usar outras extrações parciais de polos, como extração do polo em zero (resultam capacitores em série e indutores em paralelo entre os tanques, como em filtros passa-altas gerados por transformação de frequência) ou mesmo pares de polos imaginários, resultando uma estrutura com apenas tanques LC em série e em paralelo. Este último caso é pouco prático, e não pode ser usado com filtros duplamente terminados, pois os divisores de impedâncias nulas ou infinitas em frequências finitas que o método gera não ficam corretos quando as terminações estão presentes. As formas como as mostradas na figura 4.33 realizam também um zero de transmissão no infinito, criados pelo último indutor em série ou pelo primeiro capacitor em //. Formas simplesmente terminadas poderiam omitir estes elementos, e então não ter zeros no infinito (teriam também um grau a menos na função de transferência).

Exemplo: Para um exemplo bastante completo, seja a realização na forma simplesmente terminada com terminação na saída, nas formas T e π , da função de transferência de tensão:

$$T(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{11s^5 + 8s^4 + 27s^3 + 13s^2 + 12s + 4}$$

Identificando os parâmetros Y, para a realização com terminação na saída primeiramente:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{N_e(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{N_e(s)/D_o(s)}{D_e(s)/D_o(s) + 1} = \frac{-Y_{21}(s)}{Y_{22}(s) + 1} \\ -Y_{21}(s) &= \frac{N_e(s)}{D_o(s)} = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{11s^5 + 27s^3 + 12s}; \quad \text{Zeros a realizar: } \infty, \pm j, \pm 2j \\ Y_{22}(s) &= \frac{D_e(s)}{D_o(s)} = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{11s^5 + 27s^3 + 12s} \end{aligned}$$

A rede que realiza estes parâmetros pode ser prevista neste ponto, como a forma T da figura 4.34. Tentando a realização dos zeros em $\pm j$ com a extração de L_1 :

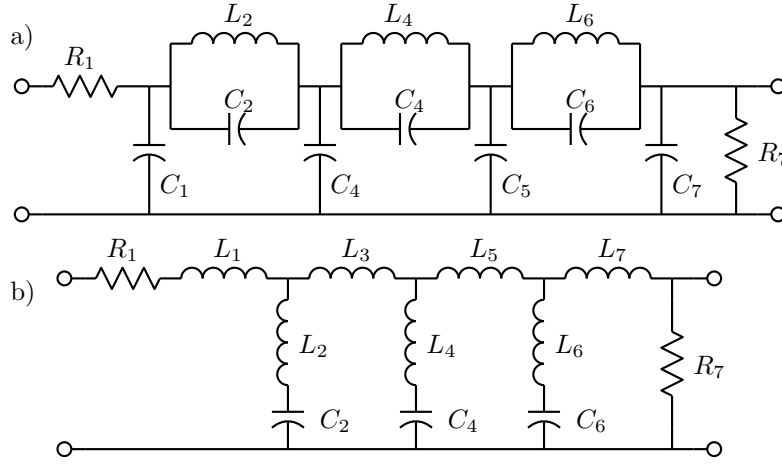


Figura 4.33: Filtros passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 7. a) Forma π . b) Forma T.

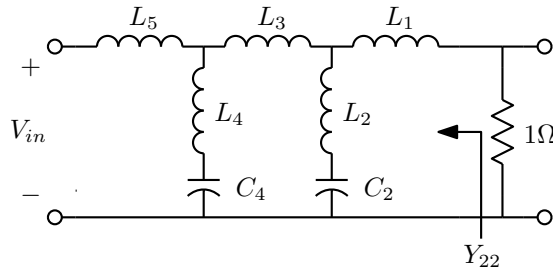


Figura 4.34: Previsão da estrutura para o filtro na forma T com terminação na saída.

$$\frac{1}{Y_{22}}(j) = jL_1 = j \frac{11 - 27 + 12}{8 - 13 + 4} = 4j \Rightarrow L_1 = 4H.$$

Mas observando $\frac{1}{Y_{22}}(s)$ em frequência infinita, $L_\infty = \frac{11}{8}$, e com $L_1 > L_\infty$ a extração não é possível. Tentando então a realização dos zeros de maior frequência, em $\pm j2$:

$$\frac{1}{Y_{22}}(2j) = 2jL_1 = j \frac{11 \times 32 - 27 \times 8 + 12 \times 2}{8 \times 16 - 13 \times 4 + 4} = 2j \Rightarrow L_1 = 1H.$$

Como $L_1 < \frac{11}{8}$ a extração é possível. Extraíndo L_1 pela extração parcial do polo no infinito de $\frac{1}{Y_{22}}(s)$:

$$\frac{1}{Y'_{22}}(s) = \frac{11s^5 + 27s^3 + 12s}{8s^4 + 13s^2 + 4} - s = \frac{3s^5 + 14s^3 + 8s}{8s^4 + 13s^2 + 4}$$

onde se observa que o polo no infinito não desapareceu, pois o indutor removido apenas reduziu seu resíduo.

$Y'_{22}(s)$ tem agora polos em $\pm 2j$ criados na extração de L_1 , que podem ser removidos:

$$Y''_{22}(s) = Y'_{22}(s) - \frac{2ks}{s^2 + 4} = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{(s^2 + 4)(3s^3 + 2s)} - \frac{2ks}{s^2 + 4}$$

$$2k = \frac{s^2 + 4}{s} Y'_{22}(s) \Big|_{s^2=-4} = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{s(3s^3 + 2s)} \Big|_{s^2=-4} = 2$$

$$Y''_{22}(s) = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{(s^2 + 4)(3s^3 + 2s)} - \frac{2s}{s^2 + 4} = \frac{2s^4 + 9s^2 + 4}{(s^2 + 4)(3s^3 + 2s)} = \frac{2s^2 + 1}{3s^3 + 2s}$$

O tanque LC extraído tem admitância $\frac{2s}{s^2+4} \Rightarrow L_2 = 0.5\text{H}; \quad C_2 = 0.5\text{F}$.

Agora podem ser criados os zeros em $\pm j$ com a extração de L_3 de $\frac{1}{Y''_{22}}$:

$$\frac{1}{Y''_{22}}(j) = jL_3 = j \frac{-3+2}{-2+1} = j \Rightarrow L_3 = 1\text{H}.$$

A realização é possível, já que $L_3 < L_\infty = \frac{3}{2}$. Realizando a extração:

$$\frac{1}{Y'''_{22}(s)} = \frac{1}{Y''_{22}(s)} - sL_3 = \frac{3s^3 + 2s}{2s^2 + 1} - s = \frac{s^3 + s}{2s^2 + 1}$$

$Y'''_{22}(s)$ tem polos em $\pm j$ como desejado. O final da rede pode ser diretamente identificado:

$$Y'''_{22}(s) = \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s} \Rightarrow L_4 = 1\text{H}; \quad C_4 = 1\text{H}; \quad L_5 = 1\text{H}$$

e a rede final é a da figura 4.35.

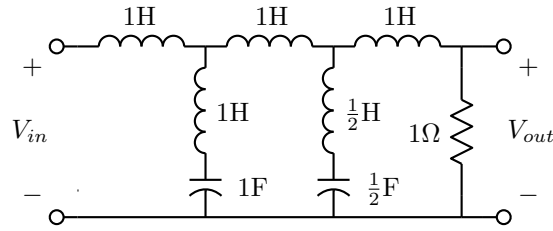


Figura 4.35: Filtro normalizado na forma T com terminação na saída.

Para realizar o mesmo filtro na forma π é necessário primeiramente remover o polo de $\frac{1}{Y_{22}}$ no infinito como indutor em série, para gerar uma admitância com polo no infinito, como requerido pela estrutura. A previsão da estrutura é então como na figura 4.36. Notar que esta estrutura só é possível assim porque o filtro é simplesmente terminado. Um resistor de terminação na entrada aumentaria a ordem para 6.

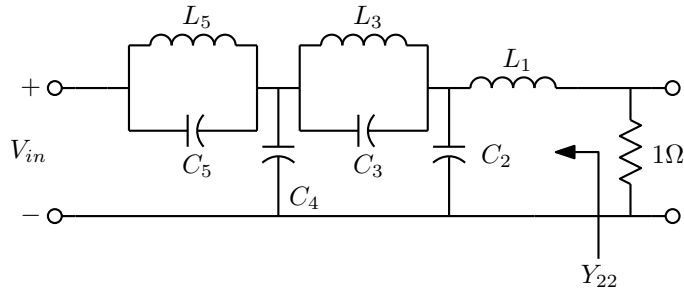


Figura 4.36: Previsão da estrutura para o filtro normalizado na forma π com terminação na saída.

Extraindo então o polo no infinito de $\frac{1}{Y_{22}(s)}$:

$$L_1 = k_\infty = \left. \frac{1}{sY_{22}(s)} \right|_{s \rightarrow \infty} = \frac{11}{8} \text{H}$$

$$\frac{1}{Y'_{22}(s)} = \frac{1}{Y_{22}(s)} - sL_1 = \frac{11s^5 + 27s^3 + 12s}{8s^4 + 13s^2 + 4} - \frac{11}{8}s = \frac{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s}{8s^4 + 13s^2 + 4}$$

A seguir deve ser criado um dos pares de zeros de transmissão. Seja o de frequência mais alta em $\pm 2j$.

$$Y'_{22}(2j) = 2jC_2 = -j \frac{8 \times 16 - 13 \times 4 + 4}{-\frac{73}{8} \times 8 + \frac{13}{2} \times 2} = j \frac{4}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3} \text{F}$$

A extração é possível pois $C_2 < C_\infty = \frac{64}{73}$ e é positivo. Extraíndo C_2 :

$$Y''_{22}(s) = Y_{22}(s) - sC_2 = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s} - \frac{2}{3}s = \frac{\frac{23}{12}s^4 + \frac{26}{3}s^2 + 4}{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s}$$

O numerador tem agora obrigatoriamente o fator $s^2 + 4$. Extraíndo os polos de $\frac{1}{Y''_{22}(s)}$ em $\pm 2j$, o resíduo vale:

$$2k = \left. \frac{1}{Y''_{22}(s)} \frac{s^2 + 4}{s} \right|_{s^2 = -4} = \frac{\frac{73}{8} \times (-4) + \frac{13}{2}}{\frac{23}{12} \times (-4) + 1} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{Y'''_{22}(s)} = \frac{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s}{(s^2 + 4)(\frac{23}{12}s^2 + 1)} - \frac{\frac{9}{2}s}{s^2 + 4} = \frac{\frac{1}{2}s^3 + 2s}{(s^2 + 4)(\frac{23}{12}s^2 + 1)} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{23}{12}s^2 + 1}$$

O tanque extraído tem impedância $\frac{9/2s}{s^2+4} \Rightarrow L_3 = \frac{9}{8} \text{H}$; $C_3 = \frac{2}{9} \text{F}$.
Extraíndo agora C_4 para criar os zeros em $\pm j$:

$$Y'''_{22}(j) = jC_4 = -j \frac{-\frac{23}{12} + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{6} \Rightarrow C_4 = \frac{11}{6} \text{F}$$

O que resta é a admitância abaixo, apenas um tanque LC:

$$Y'''_{22} = Y'''_{22} - sC_4 = \frac{\frac{23}{12}s^2 + 1}{\frac{1}{2}s} - \frac{11}{6}s = \frac{s^2 + 1}{\frac{1}{2}s} \Rightarrow L_5 = \frac{1}{2} \text{H}; \quad C_5 = 2 \text{F}$$

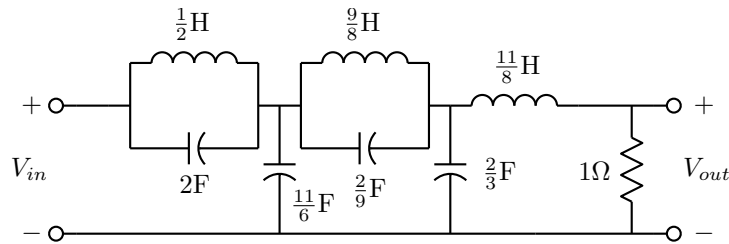


Figura 4.37: Filtro normalizado na forma π com terminação na saída.

É interessante notar o que acontece com os zeros de uma imitância quando os zeros são deslocados por uma extração parcial do polo no infinito. No exemplo anterior, na figura 4.34, $\frac{1}{Y_{22}(s)}$ tinha:

Zeros: $0, \pm 0.763j, \pm 1.368j$

Polos: $\pm 0.642j, \pm 1.101j, \infty$

Com a extração parcial do polo no infinito (L_1 na forma T) a impedância muda para $\frac{1}{Y_{22}(s)} - L_1 s$. Os polos são os mesmos, mas os zeros se movem para maior frequência, como mostrado no comportamento da reatância $X_{22}(\omega) = \frac{1}{jY_{22}(j\omega)}$ na figura 4.38, sem ultrapassar o polo imediatamente acima.

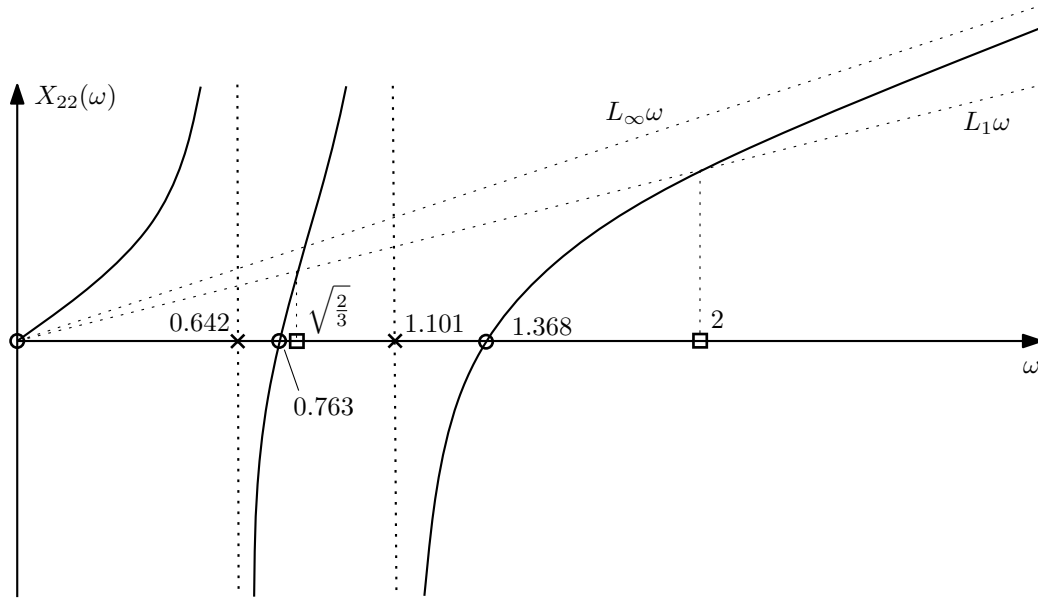


Figura 4.38: Deslocamento de zeros por extração parcial do polo no infinito.

Observa-se então que a realização dos zeros em $\pm j$ exigiria um movimento dos zeros em $\pm 0.763j$ até bem próximo dos polos em $\pm 1.101j$, requerendo $L_1 > L_\infty$, enquanto que a realização de zeros acima de $\pm 1.368j$ é sempre possível com $L_1 < L_\infty$. Um mapa completo mostrando o efeito de cada operação pode ser feito como na figura 4.39.

A segunda realização segue o mapa da figura 4.40. A extração do polo no infinito de $\frac{1}{Y_{22}}$ cria polo no infinito em Y'_{22} . A partir daí é montada a rede π .

4.4 Realização de funções de transferência na forma LC duplamente terminada

Filtros passivos são praticamente sempre projetados na forma duplamente terminada, pois esta forma simplifica a conexão ao restante do circuito, e porque estas redes podem apresentar características de sensibilidade à variação dos parâmetros bem menores que outras formas de realização. Mesmo na construção de filtros ativos, as formas de mais baixa sensibilidade são simulações de filtros passivos duplamente terminados.

O argumento sobre sensibilidade [6] vem da observação de que, em uma rede duplamente terminada é possível ter máxima transferência de potência para a terminação de saída nas frequências onde o módulo da função de transferência é máximo. Em um filtro passa-baixas como os da figura 3.11, com terminações

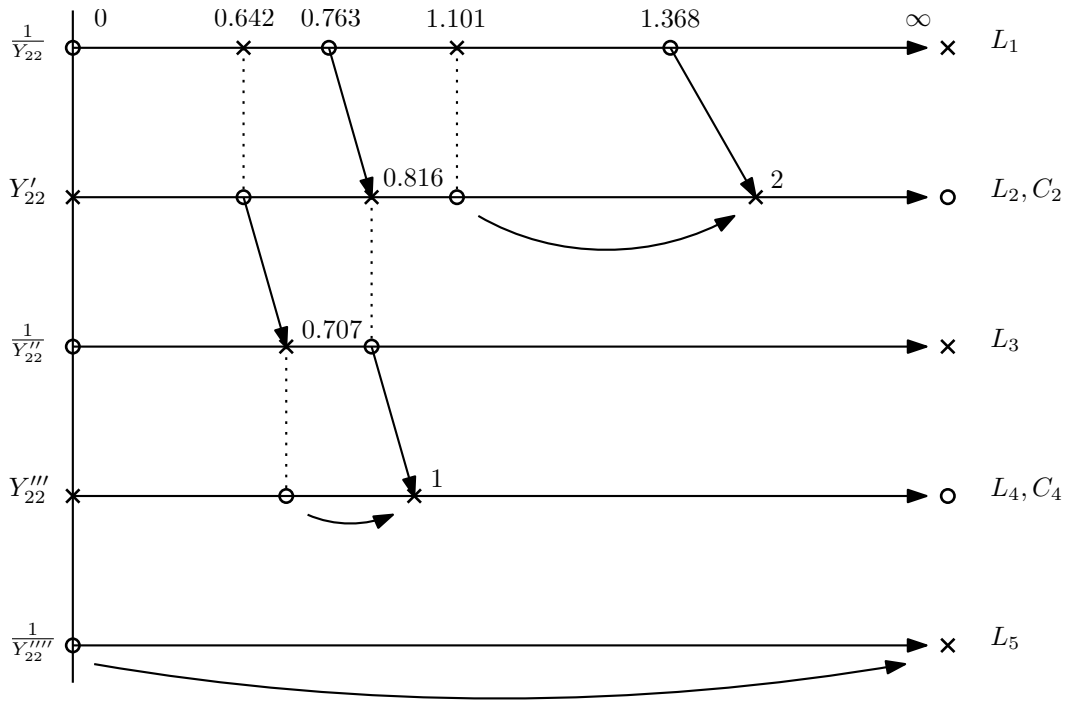


Figura 4.39: Mapa dos deslocamentos de zeros e extrações para a forma T do exemplo.

iguais R ocorre máxima transferência de potência em frequência zero, onde o filtro se reduz a um divisor resistivo com ganho 0.5. Como a potência sobre o resistor de saída não pode ser maior do que a obtida na máxima transferência de potência, $V_{in}^2/(4R)$, os máximos em frequências acima de zero que ocorrem nas aproximações de Chebyshev e elíptica não podem ter ganho maior que 0.5. E nestas aproximações todos os máximos são iguais. Ocorre então máxima transferência de potência em todos os máximos de ganho. Nas aproximações de Butterworth e Chebyshev inversa, ocorre um “máximo múltiplo” de ganho em frequência zero, como se os vários máximos das outras aproximações se juntassem todos ali. Os elementos reativos que formam o circuito entre as terminações são sem perdas, não dissipando nem gerando energia, e então não afetam o valor dos máximos de ganho. Então, se em uma das frequências de máxima transferência de potência ocorrer um erro no valor de um elemento reativo, o ganho não pode aumentar, e fica menor para qualquer direção do erro, para mais ou para menos. Assim, para uma função de transferência $T(s)$:

$$\frac{\partial |T(j\omega)|}{\partial L_i, C_i, M_i} = 0$$

Como estas derivadas são funções contínuas, e existem vários máximos próximos (ou um máximo múltiplo), a influência de erros nos valores dos elementos reativos é pequena em toda a banda passante do filtro.

Nota: A medida chamada de “sensibilidade” é uma medida relativa, dividindo-se a variação da função de transferência pela variação de um parâmetro. A sensibilidade do módulo da função de transferência em relação à variação de um parâmetro x_i é então:

$$S_{x_i}^{|T(j\omega)|} = \frac{x_i}{|T(j\omega)|} \frac{\partial |T(j\omega)|}{\partial x_i}$$

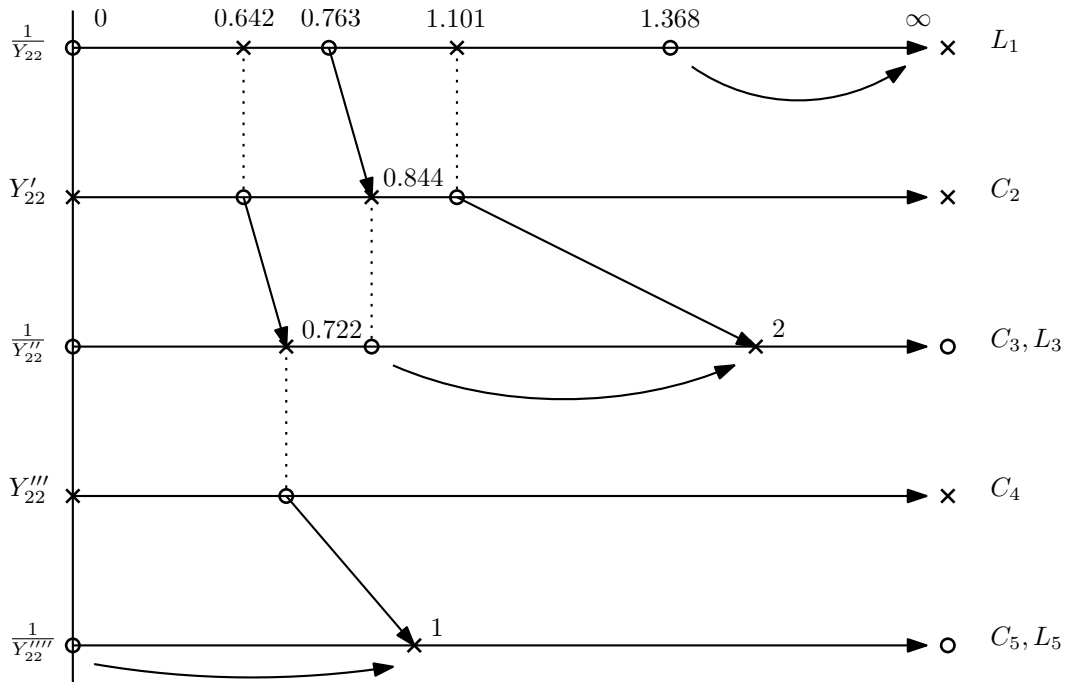


Figura 4.40: Mapa dos deslocamentos de zeros e extrações para a forma π do exemplo.

Estas medidas dão números que devem ser menores que 1 para que não haja amplificação de erro. No caso, ficam próximas de zero na banda passante do filtro para os elementos reativos, sendo zero nos máximos de ganho, e dão valores próximos de ± 0.5 para as terminações, com exatamente este valor nos máximos de ganho. Uma discussão mais completa sobre análise de sensibilidades está em um capítulo adiante³.

4.4.1 Síntese de redes simétricas⁴

Uma forma relativamente simples de obter uma rede LC duplamente terminada aparece quando a rede admite uma estrutura fisicamente simétrica. Dividindo a rede em duas metades idênticas, com o uso de equivalente Norton na entrada, já que se supõe entrada e saída em tensão, como na figura 4.41, pode-se escrever, para o bloco da esquerda:

$$1) \quad z_{11}I + z_{12}I_x = V_1$$

$$2) \quad z_{21}I + z_{22}I_x = V_x$$

e para o bloco da direita:

$$3) \quad z_{11}0 - z_{12}I_x = V_o$$

$$4) \quad z_{21}0 - z_{22}I_x = V_x$$

Combinando 3) com 4):

$$5) \quad V_x = \frac{z_{22}}{z_{12}}V_o$$

³Material opcional.

⁴As seções seguintes não são usualmente estudadas no curso, mas são colocadas aqui para complementar o assunto.

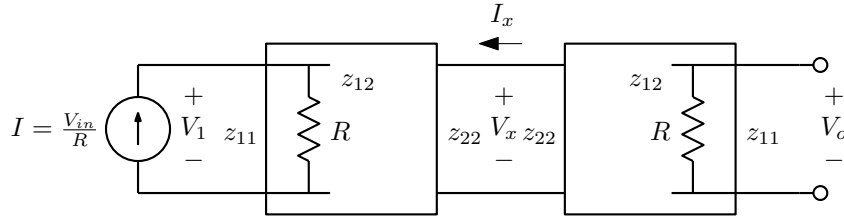


Figura 4.41: Rede simétrica partida em duas metades iguais.

Substituindo 5) e 3) em 2):

$$z_{21}I = \left(\frac{z_{22}}{z_{12}} + \frac{z_{22}}{z_{12}} \right) V_o \Rightarrow V_o = \frac{z_{21}z_{12}}{2z_{22}}I$$

Como a rede é recíproca, $z_{12} = z_{21}$, e como $I = \frac{V_{in}}{R}$, resulta:

$$T(s) = \frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{z_{12}^2}{2Rz_{22}}$$

Escrevendo $z_{12} = \frac{N_{12}}{D}$ e $z_{22} = \frac{N_{22}}{DD'}$, onde D' tem como raízes os possíveis polos privados de z_{22} (que pertencem só a z_{22} e não nos demais parâmetros z , causados por um ramo em série na porta 2, no centro da rede), tem-se:

$$T(s) = \frac{N_{12}^2 D'}{2RN_{22}D}$$

de onde se conclui que:

- Os polos de $T(s)$ são os zeros e os polos não privados de z_{22} .
- Cada zero de z_{12} causa dois zeros em $T(s)$.
- polos privados de z_{22} criam zeros simples em $T(s)$.

A primeira propriedade diz que para se obter a impedância de meia rede z_{22} basta separar os polos de $T(s)$ em polos e zeros de uma impedância RLCM realizável. A impedância deve então ser expandida de forma a criar os zeros desejados, todos duplos. Zeros simples podem ser gerados pelo polinômio $D'(s)$, como circuito inicial em série com a impedância.

Exemplo: Seja obter um filtro de Butterworth de 3a. ordem normalizado, com corte de 3.0103 dB em 1 rad/s. A função de transferência necessária é:

$$T(s) = \frac{k}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

A impedância de meia rede pode ser então de duas formas, com $R = 1 \Omega$:

$$Z_a(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$Z_b(s) = \frac{s^2+s+1}{s+1}$$

A expansão destas impedâncias pode ser feita pelo método “chop-chop”, extraindo-se o que é visto em frequência infinita. No caso, é evidente que as impedâncias podem ser escritas como:

$$Z_a(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{s+1}}$$

$$Z_b(s) = s + \frac{1}{s+1}$$

o que corresponde às impedâncias e redes completas mostradas na figura 4.42.

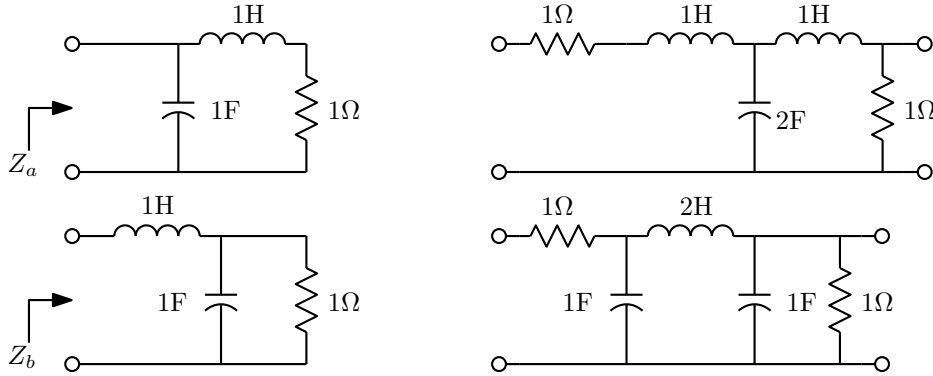


Figura 4.42: Redes simétricas realizando um filtro de Butterworth.

Este método gera os filtros polinomiais de ordem ímpar com zeros de atenuação sobre o eixo imaginário diretamente na forma de redes LC terminadas em resistores. Todos os filtros de Butterworth e de Chebyshev duplamente terminados de ordem ímpar, por exemplo, podem ser obtidos assim. A escolha correta dos polos e zeros da impedância de meia rede sobre um arco de polos parece ser sempre de forma alternada, como na figura 4.43. Para outras aproximações, o processo pode permitir outras soluções, a partir de várias distribuições de polos e zeros gerando impedâncias válidas. Como é possível colocar um tanque LC no centro da rede para ter o polinômio D' , é possível obter também filtros com um par de zeros de transmissão imaginários, como os filtros elípticos ou de Chebyshev inversos de ordem 3. Outras aproximações com zeros finitos de transmissão, de ordem mais alta, exigem zeros duplos.

Nos casos em que existe a realização simétrica LC duplamente terminada, os parâmetros Z da rede LC podem ser obtidos. Uma rede de duas portas ligada a um resistor na porta 2, apresenta a impedância vista pela porta 1:

$$Z_{metade}(s) = \frac{D_z/R + z_{11}}{z_{22}/R + 1}$$

onde $D_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$. Comparando com a impedância de meia rede montada com os polos da função de transferência, que deve resultar em uma razão de polinômios completos (com raízes no SPLE), surgem duas possíveis identificações:

$$Z_{metade}(s) = \frac{N_o + N_e}{D_e + D_o} = \frac{N_o/D_o + N_e/D_o}{D_e/D_o + 1}$$

$$Z_{metade}(s) = \frac{N_e + N_o}{D_o + D_e} = \frac{N_e/D_e + N_o/D_e}{D_o/D_e + 1}$$

de onde surgem duas possíveis identificações:

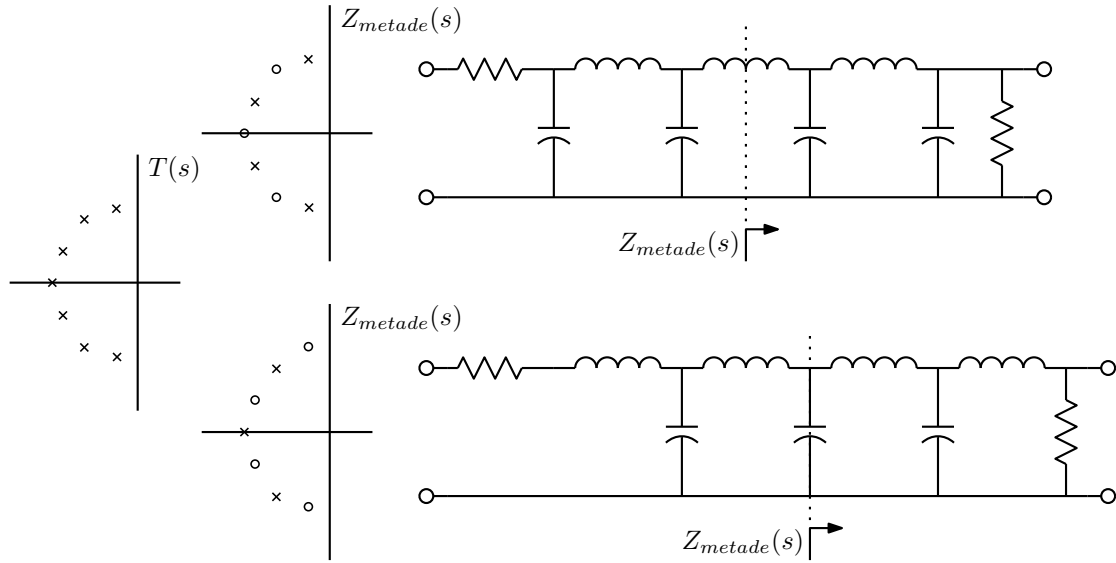


Figura 4.43: Escolhas dos polos e zeros para montar a impedância de meia rede um filtro polinomial de 7a. ordem.

$$\begin{aligned} z_{11} &= N_e/D_o; & z_{22} &= RD_e/D_o \\ z_{11} &= N_o/D_e; & z_{22} &= RD_o/D_e \end{aligned}$$

Qual a correta depende da topologia escolhida. Note-se que ainda deve ocorrer que $D_z/R = N_o/D_o$ ou $D_z/R = N_e/D_e$. Nada garante que estas impedâncias sejam realizáveis, pois as partes pares e ímpares vem de polinômios diferentes. No exemplo do filtro de Butterworth anterior, se $Z_a = (s+1)/(s^2+s+1)$ for usada, tem-se que a identificação correta é a primeira, $z_{11} = N_e/D_o = 1/s$ e $z_{22} = D_e/D_o = (s^2+1)/s$. Se for usada $Z_b = (s^2+s+1)/(s+1)$, a identificação correta é a mesma, $z_{11} = N_e/D_o = (s^2+1)/s$ e $z_{22} = D_e/D_o = 1/s$.

4.4.1.1 Redes simétricas com níveis de impedância diferentes nas duas metades

Observando a dedução acima, e a modificando de forma que os parâmetros Z da rede do lado direito da figura 4.41 sejam multiplicados por um fator k , chega-se à conclusão de que a função de transferência vale:

$$T(s) = \frac{N_{12}^2 D'}{\frac{k+1}{k} R N_{22} D}$$

A síntese é então idêntica à descrita no caso simétrico, apenas com o nível de impedância da metade direita, inclusive a terminação, multiplicado por k . Resulta um filtro idêntico ao simétrico, com ganho multiplicado por $\frac{2k}{k+1}$. Estas redes não tem mais máxima transferência de potência, no caso LC duplamente terminado, e é então de se esperar que apresentem maiores sensibilidades à variação dos componentes.

Exemplo: O filtro de Butterworth normalizado da figura 4.42 com terminação de saída arbitrária R_l fica com a forma da figura 4.44.

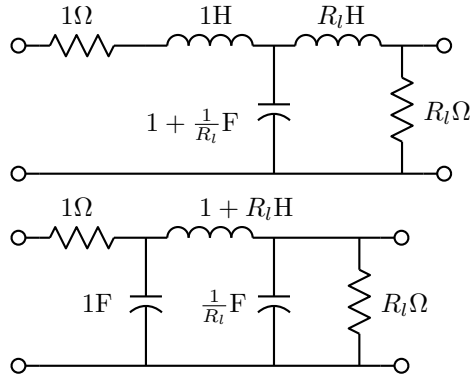


Figura 4.44: Filtros de Butterworth normalizados de ordem 3 com terminação de saída arbitrária.

Note-se que existem outras soluções, como se verá adiante. Esta forma não se reduz à realização simplesmente terminada.

4.4.2 Síntese de redes antimétricas

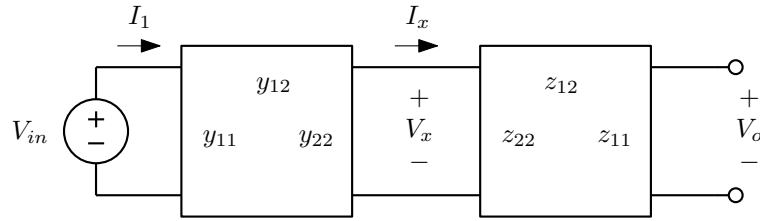


Figura 4.45: Rede antimétrica partida em duas metades duais.

Uma forma similar a esta leva à realização de redes antimétricas, onde uma metade é a dual da outra, de ordem par (figura 4.45). Considerando também $z_{12} = -y_{12} = \frac{N_{12}}{D}$ e $z_{22} = y_{22} = \frac{N_{22}}{DD'}$, para o bloco da esquerda pode-se escrever:

$$\begin{aligned} y_{11}V_{in} + y_{12}V_x &= I_1 \\ y_{12}V_{in} + y_{22}V_x &= -I_x \end{aligned}$$

o que corresponde a fazer, pela dualidade:

$$\begin{aligned} z_{11}V_{in} - z_{12}V_x &= I_1 \\ -z_{12}V_{in} + z_{22}V_x &= -I_x \end{aligned}$$

e para o bloco da direita:

$$\begin{aligned} z_{11}0 + z_{12}I_x &= V_o \\ z_{21}0 + z_{22}I_x &= V_x \end{aligned}$$

Combinando estas relações, a função de transferência fica com a forma:

$$T(s) = \frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{z_{12}^2}{1 + z_{22}^2} = \frac{N_{12}^2 D'^2}{N_{22}^2 + (DD')^2}$$

de onde se conclui que:

- polos privados de z_{22} são zeros duplos de $T(s)$.
- Zeros de z_{12} são zeros duplos de $T(s)$.
- Se $Z_{metade} = A/B$, $T(s)$ tem como polos as raízes de $A^2 + B^2 = (A + jB)(A - jB)$.

A impedância de meia rede é então obtida montando-se o polinômio complexo $A + jB$, ou $A - jB$, a partir de uma raiz de cada par de polos complexos de T , que deve possuir apenas pares de polos complexos para ser realizável desta forma. A impedância a expandir é $Z_{metade} = A/B$. A escolha correta das raízes em um arco de polos é também de forma alternada, começando pelo polo de parte imaginária mais negativa, para gerar B positivo, como mostrado na figura 4.46. Esta forma realiza corretamente todos os filtros polinomiais de ordem par com zeros de atenuação no eixo imaginário, como os filtros de Butterworth e de Chebyshev. Nestes casos também é possível obter os parâmetros da rede LC, da mesma forma feita no caso simétrico.

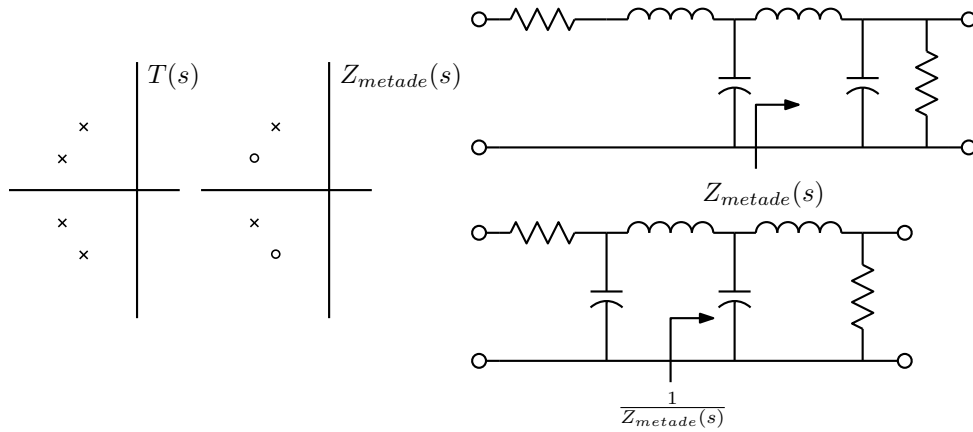


Figura 4.46: Escolha dos polos e zeros para montar a impedância de meia rede em uma rede antissimétrica de 4a. ordem.

Exemplo: Seja obter um filtro de Butterworth de 4a. ordem normalizado, com corte de 3.0103 dB em 1 rad/s. Os polos a realizar estão sobre um círculo de raio unitário, separados por ângulos de 45° :

$$p_{1,2} = -\cos 67.5^\circ \pm j \sin 67.5^\circ = -a_1 \pm jb_1$$

$$p_{3,4} = -\cos 22.5^\circ \pm j \sin 22.5^\circ = -a_2 \pm jb_2$$

O polinômio $A + jB$ vale então:

$$A + jB = (s + a_1 + jb_1)(s + a_2 - jb_2) = s^2 + (a_1 + a_2)s + a_1a_2 + b_1b_2 + j((b_1 - b_2)s + a_2b_1 - a_1b_2)$$

e a impedância de meia rede vale:

$$Z_{metade}(s) = \frac{s^2 + (a_1 + a_2)s + a_1a_2 + b_1b_2}{(b_1 - b_2)s + a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{s^2 + 1.3066s + 0.70711}{0.54120s + 0.70711}$$

A realização é facilmente obtida por expansão em fração contínua. A rede obtida e sua dual são então combinadas como na figura 4.47.

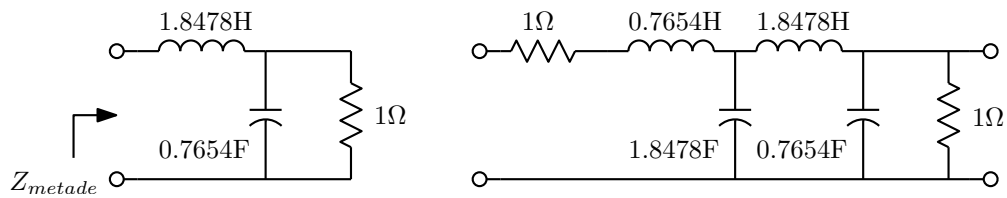


Figura 4.47: Rede antimétrica realizando um filtro de Butterworth de 4a. ordem.

4.4.3 Forma geral da síntese de redes LC duplamente terminadas

A forma geral da síntese, sem exigir simetria ou antimetria, recai também na obtenção dos parâmetros Z ou Y da rede LC, como no caso simplesmente terminado, e em expansão das impedâncias geradas. A dedução do processo [11], um tanto longa, está ligada à teoria das aproximações, envolvendo duas funções:

- A função de transdução $H(s)$, que é o inverso da função de transferência a realizar, escalada para que $\min |H(j\omega)| = 1$.
- A função característica $K(s)$, relacionada com $H(s)$ pela “equação de Feldtkeller”, $|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$, ou $H(s)H(-s) = 1 + K(s)K(-s)$.

As duas funções possuem o mesmo denominador $P(s)$, cujas raízes são os zeros finitos de transmissão a realizar. Assim, $H(s) = E(s)/P(s)$ e $K(s) = F(s)/P(s)$, e a relação entre os três polinômios, da equação de Feldtkeller, é $E(s)E(-s) = P(s)P(-s) + F(s)F(-s)$. Com esta equação pode-se obter uma função da outra montando-se $E(s)$ a partir das raízes no SPLE do termo à direita (as raízes de $E(s)$ são os polos a realizar), ou pode-se montar $F(s)$ a partir de metade das raízes de $E(s)E(-s) - P(s)P(-s)$, agora sem restrição de estabilidade e talvez com várias soluções. A geração de aproximações para filtros usa estas mesmas funções, usualmente partindo de $K(s)$, e gerando $H(s)$.

Por exemplo, a aproximação de Butterworth parte de $K(j\omega) = \epsilon\omega^n$, e a aproximação de Chebyshev parte de $K(j\omega) = \epsilon C_n(\omega)^n$, onde $C_n(\omega)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem n .

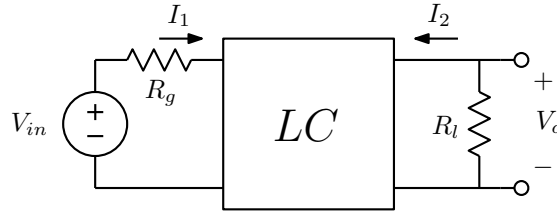


Figura 4.48: Rede LC duplamente terminada.

Os parâmetros Z ou Y da rede LC entre as terminações (ver figura 4.48) podem ser obtidos a partir destas duas funções. Uma análise com parâmetros Z em transformada de Laplace da rede leva a:

$$\begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= V_{in} - R_g I_1 \\ z_{12}I_1 + z_{22}I_2 &= -I_2 R_l \end{aligned}$$

onde já foi considerado que a rede é recíproca, com $z_{12} = z_{21}$. Resolvendo para I_1 e I_2 :

$$I_1 = V_{in} \frac{z_{22} + R_l}{(z_{11} + R_g)(z_{22} + R_l) - z_{12}^2}; \quad I_2 = -V_{in} \frac{z_{12}}{(z_{11} + R_g)(z_{22} + R_l) - z_{12}^2}$$

Calculando Z_1 e Z_2 , impedâncias vistas nas duas portas da rede LC, incluindo a terminação do outro lado:

$$Z_1 = \frac{V_{in} - R_g I_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_l}; \quad Z_2 = z_{22} - \frac{z_{12}^2}{z_{11} + R_g}$$

onde Z_2 foi obtida simplesmente trocando-se os índices dos parâmetros e a terminação. A função de transdução $H(s)$ é o inverso da função de transferência $V_o(s)/V_{in}(s)$, escalada de forma a que o mínimo de seu módulo quando $s = j\omega$ seja unitário. O fator de escalamento pode ser obtido, no caso de máxima transferência entre as terminações, considerando-se que a potência máxima entregue à impedância Z_1 ,

P_{max} , ocorre quando $Z_1(j\omega) = R_g$, e que esta mesma potência é entregue à terminação de saída R_l , já que a rede LC é sem perdas.

$$P_{max} = \frac{V_{in\ rms}^2}{4R_g} = \frac{V_o\ rms^2}{R_l} \Rightarrow \max \left| \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}}$$

A função $H(s)$ é então:

$$H = \frac{\max |(V_o/V_{in})(j\omega)|}{V_o/V_{in}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{V_{in}}{-I_2 R_l}$$

Substituindo a corrente I_2 calculada tem-se $H(s)$ em função dos parâmetros da rede:

$$H = \frac{(z_{11} + R_g)(z_{22} + R_l) - z_{12}^2}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}}$$

Uma outra relação vem da consideração de que, em uma frequência qualquer, a potência dissipada na terminação de saída vale $P_2 = P_{max} - P_r$, onde P_r é a potência refletida por Z_1 :

$$\frac{P_{max}}{P_2} = \frac{P_r}{P_2} + 1 = \frac{V_{in\ rms}^2/(4R_g)}{V_o\ rms^2/R_l} = \frac{R_l}{4R_g} \frac{V_{in\ rms}^2}{V_o\ rms^2} = |H(j\omega)|^2$$

Comparando com a equação de Feldtkeller $|H(j\omega)|^2 = |K(j\omega)|^2 + 1$ vem $|K(j\omega)|^2 = \frac{P_r}{P_2}$. A potência P_r pode ser calculada multiplicando a potência P_{max} pelo quadrado do módulo do coeficiente de reflexão de Z_1 , ρ_1 :

$$P_r = P_{max} \left| \frac{R_g - Z_1(j\omega)}{R_g + Z_1(j\omega)} \right|^2 = P_{max} |\rho_1|^2$$

Portanto:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{P_{max}}{P_2} |\rho_1(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |\rho_1(j\omega)|^2$$

Usando que $|K(j\omega)|^2 = K(s)K(-s)$ quando $s = j\omega$, e o mesmo para H e ρ_1 :

$$K(s) = H(s)\rho_1(s) = H(s) \frac{R_g - Z_1(s)}{R_g + Z_1(s)}$$

Substituindo Z_1 já calculada a função $K(s)$ é obtida, com uma forma parecida com a de $H(s)$, mas diferente:

$$K = \frac{(R_g - z_{11})(R_l + z_{22}) + z_{12}^2}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}}$$

Ainda se tem duas equações para três incógnitas. A relação que falta é a consideração de que os parâmetros Z são todos de uma rede LC, e portanto funções ímpares de s . Separando as partes par e ímpar de $H(s)$ e $K(s)$:

$$H = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2 + R_g R_l}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} + \frac{R_g z_{22} + R_l z_{11}}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} = H_o + H_e$$

$$K = \frac{-(z_{11}z_{22} - z_{12}^2) + R_g R_l}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} + \frac{R_g z_{22} - R_l z_{11}}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} = K_o + K_e$$

Somando e subtraindo estas funções:

$$H_o + K_o = \frac{\sqrt{R_g R_l}}{z_{12}}; \quad H_o - K_o = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12}^2}{\sqrt{R_g R_l} z_{12}}; \quad H_e + K_e = \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{z_{22}}{z_{12}}; \quad H_e - K_e = \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{z_{11}}{z_{12}}$$

É simples então isolar os parâmetros Z:

$$z_{12} = \frac{\sqrt{R_g R_l}}{H_o + K_o}; \quad z_{11} = R_g \frac{H_e - K_e}{H_o + K_o}; \quad z_{22} = R_l \frac{H_e + K_e}{H_o + K_o}; \quad \Delta_z = z_{11} z_{22} - z_{12}^2 = R_g R_l \frac{H_o - K_o}{H_o + K_o}$$

Pode-se também substituir estas expressões nas fórmulas deduzidas para Z_1 e Z_2 , obtendo:

$$Z_1 = R_g \frac{H - K}{H + K}; \quad Z_2 = R_l \frac{H + K_e - K_o}{H - K_e + K_o}$$

Os parâmetros Y podem ser obtidos a partir dos parâmetros Z, tomando formas similares:

$$y_{12} = \frac{1}{\sqrt{R_g R_l}} \frac{1}{H_o - K_o}; \quad y_{11} = \frac{1}{R_g} \frac{H_e + K_e}{H_o - K_o}; \quad y_{22} = \frac{1}{R_l} \frac{H_e - K_e}{H_o - K_o}; \quad \Delta_y = y_{11} y_{22} - y_{12}^2 = \frac{1}{R_g R_l} \frac{H_o + K_o}{H_o - K_o}$$

Considerando que $H = E/P$ e $K = F/P$, e que polinômio $P(s)$ é sempre par, P_e ou ímpar, P_o , já que redes LC em escada somente geram zeros de transmissão em zero ou em pares conjugados imaginários (com outras estruturas LC zeros simétricos em $\pm\sigma$ e em simetria quadrantal $\pm\sigma \pm j\omega$ são também possíveis, mas a restrição de paridade também vale):

$$H_o = \frac{E_e}{P_o} \text{ ou } \frac{E_o}{P_e}; \quad H_e = \frac{E_o}{P_o} \text{ ou } \frac{E_e}{P_e}; \quad K_o = \frac{F_e}{P_o} \text{ ou } \frac{F_o}{P_e}; \quad K_e = \frac{F_o}{P_o} \text{ ou } \frac{F_e}{P_e}$$

Resulta a tabela da figura 4.49, que permite obter os parâmetros Z ou Y da rede LC entre as terminações R_g e R_l , a partir das partes pares e ímpares de $E(s)$ e $F(s)$.

	$P = P_e$	$P = P_o$
$\frac{z_{11}}{R_g}$	$\frac{E_e - F_e}{E_o + F_o}$	$\frac{E_o - F_o}{E_e + F_e}$
$\frac{z_{22}}{R_l}$	$\frac{E_e + F_e}{E_o + F_o}$	$\frac{E_o + F_o}{E_e + F_e}$
$y_{11} R_g$	$\frac{E_e + F_e}{E_o - F_o}$	$\frac{E_o + F_o}{E_e - F_e}$
$y_{22} R_l$	$\frac{E_e - F_e}{E_o - F_o}$	$\frac{E_o - F_o}{E_e - F_e}$

Figura 4.49: Possíveis identificações dos parâmetros da rede LC para a síntese LC duplamente terminada.

Note-se na tabela que se $F(s)$ é puramente ímpar, com $F_e(s) = 0$, com terminações iguais e $P(s)$ par resulta $z_{11} = z_{22}$, e a rede pode ficar simétrica (a simetria pode ser quebrada na realização de zeros finitos de transmissão). Se $F(s)$ é puramente par, com $F_o(s) = 0$, com terminações duais, $R_g = 1/R_l$, e $P(s)$

par, resulta $z_{11} = y_{22}$ e a rede fica antissimétrica. Isto acontece em todas as aproximações passa-baixas de Butterworth e Chebyshev, por exemplo.

Das quatro imitâncias possíveis, deve-se escolher uma que seja do grau da estrutura desejada. As subtrações podem cancelar os termos de grau mais alto de $E(s)$ e $F(s)$, gerando redes em que o elemento final não é visto. Com $F(s)$ tendo o coeficiente de grau maior positivo, a escolha que sempre vê toda a rede é a de z_{22} . Se o sinal de $F(s)$ for trocado, y_{22} vê toda a rede (trocar o sinal de $F(s)$ é sempre possível, e gera a rede com estrutura dual). Veja os exemplos da figura 4.50.

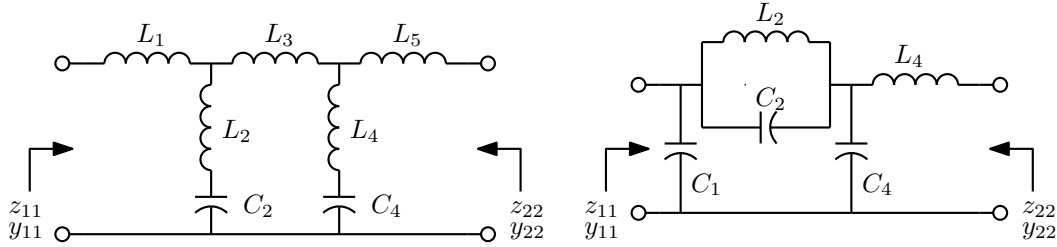


Figura 4.50: Escolha da imitância a expandir na síntese duplamente terminada. Na rede da esquerda z_{11} não gera L_5 , z_{22} não gera L_1 , e y_{11} e y_{22} geram toda a rede. Na rede da direita, de ordem par, z_{11} não gera L_4 , y_{22} não gera C_1 , e y_{11} e z_{22} geram toda a rede.

Exemplo: Para o filtro de Butterworth de terceira ordem com corte de 3.0103 dB em 1 rad/s já realizado em forma simétrica, tem-se $K(j\omega) = \omega^3$, e as funções necessárias são:

$$E(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

$$F(s) = s^3$$

$$P(s) = 1$$

e as impedâncias z_{11} ou z_{22} valem:

$$\frac{z_{11}(s)}{R_g} = \frac{z_{22}(s)}{R_l} = \frac{E_e \mp F_e}{E_o + F_o} = \frac{E_e}{E_o + F_o} = \frac{2s^2 + 1}{2s^3 + 2s}$$

A realização com terminações unitárias é a da figura 4.51. A forma em T é obtida se for usado $K(s) = -s^3$.

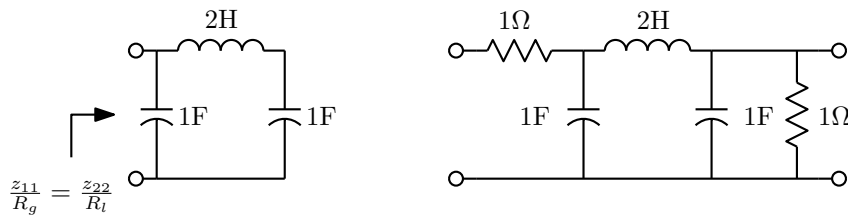


Figura 4.51: Filtro de Butterworth de 3a. ordem realizado pelo método geral para síntese LC duplamente terminada.

Exemplo: Seja obter o filtro de Butterworth de quarta ordem normalizado, já realizado em forma antissimétrica anteriormente. Com os polos já listados, e $K(j\omega) = \omega^4$, as funções necessárias são:

$$\begin{aligned}
E(s) &= s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1 \\
F(s) &= s^4 \\
P(s) &= 1
\end{aligned}$$

e a impedância z_{22} , que é de ordem 4, enquanto z_{11} é de ordem 3 devido à subtração dos termos em s^4 , é obtida como:

$$\frac{z_{22}(s)}{R_l} = \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{2(s^4 + 1.7071s^2 + 0.5)}{2.6131(s^3 + s)}$$

As terminações são iguais devido ao ganho máximo em frequência zero. Com $R_g = R_l = 1 \Omega$ a rede fica com $z_{22} = y_{11}$, antissimétrica. A expansão de z_{22} na primeira forma de Cauer resulta na estrutura da figura 4.52, que é idêntica à anteriormente obtida (figura 4.47), mas invertida. O filtro realizado é o mesmo, pois a rede é recíproca. A rede anterior poderia ser obtida trocando-se o sinal de $F(s)$.

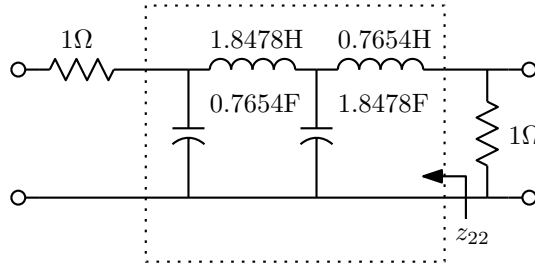


Figura 4.52: Filtro de Butterworth de 4a. ordem realizado pelo método geral para síntese LC duplamente terminada.

Este filtro tem máxima transferência de potência apenas em frequência zero, mas como é maximamente plano, as derivadas do módulo da função de transferência em relação aos valores dos elementos reativos são nulas para derivadas de ordens 1 a 4, para $\omega = 0$.

Exemplo: O filtro polinomial maximamente seletivo é o de Chebyshev, que tem função característica $K(j\omega) = \epsilon C_n(\omega)$, onde ϵ define a atenuação do filtro na borda da banda passante em 1 rad/s, e neste caso também os máximos de atenuação dentro da banda passante. Dada a máxima atenuação na banda passante, A_{max} decibéis, onde $A_{max} = 20 \log |H(j)|$, ϵ é obtido como:

$$|H(j)| = \sqrt{1 + \epsilon^2} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1}$$

Para um filtro de Chebyshev de quarta ordem com atenuação máxima de 1 dB, $C_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$ e $\epsilon = 0.508847$. Os filtros de Chebyshev de ordem par não apresentam máxima transferência de potência em $\omega = 0$, mas apenas nas ressonâncias na banda passante. As terminações são então necessariamente diferentes. As funções necessárias são então, com $H(s)$ obtida da solução da eq. de Feldtkeller:

$$\begin{aligned}
E(s) &= s^4 + 0.95281s^3 + 1.4539s^2 + 0.74262s + 0.27563 \\
F(s) &= s^4 + s^2 + 0.125 \\
P(s) &= 0.24565
\end{aligned}$$

As impedância z_{22} da rede LC é obtida como:

$$\frac{z_{22}(s)}{R_l} = \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{2(s^4 + 1.2270s^2 + 0.20031)}{0.95281(s^3 + 0.77940s)}$$

Note-se que $y_{11}R_g$ tem este mesmo valor, o que permitirá calcular as terminações necessárias. A expansão de z_{22} com $R_l = 1 \Omega$ resulta na rede da figura 4.53.

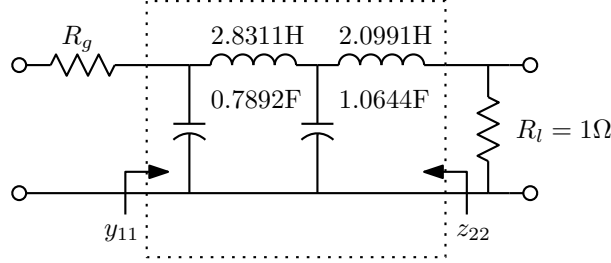


Figura 4.53: Filtro de Chebyshev de 4a. ordem realizado pelo método geral para síntese LC duplamente terminada. $R_g = 2.659723 \Omega$.

A terminação R_g pode ser obtida comparando-se o último elemento gerado pela expansão de z_{22}/R_l , $C_4 = 0.789199 \text{ F}$, com o primeiro elemento que seria gerado pela expansão de $y_{11}R_g$, $C'_1 = 2.099051 \text{ F}$, que são o mesmo capacitor, resultando em $R_g/R_l = C'_1/C_4 = 2.659723 \Omega$. A rede é antissimétrica se os níveis de impedância forem divididos por $\sqrt{R_g/R_l}$.

Exemplo: A aproximação elíptica de ordem par resulta em filtros sem zero de transmissão no infinito. O ganho constante em frequência infinita não pode ser obtido com uma rede LC duplamente terminada. Para isto, a aproximação é modificada para ter dois zeros de transmissão no infinito. Ver a figura 4.54.

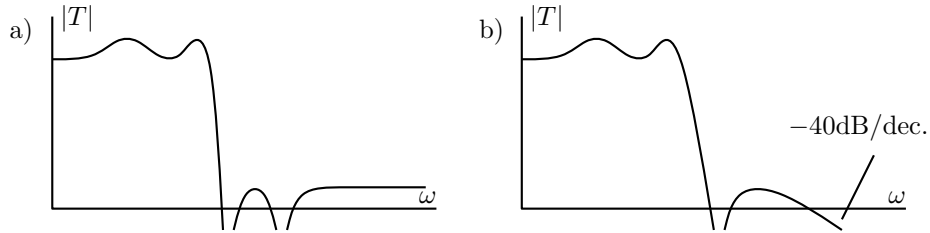


Figura 4.54: a) Filtro elíptico de quarta ordem. b) Versão modificada pelo deslocamento para o infinito do segundo par de zeros de transmissão.

Com especificações $A_{max} = 1 \text{ dB}$, $A_{min} = 40 \text{ dB}$ e corte em 1 rad/s , os polinômios da aproximação são obtidos como⁵:

$$P(s) = 0.0989(s^2 + 3.0096) \quad \text{zeros em } \pm 1.7348j$$

$$F(s) = s^4 + 1.053s^2 + 0.1514$$

$$E(s) = s^4 + 0.943s^3 + 1.495s^2 + 0.788s + 0.334$$

Com $R_l = 1\Omega$, a terminação de entrada pode ser obtida observando-se que a impedância $Z_1(j\omega) = R_g$ em frequência zero. Resulta $R_g = \frac{E(0)+F(0)}{E(0)-F(0)} = 2.6597\Omega$. z_{22} vale:

$$z_{22} = \frac{2(s^4 + 1.272s^2 + 0.242)}{0.942(s^3 + 0.836)}$$

⁵Estes filtros podem ser calculados pelo programa Elelsim.

A rede pode ser obtida pelo processo de deslocamento de zeros, resultando na estrutura da figura 4.55a. Naquele caso, os zeros finitos foram criados imediatamente pela extração do indutor de 1.774H. É possível também extrair primeiramente toda a indutância vista em frequência infinita como 2.122H, e então criar os zeros na forma π . Note-se que as duas versões são duais uma da outra, com diferentes níveis de impedância. Se for usado $F(s)$ negativo, as redes são geradas de forma invertida se $R_g = 1 \Omega$, e na forma dual se $R_g = 1/2.6597 \Omega$.

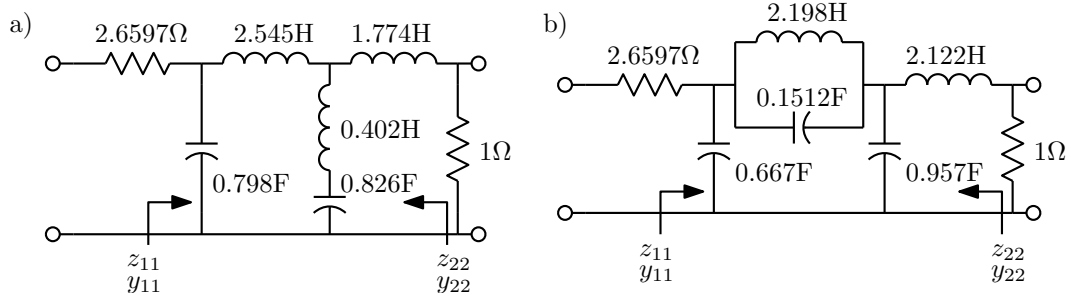


Figura 4.55: a) Filtro na forma T. b) Filtro na forma π .

O processo de deslocamento de zeros para redes duplamente terminadas é um pouco mais restrito que no caso das redes simplesmente terminadas. A estrutura da figura 4.36 não poderia ser usada, pois a inclusão de duas terminações aumentaria em um a ordem de complexidade da rede. O último passo da expansão tem que ser sempre uma extração completa de polo, no infinito naquele caso.

Exemplo: É interessante ver como explorar o processo de síntese na realização do filtro elíptico de quarta ordem normal, sem zeros de transmissão no infinito, que não tem solução LC duplamente terminada. Com as mesmas especificações de $A_{max} = 1 \text{ dB}$ e $A_{min} = 40 \text{ dB}$, corte em 1 rad/s, os polinômios necessários são obtidos como⁶:

$$P(s) = 0.0100005(s^4 + 15.0183s^2 + 32.1957) \quad \text{zeros em } \pm 3.5253j, \pm 1.6096j$$

$$F(s) = s^4 + 1.071s^2 + 0.1638$$

$$E(s) = 1.00005(s^4 + 0.9391s^3 + 1.5137s^2 + 0.8037s + 0.3612)$$

Seja usar $R_g = 1 \Omega$. A outra terminação vale $R_l = 1/2.65972 = 0.375979 \Omega$, e a impedância z_{22} é:

$$z_{22} = R_l \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{0.7520(s^4 + 1.2925s^2 + 0.2625)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

A expansão desta impedância, com deslocamentos de zeros para criar os dois zeros de transmissão, primeiramente o de maior frequência, produz a rede da figura 4.56a. Esta rede não pode estar completa, pois com duas terminações ela é de ordem 5. Considerando então a expansão de z_{11} :

$$z_{11} = R_g \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} = \frac{0.00005(s^4 + 8848.65s^2 + 3948.20)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

A expansão com a geração dos zeros, começando pelo de menor frequência, gera a estrutura da figura 4.56b, aceitando-se o indutor negativo gerado pelo primeiro deslocamento. O resto da rede é idêntica à gerada por z_{22} . A realização completa é portanto a da figura 4.56c.

⁶Os cálculos devem ser feitos com mais dígitos que os mostrados.

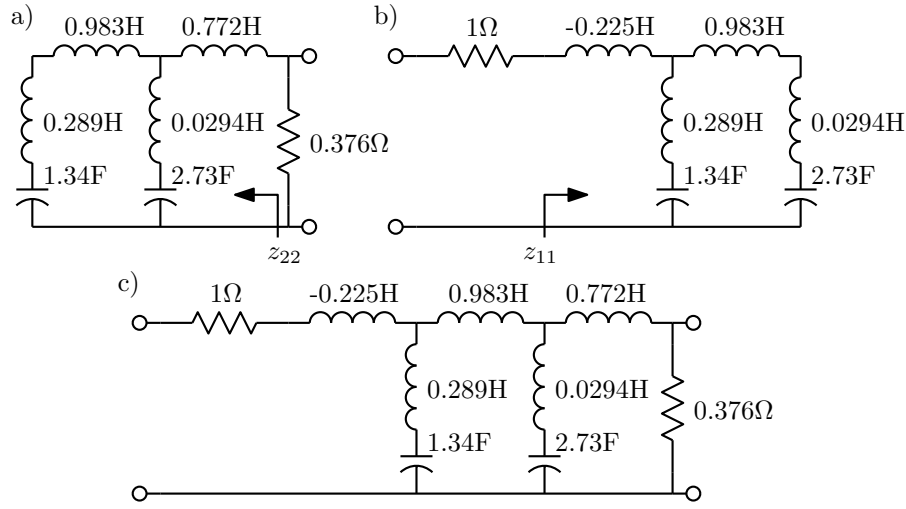


Figura 4.56: a) Expansão de z_{22} . b) Expansão de z_{11} . c) Filtro completo.

O indutor negativo com aquele valor particular é o que permite reduzir a ordem do circuito. É simples verificar a equivalência da rede da figura 4.56c com a da figura 4.57. O circuito indutivo foi separado em dois “Ts” de indutores e convertido em dois transformadores, que resultam com acoplamento cerrado. Assim, a ordem do circuito cai para 4, e em alta frequência a estrutura se reduz a dois transformadores ideais em cascata entre as terminações, produzindo o ganho constante em frequência infinita da aproximação elíptica.

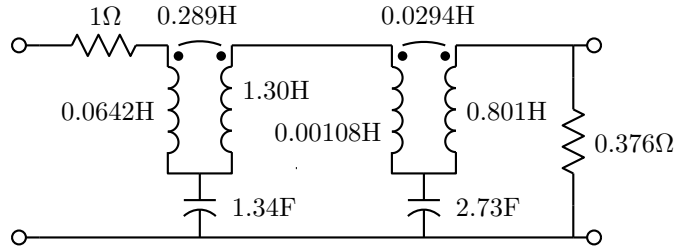


Figura 4.57: a) Rede RLCM duplamente terminada que realiza um filtro elíptico de quarta ordem. Os dois transformadores tem $k = 1$.

As expansões de y_{11} ou de y_{22} geram a rede completa, desde que se ignore o fato da impedância a expandir não ter polo no infinito para o deslocamento de zeros e se aceite elementos negativos. Note-se que a rede de transformadores apresenta um curto-circuito em alta-frequência para estes parâmetros, correspondendo aos polos de admitância no infinito deles.

$$y_{11} = \frac{1}{R_g} \frac{E_e + F_e}{E_o - F_o} = \frac{2.00005(s^4 + 1.2925s^2 + 0.2625)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

$$y_{22} = \frac{1}{R_l} \frac{E_e - F_e}{E_o - F_o} = \frac{0.000133(s^4 + 8848.65s^2 + 3948.20)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

O ganho CC do filtro vale $\frac{R_l}{R_l + R_g} = 0.273$, ou -11.27 dB. O ganho em alta frequência pode ser obtido passando-se R_l através dos dois transformadores ideais, fazendo um divisor resistivo com R_g e multiplicando o ganho de tensão do divisor pelos ganhos de tensão dos transformadores. Considerando os quatro indutores como $L_1 - L_4$ da esquerda para a direita resulta:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(\infty) = \frac{R_l'}{R_g + R_l'} n_1 n_2; \quad n_1 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}; \quad n_2 = \sqrt{\frac{L_4}{L_3}}; \quad R_l' = \frac{R_l}{n_1^2 n_2^2}$$

A avaliação numérica resulta em 0.00307, ou -50.27 dB, dando a diferença correta de 39 dB abaixo do ganho CC.

4.4.4 Realização com terminações arbitrárias

A realização duplamente terminada normal resulta em filtros LC duplamente terminados com máxima transferência de potência nos zeros de atenuação, e isto força a relação entre as terminações. É possível, entretanto, obter realizações com terminações escolhidas arbitrariamente, abrindo mão da máxima transferência de potência (e das baixas sensibilidades que ela causa). Notando que a função de transdução é definida por $H(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{1}{A_v(s)}$, escala-se $H(s)$ de forma que $|H(j\omega)| > 1$, com o fator de escalamento para um filtro passa-baixas sendo:

$$H(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{1}{\frac{R_l}{R_g + R_l}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{R_l}{R_g}} + \sqrt{\frac{R_g}{R_l}} \right)$$

A seguir calcula-se uma nova função característica, resolvendo a equação de Feldtkeller para $K(s)$. Como $F(s)$ não tem restrição de estabilidade, as raízes de $F(s)F(-s)$ podem ser escolhidas de várias formas, levando a diferentes realizações.

Exemplo: Seja obter realizações para o filtro normalizado de Butterworth de ordem 3 com banda passante de 3.0103 dB até 1 rad/s, similares às da figura 4.44, para o caso de $R_g = 1 \Omega$ e $R_l = 2 \Omega$. $H(s) = E(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ deve ser multiplicada por $\frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{1/2}) = 0.1060660172$. Note-se que é o mesmo fator para a rede invertida. A escolha dos sinais das raízes de $F(s)$ decide qual das formas é obtida. As raízes de $F(s)F(-s)$ são obtidas como:

$$\begin{aligned} &\pm 0.34668 \pm 0.60047j \\ &\pm 0.69336 \end{aligned}$$

Tomando todas no SPLD ou deixando apenas a raiz real no SPLD, são obtidos duas possíveis $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= 1.0607(s^3 - 1.3867s^2 + 0.96150s + 0.33333) \\ F(s) &= 1.0607(s^3 - 0.33333) \end{aligned}$$

As duas correspondentes impedâncias $z_{22} = R_l \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o}$ são obtidas como:

$$\begin{aligned} z_{22}(s) &= \frac{1.3010(s^2 + 1.0871)}{2.1213(s^3 + 1.4807s)} \\ z_{22}(s) &= \frac{4.2426(s^2 + 0.33333)}{2.1213(s^3 + s)} \end{aligned}$$

A figura 4.58 mostra as duas realizações. A segunda corresponde à da figura 4.44, a primeira é diferente, e é a que tende à forma simplesmente terminada da figura 4.30a se $R_l \rightarrow \infty$. As outras escolhas

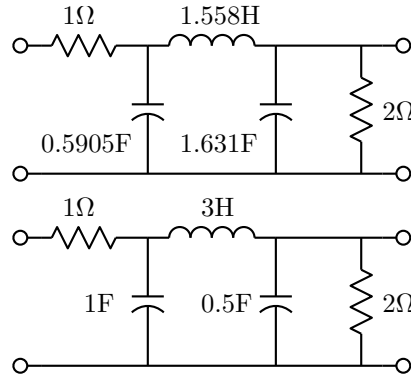


Figura 4.58: Filtros de Butterworth de ordem 3 com terminações arbitrariamente escolhidas.

das raízes de $F(s)$ geram as mesmas redes invertidas, e se o sinal de $F(s)$ for trocado são obtidas as formas duais.

Este mesmo procedimento se aplica também a redes de ordem par, o que não ocorre com o procedimento baseado em redes simétricas.

4.4.5 Realização em “lattice”

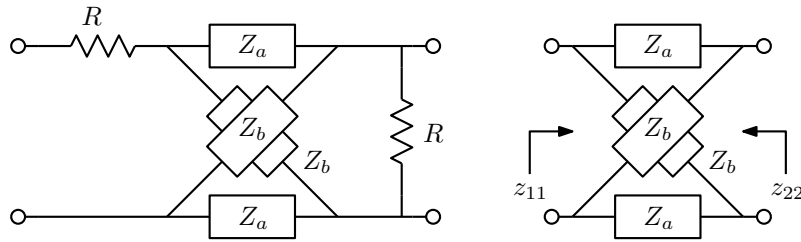


Figura 4.59: Estrutura em “lattice” LC duplamente terminada, e a rede LC entre as terminações com seus parâmetros Z .

Uma outra forma para realização de redes LC duplamente terminadas é a da “lattice”, ou treliça, mostrada na figura 4.59. É uma realização adequada apenas para filtros balanceados, ou com entrada ou saída suspensa, pois não tem terra comum à entrada e à saída. É simples ver que os parâmetros Z da rede LC entre as terminações são:

$$z_{11} = z_{22} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b); \quad z_{21} = z_{12} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a)$$

Daí vem:

$$Z_a = z_{11} - z_{12}; \quad Z_b = z_{11} + z_{12}$$

Estas fórmulas levam a cancelamentos polo-zero em Z_a e Z_b . Uma dedução com estes cancelamentos já feitos parte da fatoração do polinômio $F(s) + P(s) = h(s)a(s)$, onde $h(s)$ é polinômio de Hurwitz e $a(s)$ é polinômio anti-Hurwitz (todas as raízes no SPLD) [11]. Daí, para $P(s)$ par:

$$\frac{Z_a}{R} = \frac{-a_o}{a_e}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_e}{h_o}$$

e para $P(s)$ ímpar:

$$\frac{Z_a}{R} = \frac{-a_o}{a_e}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_o}{h_e}$$

Exemplo: Seja o simples filtro de Butterworth de ordem 3 com $A_{max} = 3.0103$ dB em 1 rad/s já conhecido, que tem $F(s) = s^3$, $E(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ e $P(s) = 1$. Usando as primeiras fórmulas, os parâmetros Z são:

$$\frac{z_{11}}{R} = \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} = \frac{2s^2 + 1}{2s^3 + 2s}; \quad \frac{z_{12}}{R} = \frac{1}{E_o + F_o} = \frac{1}{2s^3 + 2s}$$

e então:

$$Z_a = z_{11} - z_{12} = R \frac{2s^2}{2s^3 + 2s} = R \frac{s}{s^2 + 1}; \quad Z_b = z_{11} + z_{12} = R \frac{2s^2 + 2}{2s^3 + 2s} = R \frac{1}{s}$$

Usando as fórmulas com os cancelamentos feitos, $F(s) + P(s) = s^3 + 1$ e então $h(s)a(s) = (s+1)(s^2 - s + 1)$. O resultado obtido é o mesmo. A estrutura em “lattice” é mostrada na figura 4.60.

$$\frac{Z_a}{R} = \frac{-a_o}{a_e} = \frac{s}{s^2 + 1}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_e}{h_o} = \frac{1}{s}$$

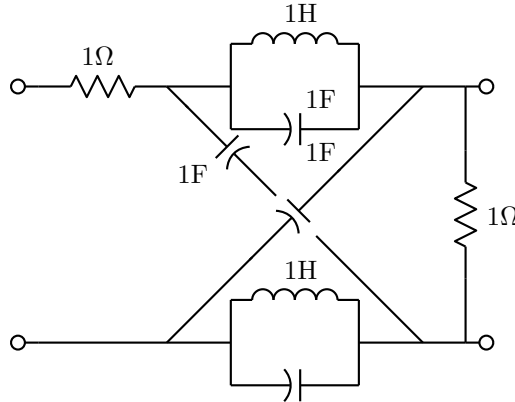


Figura 4.60: Filtro normalizado de Butterworth de ordem 3 realizado em “lattice” LC duplamente terminada.

É interessante observar as frequências naturais desta rede, que é de ordem 5. Três delas são os polos do filtro, em -1 e $\frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$. As outras duas são imaginárias, em $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$. O circuito ideal pode oscilar nesta frequência, mantendo tensões nulas sobre os resistores.

A realização em “lattice” normalmente apenas realiza aproximações de ordem ímpar, devido à simetria. Não existe a restrição de os zeros de transmissão estarem sobre o eixo imaginário, sendo possível a realização de zeros em pares reais simétricos ou em quadras de zeros complexos com simetria real e imaginária. Zeros assim mantém o numerador da função de transferência como polinômio par ou ímpar.

Exemplo: Seja realizar o filtro passa-tudo:

$$T(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = -\frac{(s-1)(s^2-s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)} = -\frac{s^3-2s^2+2s-1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

Como os zeros tem que ter simetria no eixo real, é necessário duplicar os polos. $F(s)$ é nulo, pois $|H(j\omega)| = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} P(s) &= -(s^3 - 2s^2 + 2s - 1)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) \\ E(s) &= (s^3 + 2s^2 + 2s + 1)^2 \\ F(s) &= 0 \end{aligned}$$

$F(s) + P(s) = (-s^3 + 2s^2 - 2s + 1)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) = a(s)h(s)$ já é obtido fatorado como a síntese requer. Como $P(s)$ é par:

$$\frac{Z_a}{R} = -\frac{a_o}{a_e} = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}, \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_e}{h_o} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

A realização com terminações unitárias é mostrada na figura 4.61. As frequências naturais da estrutura são os três pólos do filtro, -1 e $\frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$, duplicados, e mais três pares no eixo imaginário, em $\pm j$ e $\frac{3 \pm \sqrt{5}j}{2}$, que aparecem cancelados por zeros correspondentes na função de transferência. O ganho de tensão vale $|T(j\omega)| = \frac{1}{2}$, e como ocorre sempre máxima transferência de potência, as impedâncias vistas pelas terminações são constantes, iguais a elas. As sensibilidades do módulo da função de transferência em relação aos valores de todos os elementos reativos valem 0 para qualquer frequência. Estas redes podem ser ligadas diretamente em cascata com realizações terminadas, omitindo-se uma das terminações, servindo como terminações. Podem também ser ligadas diretamente em cascata, umas fazendo as terminações das outras.

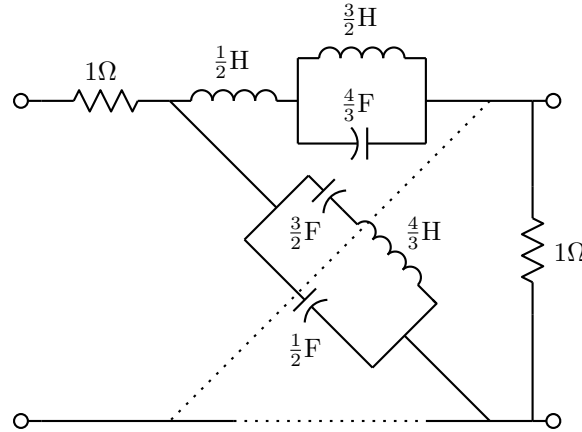


Figura 4.61: Filtro passa-tudo em “lattice” LC duplamente terminada.

4.4.6 “Lattice” de resistência constante

O tipo de estrutura obtido no exemplo anterior é conhecido como “lattice” de resistência constante, onde $Z_a Z_b = R^2$, que realiza filtros passa-tudo. Com esta condição e a simetria, é simples verificar que:

$$H(s) = \frac{(z_{11} + R)^2 - z_{12}^2}{2Rz_{12}} = \frac{R + Z_a}{R - Z_a}$$

$$Z_1 = Z_2 = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{11} + R} = R$$

Verificando no exemplo, com $R = 1 \Omega$:

$$H(s) = -\frac{s^2 + 2s^2 + 2s + 1}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1} = \frac{1 + \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}}{1 - \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}} \Rightarrow Z_a = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}; \quad Z_b = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

Também é possível uma realização com dois blocos em cascata. Para o mesmo exemplo, com terminações unitárias, segue a solução abaixo e a realização da figura 4.62. As frequências naturais desta rede são novamente os três polos do filtro duplicados e mais três pares imaginários, agora em $\pm j$ e $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}j$.

$$H(s) = -\frac{s+1}{s-1} \frac{s^2+s+1}{s^2-s+1} = \left(\frac{1+s}{1-s} \right) \left(\frac{1 + \frac{s}{s^2+1}}{1 - \frac{s}{s^2+1}} \right) \Rightarrow Z_{a1} = s; \quad Z_{a2} = \frac{s}{s^2+1}$$

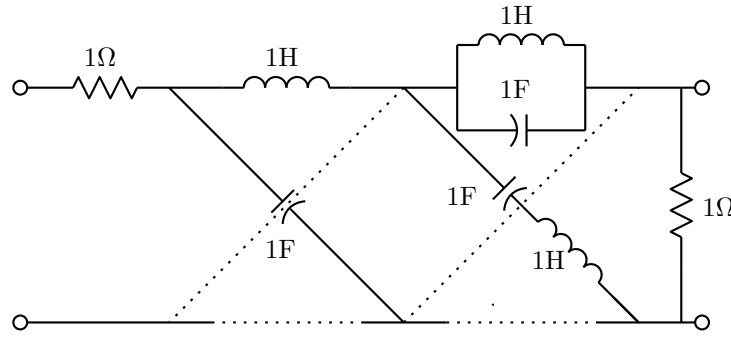


Figura 4.62: Filtro passa-tudo em cascata de “lattices” LC duplamente terminadas.

4.4.7 “Lattices” desbalanceadas

A rede “lattice” apresenta inconvenientes, como excessivo número de elementos e falta de referência comum entre entrada e saída. Estes podem ser eliminados pelo desbalanceamento da rede, o que pode ser feito a partir do “Teorema da biseção” de Bartlett e Brune [11]. O teorema diz que uma rede simétrica de duas portas tem um equivalente em “lattice” onde uma das impedâncias é obtida da metade da rede simétrica com todos os terminais de conexão entre as metades em aberto e a outra da mesma rede com todos os terminais de conexão em curto-circuito. Ver a figura 4.63. O teorema é facilmente verificado observando-se o comportamento das redes com excitações iguais e simétricas (uma positiva e a outra negativa) nas duas portas.

A realização em “lattice” de filtros usuais passa-baixas de ordem ímpar, resulta em duas impedâncias com diferença de grau de 1, que podem ser expandidas em escada em formas similares, com uma das expansões tendo um elemento a mais. Um filtro passa-baixas de ordem 7, por exemplo, gera estruturas como as da figura 4.64a. Com a identificação dos elementos como mostrado na figura, pode ser identificado que as duas redes são obtidas da “meia rede” mostrada, com os terminais da direita em aberto e em curto-circuito. O teorema da biseção diz então que a “lattice” pode ser desbalanceada na forma também mostrada na figura [12].

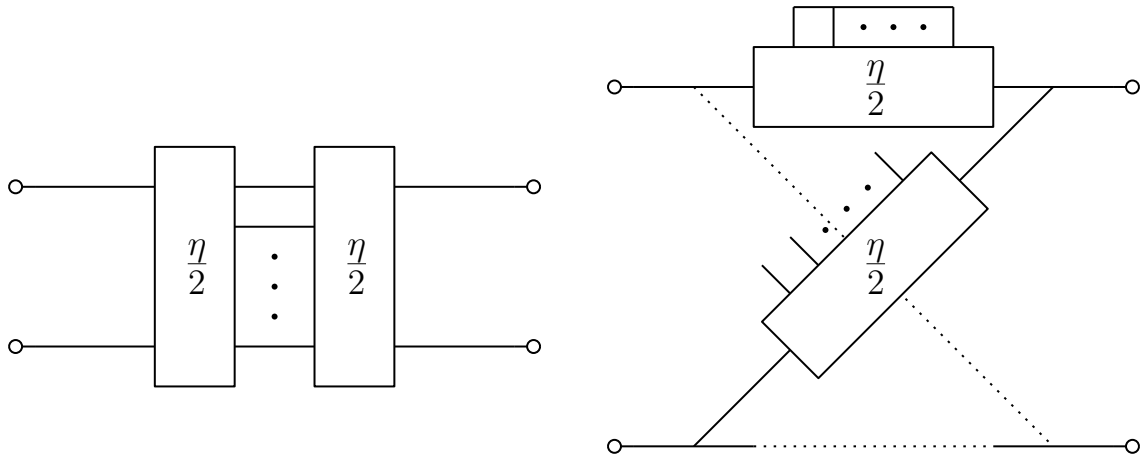


Figura 4.63: Equivalências do teorema da bisecção.

Esta realização é similar à de uma “ladder” de ordem 7 na forma π , onde em vez dos dois capacitores em paralelo com os indutores laterais se coloca um capacitor da entrada para a saída e um indutor em série com os dois capacitores centrais, formando uma estrutura com redes π e T de capacitores e indutores, uma dentro da outra. A estrutura é simétrica, enquanto a da “ladder” usualmente não é, devido aos zeros de transmissão em três frequências diferentes. Esta rede é prática apenas para filtros com alta seletividade, com pequeno valor de A_{min} , que podem ser irrealizáveis por “ladder”. Para filtros mais normais os elementos que acoplam as extremidades podem ficar pequenos demais. A rede também pode servir para realizar zeros de transmissão em pares simétricos reais ou em quadras com simetria. Filtros passa-tudo, entretanto, não são realizáveis desta forma.

Exemplo: Seja projetar o filtro elíptico normalizado, com $A_{min} = 40$ dB e $A_{max} = 1$ dB, com borda da banda passante em $\omega_p = 1$ rad/s. As redes “ladder” e “lattice” desbalanceada que o realizam são mostradas na figura 4.65⁷. Para comparar a qualidade das duas realizações, uma série de simulações é feita, com os elementos variando de 5% aleatoriamente, no que se chama de “análise de Monte Carlo”. A figura 4.66 mostra os resultados⁸. A rede em “lattice” desbalanceada é um pouco mais sensível à variação dos elementos na banda de rejeição. Embora não se veja bem na figura, ela é um pouco menos sensível no início da banda passante.

⁷O programa Eletsim também projeta estas redes.

⁸Análises feitas com o programa IFFT.

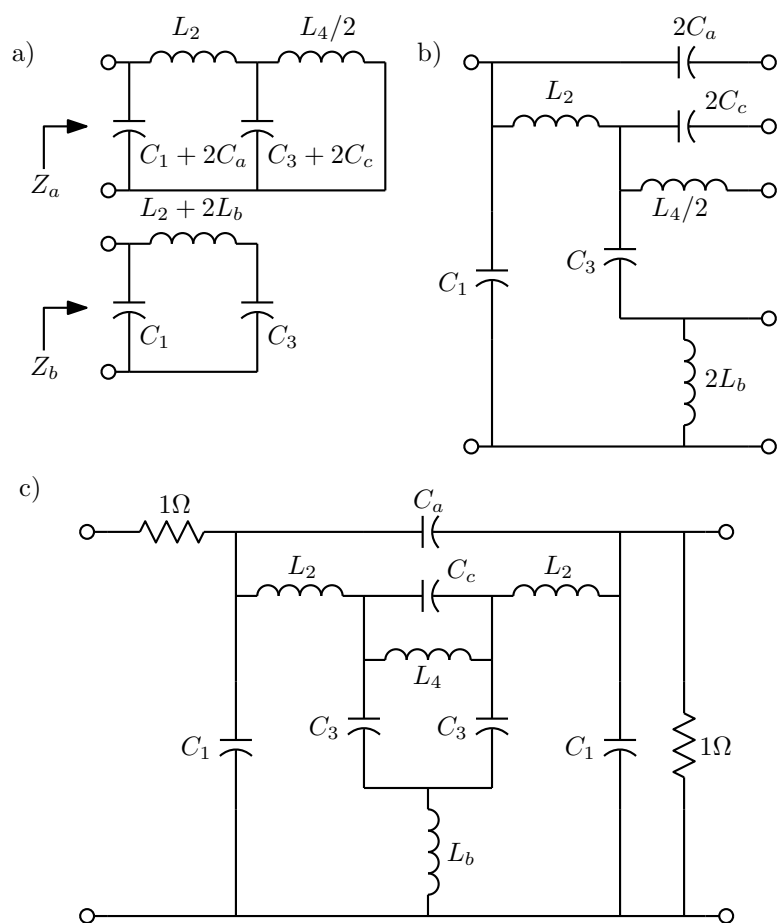


Figura 4.64: a) Realização das impedâncias da ‘lattice’ para um filtro passa-baixas de ordem 7. b) “Meia rede” de onde podem ser obtidas. c) “Lattice” desbalanceada.

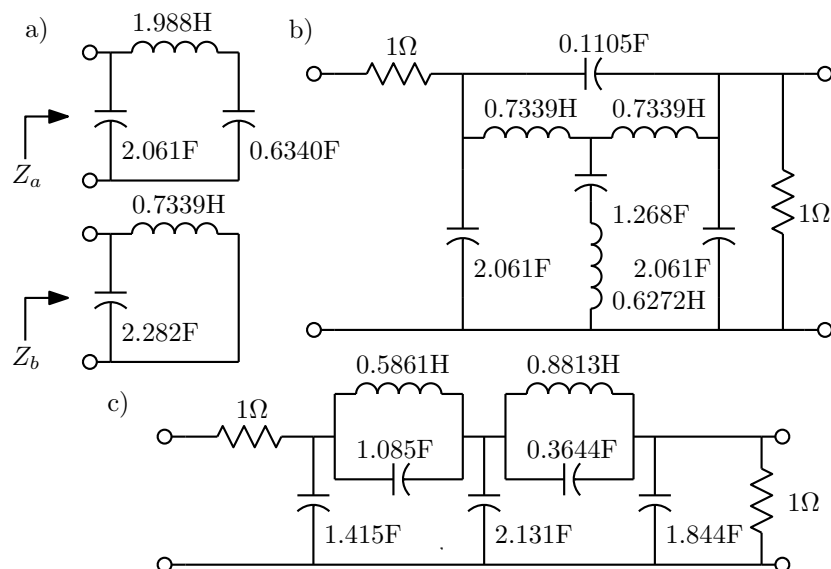


Figura 4.65: Realizações de um filtro elíptico de ordem 5. a) Impedâncias da "lattice". b) "Lattice" desbalanceada. c) "Ladder".

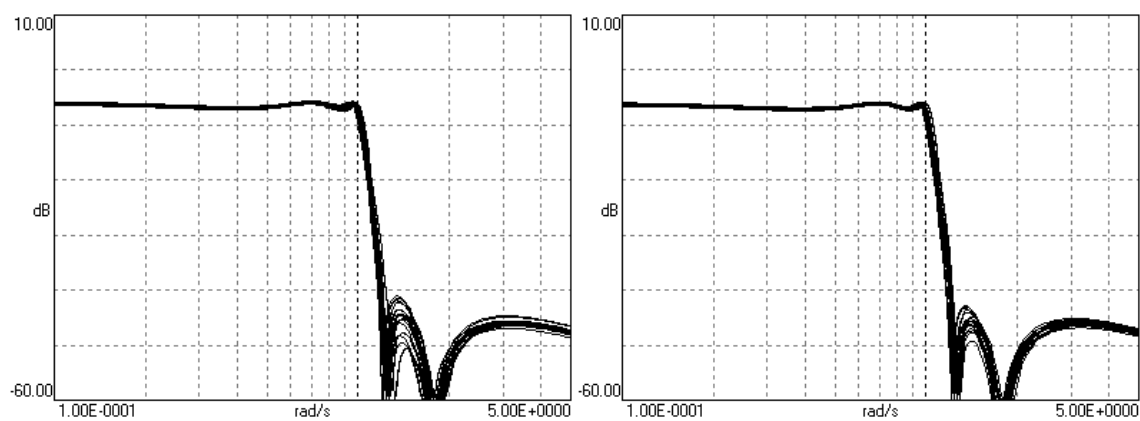


Figura 4.66: Comparação de análises de Monte Carlo das realizações. Esquerda: "lattice" desbalanceada. Direita: "Ladder".

Capítulo 5

Aproximações

ESTA seção descreve em maior detalhe as aproximações para filtros citadas sumariamente nas seções anteriores, ainda sem pretender ser um tratamento completo do assunto. São mais detalhadamente descritas as aproximações para filtros em que apenas o módulo da função de transferência é importante. Algum material é depois incluído sobre aproximações visando outros aspectos, como a linearidade da fase. Como é simples a geração de filtros de outros tipos a partir de aproximações passa-baixas normalizadas, apenas estas são consideradas. Pequenas tabelas de filtros são também listadas para os filtros descritos, apenas como exemplo, pois é fácil encontrar tabelas bem mais completas, como em [13], e programas de síntese para as aproximações descritas¹.

5.1 Aproximação por função característica

Para filtros de módulo, apenas a forma de $|T(j\omega)|$ é importante. Esta função é entretanto difícil de manipular diretamente, pois tem o dobro da ordem de $T(s)$ e uma raiz quadrada. Um método mais simples para a geração de $T(s)$ vem da definição de duas funções:

- Função de transdução, ou de atenuação, $H(s)$, inverso de $T(s)$ escalada para que $\min |H(j\omega)| = 1$.
- Função característica $K(s)$, tal que $|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$, ou $H(s)H(-s) = 1 + K(s)K(-s)$ (equação de Fel'dtkeller).

Os gráficos da figura 5.1 mostram as relações entre estas funções. Para um filtro com A_{max} e A_{min} especificados, $|K(j\omega)|$ varia entre 0 e ϵ na banda passante, e é maior que $\epsilon\alpha^2$ na banda de rejeição². Considerando a equação $|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$, os parâmetros ϵ e α são obtidos como:

$$\begin{aligned} 20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2} &= A_{max} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1} \\ 20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2\alpha^4} &= A_{min} \Rightarrow \alpha^2 = \sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1}} \end{aligned}$$

A função $K(j\omega)$ é da mesma ordem da aproximação e relativamente simples de tratar. Ela pode ser simplesmente uma razão de polinômios de ω do tipo, no caso das figuras 5.1 e 5.2, com 5 parâmetros a determinar para a aproximação de ordem 5:

¹As tabelas foram geradas pelo programa Eletsim.

²Esta definição para a banda de rejeição permite unificar o tratamento das várias aproximações, como se verá.

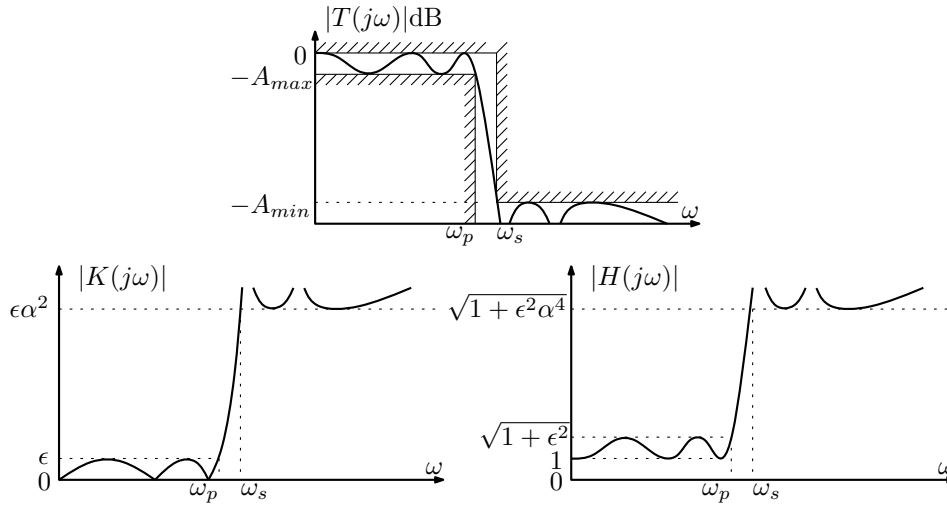


Figura 5.1: Relações entre o módulo da função de transferência $T(j\omega)$ e as funções $|H(j\omega)|$ e $|K(j\omega)|$.

$$K(j\omega) = k_0 \frac{\omega(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_3^2)(\omega^2 - \omega_4^2)}$$

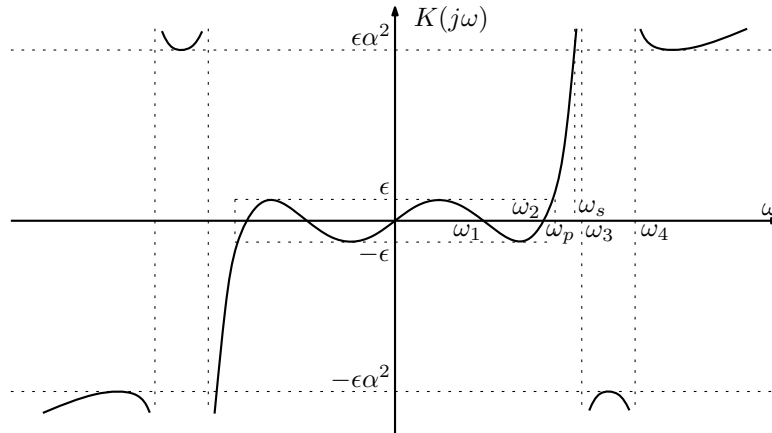


Figura 5.2: Gráfico de $K(j\omega)$.

Obtida $K(j\omega)$ por algum método, $K(s)$ é obtida fazendo-se $\omega = -js$, e ignorando possível termo multiplicativo $\pm j$ que aparece em ordens ímpares. Já se viu que o sinal de $K(s)$ pode ser qualquer. Como $K(s)$ é uma razão de polinômios, tem-se as relações já vistas no caso da síntese LC duplamente terminada:

$$K(s) = \frac{F(s)}{P(s)}; \quad H(s) = \frac{E(s)}{P(s)}; \quad E(s)E(-s) = F(s)f(-s) + P(s)P(-s)$$

A equação é resolvida achando-se as raízes de $F(s)F(-s) + P(s)P(-s)$, escolhendo as raízes no semiplano lateral esquerdo para raízes de $E(s)$, e montando o polinômio $E(s)$ com uma constante multiplicativa satisfazendo a equação. Note-se que o polinômio de onde se acha as raízes é sempre par, e então pode ser reduzido a um polinômio com os mesmos coeficientes e metade da ordem, completo, que tem como raízes os quadrados das raízes a encontrar. O filtro desejado tem então a função de transferência, escalada para máximo módulo unitário, $T(s) = 1/H(s) = P(s)/E(s)$.

As aproximações clássicas podem ser classificadas em três casos básicos, dependendo da forma de $|K(j\omega)|$:

- Aproximações polinomiais, ou “só polos”. $K(j\omega)$ é um polinômio de ω que varia entre ± 1 para ω na banda passante (entre $\omega = \pm 1$ na versão normalizada). Este caso é o das aproximações de Butterworth e de Chebyshev.

$$K(j\omega) = \epsilon M(\omega)$$

- Aproximações polinomiais inversas. $K(\omega)$ é o proporcional ao inverso de um polinômio de $1/\omega$ definido como acima. Com esta normalização, o início da banda de rejeição fica onde $M(\omega) = \pm 1$. Gera as aproximações de Chebyshev inversas.

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon \alpha^2}{M(1/\omega)} = \frac{\epsilon \alpha^2 \omega^n}{M_r(\omega)}$$

onde $M_r(\omega) = \omega^n M(1/\omega)$ é o polinômio $M(\omega)$ com os coeficientes em ordem inversa. Idem para $Q_r(\omega)$ abaixo.

- Aproximações racionais simétricas. $K(j\omega)$ é proporcional à razão entre um polinômio de ω e o inverso do mesmo polinômio de $1/\omega$. Coloca o centro da banda de transição onde $Q(\omega) = 1$ (se $Q(1) = 1$) e zeros de transmissão e de atenuações em frequências inversas uma da outra. Gera as aproximações elípticas.

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon \alpha Q(\omega)}{\omega^n Q(1/\omega)} = \frac{\epsilon \alpha Q(\omega)}{Q_r(\omega)}$$

5.1.1 Aproximação de Butterworth

A aproximação de Butterworth³ é uma aproximação polinomial onde, na forma normalizada com $\omega_s = 1$ rad/s e para ordem n :

$$K(j\omega) = \epsilon \omega^n$$

Resulta uma banda passante maximamente plana com atenuação A_{max} em $\omega_s = 1$ rad/s, como na figura 5.3. Os polos da função de transferência são as raízes no SPLE do polinômio:

$$E(s)E(-s) = 1 + \epsilon^2(-s^2)^n$$

que ficam distribuídas na metade esquerda de um círculo de raio $\epsilon^{-1/n}$ centrado no plano complexo, como mostrado na figura 5.4.

³S. Butterworth, “On the theory of filter amplifiers”, Experimental wireless & the wireless engineer, Vol. 7, pp. 536–541, outubro de 1930.

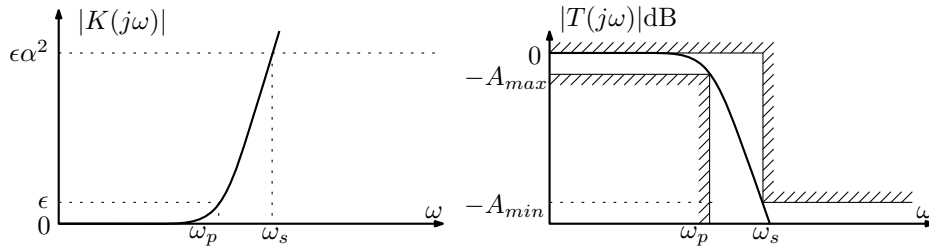


Figura 5.3: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação de Butterworth.

$$s_k = \sigma_k \pm j\omega_k, \quad k = n \dots 2n - 1$$

$$\sigma_k = \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + 2k}{n} \right) \epsilon^{-\frac{1}{n}}$$

$$\omega_k = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + 2k}{n} \right) \epsilon^{-\frac{1}{n}}$$

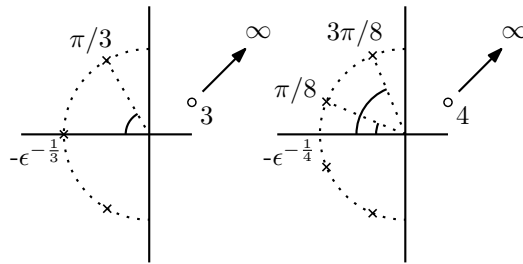


Figura 5.4: Polos e zeros para aproximações de Butterworth ímpares (ordem 3) e pares (ordem 4).

A ordem necessária é obtida a partir da atenuação no início da banda de rejeição normalizada:

$$A_{min} \leq 10 \log(1 + \epsilon^2 \omega_s^{2n})$$

$$\omega_s^{2n} \geq \frac{10^{0.1 A_{min}} - 1}{\epsilon^2} = \alpha^4$$

$$2n \log \omega_s \geq 4 \log \alpha$$

$$n \geq \frac{2 \log \alpha}{\log \omega_s}$$

A tabela 5.1 lista $E(s)$ para $P(s) = 1$ para os primeiros filtros de Butterworth com $A_{max} = 3.0103$ dB ($\epsilon = 1$), os polos com suas frequências de ressonância e fatores de qualidade (ω/Q), e realizações LC duplamente terminadas normalizadas. Qualquer filtro de Butterworth é uma versão desnormalizada em frequência destes.

5.1.2 Aproximação de Chebyshev

A aproximação de Chebyshev é uma aproximação polinomial onde, na forma normalizada com $\omega_s = 1$ rad/s e para ordem n :

Tabela 5.1: Filtros normalizados de Butterworth com $A_{max} = 3.0103$ dB e $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.00000	1.00000						
2	1.00000	1.41421	1.00000					
3	1.00000	2.00000	2.00000	1.00000				
4	1.00000	2.61313	3.41421	2.61313	1.00000			
5	1.00000	3.23607	5.23607	5.23607	3.23607	1.00000		
6	1.00000	3.86370	7.46410	9.14162	7.46410	3.86370	1.00000	
7	1.00000	4.49396	10.09783	14.59179	14.59179	10.09783	4.49396	1.00000
Polos								
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4	
1	-1.00000							
2	-0.70711	1.00000						
	0.70711	0.70711						
3	-0.50000	1.00000	-1.00000					
	0.86603	1.00000						
4	-0.38268	1.00000	-0.92388	1.00000				
	0.92388	1.30656	0.38268	0.54120				
5	-0.30902	1.00000	-0.80902	1.00000	-1.00000			
	0.95106	1.61803	0.58779	0.61803				
6	-0.25882	1.00000	-0.70711	1.00000	-0.96593	1.00000		
	0.96593	1.93185	0.70711	0.70711	0.25882	0.51764		
7	-0.22252	1.00000	-0.62349	1.00000	-0.90097	1.00000	-1.00000	
	0.97493	2.24698	0.78183	0.80194	0.43388	0.55496		
Ladder LC d. t.								
n	Rg/R1	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	2.00000						
2	1.00000		1.41421					
	1.00000	1.41421						
3	1.00000		2.00000					
	1.00000	1.00000		1.00000				
4	1.00000		1.84776		0.76537			
	1.00000	0.76537		1.84776				
5	1.00000		1.61803		1.61803			
	1.00000	0.61803		2.00000		0.61803		
6	1.00000		1.41421		1.93185		0.51764	
	1.00000	0.51764		1.93185		1.41421		
7	1.00000		1.24698		2.00000		1.24698	
	1.00000	0.44504		1.80194		1.80194		0.44504

$$K(j\omega) = \epsilon C_n(\omega)$$

onde $C_n(\omega)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem n , definido como $C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega)$. Estes polinômios oscilam maximamente entre ± 1 para $\omega = \pm 1$, como mostrado na figura 5.6 para as primeiras ordens. Resultam aproximações com oscilação (“ripple”) máxima na banda passante e a maior seletividade possível (mínima razão ω_s/ω_p) para aproximações polinomiais, dado A_{max} . Os casos de ordem par não tem ganho máximo em $\omega = 0$, requerendo terminações diferentes na realização LC duplamente terminada.

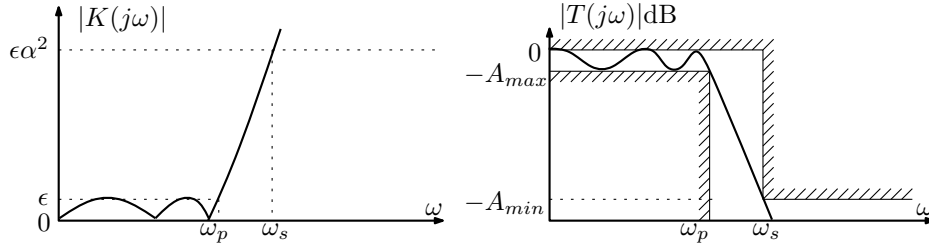


Figura 5.5: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação de Chebyshev (ordem 5).

Lista dos primeiros polinômios de Chebyshev e da fórmula de recursão que os gera:

$$\begin{aligned} C_0(\omega) &= 1 \\ C_1(\omega) &= \omega \\ C_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1 \\ C_3(\omega) &= 4\omega^3 - 3\omega \\ C_4(\omega) &= 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1 \\ C_5(\omega) &= 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega \\ C_6(\omega) &= 32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1 \\ C_{n+1}(\omega) &= 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \end{aligned}$$

Os polos da função de transferência são então as raízes no SPLE do polinômio:

$$E(s)E(-s) = 1 + \epsilon^2 C_n^2(-js)$$

que são obtidas, pela definição de C_n , como as soluções de $\cos(n \cos^{-1}(-js)) = \pm j/\epsilon$. Identificando $n \cos^{-1}(-js) = a + jb$ vem $\pm j/\epsilon = \cos(a + jb) = \cos a \cos jb - \sin a \sin jb = \cos a \cosh b - j \sin a \sinh b$. Igualando as partes real e imaginária vem $\cos a \cosh b = 0$ e $\sin a \sinh b = \mp 1/\epsilon$. Como $\cosh x \geq 1$ a igualdade dos valores reais dá valores para a . E usando que para estes valores $a = \pm 1$, os valores de b são obtido da igualdade dos valores imaginários. Tem-se então:

$$\begin{aligned} n \cos^{-1}(-js) &= a + jb \\ a &= \frac{\pi}{2}(1 + 2k), \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1 \\ b &= \mp \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

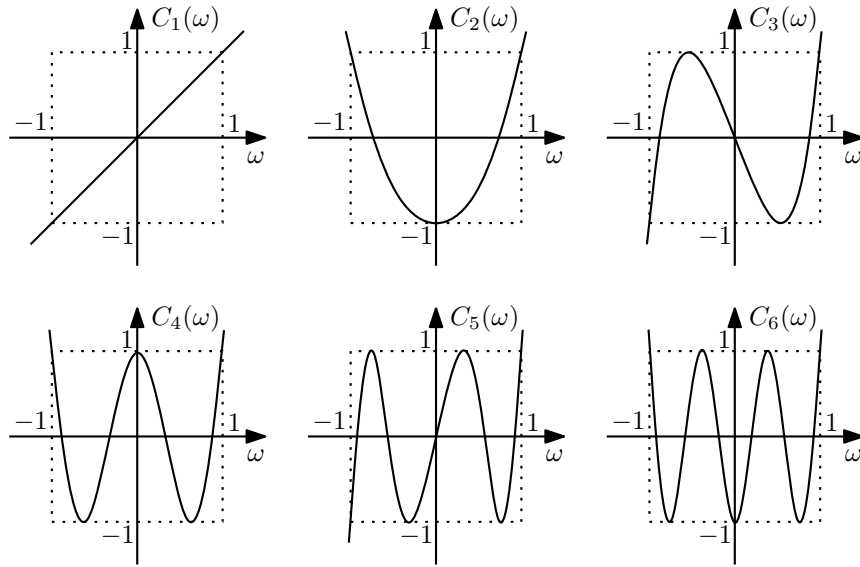


Figura 5.6: Polinômios de Chebyshev.

de onde se obtém os polos da aproximação, a parte das raízes no SPLE, como:

$$s_k = \sigma_k \pm j\omega_k, \quad k = n \dots 2n - 1$$

$$\sigma_k = \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + 2k}{n} \right) \sinh \left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$$\omega_k = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + 2k}{n} \right) \cosh \left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

Notar que estes polos são os mesmos da aproximação de Butterworth, multiplicados por fatores que os posicionam sobre a metade esquerda de uma elipse no plano complexo, com focos em $\pm j$. A ordem necessária é obtida, observando-se que, para $\omega > 1$, $\cos^{-1} \omega = j \cosh^{-1} \omega$ e $C_n(\omega) = \cos(nj \cosh^{-1} \omega) = \cosh(n \cosh^{-1} \omega)$, como:

$$A_{min} \leq 10 \log(1 + \epsilon^2 C_n(\omega_s)^2)$$

$$C_n(\omega_s)^2 \geq \frac{10^{0.1 A_{min}} - 1}{\epsilon^2} = \alpha^4$$

$$\cosh(n \cosh^{-1} \omega_s) \geq \alpha^2$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \alpha^2}{\cosh^{-1} \omega_s}$$

Comparando com a aproximação de Butterworth com as mesmas especificações na banda passante, tem-se, para $\omega \gg \omega_s$:

$$\text{Butterworth: } |H(j\omega)| \approx \sqrt{\epsilon^2 \omega^{2n}} = \epsilon \omega^n, \text{ ou: } 20 \log \epsilon \omega^n \text{ dB}$$

$$\text{Chebyshev: } |H(j\omega)| \approx \sqrt{\epsilon^2 (2^{n-1} \omega^n)^2} = \epsilon 2^{n-1} \omega^n, \text{ ou: } 20 \log \epsilon \omega^n + 6.0206(n-1) \text{ dB}$$

de onde se vê que a aproximação de Chebyshev atenua $2(n-1)$ vezes mais que a de Butterworth em alta frequência.

A tabela 5.2 lista $E(s)$ para $P(s) = a_0$ para os primeiros filtros de Chebyshev com $A_{max} = 1$ dB, os polos com suas frequências de ressonância e fatores de qualidade (w/Q), e realizações LC duplamente terminadas normalizadas⁴. As terminações dos casos de ordem par são uma inversa da outra, gerando redes antimétricas. Filtros com diferentes valores de A_{max} são diferentes, não podendo ser obtidos por simples escalamento em frequência, como nos de Butterworth.

5.1.3 Aproximação de Chebyshev inversa

Esta aproximação usa também os polinômios de Chebyshev, na forma polinomial inversa:

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha^2}{C_n(1/\omega)} = \frac{\epsilon\alpha^2\omega^n}{C_{nr}(\omega)}$$

onde $C_{nr}(\omega) = \omega^n C_n(1/\omega)$ é o polinômio $C_n(\omega)$ com os coeficientes em ordem inversa.

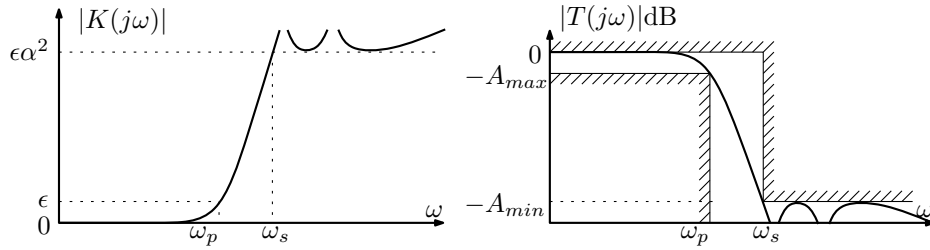


Figura 5.7: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação de Chebyshev inversa (ordem 5).

Resulta uma banda passante maximamente plana, como na aproximação de Butterworth, e bandas de rejeição começando em $\omega_s = 1$ rad/s, com zeros de transmissão nos inversos das raízes dos polinômios de Chebyshev. A banda passante termina onde $K(j\omega) = \epsilon$, ou:

$$\omega_p = \frac{1}{C_n^{-1}(\alpha^2)} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1}(\alpha^2)\right)}$$

A seletividade é idêntica à da aproximação de Chebyshev da mesma ordem, o que pode ser verificado calculando-se a razão ω_p/ω_s para as duas aproximações, que resulta a mesma pois $\omega_{s\ cheb} = 1/\omega_{p\ chebinv}$.

Os zeros de transmissão ficam nas frequências onde $C_n(1/\omega_z) = \cos(n \cos^{-1}(1/\omega_z)) = 0$:

$$\omega_{z\ k} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1+2k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Os polos são as raízes no SPLE do polinômio:

$$E(s)E(-s) = (\epsilon\alpha^2)^2(-js)^{2n} + (-js)^{2n}C_n\left(\frac{j}{s}\right)^2 \rightarrow C_n\left(\frac{j}{s}\right) = \pm j\epsilon\alpha^2$$

Pela similaridade com o caso da aproximação de Chebyshev, os polos agora são os inversos dos polos da aproximação de Chebyshev, com ϵ substituído por $1/(\epsilon\alpha^2)$. Eles ficam em uma curva parecida com um círculo deslocado para a esquerda do plano complexo.

⁴Notar que o caso de ordem 3 dá praticamente dois capacitores de 2 F e um indutor de 1 H. Daria exatamente isto com $A_{max} = 0.96910013008$ dB, correspondendo a ganho mínimo na banda passante de $\sqrt{0.8}$.

Tabela 5.2: Filtros normalizados de Chebyshev com $A_{max} = 1$ dB e $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.96523	1.00000						
2	1.10251	1.09773	1.00000					
3	0.49131	1.23841	0.98834	1.00000				
4	0.27563	0.74262	1.45392	0.95281	1.00000			
5	0.12283	0.58053	0.97440	1.68882	0.93682	1.00000		
6	0.06891	0.30708	0.93935	1.20214	1.93082	0.92825	1.00000	
7	0.03071	0.21367	0.54862	1.35754	1.42879	2.17608	0.92312	1.00000
Polos								
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4	
1	-1.96523							
2	-0.54887	1.05000						
	0.89513	0.95652						
3	-0.24709	0.99710	-0.49417					
	0.96600	2.01772						
4	-0.13954	0.99323	-0.33687	0.52858				
	0.98338	3.55904	0.40733	0.78455				
5	-0.08946	0.99414	-0.23421	0.65521	-0.28949			
	0.99011	5.55644	0.61192	1.39879				
6	-0.06218	0.99536	-0.16988	0.74681	-0.23206	0.35314		
	0.99341	8.00369	0.72723	2.19802	0.26618	0.76087		
7	-0.04571	0.99633	-0.12807	0.80837	-0.18507	0.48005	-0.20541	
	0.99528	10.89866	0.79816	3.15586	0.44294	1.29693		
Ladder LC d. t.								
n	Rg/R1	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	1.01769						
2	1.63087		1.11716					
	0.61317	1.11716						
3	1.00000		0.99410					
	1.00000	2.02359		2.02359				
4	1.63087		1.73596		1.28708			
	0.61317	1.28708		1.73596				
5	1.00000		1.09111		1.09111			
	1.00000	2.13488		3.00092		2.13488		
6	1.63087		1.80069		1.87840		1.32113	
	0.61317	1.32113		1.87840		1.80069		
7	1.00000		1.11151		1.17352		1.11151	
	1.00000	2.16656		3.09364		3.09364		2.16656

A tabela 5.3 lista alguns filtros de Chebyshev inversos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os correspondentes polos e zeros estão na tabela 5.4. Como os casos de ordem par não tem zeros de transmissão no infinito, impedindo realizações normais na forma LC duplamente terminada, nestes casos os últimos dois zeros de transmissão foram deslocados para o infinito⁵. Filtros com diferentes valores de A_{max} são versões escaladas em frequência, como nos de Butterworth. Filtros com diferentes valores de A_{min} tem que ser completamente recalculados.

5.1.4 Aproximação elíptica

Também conhecidas como aproximações de Cauer⁶, são aproximações racionais simétricas, como a da figura 5.1, onde a banda passante tem oscilações semelhantes à da aproximação de Chebyshev, e a banda de rejeição tem oscilações similares à da aproximação de Chebyshev inversa. Na forma normalizada o centro geométrico da banda de transição fica em $\omega = 1$ rad/s, e os zeros de atenuação e transmissão ficam em frequências uma inversa da outra. A aproximação pode ser caracterizada apenas por um polinômio $Q_n(\omega)$ ⁷.

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon \alpha Q_n(\omega)}{\omega^n Q_n(1/\omega)} = \frac{\epsilon \alpha Q_n(\omega)}{Q_{nr}(\omega)}$$

Estas aproximações são as de maior seletividade possível, dada a ordem e as atenuações A_{max} e A_{min} . Os casos de ordem par não tem ganho máximo em $\omega = 0$ nem zeros de transmissão no infinito. A tabela 5.5 lista exemplos de filtros elípticos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, escalados para $\omega_p = 1$ rad/s. Os correspondentes polos e zeros estão na tabela 5.6. As terminações são diferentes, como nos filtros de Chebyshev, nos casos de ordem par, e são normalizadas com valores inversos. As redes não são fisicamente simétricas ou antissimétricas devido aos tanques LC criando os zeros de transmissão imaginários, mas elas são eletricamente simétricas para ordens ímpares e antissimétricas para ordens pares. Os casos de ordem par foram modificados para terem dois zeros de transmissão no infinito, como feito para os filtros Chebyshev inverso. Para estas aproximações, filtros com diferentes especificações de atenuação na banda passante ou na de rejeição são diferentes e precisam ser completamente recalculados.

5.1.5 Generalização das aproximações por função característica

O caso geral das aproximações descritas é o em que a função característica é descrita por dois polinômios $X(\omega)$ e $Y(\omega)$, do mesmo grau:

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon \alpha X_n(\omega)}{\omega^n Y_n(1/\omega)} = \frac{\epsilon \alpha X_n(\omega)}{Y_{nr}(\omega)}$$

O número de raízes em 0 de $X_n(\omega)$ é o número de zeros de atenuação em zero, e o número de raízes em 0 de $Y_n(\omega)$ é o número de zeros de transmissão no infinito. As aproximações são obtidas com $K(j) = \epsilon \alpha X(1)/Y(1)$, o que coloca o centro da banda de transição em $\omega = 1$ rad/s se $X_n(1) = Y_n(1) = 1$. Se $X_n(1) = 1$ e $Y_n(1) = \alpha$ tem-se $\omega_p = 1$ rad/s, e se $X_n(1) = \alpha$ e $Y_n(1) = 1$ tem-se $\omega_s = 1$ rad/s. Assim, a aproximação de Butterworth é obtida com $X_n(\omega) = \omega^n$ e $Y_n(\omega) = \alpha \omega^n$, a de Chebyshev com $X_n(\omega) = C_n(\omega)$ e $Y_n(\omega) = \alpha \omega^n$, a de Chebyshev inversa com $X_n(\omega) = \alpha \omega^n$ e $Y_n(\omega) = C_n(\omega)$, e a elíptica com $X_n(\omega) = Y_n(\omega) = Q_n(\omega)$. Outras aproximações, e também estas, podem ser obtidas pela variação no número de zeros de transmissão em zero e do número de zeros de transmissão no infinito, e pela otimização numérica dos polinômios $X_n(\omega)$ e $Y_n(\omega)$ de forma a gerar a forma desejada para $K(j\omega)$ ⁸.

⁵É possível realizar esta operação com uma “transformação de Moebius” sobre o filtro original [11].

⁶Wilhelm Cauer, “Siebhaltungen”, V. D. I. Verlag, 1931.

⁷A obtenção analítica deste polinômio é um tanto complexa e não será estudada aqui por enquanto, mas ele pode ser obtido facilmente por otimização numérica. Estes polinômios são diferentes para diferentes valores de $\epsilon \alpha$

⁸O programa Eletsim faz estas otimizações, na forma descrita a seguir.

Tabela 5.3: Filtros normalizados Chebyshev inverso com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os casos de ordem par foram modificados para terem dois zeros de transmissão no infinito, e no caso de ordem 7 a atenuação foi aumentada até o valor limite onde ainda existe a realização LC duplamente terminada, onde C_1 desaparece, com $A_{min} = 41.9339$ dB. Os filtros estão escalados para $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.96523	1.00000						
2	1.96523	1.98254	1.00000					
3	2.07715	3.16076	2.51675	1.00000				
4	2.26632	4.58302	4.93504	3.14167	1.00000			
5	3.04698	6.94291	9.08203	7.50204	3.87456	1.00000		
6	3.88544	10.18551	15.54645	15.56495	10.59695	4.60368	1.00000	
7	5.90721	16.34397	27.75084	31.58163	25.71075	14.66932	5.41710	1.00000
Polinômios P(s)								
n	cte	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6
1	1.96523	1.00000						
2	1.96523	1.00000						
3	0.11193	18.55796		1.00000				
4	0.30109	7.52696		1.00000				
5	0.09014	33.80118		13.00023		1.00000		
6	0.27582	14.08687		7.96184		1.00000		
7	0.07945	74.34779		64.70096		16.08738		1.00000
Ladder LC d. t.								
n	Rg/Rl	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	1.01769						
2	1.00000		1.00881					
	1.00000	1.00881						
3	1.00000		1.52168					
	1.00000	0.76084	0.03541	0.76084				
4	1.00000		1.47566	0.09588	0.54657			
	1.00000	0.63660		1.38562				
5	1.00000		1.02900		1.24962			
	1.00000	0.28421	0.27046	1.55924	0.08507	0.43518		
6	1.00000		0.71035		1.65069	0.19453	0.26042	
	1.00000	0.03496	0.53044	1.61799		0.96850		
7	1.00000		0.62804		1.21654		0.92226	
	1.00000	0.00000	0.48400	1.25647	0.38853	1.23631	0.10151	0.27400

Tabela 5.4: Filtros normalizados Chebyshev inverso com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, polos e zeros.

Polos							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
1	-1.96523						
2	-0.99127	1.40187					
	0.99127	0.70711					
3	-0.60121	1.25713	-1.31434				
	1.10405	1.04551					
4	-0.41431	1.18427	-1.15653	1.27119			
	1.10943	1.42922	0.52761	0.54957			
5	-0.28108	1.13658	-0.94610	1.28873	-1.42019		
	1.10127	2.02178	0.87506	0.68107			
6	-0.21342	1.10699	-0.74059	1.24457	-1.34784	1.43073	
	1.08622	2.59349	1.00024	0.84026	0.47992	0.53075	
7	-0.16085	1.08357	-0.56201	1.21000	-1.17356	1.45454	-1.62425
	1.07156	3.36820	1.07156	1.07649	0.85932	0.61971	
Zeros							
n	w1	w2	w3				
1							
2							
3	4.30789						
4	2.74353						
5	3.06709	1.89557					
6	2.30389	1.62909					
7	3.26832	1.81378	1.45454				

Tabela 5.5: Filtros normalizados elípticos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os casos de ordem par foram modificados para terem dois zeros de transmissão no infinito. Os filtros estão escalados para $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.96523	1.00000						
2	1.10251	1.09773	1.00000					
3	0.52652	1.24338	0.97824	1.00000				
4	0.33389	0.78812	1.49460	0.94264	1.00000			
5	0.22985	0.78813	1.12923	1.84712	0.92340	1.00000		
6	0.18044	0.52941	1.35729	1.44413	2.19522	0.91665	1.00000	
7	0.16409	0.61549	1.12573	2.27761	1.87481	2.66453	0.91245	1.00000
Polinômios P(s)								
n	cte	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6
1	1.96523	1.00000						
2	0.98261	1.00000						
3	0.06920	7.60846		1.00000				
4	0.09888	3.00956		1.00000				
5	0.04697	4.89329		4.68475		1.00000		
6	0.06685	2.40575		3.15939		1.00000		
7	0.04342	3.77933		7.76932		5.04161		1.00000
Ladder LC d. t.								
n	Rg/Rl	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	1.01769						
2	1.63087		1.11716					
	0.61317	1.11716						
3	1.00000		0.90421					
	1.00000	1.90941	0.14536	1.90941				
4	1.63087		1.56041	0.24659	1.08802			
	0.61317	1.30096		1.34747				
5	1.00000		0.58608		0.88163			
	1.00000	1.41517	1.08537	2.13067	0.36440	1.84422		
6	1.63087		0.69866		1.61193	0.45769	0.98137	
	0.61317	0.71306	1.11803	1.41622		1.16268		
7	1.00000		0.45393		0.32951		0.85560	
	1.00000	1.20109	1.70759	1.20355	2.73822	1.64784	0.44218	1.81054

Polos							
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							
1	-1.96523						
2	-0.54887	1.05000					
	0.89513	0.95652					
3	-0.22726	1.00267	-0.52372				
	0.97657	2.20599					
4	-0.11423	0.99816	-0.35709	0.57890			
	0.99160	4.36919	0.45564	0.81057			
5	-0.04992	0.99945	-0.21911	0.77275	-0.38534		
	0.99820	10.01033	0.74103	1.76340			
6	-0.02684	0.99959	-0.12766	0.86922	-0.30383	0.48889	
	0.99923	18.62364	0.85980	3.40434	0.38302	0.80456	
7	-0.01134	0.99986	-0.06014	0.94231	-0.20591	0.71891	-0.35765
	0.99980	44.06782	0.94039	7.83392	0.68879	1.74566	
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							
Zeros							
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							
n	w1	w2	w3				
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							
1							
2							
3	2.75834						
4	1.73481						
5	1.76429	1.25381					
6	1.37083	1.13147					
7	1.62579	1.13583	1.05276				
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+							

5.1.5.1 Obtenção da função característica por otimização

Um método que obtém numericamente $K(j\omega)$ para as aproximações clássicas e muitas variações, descrito em [12], é o seguinte: Seja o número de zeros de atenuação da aproximação na origem, p_x , o número de raízes na origem de $X_n(\omega)$, e o número de zeros de transmissão no infinito, p_y , o número de raízes na origem de $Y_n(\omega)$. Com isto, e dado o grau da aproximação, n , $X_n(\omega)$ possui $m_x = (n - p_x)/2 + 1$, e $Y_n(\omega)$ $m_y = (n - p_y)/2 + 1$ coeficientes a serem determinados. Na banda passante, a função $K(j\omega)/\epsilon = \alpha X_n(\omega)/Y_{nr}(\omega)$ possui $m_x - 1$ valores extremos f_{xk} a serem determinados, cada um ocorrendo em uma frequência ω_{xk} , $0 \leq \omega < 1$ (um em 0 somente se $p_x = 0$, quando não há zero de atenuação na origem). Cada valor $f_{xk} = \pm 1$ produz um ponto na frequência ω_{xk} onde a atenuação na banda passante vale A_{max} dB, e cada mudança de sinal entre f_{xk} sucessivos produz zeros de atenuação entre frequências ω_{xk} sucessivas, com máxima transferência de potência possível na realização LC duplamente terminada. As características na banda de rejeição podem ser especificadas da mesma forma, mas usando-se a função $\alpha Y_n(\omega)/X_{nr}(\omega)$, que possui $m_y - 1$ valores extremos f_{yk} a serem especificados, cada um ocorrendo em uma frequência ω_{yk} , $0 \leq \omega < 1$ (um em 0 somente se $p_y = 0$, quando não há zero de transmissão no infinito, caso irrealizável em rede LC duplamente terminada). Cada valor $f_{yk} = \pm 1$ produz um ponto na frequência $1/\omega_{yk}$, onde a atenuação vale A_{min} dB, e cada troca de sinal entre f_{yk} sucessivos produz zeros de transmissão entre duas frequências $1/\omega_{yk}$ sucessivas. Valores $f_{xk} = 0$ produzem zeros duplos de atenuação e valores $f_{yk} = 0$ produzem zeros duplos de transmissão. Valores f_{xk} produzindo qualquer atenuação Ap_k na banda passante podem ser calculados por $f_{xk} = \pm \frac{1}{\epsilon} \sqrt{10^{0.1Ap_k} - 1}$, e valores f_{yk} produzindo qualquer atenuação Ar_k na banda de rejeição podem ser calculados por $f_{yk} = \pm \epsilon \alpha^2 / \sqrt{10^{0.1Ar_k} - 1}$.

Seja uma aproximação de ordem n . A função $K(j\omega)/\epsilon$ desejada tem a forma:

$$\frac{\alpha X_n(\omega)}{Y_{nr}(\omega)} = \frac{ax_n\omega^n + ax_{n-2}\omega^{n-2} + \dots + ax_{p_x+2}\omega^{p_x+2} + ax_{p_x}\omega^{p_x}}{ay_{p_y}\omega^{n-p_y} + ay_{p_y+2}\omega^{n-p_y-2} + \dots + ay_{n-2}\omega^2 + ay_n}$$

Como aproximação inicial, pode ser usado para $X_n(\omega)$ o polinômio $\omega^{p_x-1}C_{n-p_x+1}(\omega)$ para n ímpar ou $\omega^{p_x}C_{n-p_x}(\omega)$ para n par, onde $C_k(\omega)$ o polinômio de Chebyshev de ordem k . Para $Y_n(\omega)$ usa-se uma aproximação semelhante, com p_y no lugar de p_x . O algoritmo para a determinação dos coeficientes $\vec{a}\vec{x}$ e $\vec{a}\vec{y}$ de $X_n(\omega)$ e $Y_n(\omega)$ e das frequências $\vec{\omega}_x$ e $\vec{\omega}_y$ é:

1. Achar ω_{xk} , $k = 1, \dots, m_x - 1$, as $m_x - 1$ raízes imediatamente menores que 1 do polinômio $Y_{nr}(\omega)X'_n(\omega) - X_n(\omega)Y'_{nr}(\omega)$, zeros da derivada de $\alpha X_n(\omega)/Y_{nr}(\omega)$ em relação a ω para $0 \leq \omega < 1$.
2. Resolver o sistema de equações lineares dado por: $\alpha X_n(\omega_{xk}) = f_{xk}Y_{nr}(\omega_{xk})$, $k = 1, \dots, m_x - 1$; $X_n(1) = 1$, para encontrar os novos coeficientes de $X_n(\omega)$.
3. Trocando $X_n(\omega)$ com $Y_n(\omega)$, $\vec{\omega}_x$ com $\vec{\omega}_y$, \vec{f}_x com \vec{f}_y e m_x com m_y , repetir (1) e (2).
4. Repetir (1), (2) e (3) até a convergência.

A convergência é um pouco demorada, mas segura, havendo apenas limites de ordem devidos a acumulação de erro numérico. As restrições sobre os valores dos f_{xk} e f_{yk} para a convergência do algoritmo são de que três valores sucessivos não podem estar em ordem crescente ou decrescente, e dois valores sucessivos não devem ser iguais ou o sistema (2) torna-se singular na convergência. Isto inclui os valores de $\alpha X_n(\omega)/Y_{nr}(\omega)$ e $\alpha Y_n(\omega)/X_{nr}(\omega)$ em $\omega = 0$ (0, se $p_{x,y} > 0$) e $\omega = 1$ (α , já que $X(1) = Y(1) = 1$). Apesar disto, aproximações com zeros de atenuação ou transmissão com multiplicidade maior que 2 no eixo $j\omega$, podem ser obtidas com precisão satisfatória especificando-se múltiplos f_{xk} ou f_{yk} seguidos como 0.

O método permite a geração numérica das complexas aproximações elípticas, e permite facilmente a modificação de aproximações de Chebyshev inversas e elípticas de ordem par para terem dois zeros de transmissão no infinito, permitindo realizações normais LC duplamente terminadas. É também simples

modificar aproximações de Chebyshev e elípticas de ordem par para que tenham dois zeros de atenuação em zero, permitindo terminações iguais na rede LC que realiza o filtro. Em [12] o método foi desenvolvido para a realização de filtros com estruturas LC dup. term. simétricas e antissimétricas, o que pode ser feito gerando zeros de transmissão duplos no eixo imaginário, de forma que tanques LC nas duas metades da rede sejam iguais ou duais.

Exemplo: Seja obter um filtro similar a um filtro elíptico de quinta ordem, com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, que normalmente apresentaria zeros de atenuação em zero e em duas frequências na banda passante (os zeros de $K(j\omega)$ na figura 5.2), com uma modificação que gere zeros duplos de atenuação na borda da banda passante. Isto gera também, em uma realização LC duplamente terminada, zeros duplos de sensibilidade em relação aos elementos reativos nesta frequência. A função característica necessária tem a aparência da figura 5.8, resultando em filtros como o da figura 5.9.

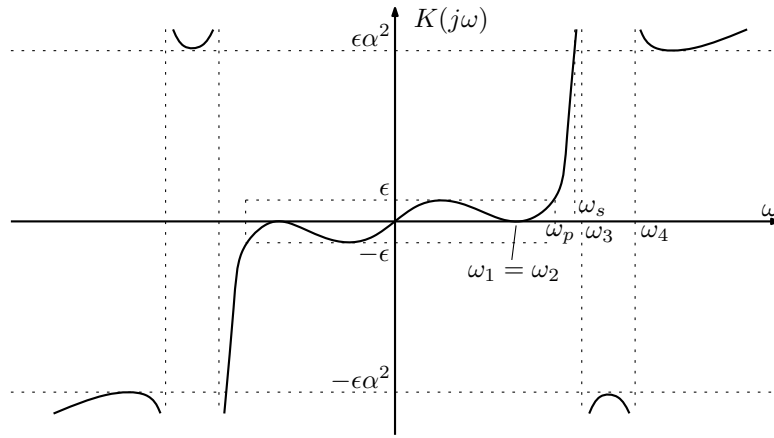


Figura 5.8: Gráfico de $K(j\omega)$ que gera zeros duplos de atenuação na borda da banda passante.

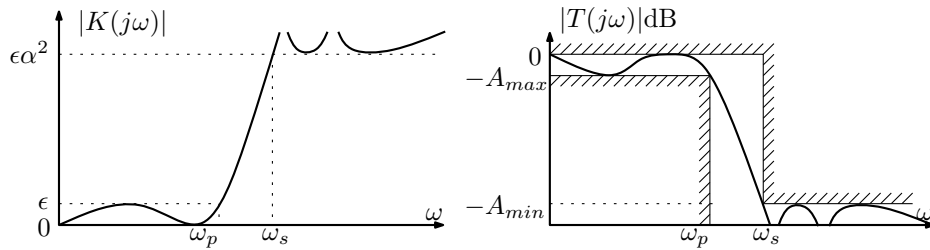


Figura 5.9: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação com zeros duplos de atenuação na borda da banda passante (ordem 5).

No método de otimização, são especificados $\vec{f}_x = (1, 0)$ e $\vec{f}_y = (1, -1)$. As atenuações geram $\epsilon = 0.50885$ e $\alpha = 14.018$. Ao fim do processo, normalizando-se a borda da banda passante para $\omega_p = 1$ rad/s, os polinômios da aproximação são obtidos como:

$$F(s) = s^5 + 1.5320s^3 + 0.58678s$$

$$P(s) = 0.051281(s^4 + 5.4432s^2 + 6.5413)$$

$$E(s) = s^5 + 1.1598s^4 + 2.2033s^3 + 1.5236s^2 + 1.0859 + 0.33545$$

A síntese da rede leva à estrutura da figura 5.10. Uma comparação da curva de módulo com a de um filtro elíptico convencional é mostrada na figura 5.11.

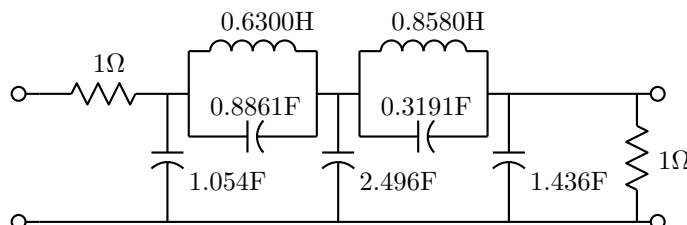


Figura 5.10: Rede “ladder” LC duplamente terminada realizando um filtro com zeros duplos de atenuação na borda da banda passante.

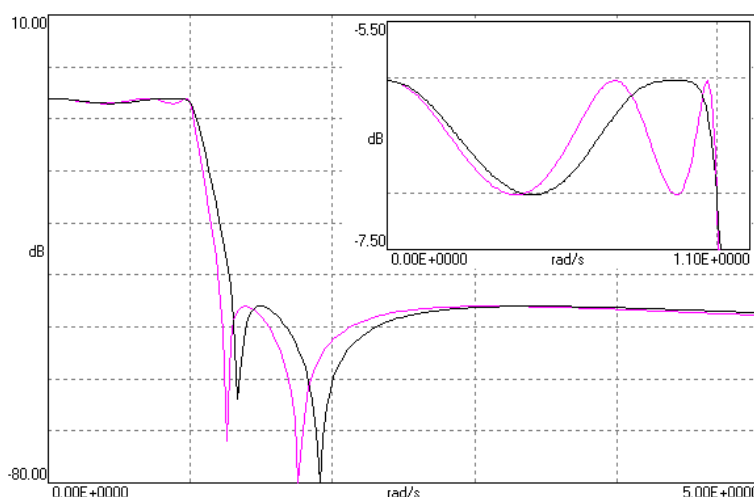


Figura 5.11: Curva de módulo do filtro da figura 5.10, comparada com a de um filtro elíptico de ordem 5, com detalhe da banda passante.

O mesmo tipo de modificação pode ser feito nos filtros racionais de ordem maior que 3. A tabela 5.7 lista os polinômios, polos e zeros e realizações para alguns destes filtros. Os filtros de ordem par foram feitos com zeros duplos de transmissão no infinito.

5.2 Outras aproximações

Em filtros processando sinais onde a forma de onda é importante (como vídeo, dados), e não apenas o espectro de frequências (como áudio), é importante manter os diferentes componentes de frequência do sinal filtrado com suas relações originais de atraso e de fase. Um filtro ideal deveria portanto atrasar igualmente todos os sinais na sua banda passante, o que se consegue fazendo com que a fase da função de transferência seja proporcional à frequência, ou, que o filtro tenha “fase linear”. Nas aproximações de módulo estudadas este aspecto é ignorado, e então os filtros podem distorcer severamente as formas de onda filtradas. É possível entretanto gerar aproximações em que o que se procura obter é a linearidade

Tabela 5.7: Filtros racionais assimétricos com zeros duplos de atenuação na borda da banda passante, normalizados com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
4	0.63249	1.37452	2.10394	1.43721	1.00000			
5	0.33545	1.08592	1.52363	2.20326	1.15978	1.00000		
6	0.23149	0.66360	1.62800	1.72374	2.42437	1.04438	1.00000	
7	0.18675	0.69167	1.25397	2.47582	2.03920	2.78672	0.96869	1.00000
Polos								
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4	
4	-0.20636	1.05483	-0.51224	0.75396				
	1.03444	2.55577	0.55323	0.73594				
5	-0.08777	1.02333	-0.27712	0.86311	-0.42999			
	1.01956	5.82970	0.81741	1.55726				
6	-0.04613	1.01193	-0.15416	0.92041	-0.32189	0.51658		
	1.01088	10.96829	0.90741	2.98516	0.40403	0.80240		
7	-0.01951	1.00515	-0.07032	0.96573	-0.21157	0.73599	-0.36589	
	1.00496	25.76041	0.96317	6.86673	0.70493	1.73934		
Polinômios P(s)								
n	cte	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6
4	0.13983	4.03127		1.00000				
5	0.05128	6.54134		5.44322		1.00000		
6	0.07359	2.80370		3.41602		1.00000		
7	0.04437	4.20946		8.36104		5.23557		1.00000
Zeros								
n	w1	w2	w3					
4	2.00780							
5	1.91105	1.33833						
6	1.43005	1.17088						
7	1.66013	1.15675	1.06840					
Ladder LC d. t.								
n	Rg/R1	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
4	1.63087		1.72857	0.15650	0.70977			
	0.61317	0.85328		1.58506				
5	1.00000		0.63004		0.85796			
	1.00000	1.05383	0.88615	2.49647	0.31915	1.43622		
6	1.63087		0.71625		1.67543	0.44174	0.82467	
	0.61317	0.55970	1.01837	1.54969		1.10696		
7	1.00000		0.42717		0.40223		0.81016	
	1.00000	1.05182	1.74952	1.35279	2.17799	1.68321	0.44786	1.67993

da fase. Como a fase é uma função inconveniente de tratar numericamente, pode-se trabalhar com sua derivada negativa, o atraso de grupo $T_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle T(j\omega)$. Para $T(s)$ sendo uma razão de polinômios de s , $T_g(\omega)$ é uma razão de polinômios de ω também. Se a fase for linear, o atraso de grupo é idêntico ao atraso da função de transferência. Algumas aproximações e técnicas de aproximar a fase linear são descritas a seguir.

5.2.1 Aproximação de Bessel

A aproximação de Bessel [11] gera filtros com atraso de grupo maximamente plano. Ela é uma aproximação polinomial, onde o polinômio $E(s)$, para atraso de grupo unitário, é um dos polinômios abaixo. $P(s)$ é um constante, igual ao coeficiente de grau 0. Não há controle sobre a forma da curva de módulo, que resulta com queda monotônica. O atraso de grupo mantido unitário aumenta a frequência da borda da banda passante conforme o grau.

$$\begin{aligned} E_1(s) &= s + 1 \\ E_2(s) &= s^2 + 3s + 3 \\ E_3(s) &= s^3 + 6s^2 + 15s + 15 \\ E_4(s) &= s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105 \\ E_5(s) &= s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945 \\ E_n(s) &= (2n - 1)E_{n-1}(s) + s^2E_{n-2}(s) \end{aligned}$$

5.2.2 Aproximação com atraso de grupo tipo Chebyshev

Analogamente ao feito para filtros de módulo, pode-se derivar uma série de aproximações onde o atraso de grupo oscila entre dois limites, como acontece com o módulo nos filtros de Chebyshev. As referências estão em [11]. Uma aproximação muito semelhante especifica desvio máximo da fase linear. Tabelas para estes filtros podem ser encontradas em [13]. Estes filtros apresentam melhor seletividade que os de Bessel e fase linear em faixa mais ampla, como pode ser visto na comparação entre um filtro de Bessel e um com erro “equiripple” de fase de 0.5° , mostrado na figura 5.12.⁹

5.2.3 Aproximação com atraso de grupo plano e zeros de transmissão finitos

Como zeros de transmissão no eixo imaginário não afetam a fase, a menos de invertê-la na passagem por eles, podem ser incluídos diretamente nos filtros polinomiais de Bessel e de atraso de grupo tipo Chebyshev sem afetar as características de atraso de grupo. O problema é apenas de localizá-los de forma a gerar atenuação com limite constante A_{min} na banda de rejeição. Também há referências a esta aproximação em [11].

5.2.4 Realização destes filtros

Como estas aproximações são especificadas diretamente por $H(s)$, podem ser diretamente realizadas em redes LC simplesmente terminadas, mas a realização duplamente terminada requer o cálculo de $K(s)$ a partir da equação de Feldtkeller. Como $K(s)$ não tem restrições de estabilidade, várias soluções podem existir na escolha das raízes de $F(s)$ entre as de $F(s)F(-s) = E(s)E(-s) + P(s)P(-s)$, levando a várias possíveis realizações.

⁹As tabelas no livro de Zverev sempre colocam a atenuação na borda da banda passante $\omega_p = 1$ rad/s em 3.0103 dB. Daí os filtros de Bessel estão escalados em relação aos discutidos aqui. As tabelas listam também realizações LC dup. term. com terminações diferentes.

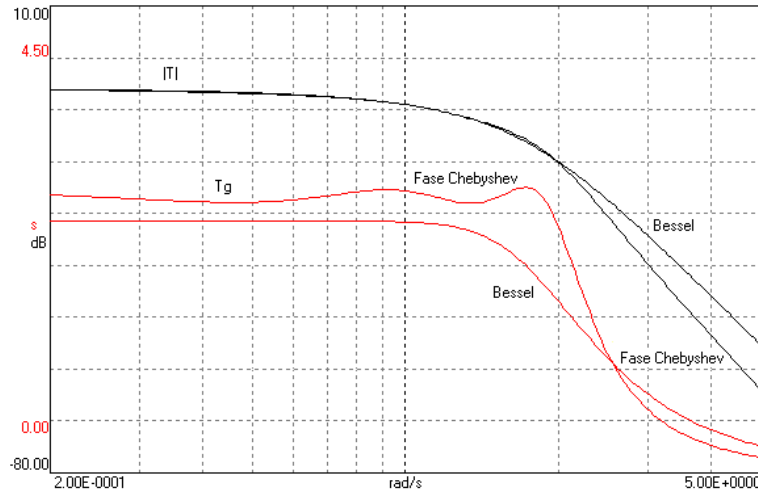


Figura 5.12: Curvas de módulo e atraso de grupo para um filtro de Bessel e um de fase linear com “ripple” de fase tipo Chebyshev de 0.5° .

Exemplo: Seja projetar um filtro de Bessel normalizado de ordem 5 em forma LC duplamente terminada. $E(s)$ e $P(s)$ são obtidos imediatamente da lista acima, e $F(s)$, da solução da equação de Feldtkeller, pode ter as raízes:

$$\begin{aligned} &\pm 2.54456 \pm 3.52462j \\ &0 \\ &\pm 3.88052 \pm 1.26895j \end{aligned}$$

É possível escolher as raízes em um dos semiplanos ou um par em cada semiplano, levando a quatro possibilidades para $F(s)$ que são:

$$\begin{aligned} -2.5 \pm 3.5j, -3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 + 12.8502s^4 + 75.0632s^3 + 231.495s^2 + 315s \\ +2.5 \pm 3.5j, -3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 + 2.67192s^4 - 3.93042s^3 + 61.8372s^2 + 315s \\ -2.5 \pm 3.5j, +3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 - 2.67192s^4 - 3.93042s^3 - 61.8372s^2 + 315s \\ +2.5 \pm 3.5j, +3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 - 12.8502s^4 + 75.0632s^3 - 231.495s^2 + 315s \end{aligned}$$

Note-se que $F(s)$ não é puramente par ou ímpar, $K(j\omega)$ é complexo, e existe apenas um zero simples de atenuação no eixo imaginário, em zero. Com terminações iguais unitárias, a síntese usando os dois primeiros $F(s)$ gera as estruturas da figura 5.13. Os dois últimos são $F(-s)$ dos primeiros, e geram as mesmas redes invertidas. Com $-F(s)$ se obtém as formas duais. As estruturas não são simétricas.

Note-se que é inútil tentar obter filtros passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa com fase linear a partir de transformações destes filtros, pois as características de fase ficam distorcidas pelas transformações.

5.2.5 Equalizadores de fase

Uma forma de obter filtros com curvas de módulo ótimas e fase linear é colocar em cascata filtros convencionais de módulo e filtros “passa-tudo”, que tem polos e zeros em posições simétricas no plano complexo. Estes filtros tem módulo constante com a frequência mas fase que varia, igual ao dobro da fase de um filtro passa-baixas com os mesmos polos. É possível então obter um filtro com a curva de

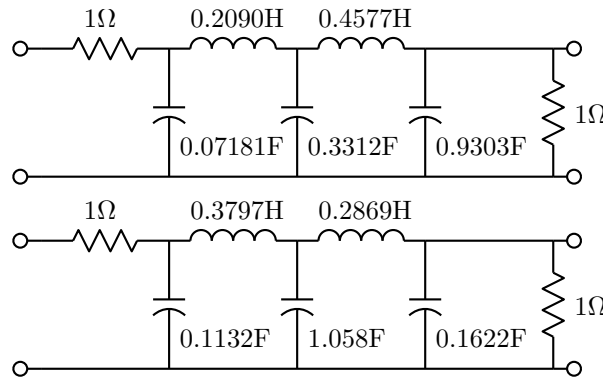


Figura 5.13: Redes “ladder” LC duplamente terminadas realizando filtros normalizados de Bessel.

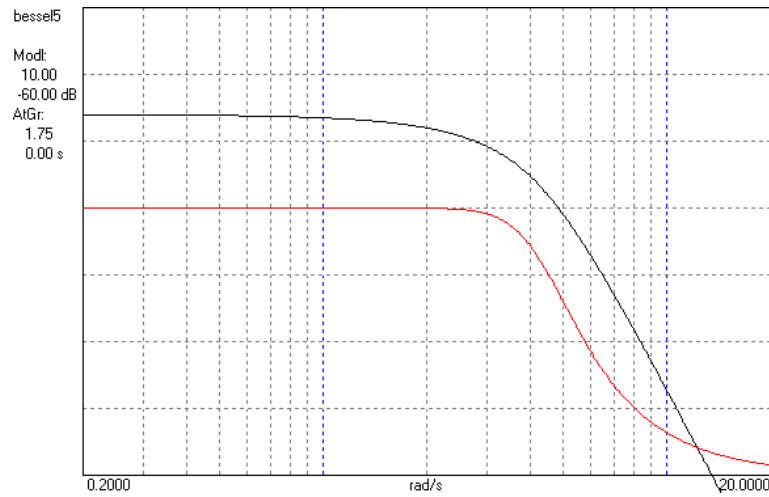


Figura 5.14: Curvas de módulo e de atraso de grupo para os filtros da figura 5.13.

módulo do filtro original, e a curva de fase sendo a soma das curvas de fase do filtro de módulo e do filtro passa-tudo. O atraso de grupo se soma também, e se procura obter da composição uma curva de atraso de grupo maximamente plana, ou, mais usualmente, que varia entre dois limites dentro da banda passante. A aproximação para filtros equalizadores é obrigatoriamente por otimização numérica, embora soluções quase ótimas sejam bastante fáceis de se obter por tentativas. A realização passiva de filtros passa-tudo não pode ser feita em “ladder” devido aos zeros no semiplano lateral direito, mas realizações passivas em “lattice” LC duplamente terminada [11] são possíveis. Estas realizações exigem dobrar a ordem da estrutura, duplicando todos os polos, e realizando zeros em pares reais simétricos ou grupos de quatro em simetria quadrantal, cancelando os polos duplicados. Realizações ativas são sempre possíveis, evitando estas complicações.

Exemplo: O filtro normalizado da figura 5.15 é um filtro elíptico de quarta ordem com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB realizado em forma LC simplesmente terminada (que permite ganho constante no infinito) conectado a um equalizador de fase dimensionado para gerar um filtro com “ripple” uniforme de fase na banda passante. O equalizador baseado em giradores é de quarta ordem, e apresenta impedância

de entrada constante de $1\ \Omega$, servindo de terminação para o filtro¹⁰

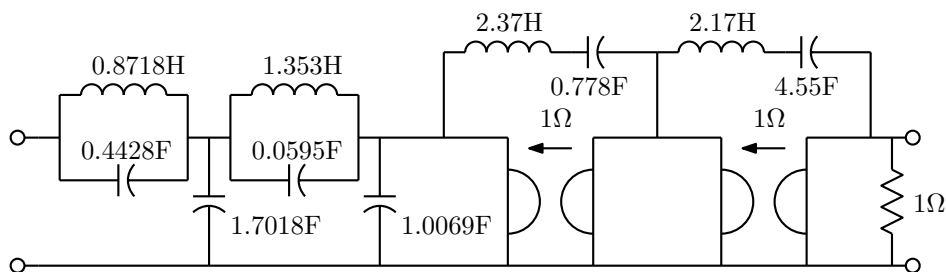


Figura 5.15: Rede “ladder” LC simplesmente terminada ligada a um equalizador de fase.

Os polos e zeros do filtro completo, contando os do filtro e do equalizador, são:

Polos:	Zeros:
$-0.211 \pm 0.706j$	$\pm 3.525j$
$-0.105 \pm 0.994j$	$\pm 1.610j$
$-0.230 \pm 0.220j$	$+0.230 \pm 0.220j$
$-0.364 \pm 0.479j$	$+0.211 \pm 0.706j$

A figura 5.16 mostra as curvas de módulo e atraso de grupo, para a saída normal do filtro, antes do equalizador, e a para a saída equalizada.

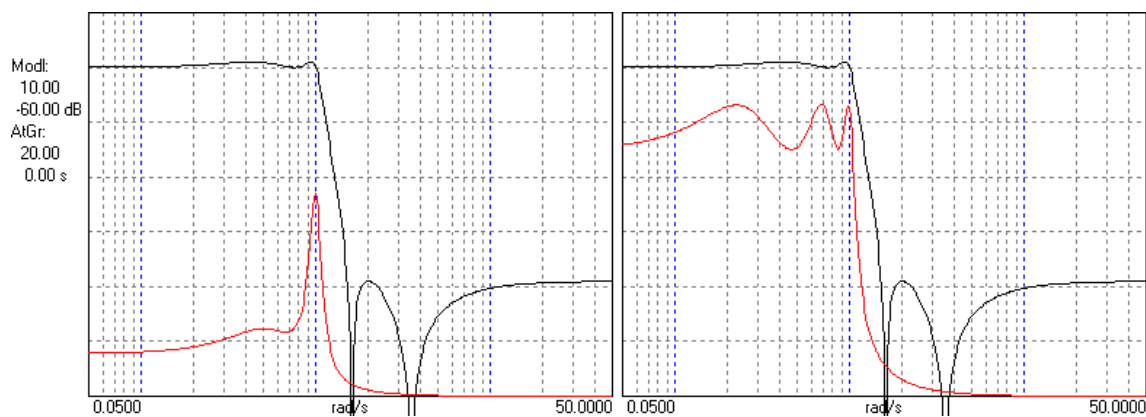


Figura 5.16: Curvas de módulo e de atraso de grupo para o filtro da figura 5.15, normal (esquerda) e equalizado (direita).

¹⁰Do artigo “Statistical prediction of errors in the localization of poles and zeros by sensitivity analysis”, de A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, IEEE ISCAS, 1996.

Capítulo 6

Análise de sensibilidades

JÁ foi brevemente discutida a vantagem de estruturas LC duplamente terminadas sobre outras formas de realização, ao menos para aproximações que apresentem múltiplos zeros de atenuação na banda passante. A sensibilidade da função de transferência à variação dos parâmetros do circuito é um critério lógico para a comparação de formas alternativas para a realização de um filtro, e é aplicável a qualquer estrutura.

6.1 A função sensibilidade

A sensibilidade de uma função $f(x)$ em relação a um parâmetro x é definida como:

$$S_x^{f(x)} = \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \approx \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

para pequenas variações. É uma razão de variações relativas que serve para avaliar o quanto a função $f(x)$ é sensível a variação de x , de uma forma normalizada tanto pela função quanto pelo parâmetro. A tabela abaixo lista algumas propriedades básicas da função sensibilidade:

$$\begin{aligned} f(x) = Ax^k &\longrightarrow S_x^{f(x)} = k \\ S_x^{f(x)} &= -S_x^{\frac{1}{f(x)}} \\ S_x^{f_1(x)f_2(x)} &= S_x^{f_1(x)} + S_x^{f_2(x)} \\ S_x^{f_1(x)/f_2(x)} &= S_x^{f_1(x)} - S_x^{f_2(x)} \\ S_x^{f(x)} &= \frac{1}{k} S_x^{f(x)} \\ S_x^{f_1(x)+f_2(x)} &= \frac{f_1(x)S_x^{f_1(x)} + f_2(x)S_x^{f_2(x)}}{f_1(x) + f_2(x)} \end{aligned}$$

Exemplos: Em um tanque LC a frequência de ressonância vale $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. A sensibilidade de f em relação a L ou C vale $-\frac{1}{2}$ (pela primeira fórmula da tabela), indicando que uma variação de $\alpha\%$ na indutância ou na capacitância produz uma variação de $-\frac{1}{2}\alpha\%$ em f . Em um divisor resistivo de R_1 e R_2 , R_2 aterrado, o ganho de tensão vale $A = \frac{R_2}{R_1+R_2}$. As sensibilidades de A em relação a R_1 e R_2 valem, usando a fórmula da razão e a da soma, $S_{R_1}^A = S_{R_1}^{R_2} - S_{R_1}^{R_1+R_2} = 0 - \frac{R_1}{R_1+R_2}$ e $S_{R_2}^A = S_{R_2}^{R_2} - S_{R_2}^{R_1+R_2} = 1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}$. Com resistores iguais resultam $S_{R_1}^A = -\frac{1}{2}$ e $S_{R_2}^A = \frac{1}{2}$. Isto é

o que ocorre com as terminações de uma rede LC duplamente terminada nas frequências de máxima transferência de potência, como já mencionado.

6.2 Sensibilidades de módulo e fase

A função sensibilidade de uma função de transferência em transformada de Laplace $T(s)$ em relação a um parâmetro x_i é definida na forma:

$$S_{x_i}^{T(s)} = \frac{x_i}{T(s)} \frac{\partial T(s)}{\partial x_i}$$

É portanto uma razão entre variações relativas de $T(s)$ e de x_i . Valores numéricos podem ser obtidos definindo a sensibilidade no estado permanente senoidal:

$$S_{x_i}^{T(j\omega)} = \frac{x_i}{T(j\omega)} \frac{\partial T(j\omega)}{\partial x_i}$$

Observando que uma variação relativa é uma variação do logaritmo, uma interessante interpretação do valor complexo da sensibilidade é obtida:

$$\frac{x_i}{T(j\omega)} \frac{\partial T(j\omega)}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial \ln x_i} = \frac{\partial (\ln |T(j\omega)| + j\angle T(j\omega))}{\partial \ln x_i}$$

onde foi usada a expressão para o logaritmo de um valor complexo. Separando as partes real e imaginária, vem:

$$S_{x_i}^{T(j\omega)} = \frac{\partial \ln |T(j\omega)|}{\partial \ln x_i} + j \frac{\angle T(j\omega)}{\partial \ln x_i}$$

A parte real é então a sensibilidade do módulo de $T(j\omega)$ em relação a x_i , e a parte imaginária uma sensibilidade não normalizada da fase de $T(j\omega)$ em relação a x_i . O resultado é natural, pois não faria sentido a divisão pela fase, pois, por exemplo, uma fase de 0° é tão significativa quando uma de 360° . A sensibilidade não normalizada será escrita como S' .

$$S_{x_i}^{T(j\omega)} = S_{x_i}^{|T(j\omega)|} + j S_{x_i}'^{\angle T(j\omega)}$$

Sensibilidades podem ser calculadas algebricamente, ou numericamente usando o método da “rede adjunta” [11]. Com sensibilidades calculadas, previsões de erros no módulo e na fase causados por erros nos parâmetros podem ser obtidas. Sejam as variações do módulo e da fase:

$$\begin{aligned} \Delta \ln |T(j\omega)| &= S_{x_i}^{|T(j\omega)|} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ nepers, ou, em decibéis: } \Delta |T(j\omega)| = \frac{20}{\ln 10} S_{x_i}^{|T(j\omega)|} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ dB} \\ \Delta \angle T(j\omega) &= S_{x_i}'^{\angle T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ rads, ou, em graus: } \Delta \angle T(j\omega) = \frac{180}{\pi} S_{x_i}'^{\angle T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ graus} \end{aligned}$$

A variação do módulo dá diretamente a variação em decibéis do módulo para uma variação relativa de x_i , e a variação da fase dá diretamente a variação da fase.

6.3 Medidas multiparamétricas

Erros em uma função de transferência devidos à variação de um conjunto de parâmetros podem ser calculados simplesmente pela soma dos erros, se se conhece seus valores e polaridades. Os desvios determinísticos do módulo e da fase para n parâmetros são dados por:

Desvios determinísticos

$$\Delta_D |T(j\omega)| = \frac{20}{\ln 10} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ dB}$$

$$\Delta_D \angle T(j\omega) = \frac{180}{\pi} \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ graus}$$

Quando os sentidos dos erros são aleatórios, pode-se usar os desvios estatísticos do módulo e da fase:

$$\Delta_E |T(j\omega)| = \frac{20}{\ln 10} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Re} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} \text{ dB}$$

$$\Delta_E \angle T(j\omega) = \frac{180}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Im} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} \text{ graus}$$

Estas medidas geram margens de erro em volta das curvas de módulo e fase da função de transferência. A definição das sensibilidades de módulo, com a divisão pelo módulo, gera divisão por zero nas sensibilidades em frequências de zeros de transmissão, e desvios infinitos nestas frequências, que devem ser ignorados como artefatos do método de análise, com erros de primeira ordem apenas.

Exemplo: Sejam filtros elípticos normalizados como os da figura 4.65. As análises de resposta em frequência com módulo e fase, com as margens de desvio estatístico¹ são mostradas na figura 6.1. Notar os picos nos zeros de transmissão nas curvas de desvio de módulo, e os erros previstos no módulo similares aos obtidos pela análise de Monte Carlo da figura 4.66. As curvas de fase são plotadas também, mas não tem maior interesse no caso.

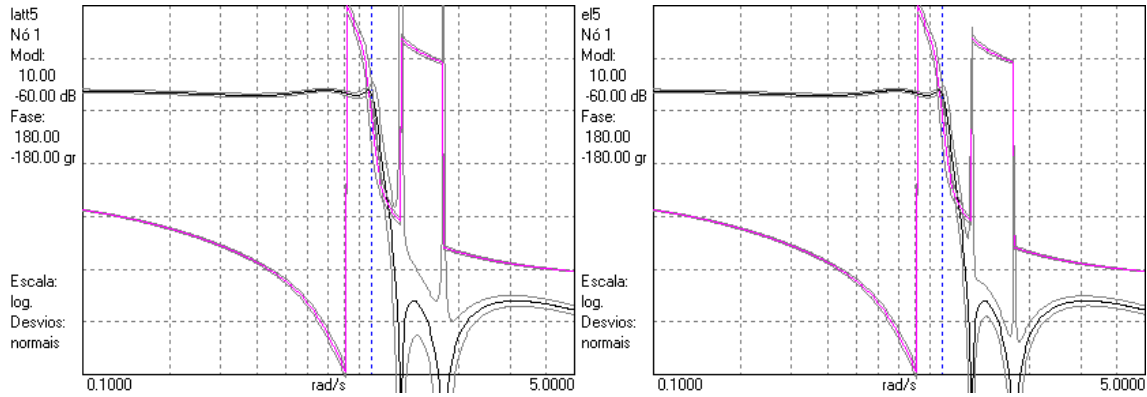


Figura 6.1: Curvas de módulo e fase com desvios estatísticos para 5% de tolerância nos componentes para as estruturas da figura 4.65

A figura 6.2 mostra em detalhe os desvios estatísticos de módulo na banda passante, que aparecem somados e subtraídos às curvas de módulo na figura 6.1. Nota-se que a forma em “lattice” desbalanceada é mais sensível no final da banda passante. Nas frequências de máxima transferência de potência as sensibilidades de módulo em relação aos elementos reativos se anulam nas duas estruturas, e restam apenas os erros causados pelas terminações, o que dá um desvio de $\frac{20}{\ln 10} \sqrt{2 \times (0.5 \times 0.05)^2} = 0.3071 \text{ dB}$.

¹Análise feita com o programa Sensi

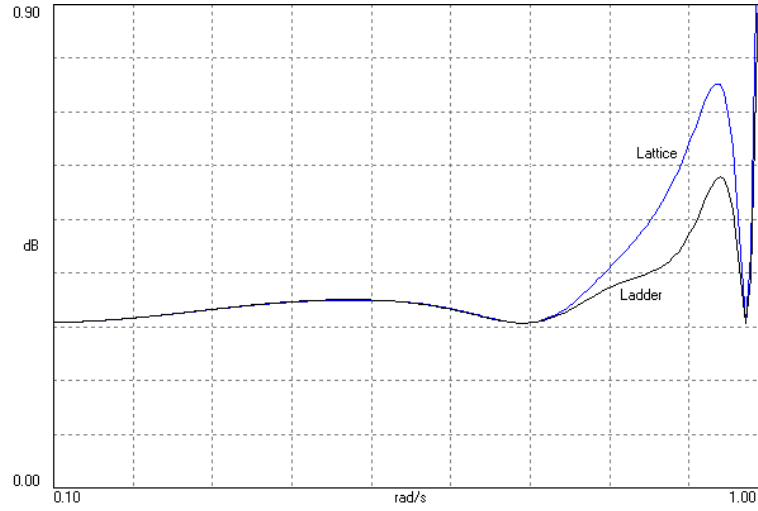


Figura 6.2: Curvas de desvio estatístico de módulo para 5% de tolerância nos componentes para as estruturas da figura 4.65. A estrutura em “lattice” desbalanceada gera o maior desvio.

6.4 Sensibilidades de polos e zeros

É também possível definir sensibilidades para polos e zeros, para calcular erros neles devidos a variação de parâmetros. As sensibilidades são na forma não normalizada, como variações divididas por variações relativas. Para zeros ou polos Z_k ou P_k :

$$S'_{x_i}{}^{Z_k} = \frac{\partial Z_k}{\partial x_i/x_i}; S'_{x_i}{}^{P_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i/x_i}$$

A não ser em casos simples estes valores não podem ser calculados analiticamente. Uma formulação numérica é possível, entretanto. É mais simples o caso de zeros. Seja $T(s)$, alterada devido à variação de um zero Z .

$$T(s) \longrightarrow T'(s) = T(s) + \Delta T(s)$$

$$Z \longrightarrow Z + \Delta Z \text{ tal que } T'(Z + \Delta Z) = 0$$

$$\text{Com o zero e a função alteradas: } T(Z + \Delta Z) + \Delta T(Z + \Delta Z) = 0$$

$$\text{Aproximando a função alterada: } T(Z + \Delta Z) \approx \cancel{T(Z)} + \frac{\partial T}{\partial s} \Big|_{s=Z} \Delta Z$$

$$\text{Aproximando a alteração na função: } \Delta T(Z + \Delta Z) \approx \Delta T(Z) + \frac{\partial \Delta T}{\partial s} \Big|_{s=Z} \Delta Z$$

$$\text{Resta então: } \frac{\partial T}{\partial s} \Big|_{s=Z} \Delta Z + \Delta T(Z) = 0$$

Pode-se exprimir ΔT e ΔZ em função dos Δx_i e aplicar na última relação:

$$\frac{\partial T}{\partial s} \Big|_{s=Z} \sum_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta x_i \Big|_{s=Z}$$

Comparando os somatórios, as derivadas e sensibilidades de Z em relação aos x_i são obtidas:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \left. \frac{-\frac{\partial T}{\partial x_i}}{\frac{\partial T}{\partial s}} \right|_{s=Z}$$

$$S'_{x_i}{}^Z = \left. \frac{-x_i \frac{\partial T}{\partial x_i}}{\frac{\partial T}{\partial s}} \right|_{s=Z} = \left. \frac{-s S'_{x_i}{}^T}{S_s'{}^T} \right|_{s=Z}$$

As sensibilidades em relação a s podem ser obtidas notando-se que s está sempre multiplicando capacitâncias, indutâncias e indutâncias mútuas em redes RLCM. Basta somar as sensibilidades em relação a todos estes parâmetros.

$$S_s'{}^T = \sum_i S'_{L_i, C_i, M_i}{}^T$$

Para as sensibilidades dos polos, pode-se analisar uma função de transferência onde os polos se tornem zeros, e proceder da mesma forma. Esta função pode ser obtida zerando a entrada do circuito original e colocando uma nova entrada em corrente em série com um elemento do circuito, que vai ser o “elemento observador”, e tomando a saída como a tensão sobre a fonte de corrente colocada, como na figura 6.3. Isto dá certo porque, se a fonte colocada fosse de tensão, $V(s)$, as frequências naturais do circuito não seriam alteradas, e com a saída sendo a corrente na fonte de tensão colocada, $I(s)$, a função $I(s)/V(s)$ teria como polos um conjunto de frequências naturais do circuito, idealmente todas. Com a entrada sendo $I(s)$ e a saída sendo $V(s)$, a função fica invertida, e os zeros é que são frequências naturais da rede original. O elemento observador deve ser um que contribua na geração dos polos dos quais se quer calcular as sensibilidades, preferencialmente um elemento RLC. A sensibilidade do polo em relação ao elemento observador é então apenas o valor da impedância do elemento na frequência do polo, negativa no caso de um capacitor.

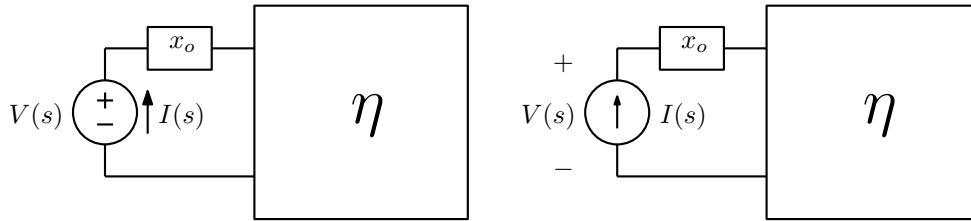


Figura 6.3: A excitação do circuito com uma fonte de tensão em série gera $T(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$ com polos que são frequências naturais. A excitação com fonte de corrente gera $T(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$ transformando os polos em zeros.

Exemplo: Seja o filtro em “lattice” desbalanceada da figura 4.65. A estrutura é simétrica, e então ocorre de os elementos sobre o eixo de simetria não afetarem algumas das frequências naturais. Isto aparece na análise de sensibilidades dos polos, com alguns polos tendo sensibilidades nulas em relação a estes elementos. Eles também não podem ser usados como elementos observadores (resulta sistema singular de equações na análise da rede modificada). A tabela abaixo lista as sensibilidades obtidas² para os polos, usando o resistor de carga como observador, e zeros. As sensibilidades dos outros dois polos e zeros complexos, conjugados dos primeiros, são conjugadas das mostradas. Os elementos estão numerados da esquerda para a direita, com C_{15} sendo o capacitor entre as terminações. C_3 e L_3 não afetam os polos complexos de menor frequência, e C_{15} não afeta o polo real e os complexos de alta frequência. Os zeros

²Calculadas pelo programa Sensi.

são criados pelos elementos centrais da estrutura, com C_1 e C_5 , e obviamente as terminações, não tendo efeito sobre eles.

Desvios determinísticos e estatísticos para polos e zeros podem ser definidos, seja para zeros, como:

$$\Delta_D Z = \sum_i S'_{x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} = \Delta \text{Re } Z + j \Delta \text{Im } Z$$

Desvios estatísticos podem ser definidos para as partes real e imaginária independentemente:

$$\Delta_E \text{Re } Z = \sqrt{\sum_i \left(\text{Re } S'_{x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

$$\Delta_E \text{Im } Z = \sqrt{\sum_i \left(\text{Im } S'_{x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

Estes erros definem um retângulo onde o zero pode estar. É possível também refinar a medida considerando a correlação entre os desvios reais e imaginários, obtendo uma elipse³. Os erros da tabela 6.1 geram os desvios de polos plotados na figura 6.4.

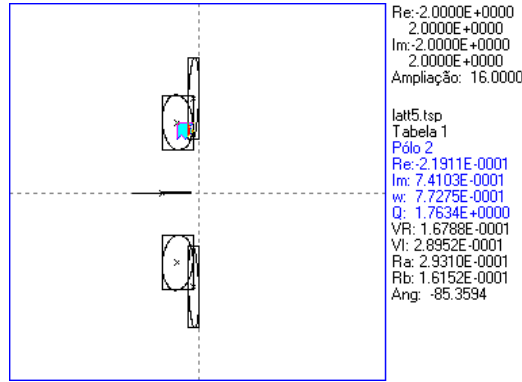


Figura 6.4: Erros nos polos do filtro elíptico de quinta ordem listados na tabela 6.1, plotados como retângulos e elipses. Os erros estão ampliados 16 vezes para melhor visualização.

³O programa Sensi calcula estas elipses.

Tabela 6.1: Sensibilidades dos polos e zeros para a rede em “lattice” desbalanceada da figura 4.65.

Sensibilidades do Polo em	-0.049920709	+0.998198051j
S'(s,R5):	0.018275637	+0.018273417j
S'(s,R1):	0.018275637	+0.018273417j
S'(s,L3):	0.004217431	-0.326413612j
S'(s,L2):	0.001233643	-0.095479415j
S'(s,L4):	0.001233643	-0.095479415j
S'(s,C1):	0.039475235	-0.035719275j
S'(s,C5):	0.039475235	-0.035719275j
S'(s,C3):	-0.035714478	-0.409387059j
S'(s,C15):	-0.000000000	+0.000000000j
Sensibilidades do Polo em	-0.219106729	+0.741033961j
S'(s,R5):	0.109553365	+0.032392415j
S'(s,R1):	0.109553365	+0.032392415j
S'(s,L3):	-0.000000000	-0.000000000j
S'(s,L2):	-0.000000000	-0.201454698j
S'(s,L4):	0.000000000	-0.201454698j
S'(s,C1):	0.098947172	-0.152694852j
S'(s,C5):	0.098947172	-0.152694852j
S'(s,C3):	-0.000000000	-0.000000000j
S'(s,C15):	0.021212385	-0.032734861j
Sensibilidades do Polo em	-0.385344340	
S'(s,R5):	0.206041605	+0.000000000j
S'(s,R1):	0.206041605	+0.000000000j
S'(s,L3):	-0.008434863	+0.000000000j
S'(s,L2):	-0.002467286	+0.000000000j
S'(s,L4):	-0.002467286	+0.000000000j
S'(s,C1):	0.163642409	+0.000000000j
S'(s,C5):	0.163642409	+0.000000000j
S'(s,C3):	0.071428957	-0.000000000j
S'(s,C15):	0.000000000	-0.000000000j
Sensibilidades do Zero em	0.000000000	+1.764288441j
S'(s,R5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,R1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,L3):	0.000000000	+1.103668438j
S'(s,L2):	0.000000000	-0.992906329j
S'(s,L4):	0.000000000	-0.992906329j
S'(s,C1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C3):	0.000000000	+0.445855062j
S'(s,C15):	0.000000000	-1.327999283j
Sensibilidades do Zero em	0.000000000	+1.253807569j
S'(s,R5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,R1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,L3):	0.000000000	-1.179849619j
S'(s,L2):	0.000000000	+0.276472917j
S'(s,L4):	0.000000000	+0.276472917j
S'(s,C1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C3):	0.000000000	-0.943754725j
S'(s,C15):	0.000000000	+0.316850941j

Capítulo 7

Filtros ativos

JÁ foi mostrado ao fim da seção sobre equações de estado que é possível obter realizações ativas de filtros passivos simulando um conjunto de equações de estado que descreva a rede. Neste capítulo estas e outras formas para a construção de filtros ativos são mais detalhadamente estudadas, sem intenção de cobertura completa do assunto, mas com detalhes suficientes para a realização prática destes circuitos. Primeiramente são descritas realizações em cascata, e depois realizações por simulação de redes passivas. Muitas outras formas de realização podem ser encontradas na literatura, mas estas são, provavelmente, as de maior interesse prático quando se considera simplicidade e sensibilidades à variação dos componentes. Em todos os casos, as realizações são apresentadas na forma clássica “RC-ativa”, onde são usados resistores, capacitores e amplificadores operacionais. Já foi mostrado também que os mesmos filtros podem ser construídos com amplificadores operacionais de transcondutância e capacitores, na técnica “OTA-C”. Outras formas usuais, voltadas para a realização em circuitos integrados, envolvem as técnicas “MOSFET-C”, de “capacitores chaveados”, de “corrente chaveada”, e outras. Por enquanto, estas realizações não serão discutidas aqui.

7.1 Realizações em cascata de biquads

É sempre possível construir um filtro ativo fatorando a função de transferência desejada em produto de seções de segunda ordem, “biquads”, com talvez uma seção extra de primeira ordem para filtros de ordem ímpar. Supondo ordem n par e biquads completos:

$$T(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \prod_{i=1}^{n/2} k_i \frac{s^2 + \frac{\omega_{zi}}{Q_{zi}} s + \omega_{zi}^2}{s^2 + \frac{\omega_{pi}}{Q_{pi}} s + \omega_{pi}^2}$$

onde foram consideradas as frequências de ressonância ω e os fatores de qualidade Q dos polos e zeros de $T(s)$. Para melhor utilização da faixa dinâmica disponível, deve-se agrupar polos e zeros nos biquads e considerar em que ordem devam ser colocados com alguns critérios:

- Cada seção deve ter a maior banda passante possível. Os polos de maior Q devem ser agrupados com os zeros mais próximos.
- As seções devem ser ordenadas de forma a reduzirem progressivamente a banda passante. As primeiras seções são as de banda mais larga.
- Os ganhos das seções devem ser organizados de forma a que o ganho máximo da entrada até as saídas dos blocos sejam iguais, incluindo nós internos dos biquads que sejam saídas de amplificadores. Isto corresponde a fazer um escalamento de faixa dinâmica no circuito completo.

A seguir, algumas formas para a realização das seções são descritas, iniciando pelas formas que podem ser derivadas também de simulação por equações de estado e que tem mais relação com filtros passivos.

7.1.1 Biquads com três amplificadores operacionais

7.1.1.1 Biquad de Tow e Thomas

O biquad de Tow e Thomas [17] é equivalente a uma simulação por equações de estado de um circuito RLC paralelo, como mostrado na figura 7.1. Nas saídas dos dois integradores estão disponíveis funções tipo passa-faixa, em v_C ou V_{o1} , e passa-baixas, em j_L ou V_{o2} . É simples verificar que as funções são:

$$\frac{V_{o1}}{V_{in}}(s) = -\frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{V_{o2}}{V_{in}}(s) = -\frac{\frac{1}{RLC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Um projeto normalizado simples, com o denominador sendo $s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2$, com frequência de ressonância $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ rad/s e fator de qualidade $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, é:

$$C = L = \frac{1}{\omega_0}; \quad R = Q$$

Isto leva a ganho máximo unitário na saída passa-faixa e aproximadamente unitário na passa-baixa (exatamente em ω_0). Uma desnormalização em impedância gera o circuito final. Estes circuitos são insensíveis a capacitâncias parasitas em todos os nós, pois estes são ou “terras virtuais” com tensão nula ou saídas de amplificadores operacionais, em baixa impedância. São portanto convenientes para construção em circuito integrado. Preservam bem as sensibilidades do protótipo RLC passivo, que são baixas.

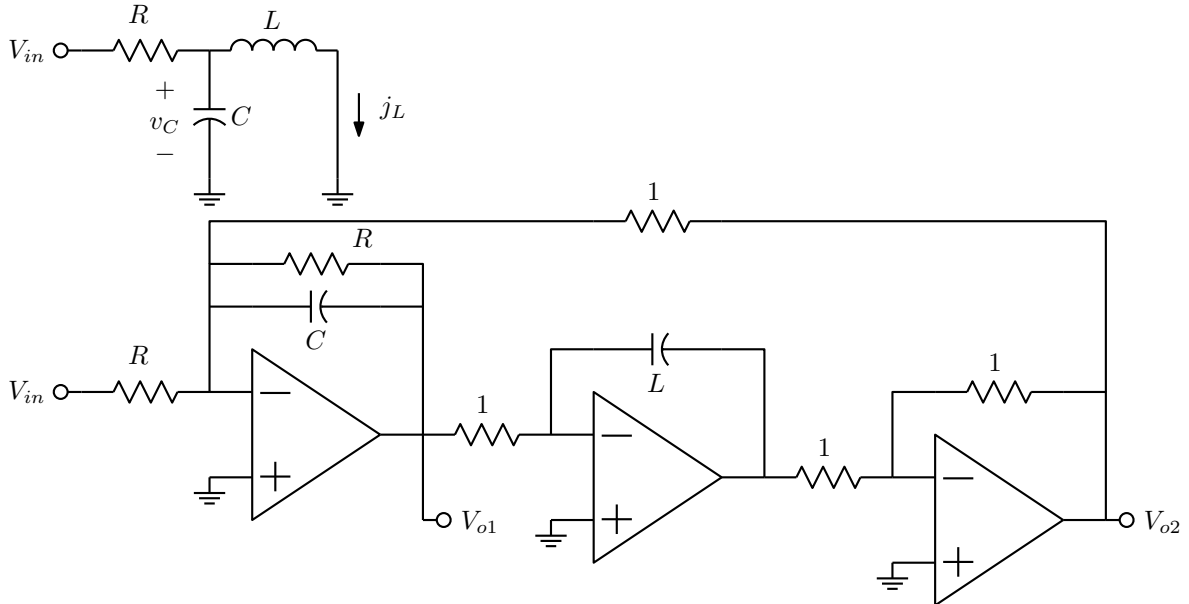


Figura 7.1: Biquad de Tow e Thomas derivado de rede RLC.

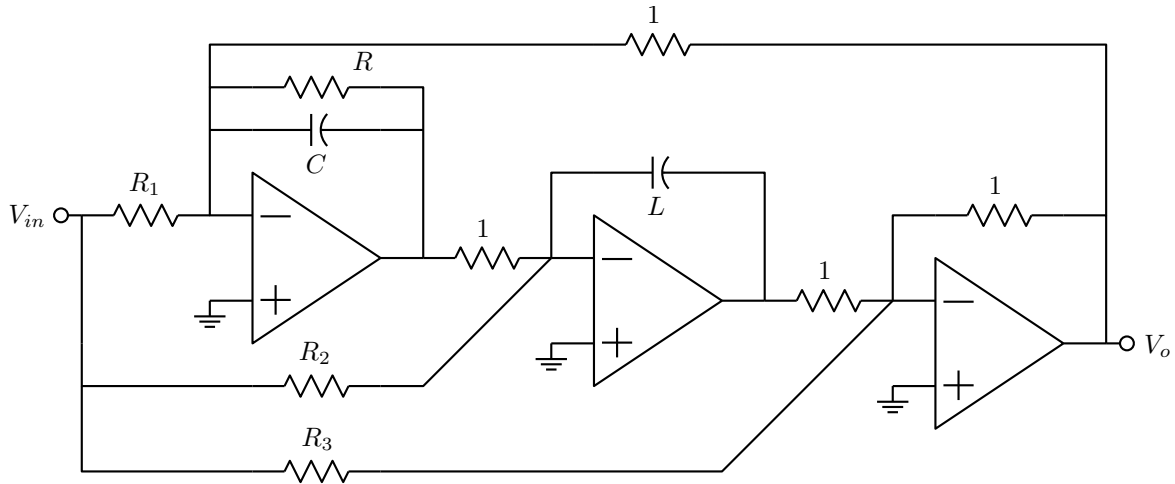


Figura 7.3: Biquad de Tow e Thomas com entradas adicionais.

grande parte os efeitos da resposta em frequência limitada do amplificador operacional¹, que no biquad Tow-Thomas tende a aumentar o fator de qualidade dos polos (“Q enhancement”), possivelmente causando instabilidade. Note-se a inversão dos terminais do amplificador central, devida à realimentação através do amplificador inversor. A mesma técnica pode ser usada nas simulações de equações de estado mais complexas, como nas figuras 2.32 ou 2.34.

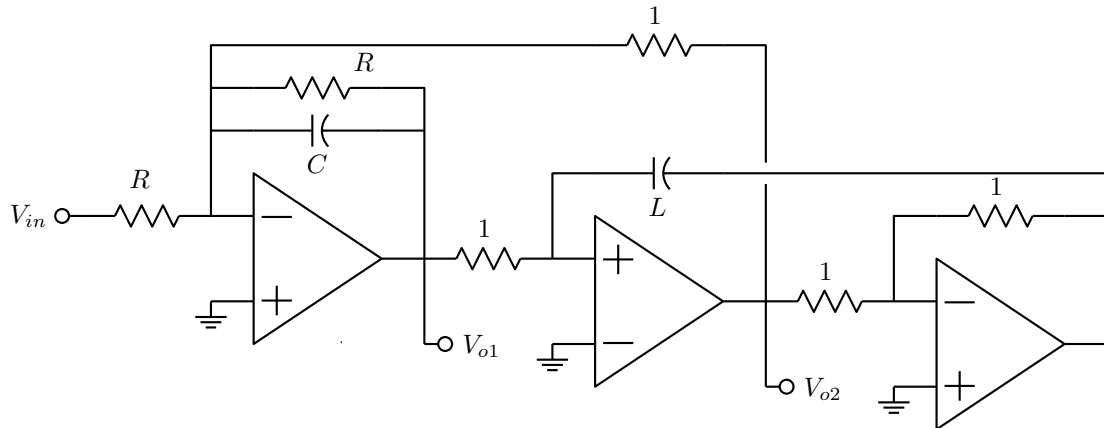


Figura 7.4: Biquad de Akerberg e Mossberg derivado de rede RLC.

7.1.2 Biquads com um amplificador operacional

Biquads mais simples podem ser obtidos, usando apenas um amplificador operacional. O custo disto é uma possível maior sensibilidade à variação dos componentes e sensibilidade a capacitâncias parasitas. A

¹A função de transferência tem usualmente um polo em baixa frequência, e pode ser aproximada como $A_v(s) \approx GB/s$, onde GB é o produto ganho-banda passante.

seguir são descritas algumas estruturas. Todas são projetadas pela comparação dos coeficientes obtidos das análises da estrutura com os da função desejada, e então tem-se apenas um catálogo de estruturas. As formas mostradas são apenas uma amostra das muitas possibilidades.

7.1.2.1 Biquads de Sallen e Key

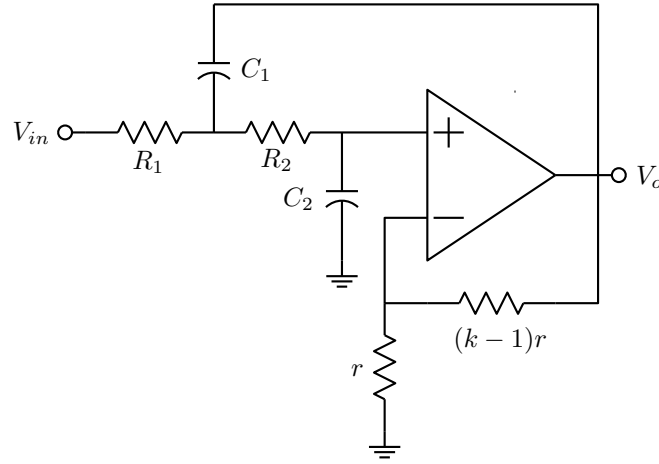


Figura 7.5: Biquad de Sallen e Key passa-baixas.

Os biquads de Sallen e Key [16] são todos baseados na inserção de um amplificador não inversor de ganho k realimentando uma rede RC. A figura 7.5 mostra a versão passa-baixas. A análise da rede pode ser feita como no exemplo seguindo a figura 1.17. O resultado é:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{k \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-k}{R_2 C_2} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

A função está na forma desejada para um filtro passa-baixas de segunda ordem, onde:

$$K = k; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}; \quad Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-k}{R_2 C_2}}$$

Especificados k , ω_0 , Q , e a razão $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, o projeto geral pode ser feito na forma, obtida pela comparação das expressões:

$$C_1 = C, \text{ valor escolhido}$$

$$C_2 = \alpha C$$

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_0 \alpha C} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4(k-1-\alpha)} \right)$$

$$R_1 = \frac{1}{\omega_0^2 \alpha C^2 R_2}$$

Exemplo: Seja realizar $K = 5$, $Q = 2$ e $\omega_0 = 2\pi \times 1000$, com $C = 10$ nF e $\alpha = 1$. As fórmulas levam ao circuito da figura 7.6, com $r = 10$ k Ω na realimentação negativa do amplificador operacional.

A qualidade da realização pode ser avaliada pelas sensibilidades de ω_0 e Q em relação aos valores dos componentes. Elas podem ser obtidas como abaixo, seguidas dos valores no exemplo anterior:

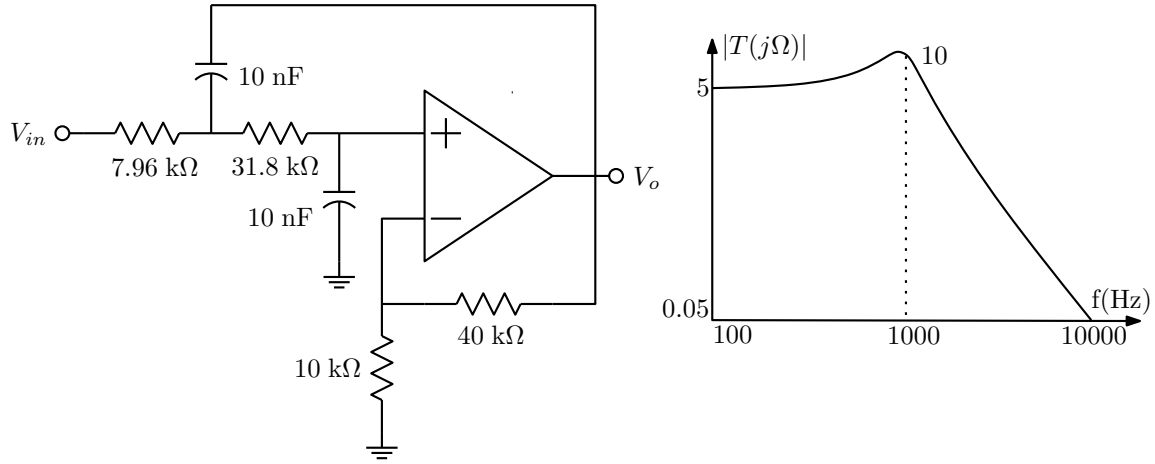


Figura 7.6: Exemplo de biquad de Sallen e Key passa-baixas, com $K = 5$, $Q = 2$ e $\omega_0 = 2\pi \times 1000$, e sua resposta de módulo.

$$S_{R1, R2, C1, C2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (-0.5)$$

$$S_{R1}^Q = -S_{R2}^Q = -\frac{1}{2} + Q\sqrt{\frac{R_2\alpha}{R_1}} \quad (3.5)$$

$$S_{C2}^Q = -S_{C1}^Q = -\frac{1}{2} + (1-k)Q\sqrt{\frac{R_1}{R_2\alpha}} \quad (-4.5)$$

$$S_k^Q = Qk\sqrt{\frac{R_1}{R_2\alpha}} \quad (5)$$

Observando estas expressões, nota-se que $k = 1$, usando um amplificador “buffer” como na figura 1.17, e resistores iguais resulta no projeto que minimiza as sensibilidades:

$$\begin{aligned} k &= 1 & S_k^Q &= 2Q^2 \\ R_1 &= R_2 = R & S_{R1}^Q &= -S_{R2}^Q = -\frac{1}{2} + Q\sqrt{\frac{1}{4Q^2}} = 0 \\ C_1 &= \frac{2Q}{\omega_0 R}; \quad C_2 = \frac{1}{2Q\omega_0 R} \quad \left(\alpha = \frac{1}{4Q^2}\right) & S_{C2}^Q &= -S_{C1}^Q = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A sensibilidade de Q em relação a k é alta, mas $k = 1$ “naturalmente”. Um outro projeto minimiza a dispersão nos valores dos componentes, mas pode resultar em altas sensibilidades:

$$\begin{aligned} k &= 3 - \frac{1}{Q} & S_k^Q &= 3Q - 1 \\ R_1 &= R_2 = R & S_{R1}^Q &= -S_{R2}^Q = -\frac{1}{2} + Q \\ C_1 &= C_2 = \frac{1}{\omega_0 R} & S_{C2}^Q &= -S_{C1}^Q = \frac{1}{2} - 2Q \end{aligned}$$

Notar que $k = 3$ resulta em $Q = \infty$, um oscilador senoidal.

Exemplo: Seja um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 4, com queda de 3.0103 dB em 1 kHz e ganho unitário em baixa frequência. A aproximação normalizada, com corte em 1 rad/s, tem polos em:

$$p_{1,2} = -\cos 22.5^\circ \pm j \sin 22.5^\circ \Rightarrow \omega_1 = 1; \quad Q_1 = \frac{1}{2 \cos 22.5^\circ}$$

$$p_{3,4} = -\cos 67.5^\circ \pm j \sin 67.5^\circ \Rightarrow \omega_2 = 1; \quad Q_2 = \frac{1}{2 \cos 67.5^\circ}$$

Usando o projeto de mínima sensibilidade, o ganho fica como desejado. A versão normalizada para resistores unitários resulta em:

biquad 1	biquad 2
$k = 1$	$k = 1$
$R_1 = R_2 = 1 \, \Omega$	$R_1 = R_2 = 1 \, \Omega$
$C_1 = \frac{1}{\cos 22.5^\circ} \, \text{F}$	$C_1 = \frac{1}{\cos 67.5^\circ} \, \text{F}$
$C_2 = \cos 22.5^\circ \, \text{F}$	$C_2 = \cos 67.5^\circ \, \text{F}$

Desnormalizando para resistores de 10 k Ω e corte em $2\pi \times 1000$ resulta a estrutura da figura 7.7. Com a seção de Q menor primeiro, os máximos de ganho até ambas as saídas são unitários.

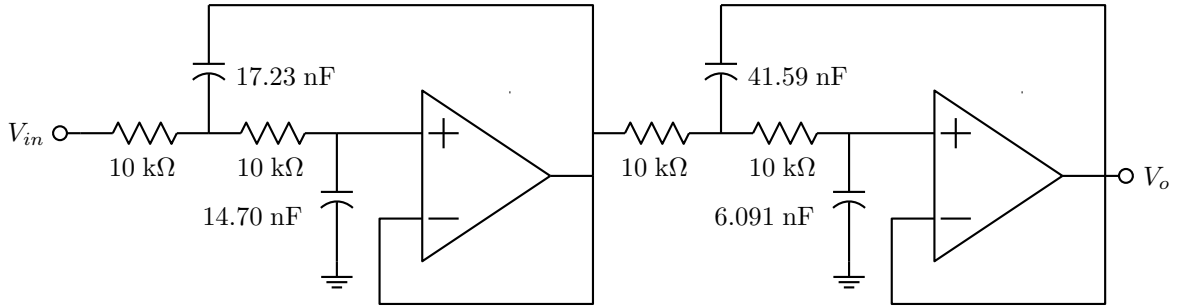


Figura 7.7: Filtro passa-baixas de ordem 4 de Butterworth em cascata de biquads de Sallen e Key.

O filtro passa-faixa de Sallen e Key tem a estrutura mostrada na figura 7.8. A função de transferência da rede é:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{\frac{k}{R_1 C_1} s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1-k}{R_2 C_1} \right) s + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_3 C_1 C_2}} = \frac{K \omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

O projeto é também feito por comparação de coeficientes:

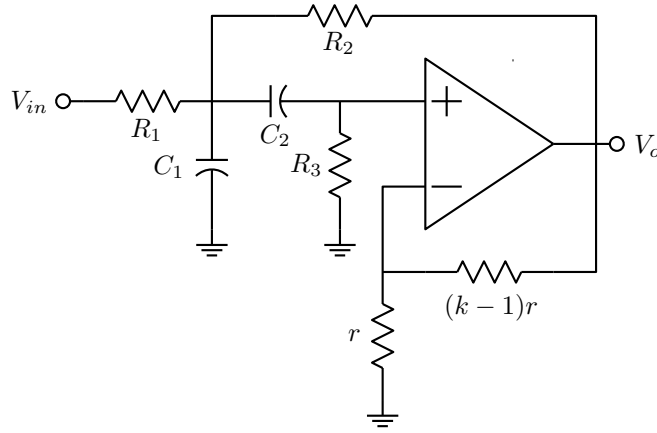


Figura 7.8: Biquad de Sallen e Key passa-faixa.

$$k = K$$

$$C_1 = C, \text{ valor escolhido}$$

$$C_2 = \alpha C$$

$$R_1 = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$R_3 = \frac{K - \frac{1}{Q} + \sqrt{\left(K - \frac{1}{Q}\right)^2 + 4(\alpha + 1)(K - 1)}}{2\alpha\omega_0 C(K - 1)}$$

$$R_2 = \frac{1}{\omega_0 C(R_3 C \alpha \omega_0 - 1)}$$

Um outro conjunto de fórmulas para este filtro, resultando em $K = 2\sqrt{2}Q - 1$ e requerendo $Q > \frac{\sqrt{2}}{3}$ para construção com amplificador não inversor normal, é:

$$C_1 = C_2 = C, \text{ valor escolhido}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 C}$$

$$k = 4 - \frac{\sqrt{2}}{Q}$$

7.1.2.2 Biquads com amplificador inversor e múltipla realimentação

Amplificadores de ganho infinito também geram famílias de biquads. A estrutura da figura 7.9 realiza uma seção passa-baixas:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 R_3 C_2 C_5}}{s^2 + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) s + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}} = \frac{-K\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Um possível projeto é:

$$R_1 = R_3 = R, \text{ valor escolhido} \quad R_4 = KR$$

$$C_2 = \frac{Q}{\omega_0 R} \left(2 + \frac{1}{K} \right) \quad C_5 = \frac{1}{\omega_0 QR(2K+1)}$$

As sensibilidades são baixas:

$$S_{R_3, R_4, C_2, C_5}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad S_{R_1}^{\omega_0} = 0$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{1}{2 + \frac{1}{K}} \quad S_{R_3}^Q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \frac{1}{K}}$$

$$S_{R_4}^Q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{K(2 + \frac{1}{K})}$$

$$S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} \quad S_{C_5}^Q = -\frac{1}{2}$$

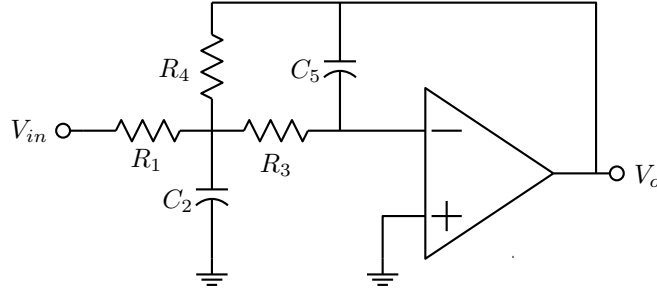


Figura 7.9: Biquad com amplificador inversor de ganho infinito e múltipla realimentação passa-baixas.

Uma seção passa-faixa tem a estrutura da figura 7.10. A função de transferência é obtida como:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{s^2 + \frac{1}{R_5} \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) s + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_5 C_3 C_4}} = \frac{-K \omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

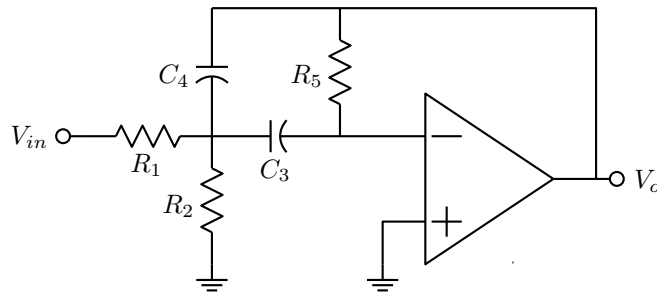


Figura 7.10: Biquad com amplificador inversor de ganho infinito e múltipla realimentação passa-faixa.

O projeto pode ser feito como, para $K < 2Q$:

$$C_3 = C_4 = C, \text{ valor escolhido} \quad R_1 = \frac{1}{K\omega_0 C}$$

$$R_5 = 2 \frac{Q}{\omega_0 C} \quad R_2 = \frac{1}{\omega_0 C(2Q - K)}$$

Exemplo: Seja realizar um filtro passa-faixa de Butterworth de ordem 4 com banda passante de 3.0103 dB entre 800 Hz e 1250 Hz. A aproximação normalizada tem frequência central de $\omega_0 = 1$ rad/s e banda passante $B = 0.45$ rad/s. Os polos do filtro protótipo passa-baixas normalizado de Butterworth de ordem 2 correspondente estão em $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}j$. Aplicando a transformação passa-baixas \rightarrow passa-faixa em polos complexos genéricos tem-se:

$$a + jb = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \Rightarrow s^2 - B(a + jb)s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{B(a + jb) \pm \sqrt{B^2(a + jb)^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Usando os polos do protótipo, notando que a expressão dá um novo polo de cada par conjugado, tem-se os polos do filtro passa-faixa normalizado, suas frequências e fatores de qualidade, e a função de transferência a realizar:

$$s_1 = -0.184403426 \pm 1.159419131j \quad \omega_{01} = 1.173992055 \quad Q_1 = 3.183216496$$

$$s_2 = -0.133794626 \pm 0.841221079j \quad \omega_{02} = 0.851794521 \quad Q_2 = 3.183216496$$

$$T(s) = \frac{0.45^2 s^2}{(s^2 + 0.368806852s + 1.378257345)(s^2 + 0.267589252s + 0.725553906)}$$

É fácil ver, aplicando a transformação passa-baixas \rightarrow passa-faixa ao protótipo $T(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$, que o numerador vale $B^2 s^2$. Como as duas seções tem o mesmo Q , a ordem delas na cascata pode ser qualquer. Seja primeiramente a seção de maior frequência. Para que a primeira seção tenha ganho máximo unitário, ela deve ter o fator de ganho:

$$K_1 Q_1 = 1 \Rightarrow K_1 = 0.314147656$$

E para realizar o ganho total:

$$0.45^2 = K_1 \omega_{01} K_2 \omega_{02} \Rightarrow K_2 = 0.644601340$$

A faixa dinâmica do filtro fica então equalizada. Aplicando as fórmulas de projeto para os dois biquads, resulta:

$$C_{31} = C_{41} = 1 \text{ F} \quad C_{32} = C_{42} = 1; \text{ F}$$

$$R_{11} = \frac{1}{K_1 \omega_{01}} = 2.711446368 \Omega \quad R_{12} = \frac{1}{K_2 \omega_{02}} = 1.821268406 \Omega$$

$$R_{51} = 2 \frac{Q_1}{\omega_{01}} = 5.422892740 \Omega \quad R_{52} = 2 \frac{Q_2}{\omega_{02}} = 7.474141750 \Omega$$

$$R_{21} = \frac{1}{\omega_{01}(2Q_1 - K_1)} = 0.140739320 \Omega \quad R_{22} = \frac{1}{\omega_{02}(2Q_2 - K_2)} = 0.205177665 \Omega$$

Desnormalizando para resistores unitários de 10 k Ω e frequência central em $2\pi \times 1000$ rad/s, resulta a estrutura da figura 7.11.

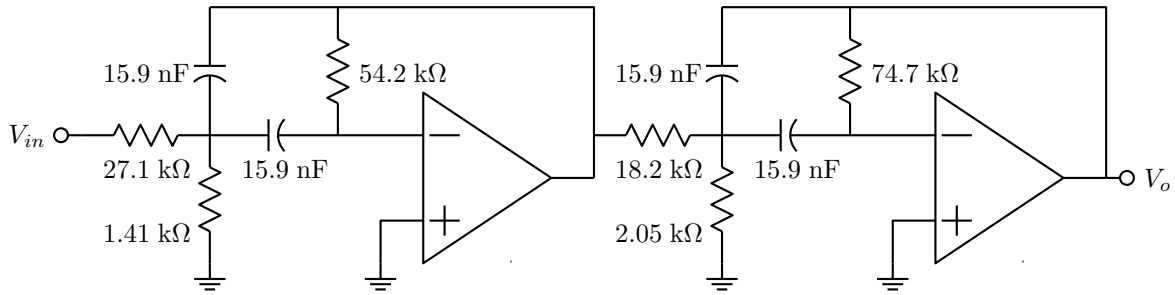


Figura 7.11: Filtro passa-faixa de Butterworth de ordem 4.

7.1.2.3 Transformação CR-RC

Formas passa-altas podem ser obtidas trocando-se resistores com capacitores, na rede RC que determina a funcionalidade do biquad passa-baixas. O procedimento pode ser entendido como: Aplicar uma transformação passa-baixas \rightarrow passa-altas a uma seção passa-baixas normalizada em frequência, transformando os capacitores em indutores: $C \rightarrow L = \frac{1}{\omega_p C}$. Aplicar a seguir um escalamento em impedância, dividindo as impedâncias por s . O efeito final é um filtro passa-altas, com os elementos transformados na forma:

$$R \rightarrow C = \frac{1}{R}; \quad C \rightarrow R = \frac{1}{\omega_p C}$$

Um escalamento em impedância gera a rede final. Assim não há necessidade de desenvolver biquads especiais passa-altas de um amplificador. A aplicação em formas passa-faixa gera formas alternativas, também passa-faixa.

Exemplo: Seja obter um filtro passa-altas de Butterworth de ordem 3, com corte de 3.0103 dB em 500 Hz e ganho de -10 em alta frequência. A função de transferência normalizada vale:

$$T(s) = \frac{-10s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

A seção de segunda ordem que realiza os polos complexos pode ser obtida a partir de uma seção passa-baixas realizando $T(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$, derivada como na figura 7.12. A seção de primeira ordem que realiza o polo real pode ser como na figura 7.13. Ela pode ser a primeira da cascata, concentrando todo o ganho. Como a seção de segunda ordem tem ganho -1 em alta frequência e o filtro completo tem banda maximamente plana, a faixa dinâmica está equalizada corretamente. O filtro final, obtido por desnormalização em impedância para resistores unitários de 10 kΩ e frequência de corte em $2\pi \times 500$ rad/s é mostrado na figura 7.14.

Em muito alta frequência, filtros passa-altas ativos sempre perdem ganho devido à resposta em frequência limitada dos amplificadores. Para o exemplo, o limite é dado pelo amplificador não inversor na primeira seção, que tem corte em $GB/10$, que para um amplificador com $GB = 2\pi \times 10^6$, como um tipo 741, limita a banda passante em 100 kHz. A seção de segunda ordem se reduz a um amplificador inversor de ganho -1 em alta frequência, gerando outro polo em $GB/2$ ².

²É simples verificar que, para amplificadores operacionais com ganho tipo $A(s) = GB/s$, um amplificador não inversor com ganho A_0 gera polo em GB/A_0 , e um amplificador não inversor com ganho $-A_0$ gera polo em $GB/(A_0 + 1)$.

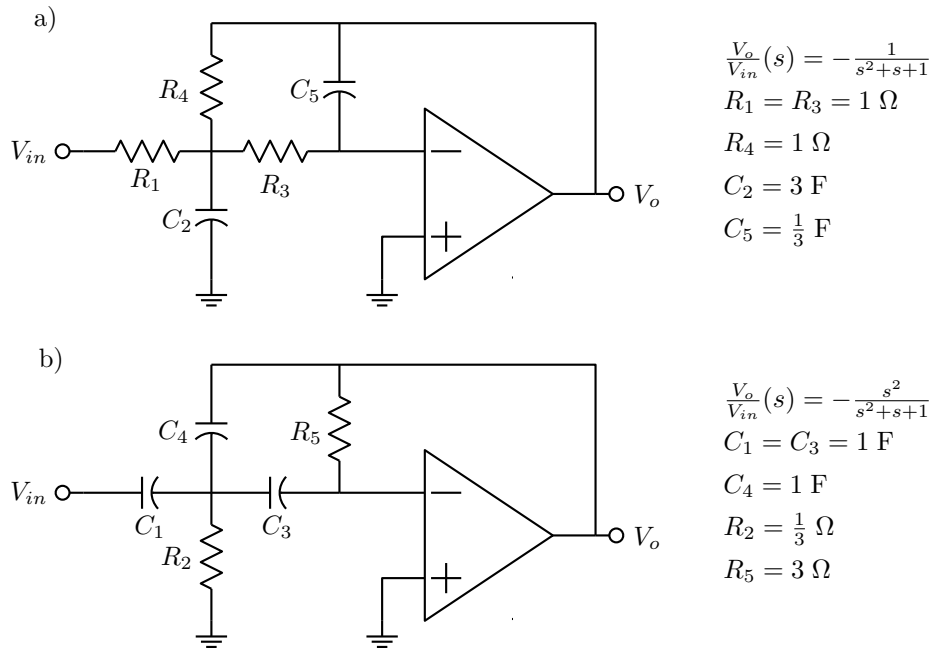


Figura 7.12: Biquad passa-altas obtido pela transformação CR-RC. a) Protótipo passa-baixas normalizado. b) Versão transformada normalizada.

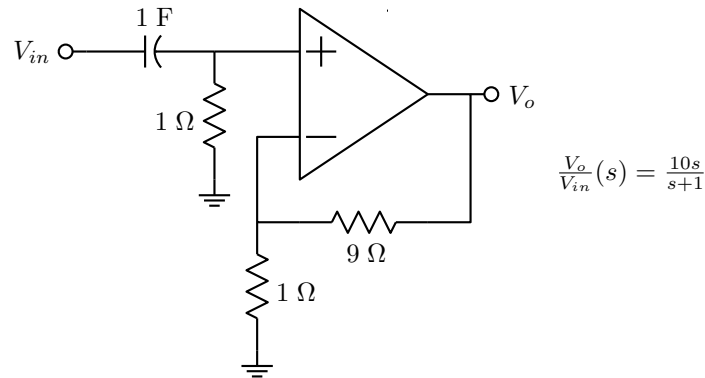


Figura 7.13: Seção passa-altas de primeira ordem.

7.1.2.4 Biquads baseados no duplo T

Os biquads listados realizam apenas funções simples passa-baixa, passa-faixa e passa-altas (com transformação RC-CR). Seções mais complexas, com zeros finitos de transmissão por exemplo, requerem estruturas que gerem estes zeros. Para realizar zeros no eixo imaginário, a estrutura RC em “duplo T” é conveniente. Uma realimentação similar à dos filtros de Sallen e Key gera o biquad de Kerwin e Huelsman [19], mostrado na figura 7.15. Ele é uma estrutura de ordem 3, mas com projeto adequado há um cancelamento de polo com zero reais e resulta uma função de transferência de ordem 2. existem duas possibilidades na estrutura, usando um resistor R ou um capacitor aC , onde indicado, dependendo da

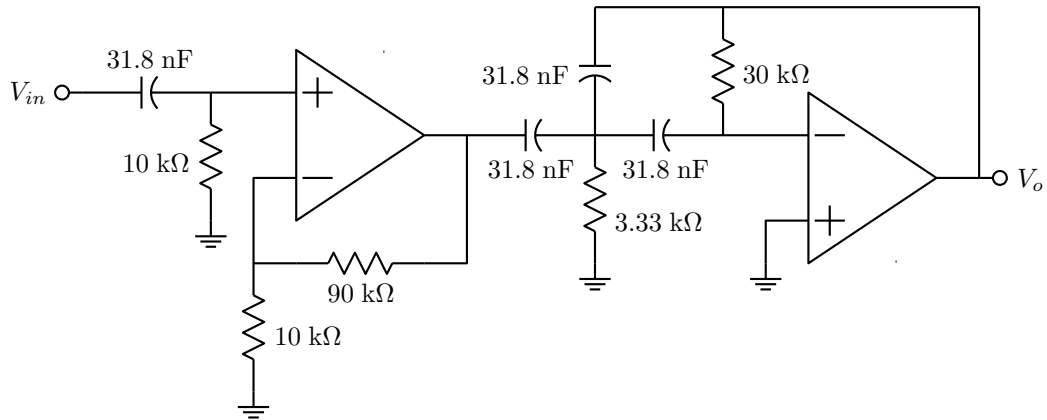


Figura 7.14: Filtro passa-altas de Butterworth de ordem 3.

posição dos zeros, abaixo ou acima dos polos, respectivamente. Para o caso de zeros abaixo dos polos, usando R , resultam a função e o projeto normalizado:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{k(s^2 + \frac{1}{a^2})}{s^2 + \frac{\alpha+1}{a}(\frac{1}{R} + \frac{2-k}{\alpha})s + \frac{1}{a^2}(1 + \frac{\alpha+1}{R})} = \frac{K(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2}$$

$$a = \frac{1}{\omega_z}$$

$$R = \frac{\alpha + 1}{\left(\frac{\omega_p}{\omega_z}\right)^2 - 1}$$

$$k = 2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(\left(\frac{\omega_p}{\omega_z}\right)^2 - 1 - \frac{\omega_p}{Q_p \omega_z} \right)$$

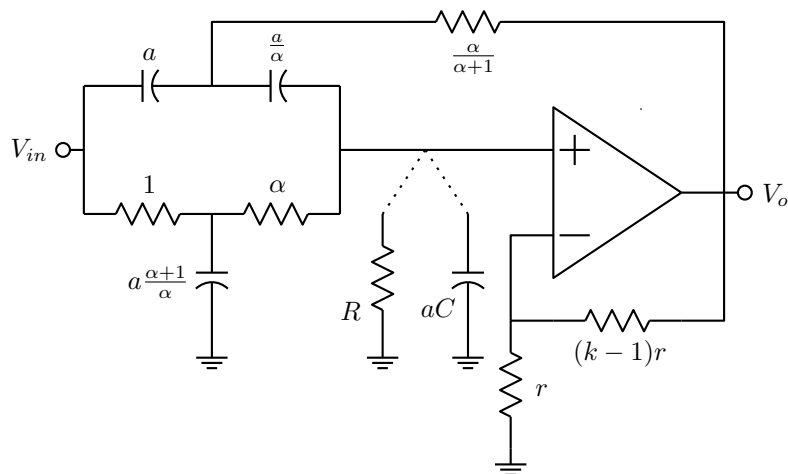


Figura 7.15: Biquad de Kerwin e Huelsman baseado no duplo T.

O parâmetro α controla a dispersão de valores. Em geral as sensibilidades são inversamente proporcionais a α . Para o caso de zeros acima dos polos, usando aC resultam:

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_{in}}(s) &= \frac{\frac{k}{(\alpha+1)C+1}(s^2 + \frac{1}{a^2})}{s^2 + \frac{(\alpha+1)(C+\frac{2-k}{\alpha})}{a(\alpha+1)C+1}s + \frac{1}{a^2((\alpha+1)C+1)}} = \frac{K(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} \\ a &= \frac{1}{\omega_z} \\ C &= \frac{\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2 - 1}{\alpha + 1} \\ k &= 2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2 - 1 - \frac{\omega_z}{Q_p\omega_p} \right) \end{aligned}$$

O caso de zeros e polos com a mesma frequência, $\omega_z = \omega_p$, não usa R ou aC , e tem-se apenas:

$$k = 2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{1}{Q_p}; \quad a = \frac{1}{\omega_p}$$

Exemplo: Seja obter um filtro elíptico de ordem 5, com $A_{max} = 1$ dB, $A_{min} = 40$ dB, e corte em 1 kHz. Os parâmetros para o filtro normalizado estão listados na tabela 5.6. Seguindo o critério de reduzir progressivamente a banda e agrupar polos com zeros próximos, os polos de frequência mais alta e os zeros imaginários de frequência mais baixa fazem a primeira seção, os demais polos complexos e zeros imaginários a segunda seção, e uma seção de primeira ordem realizando o polo real e o zero no infinito completa o filtro. O parâmetro α foi escolhido como $\alpha = 3.44$, gerando um ganho em baixa frequência de 10, produto dos ganhos k das duas seções, 2.35 e 4.26 respectivamente. Desnormalizando o circuito para resistências unitárias de 10 k Ω e corte em 1 kHz resulta a estrutura da figura 7.16. A faixa dinâmica interna não está equalizada. Os ganhos máximos de tensão até as saídas das seções resultam como 8.78, 27.2 e 10.0 respectivamente.

7.1.3 Ajuste de ganho em biquads

Para melhor uso da faixa dinâmica disponível, a equalização da faixa dinâmica requer ajustes nos ganhos dos biquads. Nas fórmulas listadas para os projetos, em alguns casos o ganho pode ser controlado, em outros não. De qualquer forma, dentro de uma realização em cascata com mais de uma seção não são óbvios quais os níveis de amplificação em relação à entrada que vão surgir, e uma análise da estrutura é requerida para determiná-los, como em qualquer outra realização ativa. Desta análise os ganhos necessários nas seções podem ser determinados. No exemplo anterior, os ganhos ficariam equalizados em 1 com a primeira seção tendo seu ganho multiplicado por 1/8.78, a segunda por 8.78/27.2, e a terceira por 27.2/10. Os fatores de multiplicação para equalização com ganhos unitários são sempre as razões entre os ganhos máximos da entrada até a saída da seção anterior e até a saída da seção atual. Existem então os problemas de reduzir o ganho e de aumentar o ganho, que usualmente requerem operações diferentes.

7.1.3.1 Redução de ganho

Supondo que não seja possível modificar o projeto da seção para um ganho menor, alterações podem ser feitas nos elementos passivos ligados à entrada da seção, como na figura 7.17. Todas as impedâncias ligadas à entrada são transformadas em divisores de impedâncias com as mesmas impedâncias de Thévenin e o fator de atenuação desejado. A figura exemplifica o tratamento de um resistor e de um capacitor. Em uma versão aproximada, e ineficiente, um divisor resistivo de baixa impedância pode ser colocado na entrada da seção.

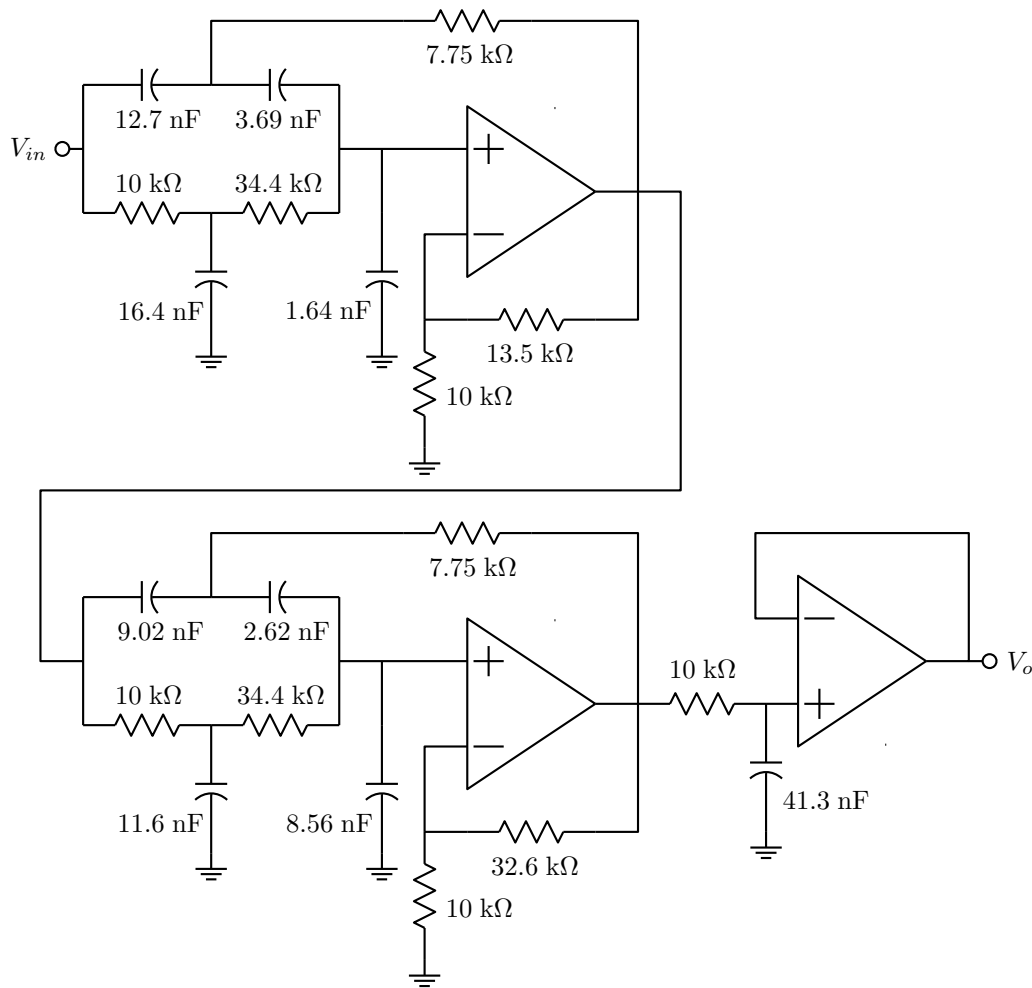


Figura 7.16: Filtro elíptico de ordem 5 realizado com biquads com duplo T.

7.1.3.2 Aumento de ganho

Também supondo não ser possível reprojetar a seção, basta substituir todas as impedâncias que realimentam o amplificador que gera a saída por divisores de impedâncias, com as mesmas impedâncias de Thévenin e com atenuação igual ao inverso do ganho de tensão desejado. Uma versão aproximada pode ser obtida com um divisor resistivo de baixa impedância. A operação é mostrada na figura 7.18, também exemplificando os casos de um resistor e de um capacitor. Notar que estas operações se aplicam também aos biquads de três amplificadores, onde todas as impedâncias passivas estão ligadas entre nós de impedância nula. Neste caso os ramos aterrados dos divisores não tem função.

Exemplo: Aplicando a equalização de faixa dinâmica à rede da figura 7.16, mantendo o ganho máximo em 10, os fatores de multiplicação são como os para ganhos unitários, mas a primeira seção deve ter seu ganho multiplicado por 10. Os fatores são então, na ordem das seções, $10/8.78$, $8.78/27.2$ e $27.2/10$. A estrutura resultante é a da figura 7.19. Na primeira seção o ganho foi aumentado com a alteração do resistor realimentando a estrutura e alteração direta do ganho do amplificador não inversor, multiplicando-o por $10/8.78$ (o resistor entre a saída e a entrada positiva do amplificador poderia ser alterado conforme a

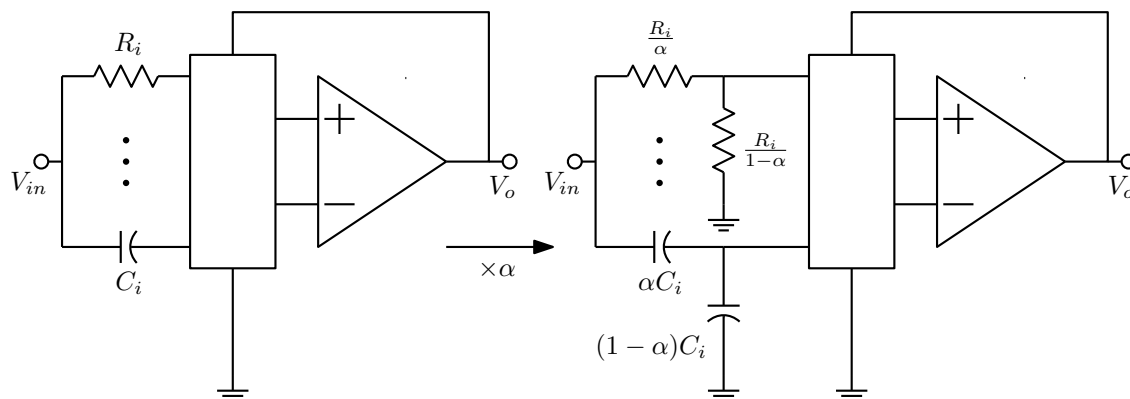
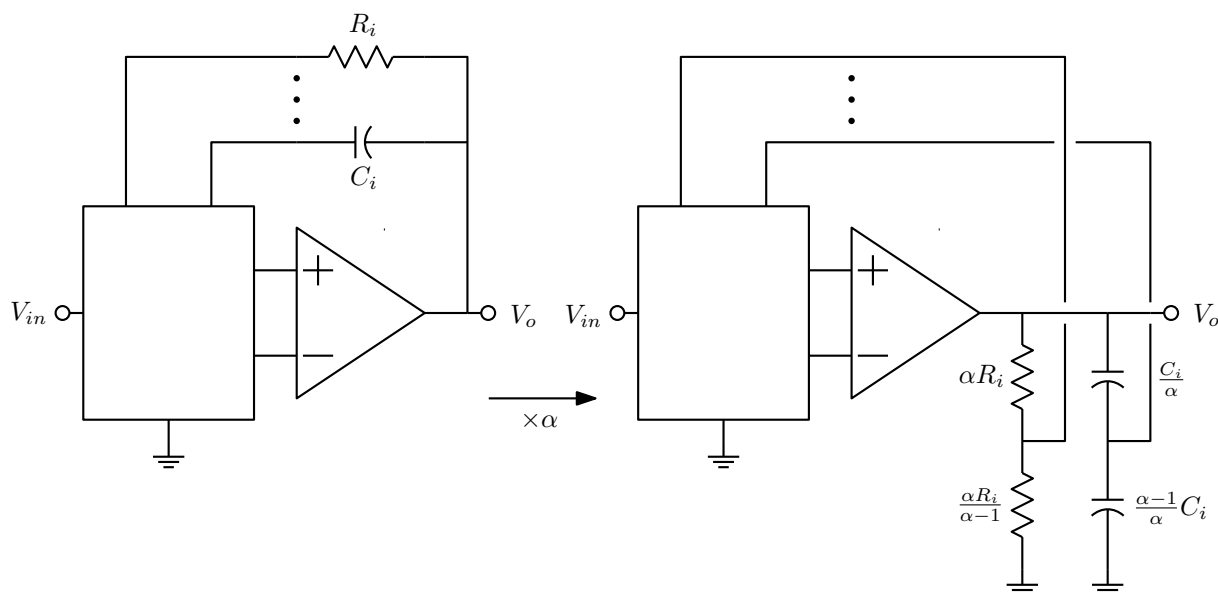
Figura 7.17: Redução de ganho em um biquad, $\alpha < 1$.Figura 7.18: Aumento de ganho em um biquad, $\alpha > 1$.

figura 7.18 com o mesmo efeito). Na segunda seção o ganho foi reduzido pela transformação em divisores do resistor e do capacitor ligados à entrada, e na última seção o ganho foi aumentado pelo aumento direto do ganho do amplificador para 2.72. Os módulos das respostas em frequência até as saídas das três seções são mostrados na figura 7.20.

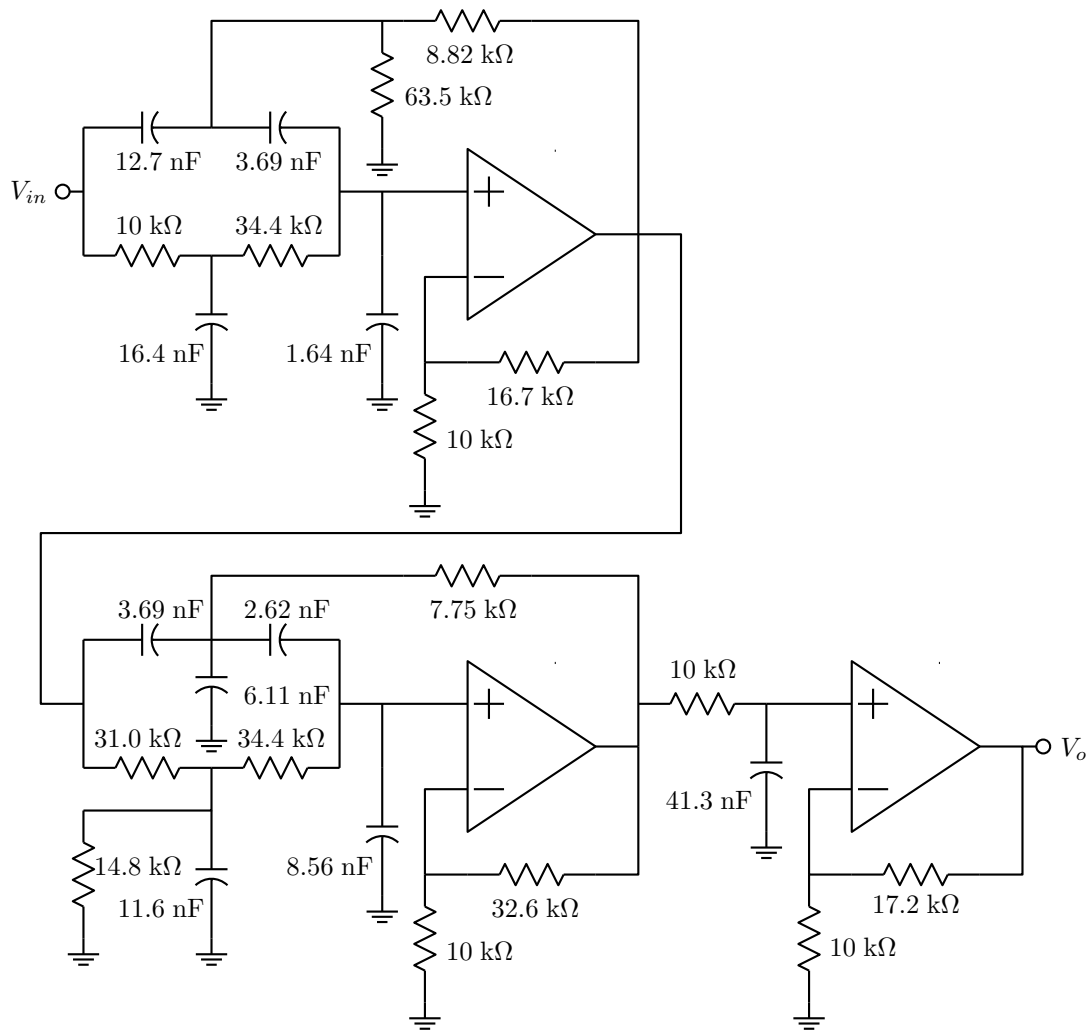


Figura 7.19: Filtro elíptico de ordem 5 realizado com biquads com duplo T com faixa dinâmica equalizada.

7.2 Realizações usando conversores de impedância

7.2.1 O conversor negativo de impedância (NIC)

Um amplificador operacional pode ser usado para gerar impedâncias negativas, na forma do “negative impedance converter” (NIC), mostrado na figura 7.21. Calculando a impedância vista por Z_1 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{V_{in}}{R_2} \Rightarrow V_o = V_{in} + R_2 I_2 = V_{in} \left(1 + \frac{R_2}{Z_2} \right) \\
 I_{in} &= \frac{V_{in} - V_o}{R_1} = -V_{in} \frac{R_2}{R_1 Z_2} \\
 Z_{in1} &= \frac{V_{in}}{I_{in}} = -Z_2 \frac{R_1}{R_2}, \text{ e analogamente } Z_{in2} = -Z_1 \frac{R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

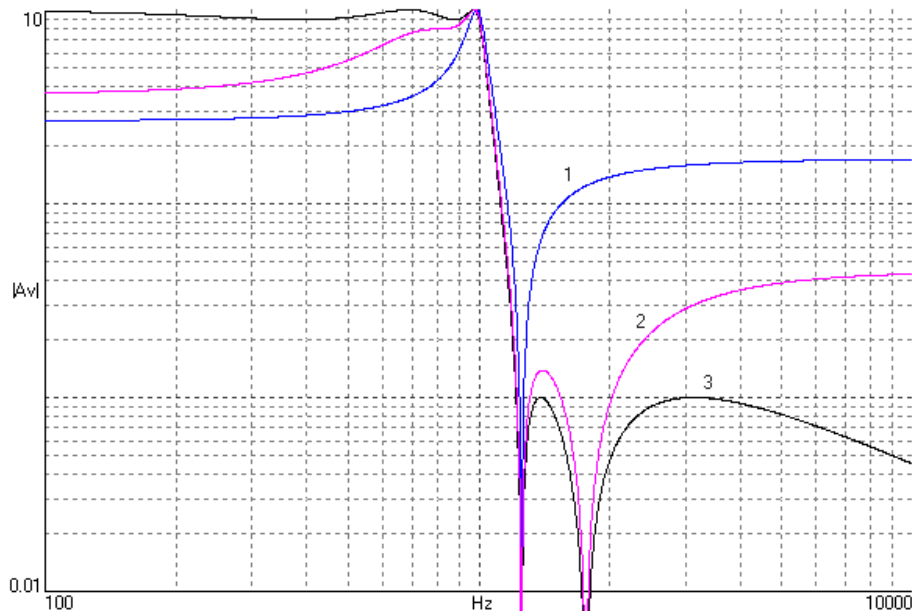


Figura 7.20: Módulos das respostas em frequência até as saídas das três seções na figura 7.19.

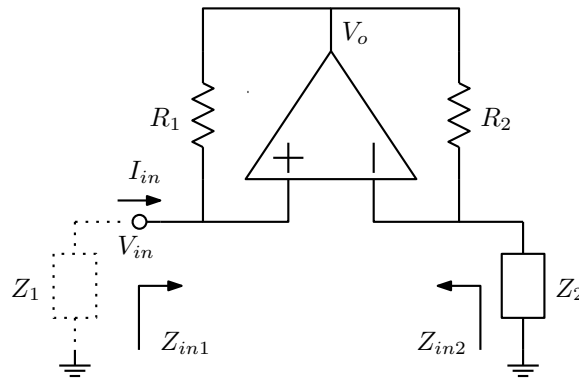


Figura 7.21: Conversor negativo de impedância (NIC).

Este circuito é estável ou não dependendo das realimentações. Se Z_1 e Z_2 forem resistores e $R_1 = R_2$, por exemplo, deve-se ter $Z_2 > Z_1$ para que a realimentação negativa domine na configuração mostrada.

Exemplo: O NIC pode ser usado para construir um amplificador bidirecional, para aumentar o nível de sinal em uma linha de comunicação, como na figura 7.22. O nível de sinal no centro da linha, V_c , sem o resistor negativo valeria $V_c = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$. Com o resistor negativo vale:

$$V_c = (V_1 + V_2) \frac{R // (-R_1)}{R + R // (-R_1)} = (V_1 + V_2) \frac{1}{R \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) + 1} = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \frac{R_1}{R_1 - \frac{R}{2}}$$

E então R_1 pode ajustar o nível de sinal na linha. Deve-se manter $|R_1| > \frac{R}{2}$ para estabilidade, mantendo a resistência vista em V_c positiva. Note-se que estes circuitos somente funcionam se a resposta

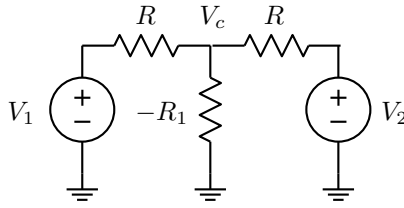


Figura 7.22: Amplificador bidirecional com resistor negativo.

em frequência do amplificador decair com a frequência, e capacitâncias parasitas dominarem o comportamento em alta frequência, do contrário pequenas indutâncias em série com a linha podem causar instabilidade.

Se no lugar de R_2 for colocado um capacitor de valor C_2 , com $Z_2 = R_3$, um resistor, resulta um indutor negativo em Z_{in1} :

$$Z_{in1} = -\frac{R_1}{\frac{1}{sC_2}} R_3 = -sC_2 R_1 R_3$$

Se agora for usado outro NIC para gerar um R_3 negativo, tem-se um indutor positivo, mostrado na figura 7.23. Neste circuito:

$$Z_{in1} = -sR_1 C_2 \left(-\frac{R_3}{R_4} R_5 \right) = s \frac{R_1 C_2 R_3 R_5}{R_4}$$

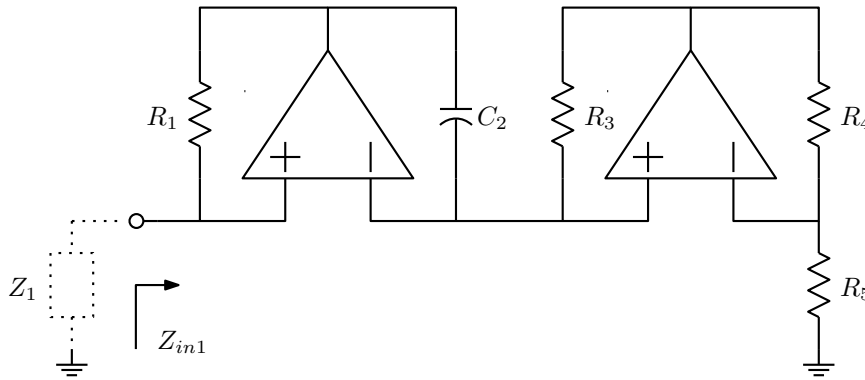


Figura 7.23: Indutor simulado.

Pode-se trocar as posições de C_2 e R_4 com o mesmo resultado. Este circuito pode ser estável ou não, dependendo de como são orientadas as entradas dos amplificadores, e de que Z_1 estiver presente. Uma forma de avaliar a estabilidade é analisar o circuito considerando uma resposta em frequência nos amplificadores, como $A_v(s) = GB/s$, e verificar onde estão as frequências naturais. A análise é um tanto complexa, pois o circuito é de ordem 3. No caso, não há solução se $Z_1 = \infty$, e a forma mostrada é estável se Z_1 for um resistor de valor pequeno o bastante. É interessante observar quais são as relações entre tensões e correntes na entrada e sobre o capacitor, como na figura 7.24, onde os resistores são feitos iguais por conveniência. São as relações de um girador, que na figura 7.23 transforma um capacitor em indutor:

$$V_2 = V_1 - RI_1 - V_1 \Rightarrow V_2 = -RI_1$$

$$V_o = V_1 + RI_2 = 2V_1 \Rightarrow V_1 = RI_2$$

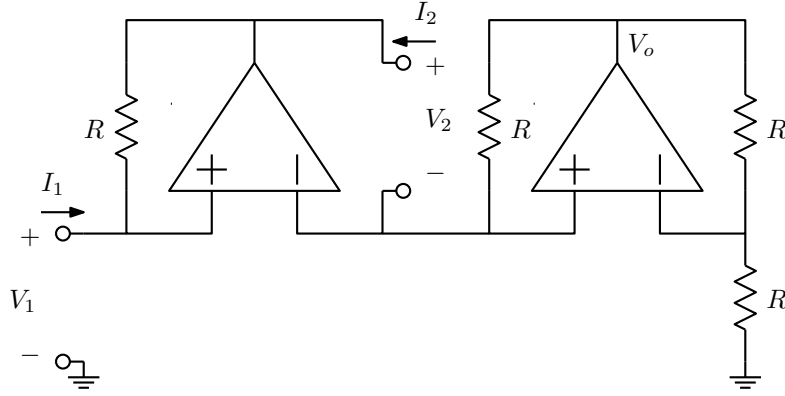


Figura 7.24: Girador feito com amplificadores operacionais.

Várias variações desta estrutura são possíveis. Uma forma que evita os problemas de estabilidade é a de Antoniou, já mostrada na figura 1.58. Ela apenas troca as saídas dos amplificadores uma com a outra (o que não altera a análise), e orienta as entradas em uma forma que garante sempre a estabilidade.

Exemplo: Um filtro passa-baixas polinomial de ordem 4 pode ser realizado na forma da figura 7.25. Os dois indutores tem valores $L_2 = RR'_2C_2$ e $L_4 = RR'_4C_4$. Os valores das indutâncias podem ser ajustados pelos capacitores C_2 e C_4 ou pelos resistores R'_2 e R'_4 . Esta estrutura copia a faixa dinâmica da rede passiva nos nós correspondentes, mas gera sinais maiores dentro dos conversores. Não há forma simples para escalamento de faixa dinâmica. O nível de impedância dos elementos R , C_2 e C_4 pode ser feito menor que o de R'_2 e R'_4 para reduzir a amplificação das tensões dentro dos conversores.

7.2.2 O conversor generalizado de impedância (GIC)

O caso geral da estrutura, o “generalized impedance converter” (GIC) [20], é o da figura 7.26. Analisando a estrutura informalmente, notando que $V_2 = V_1$ devido às duas entradas dos amplificadores com tensão nula em série:

$$V_{o2} = V_1 - Z_1 I_1 \quad I_{Z2} = I_{Z3} = \frac{V_{o2} - V_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2} I_1$$

$$V_{o1} = V_1 - I_{Z3} Z_3 = V_1 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} I_1 \quad I_{Z4} = -I_2 = \frac{V_{o1} - V_1}{Z_4} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} I_1$$

$$Z_{in1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{-I_2 \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \quad Z_{in2} = \frac{Z_0 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}, \text{ analogamente}$$

Pode-se interpretar a função do circuito da figura 7.26 como um operador que multiplica Z_5 por $\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$, quando a observação é feita pelo lado esquerdo, e divide Z_0 pelo mesmo fator quando a observação é feita pelo lado direito. Uma aplicação interessante é fazer $\frac{Z_1(s)Z_3(s)}{Z_2(s)Z_4(s)} = s$, usando um capacitor unitário como Z_2 ou Z_4 e as demais impedâncias como resistores unitários (o nível de impedância pode ser mudado arbitrariamente, com o mesmo efeito). Tem-se então um operador que diferencia ou integra uma impedância. O filtro da figura 7.25 pode então ser representado como na figura 7.27. Filtros assim são

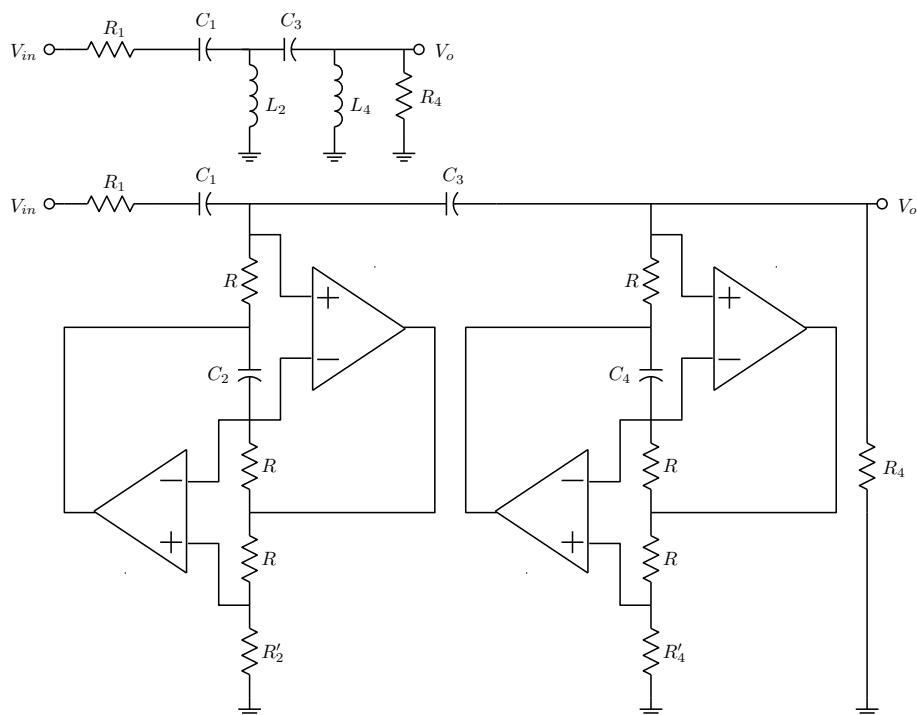


Figura 7.25: Filtro passa-altas de ordem 4 construído com indutores simulados. Uma saída em baixa impedância fica disponível na saída do amplificador da direita, amplificada pelo fator $1 + \frac{R}{R'_4}$.

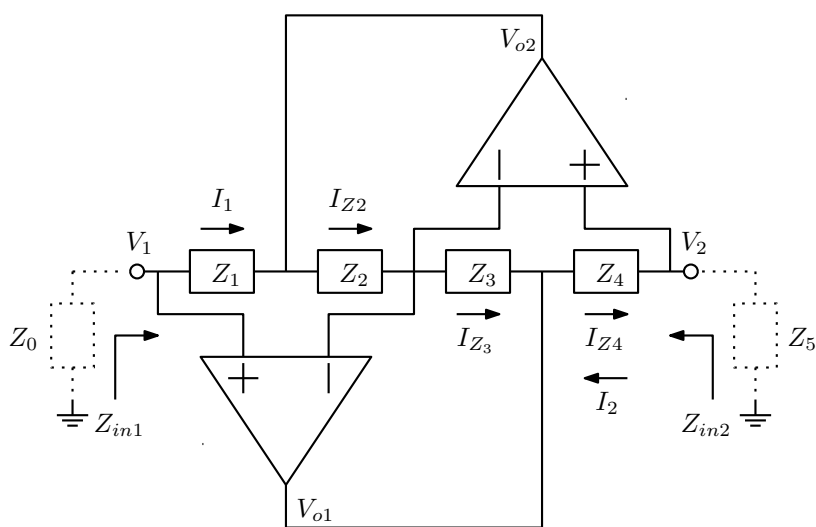


Figura 7.26: Conversor generalizado de impedância.

mais convenientemente projetados a partir de protótipos normalizados, com o circuito completo sendo desnormalizado depois. O problema dos níveis altos de sinal dentro dos conversores pode ser reduzido pela

redução do nível de impedância interno dos conversores, usando-se o capacitor com valor k e resistores de valor $1/k$, $k > 1$.

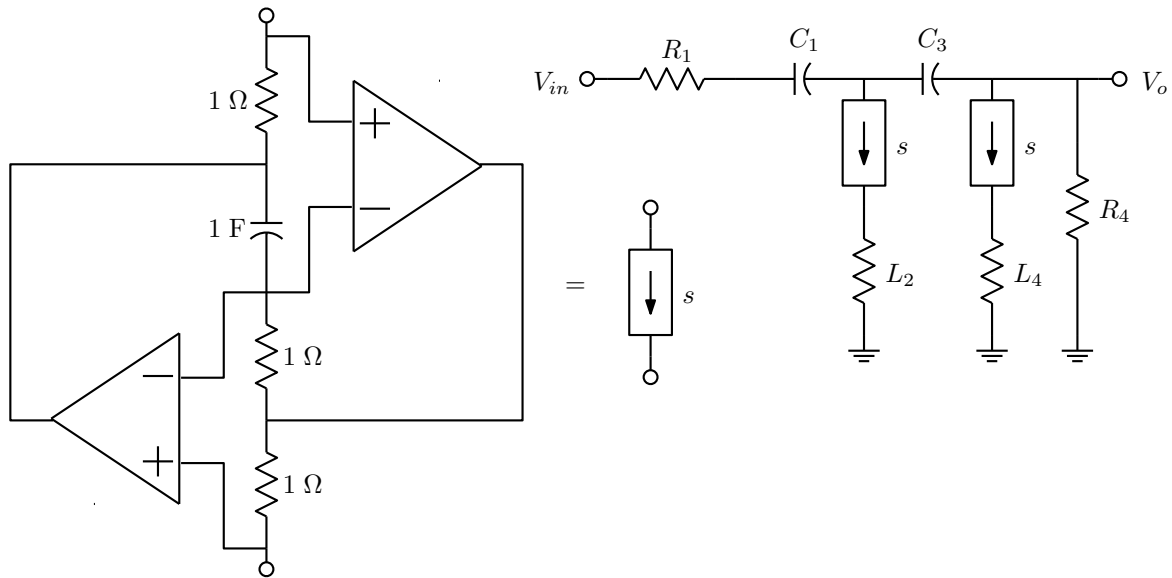


Figura 7.27: Conversor “s” e o filtro da figura 7.25.

7.2.3 Filtros passa-altas

Outros tipos de filtros passa-altas, com zeros finitos de transmissão, são mostrados na figura 7.28. Os dois protótipos são de ordem 7, com duas frequências naturais em zero, realizando filtros de ordem 5. A versão em forma “T” com conversores tem as mesmas frequências naturais, mas as duas em zero ficam localizadas nos nós isolados por capacitores, e não afetam os amplificadores nos conversores. A forma π ilustra a aplicação dos conversores a blocos de indutores, transformando todos em resistores. Note-se que a operação elimina as frequências naturais em zero do protótipo. A versão transformada tem apenas 5 elementos reativos, os dois capacitores do protótipo e os três dos conversores. A forma “T” preserva melhor as sensibilidade do protótipo. Os elementos internos dos conversores copiam as sensibilidades dos indutores, com algumas trocas de sinal. Na forma “ π ” os elementos internos dos conversores não correspondem a estruturas do protótipo, e a preservação de sensibilidades vale apenas para os elementos passivos. Os três conversores devem estar bem casados entre si para boas características de sensibilidade. Em geral, as sensibilidades dos conversores são baixas se eles dividem a rede em dois blocos aterrados, sem outras conexões entre si. Assim, erros em elementos internos dos conversores equivalem a erros de nível de impedância nos blocos que eles conectam.

7.2.4 Filtros passa-baixas e outros

Um filtro passa-baixas de ordem 5 poderia ser obtido, em princípio, na forma da figura 7.29. A rede, entretanto, é de ordem 6. A frequência natural extra fica em zero (ver a seguir), e se o circuito for construído assim, partes dele, incluindo os amplificadores, ficam flutuando e podem levar à saturação dos amplificadores. É também possível eliminar os conversores ligados às terminações, substituindo as terminações por capacitores, com as impedâncias das terminações integradas da mesma forma que as

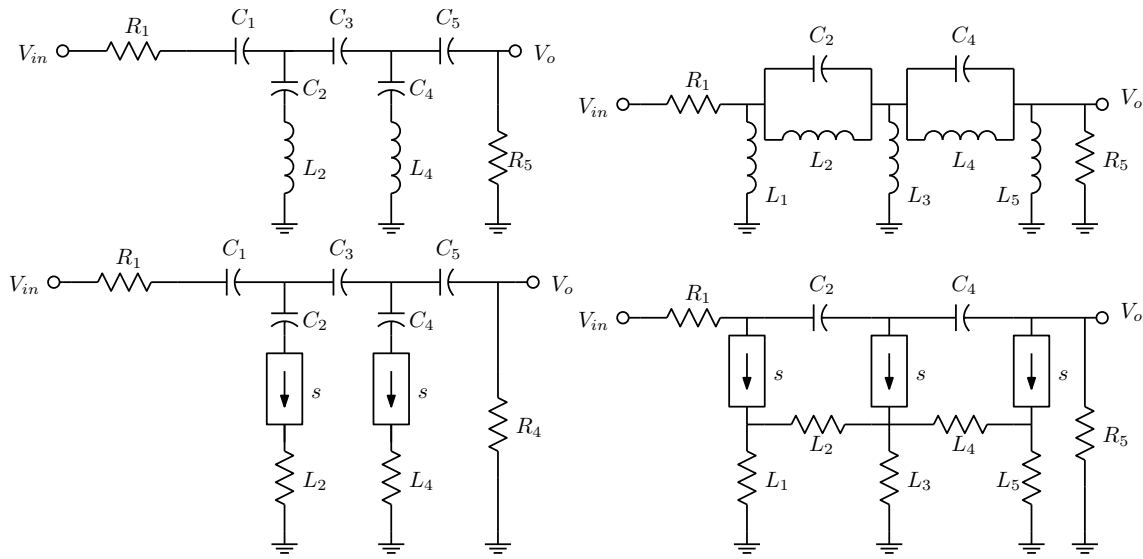


Figura 7.28: Filtros passa-altas de ordem 5, em forma “T” e em forma “π”.

impedâncias da rede indutiva. Nesta forma, mostrada na figura 7.30, é evidente que toda parte central do circuito está flutuando, isolada por capacitores. Os dois resistores r_a e r_b , de valores elevados, são incluídos para polarizar o bloco flutuante. Seus valores devem ser escolhidos de forma a manter correto o ganho CC do filtro, satisfazendo a relação, com valores normalizados:

$$\frac{R_5}{R_1 + R_5} = \frac{r_b}{r_a + L_1 + L_3 + L_5 + r_b}$$

Os resistores acrescentados equivalem a indutores grandes em paralelo com as terminações do protótipo. A estrutura é de ordem 6, e a função de transferência tem um par polo-zero no semieixo real negativo, em baixa frequência, quase se cancelando.

7.2.4.1 Indutores suspensos

O problema citado, de criação de frequência natural em zero, aparece quando se tenta realizar indutores suspensos. Sejam os circuitos da figura 7.31: Ao se tentar realizar um indutor suspenso (a) usando conversores “s” (b), considere-se que existem duas formas de construir os conversores. Na forma (c) os capacitores são colocados adjacentes aos terminais do resistor central, e na forma (d) como usado nos exemplos anteriores. Na forma (c) é evidente que o resistor central está isolado pelos capacitores, e que um par de entradas de amplificadores está sem polarização. Os amplificadores vão copiar a tensão contínua indeterminada nos nós isolados para as extremidades do circuito, gerando possíveis problemas de saturação dos amplificadores. Considerando que os amplificadores podem requerer pequenas correntes de polarização, estas vão certamente gerar saturações. A forma (d) parece evitar o problema, mas o circuito tem exatamente a mesma função, e também deixa indeterminada a tensão contínua nos terminais do resistor central e a copia para todas as entradas dos amplificadores. Uma forma de resolver o impasse é acrescentar outro indutor, de indutância elevada, conectando um dos terminais do indutor a outro ponto do circuito com tensão contínua determinada e impedância nula, como a terra. Com os conversores, este se torna um resistor, e tem-se um caso como o da figura 7.30.

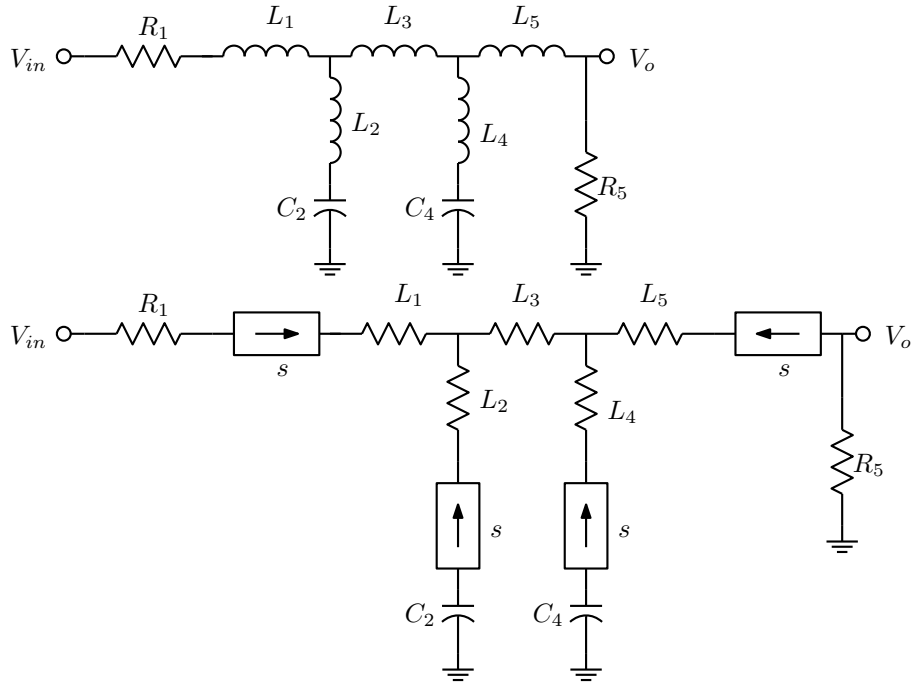


Figura 7.29: Filtro passa-baixas de ordem 5, em forma “T”, que resulta em frequência natural extra em zero.

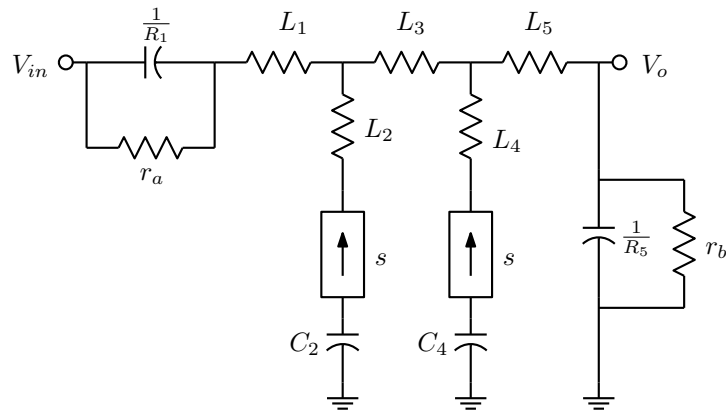


Figura 7.30: Filtro passa-baixas de ordem 5 com terminações capacitivas e resistores de polarização.

7.2.4.2 O resistor negativo dependente da frequência (FDNR)

A combinação do conversor “ s ” com um capacitor, integrando sua impedância, gera uma impedância $Z(s) = \frac{1}{s^2 C}$, um “supercapacitor”, ou “resistor negativo dependente da frequência”, FDNR do nome em inglês. O nome vem pois $Z(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2 C}$. É um elemento ativo, que “ressona” com um resistor da mesma forma como um capacitor ressona com um indutor. O filtro da figura 7.30 pode ser representado como na figura 7.32.

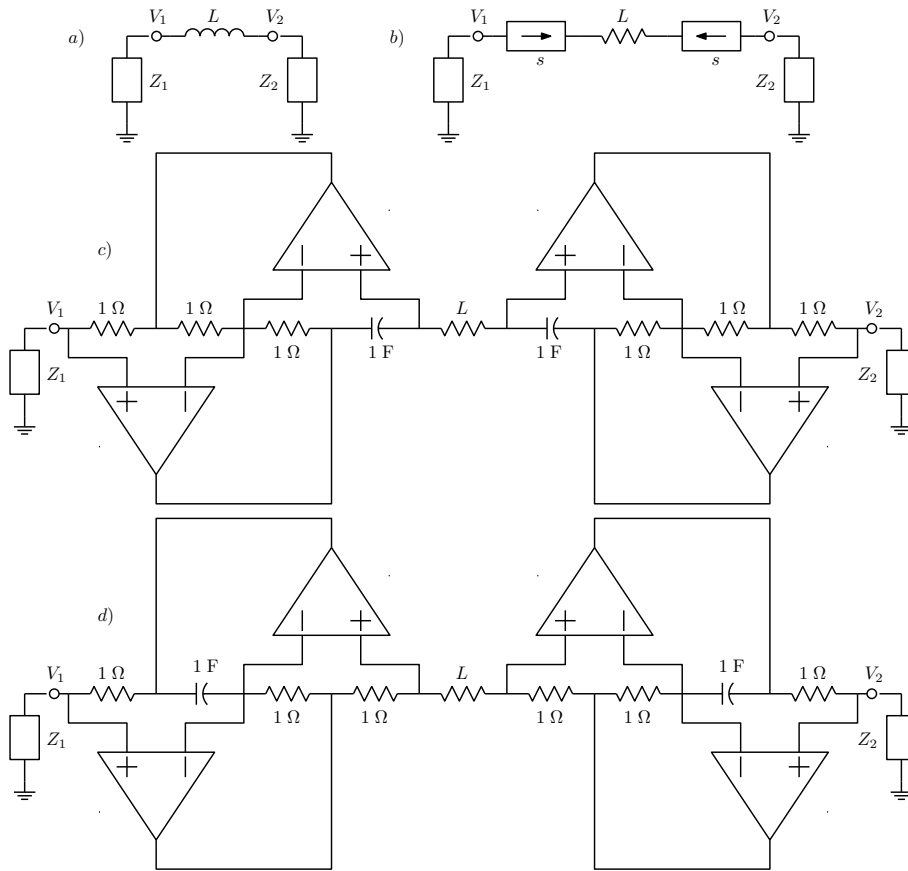


Figura 7.31: Tentativas de gerar um indutor suspenso. a) Indutor suspenso. b) Realização com conversores. c) Forma que evidentemente não dá certo. d) Forma alternativa, mas que também não dá certo devido à geração de frequência natural nula.

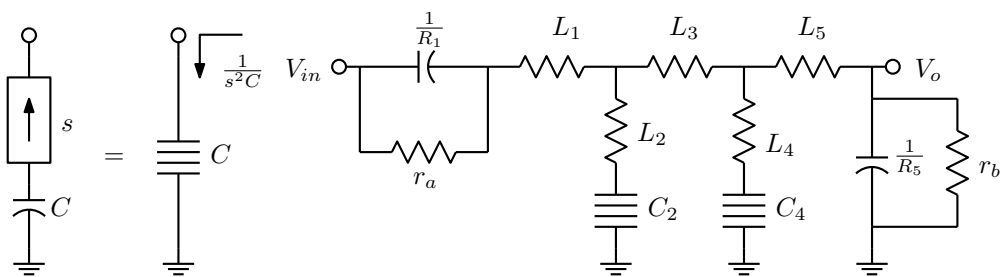
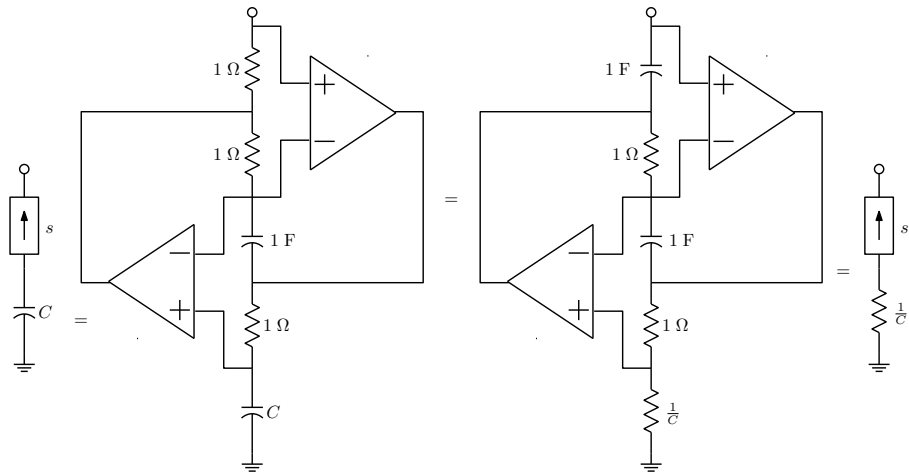


Figura 7.32: O “frequency-dependent negative resistor”, e um filtro feito com ele.

É possível trocar o capacitor aterrado com um dos resistores do conversor e obter um FDNR com valor determinado por um resistor. O conversor assim modificado pode ser tratado como um conversor “ s^2 ”, que funciona de forma similar ao conversor “ s ”. Ver figura 7.33.

Exemplo: Seja construir um filtro passa-faixa polinomial de ordem 4. A estrutura do protótipo é a

Figura 7.33: Conversor “ s^2 ”, derivado do FDNR.

da figura 7.34a. Os dois indutores podem ser eliminados com conversores “ s ”, como na figura 7.34b. É possível também dividir todas as impedâncias por s , obtendo o circuito da figura 7.34c, que tem dois FDNRs. Conversores “ s^2 ” podem realizá-los como na figura 7.34d. A estrutura gera uma frequência natural nula, devido ao resistor que fica isolado entre um capacitor e um FDNR. O resistor r_a , de valor elevado, é incluído para definir o nível contínuo nos nós isolados. As duas realizações apresentam boa preservação de sensibilidades, pois todos os conversores dividem as redes em duas partes aterradas.

Na figura 7.35 são mostradas as estruturas completas, ainda normalizadas. Na figura 7.36 são mostradas os módulos das respostas em frequência, junto com margens de erro calculadas por desvios estatísticos do módulo com tolerâncias de 5% nos elementos, para o protótipo passivo e para as duas realizações ativas. As formas ativas geram os mesmos desvios, pouco menores que duas vezes maiores que os da rede passiva. Isto é típico, já que as sensibilidades dos elementos dos conversores são similares às dos elementos do protótipo. As redes ativas tem 14 elementos, enquanto a rede passiva tem 6. É de se esperar então um aumento nos desvios estatísticos por um fator de $\sqrt{14/6} = 1.53$. Foi usada uma aproximação de Chebyshev de 1 dB, com banda passante entre 1 e 2 kHz, com resistores unitários de 1 k Ω . O resistor de polarização da forma com FDNRs, colocado como 10 k Ω , gera apenas um pequeno erro na resposta.

Estas formas de realização não são muito práticas para a construção em circuito integrado, por serem sensíveis a capacitâncias parasitas, e devido à inexistência de uma forma simples para escalamento de faixa dinâmica.

7.3 Simulação por equações de estado de filtros passivos

Muito desta técnica já foi tratado no capítulo sobre equações de estado. A técnica consiste em simular um conjunto de equações de estado que representa um filtro passivo de baixa sensibilidade com uma rede de integradores, de forma que mapeie da melhor forma possível os elementos do filtro protótipo nos da rede ativa. Isto requer idealmente uma estrutura passiva que gere uma árvore normal, como ocorre com filtros “polinomiais”. Quando isto não ocorre, pode-se desviar um pouco das equações de estado verdadeiras e tratar alguns elementos de forma diferente, como na técnica de “capacitores cruzados”, na figura 2.34. É também conveniente que a variável de saída do filtro seja uma variável de estado, o que limita as realizações a filtros passa-baixas e passa-faixa. Outros tipos de filtros requerem composições

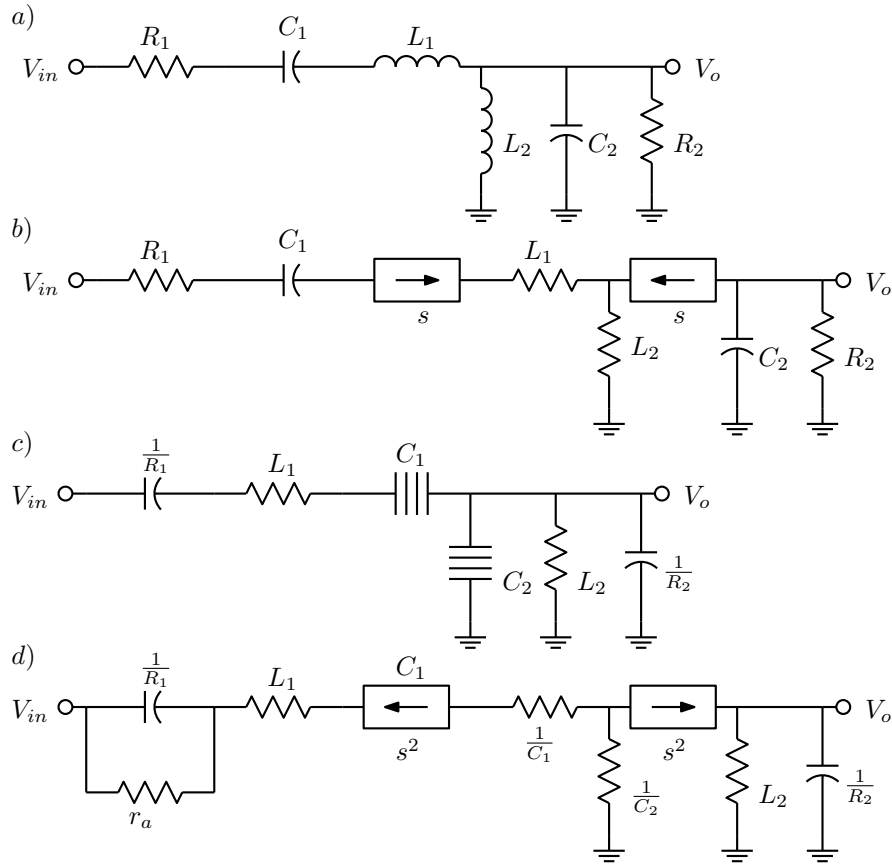


Figura 7.34: Realizações para um filtro passa-faixa de ordem 4. a) Protótipo normalizado. b) Com indutores simulados. c) Versão RC-FDNR. d) com FDNRs simulados.

de variáveis de estado para gerar a saída, em uma versão de ordem mais alta do que aparece na figura 7.2. As realizações obtidas apresentam boa preservação das sensibilidades do protótipo, são insensíveis a capacitâncias parasitas, pois todos os nós são de impedância nula, e é simples escalar faixa dinâmica nelas.

Exemplo: Seja construir um filtro passa-faixa irregular de ordem 6 como o da figura 3.17, que tenha banda passante entre 300 Hz e 4 kHz, com atenuação máxima na banda passante de 1 dB e atenuação mínima na banda de rejeição de 40 dB. Um filtro similar a um filtro de canal de sistema telefônico, usado como “anti-aliasing”. O filtro protótipo pode ser obtido com uma técnica numérica similar à descrita no capítulo sobre aproximações. A função característica é similar à se um filtro elíptico de ordem 5 (Figura 5.2), mas tem um polo em zero, ficando como na figura 7.37.

A função $K(j\omega)$ é uma razão de polinômios de ω do tipo:

$$K(j\omega) = k_0 \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_5^2)}$$

A aproximação normalizada pode ser feita com $\omega_{p1} = 0.075$, $\omega_{p2} = 1$, $\epsilon = 0.50885$ e $\alpha = 14.018$. Realizando uma otimização numérica similar à descrita para filtros passa-baixas, e obtendo os polinômios

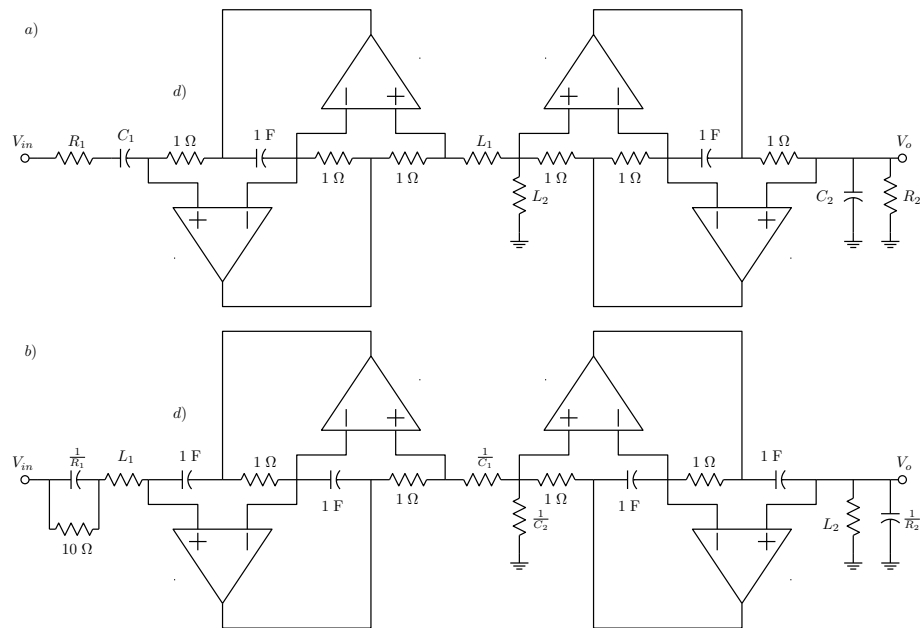


Figura 7.35: Estruturas completas para os filtros. a) Simulação de indutores. b) Simulação de FDNRs.

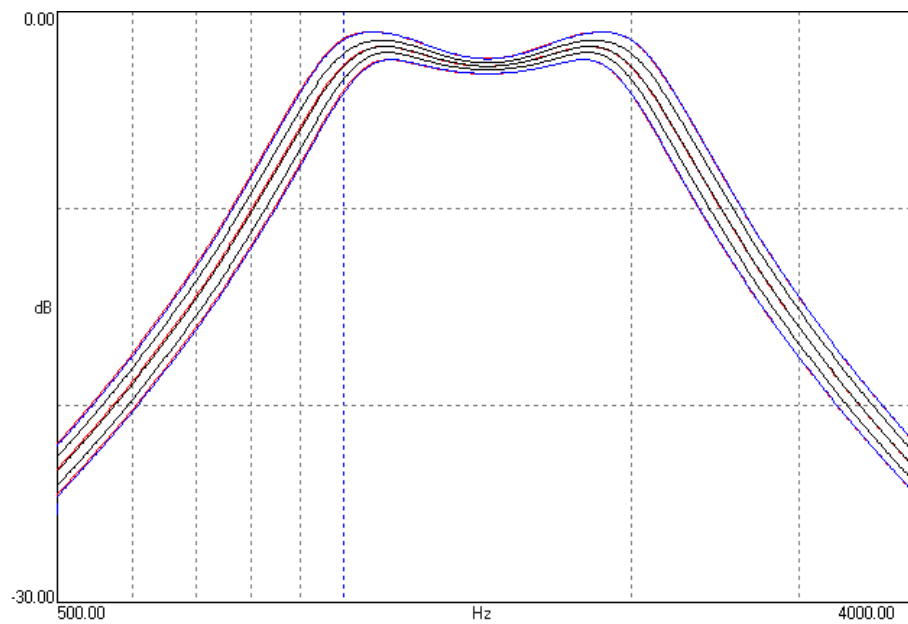


Figura 7.36: Módulo da resposta em frequência, com margens de erro, para o protótipo passivo (erro menor) e para as duas formas ativas da figura 7.34.

necessários à síntese, resultam³:

³Síntese feita com o programa APRM. Como nos demais exemplos, os cálculos são feitos com mais dígitos do que os

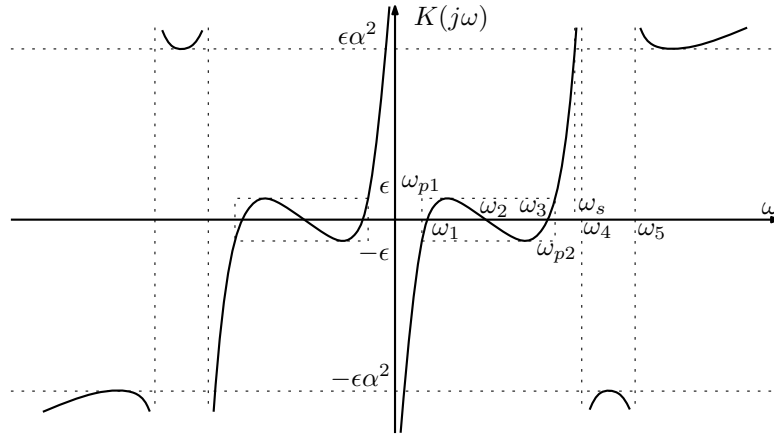


Figura 7.37: Função característica para um filtro passa-faixa irregular de ordem 6.

$$F(s) = s^6 + 1.4699s^4 + 0.50671s^2 + 0.010949$$

$$P(s) = 0.045929(s^5 + 4.5673s^3 + 4.6725s)$$

$$E(s) = s^6 + 0.87262s^5 + 1.8496s^4 + 1.0790s^3 + 0.80849s^2 + 0.22948s + 0.010949$$

Este filtro requer terminações diferentes, e a forma de obter seus valores é realizar a síntese partindo dos dois lados da estrutura. As impedâncias z_{11} e z_{22} descrevem a rede completa, e são obtidas como:

$$\begin{aligned} \frac{z_{11}}{R_g} &= \frac{E_o - F_o}{E_e + F_e} = \frac{0.87262(s^5 + 1.2365s^3 + 0.26298s)}{2(s^6 + 1.6598s^4 + 0.65760s^2 + 0.010949)} \\ \frac{z_{22}}{R_l} &= \frac{E_o + F_o}{E_e + F_e} = \frac{z_{11}}{R_g} \end{aligned}$$

A expansão de z_{22} com $R_l = 1 \Omega$, com a geração dos zeros em 1.7379 e 1.2438 rad/s, e terminando com a extração do indutor em paralelo, gera a estrutura da figura 7.38. Para obter R_g , observe-se que o indutor L_6 realiza a impedância $\frac{z_{11}}{R_g}(s)$ quando $s \rightarrow 0$.

$$\left. \frac{z_{11}}{R_g} \right|_{s \rightarrow 0} = \frac{0.87262 \times 0.26298s}{2 \times 0.010949} \frac{1}{R_g} = sL_6 \Rightarrow R_g = 0.87452 \Omega$$

Escrevendo as equações de estado modificadas em transformada de Laplace para o protótipo da figura 7.38, identificando as correntes nos capacitores e as tensões nos indutores:

$$\begin{aligned} sC_1V_1 &= I_2 - \frac{V_1}{R_l} + sC_2(V_3 - V_1) \\ sL_2I_2 &= V_3 - V_1 \\ sC_3V_3 &= I_4 - I_2 + sC_2(V_1 - V_3) + sC_4(V_5 - V_3) \\ sL_4I_4 &= V_5 - V_3 \\ sC_5V_5 &= -I_4 - I_6 + \frac{V_{in} - V_5}{R_g} + sC_4(V_3 - V_5) \\ sL_6I_6 &= V_5 \end{aligned}$$

apresentados.

$$\begin{aligned}
R_l &= 1 \, \Omega \\
C_1 &= 1.9325 \, \text{F} \\
L_2 &= 0.81318 \, \text{H} \\
C_2 &= 0.40717 \, \text{F} \\
C_3 &= 2.3591 \, \text{F} \\
L_4 &= 0.50183 \, \text{H} \\
C_4 &= 1.2881 \, \text{F} \\
C_5 &= 1.7493 \, \text{F} \\
L_6 &= 9.1647 \, \text{H} \\
R_g &= 0.87452 \, \Omega
\end{aligned}$$

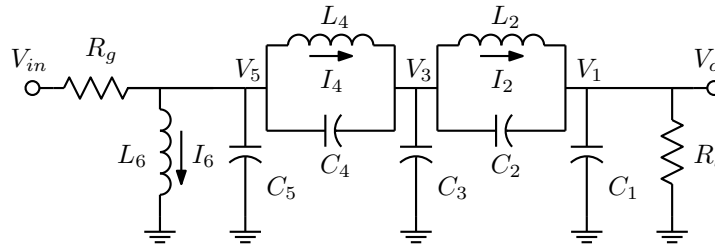


Figura 7.38: Estrutura do protótipo passivo para o filtro passa-faixa irregular.

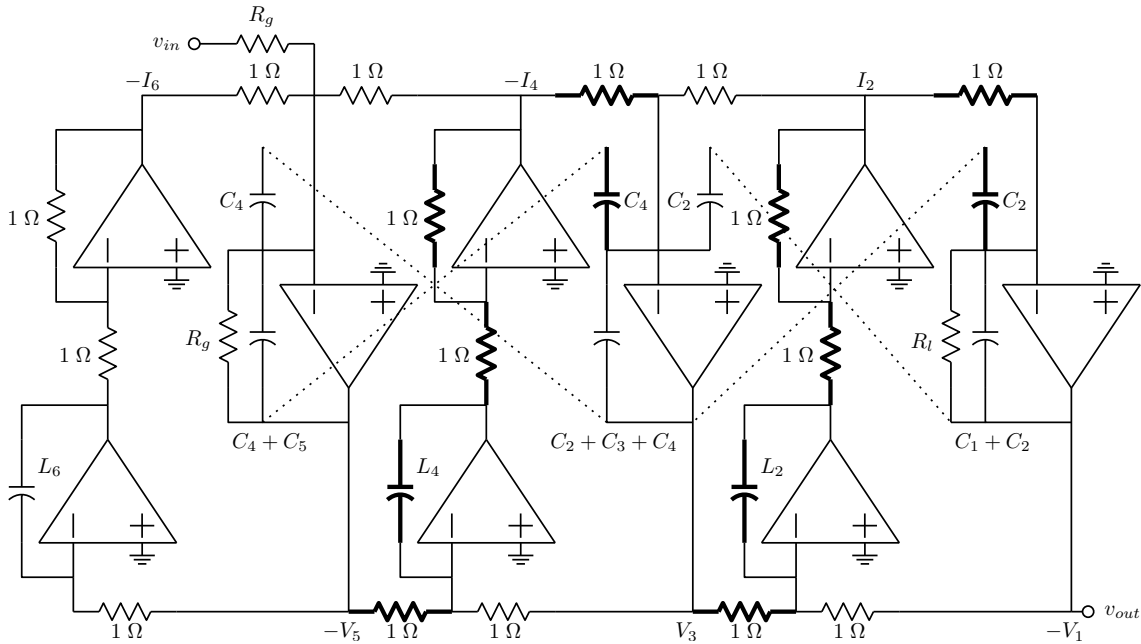


Figura 7.39: Versão ativa normalizada para o filtro da figura 7.38. Em negrito, os elementos que formam zeros de transmissão.

Reescrevendo em forma integral e organizando os sinais das integrações, resulta a estrutura normalizada da figura 7.39. A estrutura ainda poderia ter a faixa dinâmica escalada, pois como mostram os níveis de sinal para entrada unitária, mostrados na figura 7.40, alguns picos de nível, particularmente nas simulações das correntes nos indutores, são altos, excedendo o ganho unitário. A desnormalização em frequência dividiria todas as capacitâncias por $2 \times \pi \times 4000$, e a desnormalização em impedância dividiria capacitâncias e multiplicaria resistências por um fator adequado, como 10000. Os integradores não inversores poderiam ser realizados com integradores “phase-lead”, para melhor comportamento considerando a resposta em frequência limitada dos amplificadores.

$$\begin{aligned}
-V_1 &= -\frac{1}{s(C_1 + C_2)} \left(I_2 - \frac{V_1}{R_l} + sC_2 V_3 \right) \\
I_2 &= +\frac{1}{sL_2} (V_3 - V_1) \\
V_3 &= -\frac{1}{s(C_2 + C_3 + C_4)} (-I_4 + I_2 - sC_2 V_1 - sC_4 V_5) \\
-I_4 &= +\frac{1}{sL_4} (-V_5 + V_3) \\
-V_5 &= -\frac{1}{s(C_4 + C_5)} \left(-I_4 - I_6 + \frac{V_{in} - V_5}{R_g} + sC_4 V_3 \right) \\
-I_6 &= +\frac{1}{sL_6} (-V_5)
\end{aligned}$$

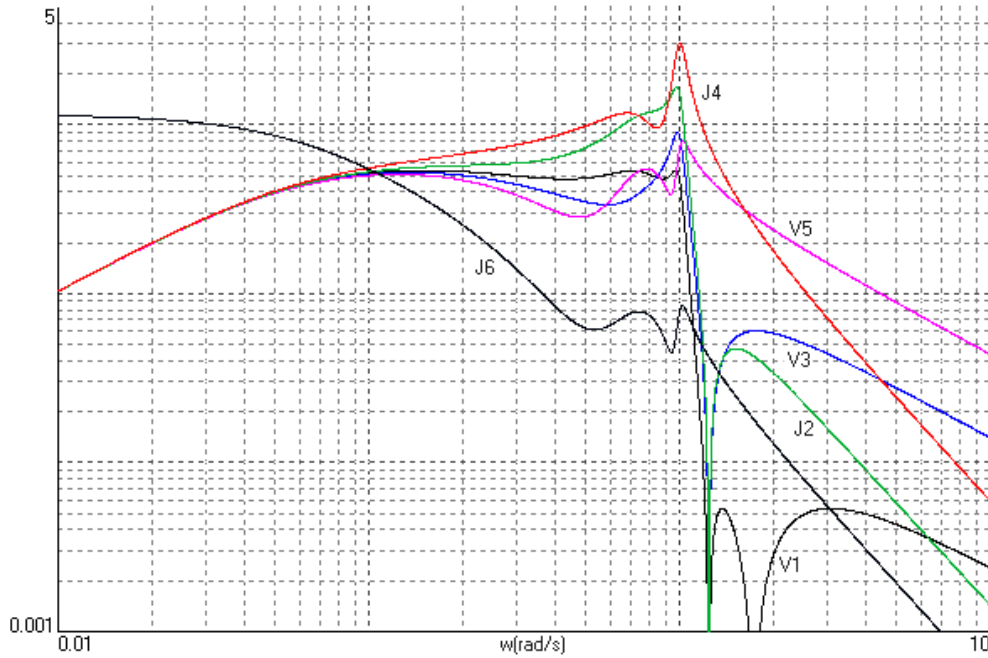


Figura 7.40: Módulos das respostas em frequência da entrada até as variáveis de estado, no protótipo da figura 7.38, que são os mesmos da simulação ativa.

Uma análise de sensibilidades das duas redes normalizadas, mostrada na figura 7.41, mostra o esperado aumento de desvio do módulo aproximadamente proporcional à raiz quadrada do número de componentes, e surpreendentemente baixos desvios na banda de rejeição na forma ativa, indicando que a realização de zeros de transmissão com a técnica de “capacitores cruzados” produz filtros de boa qualidade. Um exame das sensibilidades dos zeros revela que apenas os elementos marcados na figura tomam parte na formação dos zeros, todos com sensibilidades de $\pm \frac{Z_i}{2}$ para o zero Z_i (positivas apenas para os resistores que realimentam os inversores). Os outros capacitores cruzados não afetam os zeros, embora todos afetem os polos. Um exame das sensibilidades dos polos⁴ revela que os resistores unitários não afetam a parte

⁴São dois pares complexos e dois reais, em $-0.047748 \pm 0.99823j$, $-0.20667 \pm -0.75204j$, -0.30461 e -0.059167 , devido

real dos polos complexos de frequência menor, e também os capacitores simulando os indutores. Todos os elementos afetam as partes real e imaginária dos polos de maior frequência, e a parte real dos polos reais, com exceção do resistor de entrada, que não afeta os polos ou os zeros. A desnormalização da rede ou o escalamento de faixa dinâmica não alteram estes resultados.

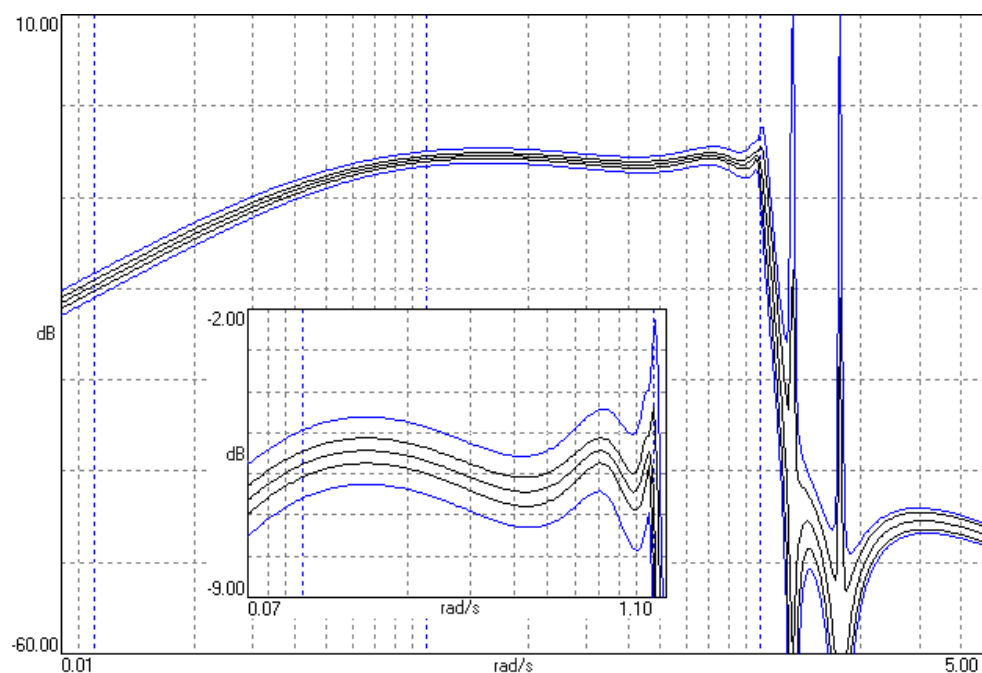


Figura 7.41: Comparação dos desvios estatísticos do módulo calculados por análise de sensibilidades, com tolerâncias de 5%, para o protótipo passivo e a simulação ativa (maior erro), normalizados. O quadro mostra uma ampliação da banda passante.



à banda passante larga, que gera praticamente um filtro elíptico de ordem 5 com um polo real extra e um zero na origem. Uma banda um tanto mais estreita geraria três pares complexos de polos.

Referências Bibliográficas

- [1] J. J. Ebers and J. L. Moll, “Large-signal behavior of junction transistors”, Proceedings of the IRE, pp. 1761-1772, dezembro de 1954.
- [2] A. Bennet, “An account of a doubler of electricity”, Philosophical Transactions, LXXVII, 2, pp. 288-296, 1787.
- [3] A. W. Simon, “On the quantitative theory of the Wimshurst machine I”, Review of Scientific Instruments, Vol. 4, pp. 67-74, fevereiro de 1933.
- [4] H. Shichman, D. A. Hodges, “Modeling and Simulation of Insulated-Gate Field-Effect Transistor Circuits”, IEEE J. of Solid-State Circuits, vol. SC-3, no. 3, pp. 285-289, setembro de 1968.
- [5] L. Chua and K. Stromsmoe, “Lumped-circuit models for nonlinear inductors exhibiting hysteresis loops”, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 17, no. 4, pp. 564-574, novembro 1970.
- [6] H. J. Orchard, “Inductorless filters”, Electronics Letters, vol. 2, no. 6, pp. 224-225, junho 1966.
- [7] O. Brune, “Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency”, J. Math. Phys., vol. 10, pp. 191-236, agosto de 1931.
- [8] R. Bott, R. J. Duffin, “Impedance synthesis without use of transformers”, J. of Appl. Phys., vol. 20, p. 816, 1949.
- [9] P. I. Richards, “A special class of functions with positive real part in a half-plane”, Duke Math. J., vol. 14, pp. 777-788, 1947.
- [10] R. Hashemian, “Application of fixator-norator pairs in designing active loads and current mirrors in analog integrated circuits”, Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, IEEE Transactions on, vol.20, no.12, pp. 2220,2231, dezembro de 2012.
- [11] G. C. Temes, J. W. LaPatra, “Introduction to circuit synthesis and design”, McGraw-Hill, 1977.
- [12] A. C. M. de Queiroz, “Filtros analógicos com simetria e antimetria física”, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1990.
- [13] A. I. Zverev, “Handbook of filter synthesis”, John Wiley and Sons, 1967.
- [14] Bernard D. H. Tellegen, “A general network theorem with applications”, Philips Research Reports, Philips Research Laboratories, Eindhoven, 7, pp. 259-269, 1952.
- [15] A. C. M. de Queiroz, “Multiple resonance networks with incomplete energy transfer and operating with zero-state response”, 2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kobe, Japão, Vol. I, pp. 236-239, maio de 2005.

- [16] Sallen, R.P. and Key, E.L. "A practical method of designing RC active filters", IRE Transactions on Circuit Theory, Vol. 2, No. 1, pp. 74-85, março de 1955.
- [17] J. Tow, "A step-by-step active-filter design", Spectrum, IEEE, Vol. 6, No. 12, dezembro de 1969.
- [18] Akerberg, D., Mossberg, K., "A versatile active RC building block with inherent compensation for the finite bandwidth of the amplifier", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 21, No. 1, pp. 75-78, janeiro de 1974.
- [19] L. P. Huelsman e P. E. Allen, "Introduction to the theory and design of active filters", McGraw-Hill, 1980.
- [20] A. Antoniou, "Realisation of gyrators using operational amplifiers, and their use in RC-active-network synthesis", IEE Proceedings, vol. 116, no. 11, pp. 1838-1850, novembro de 1969.
- [21] A. C. M. de Queiroz, "Multiple Resonance Networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Vol. 49, No. 2, pp. 240-244, fevereiro de 2002.
- [22] Ho Chung-Wen Ho, Albert E. Ruehli, Pierce A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 22, No. 6, pp. 504-509, junho de 1975.
- [23] A. C. M. de Queiroz, "Compact nodal analysis with controlled sources modeled by ideal operational amplifiers", 38th MWSCAS, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 1205-1208, agosto de 1995.
- [24] T. R. Bashkow, "The A matrix, new network description", IRE Transactions on Circuit Theory, Vol.4, No. 3, pp. 117 - 119, setembro de 1957.
- [25] N. Balabanian, "Network Synthesis", Prentice Hall, Inc., 1958.

Apêndice A

Programas de análise e síntese de circuitos

VÁRIOS programas para análise e síntese de circuitos, desenvolvidos ao longo dos projetos de pesquisa do autor, relacionados com os exemplos ao longo do texto, estão disponíveis na Internet, no endereço: **<http://www.coe.ufrj.br/~acmq/programs>** ou em seus próprios endereços. Alguns deles são listados abaixo. As datas são das versões originais, e muitos continuam a ser desenvolvidos.¹

- Programa SENSI, análise de sensibilidades em filtros contínuos, 1981.
Em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/SENSI.html>.
- Programa EDFIL, editor de diagramas esquemáticos para uso com os outros programas, 1983.
- Programa IFFT, análise de circuitos lineares em transformada de Laplace por interpolação, 1987.
Em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/IFFT.html>.
- Programa ELETSIM, para síntese de filtros passivos e geração de tabelas de filtros, 1990.
- Programa HK, manipulação de aproximações para filtros, 1990.
- Programa LADDER, síntese de filtros passivos em escada e “lattice’”, 1990.
- Programa ASIZ, análise de filtros a corrente chaveada e a capacitor chaveado, 1991.
Em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/ASIZ.html>.
- Programa TESLASIM, projeto de bobinas de Tesla, 1997.
- Programa MAGSIM, projeto e simulação do “Magnifier” de Tesla, 1998.
- Programa MULTIRES, projeto e simulação de redes de múltipla ressonância, generalizações da bobina de Tesla, 1999.
- Programa MRESHP, idem, para formas passa-altas e passa-faixa, 1999.
- Programa INCA, cálculo de indutâncias e capacitâncias para várias geometrias, 2003.
- Programa MNAE, cálculo de respostas no tempo com passo fixo e análise espectral, 2003.
- Programa OPTESLA, otimização do circuito da bobina de Tesla, 2004.
- Programa OPTMAG, idem, para o “Magnifier” de Tesla, circuito de sexta ordem. 2004.
- Programa DRSSTCD, projeta e simula a bobina de Tesla usando a resposta ao estado zero, 2004.

¹Alguns dos programas listados tratam de bobinas de Tesla e circuitos similares, mencionadas no texto.

- Programa TRSSTCD, projeta e simula a versão de sexta ordem do mesmo circuito, 2005.

Os próximos programas são exemplos ligados ao curso de Circuitos Elétricos II. Todos estão disponíveis em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/cursos>, juntamente com outros materiais do curso.

- Programa MNA1, programa demonstrativo de análise nodal modificada, 2000. Duas versões com fonte.
- Programa LAPLACEMNA, análise em Transformada de Laplace, usando o método de Cramer, 2008.
- Programa MNAV, análise no tempo com passo variável, 2010.
- Programa LAPELIM, análise em Transformada de Laplace usando o algoritmo da eliminação, 2010.
- Programa MNA1AMP, demonstra a análise nodal compacta, 2011. Duas versões com fonte.
- Programa FOURIER, análise no tempo através de séries de Fourier, 2013.
- Programa MNARF, análise convencional de resposta em frequência, 2014.
- Programa LAPINT, análise em Transformada de Laplace, usando interpolação de polinômios, 2015.

Apêndice B

Atualizações

ESTE texto começou a ser elaborado algo antes de 2010, e vem sendo desenvolvido desde então. A seguir está um registro das atualizações feitas desde que passou a ser usado o sistema L^AT_EX para a escrita.

- 11/6/2011 - Correções nas equações de estado.
- 1/7/2011 - Malhas, ciclos e cortes.
- 3/7/2011 - Frequências naturais.
- 19/11/2011 - Exemplo com transistor, diodos, controle de passo.
- 20/11/2011 - Mudanças na introdução.
- 29/10/2011 - Modelamentos na análise de malhas, geração das matrizes de ciclos e cortes, equações de estado.
- 06/11/2011 - Eq. de estado.
- 18/11/2011 - Exemplo de eq. de estado.
- 24/11/2011 - Polos e zeros.
- 28/11/2011 - Formação de zeros.
- 30/11/2011 - Estruturas para filtros.
- 09/12/2011 - Teoremas.
- 14/02/2012 - Exemplo de reciprocidade.
- 4/3/2011 - Aproximações, transformações de frequência.
- 9/3/2011 - Controle de passo.
- 21/3/2011 - Modelo de transformador.
- 23/3/2011 - Formas de onda da bobina de Tesla.
- 30/3/2012 - Exemplo de sistema nodal não linear, Detalhes do método de Newton-Raphson.
- 3/5/2012 - Curvas de artefato e métodos de integração. Métodos de Gear até ordem 6.
- 11/5/2012 - Método de Gear de ordem 7. Critério de estabilidade. Uniformização de notação nos métodos de integração. Elementos não lineares variantes no tempo.
- 24/5/2012 - Exemplo de eq. de estado com transformador.
- 21/11/2012 - Exemplo do teorema de Tellegen.
- 22/11/2012 - Modelo para diodo ideal.
- 26/11/2012 - Exemplo de Newton-Raphson com multiplicadores.
- 28/11/2012 - Exemplo do método de Newton-Raphson formal e usando modelo linearizado.
- 30/11/2012 - Sínteses simplesmente terminadas.
- 4/12/2012 - Exemplo de sínteses simplesmente terminadas.
- 21/12/2012 - Exemplo de circuito com transresistor.

- 18/1/2013 - Equações de estado, montagem no caso geral não linear.
- 24/1/2013 - Exemplos de frequências naturais de circuito simétrico.
- 8/4/2013 - Revisões no texto inicial e sobre análise nodal.
- 10/5/2013 - Notas sobre efeito Early, transistores PNP e PMOS e sensibilidades de redes duplamente terminadas.
- 5/7/2013 - Redes duplamente terminadas em formas simétrica e antissimétrica. Exemplo do ciclo de Brune.
- 10/7/2013 - Exemplo de rede antissimétrica.
- 11/7/2013 - Síntese LC duplamente terminada detalhada, Exemplos uniformizados.
- 20/7/2013 - Exemplos de simulações de filtros por equações de estado. Uniformizações nas unidades nas figuras. Exemplos de impedâncias LC.
- 22/7/2013 - Correções e adições no início da seção sobre síntese.
- 23/7/2013 - Exemplo de análise nodal no tempo de circuito não linear com elementos reativos lineares.
- 16/8/2013 - Síntese de Bott e Duffin. Análogo mecânico, “inertor”.
- 18/8/2013 - Síntese de Bott e Duffin, exemplo de dual.
- 21/8/2013 - Revisões e correções na análise nodal.
- 22/8/2013 - Revisões na análise nodal no est. perm. senoidal e transf. de Laplace.
- 24/8/2013 - Reorganização das partes e capítulos, aplicações de análise no estado permanente senoidal.
- 25/8/2013 - Algoritmos de solução para sistemas de equações lineares.
- 26/8/2013 - Aplicações e algoritmos para solução de sistemas em $j\omega$ e em transformada de Laplace.
- 27/8/2013 - Métodos para solução do sistema em transformada de Laplace.
- 28/8/2013 - Exemplo de solução de circuito em transformada de Laplace por interpolação de polinômios.
- 29/8/2013 - Exemplos com “fixador”.
- 1/9/2013 - Exemplos de deslocamentos de fontes de corrente e análise de malhas modificada.
- 4/9/2013 - Exemplo de análise de malhas modificada. Uniformização de notações para nós e malhas.
- 6/9/2013 - Método da eliminação e exemplo.
- 11/9/2013 - Exemplo de análises por ciclos e por cortes.
- 2/10/2013 - Oscilações no método dos trapézios. Mapeamento de frequências pelos métodos de integração.
- 16/10/2013 - Correções e exemplo com transformador ideal.
- 23/10/2013 - Substituição de entradas por variáveis de estado.
- 30/10/2013 - Respostas em frequência no exemplo de filtro baseado em equações de estado.
- 1/11/2013 - Figuras para redes de 2 portas. Subseções adicionais, Linhas de transmissão.
- 17/11/2013 - Notas sobre número de elementos necessários em um filtro.
- 26/11/2013 - Pequenas correções na análise de malhas e no método de síntese LC duplamente terminada.
- 29/11/2013 - Correções no exemplo de deslocamento de zeros por extração parcial de polos.
- 20/2/2014 - Correções em algumas equações, pequenas alterações no texto e figuras.
- 19/3/2014 - Exemplo de análise usando série de Fourier.
- 26/3/2014 - Exemplos de circuitos com frequências naturais a menos nas variáveis e pequenas alterações.
- 29/3/2014 - Pequenas correções de notação. Curva de histerese em indutor não linear.
- 30/3/2014 - Verificação ortográfica de acordo com as normas atuais.
- 14/4/2014 - Exemplos de análise de malhas modificada, modelamento e uso de amp. ops. na análise de malhas.
- 16/4/2014 - Uniformização de notação para \vec{i}_x e \vec{v}_x . Amp. op. em ciclos e cortes.
- 29/4/2014 - Exemplo de equações de estado em sistema não linear variante no tempo. Mudada notação para orientação de cortes.
- 27/5/2014 - Nota sobre cálculo do ganho de uma rede passa-faixa CRRC. Pequenas alterações na síntese LC dup. term.
- 15/7/2014 - Adicionada dedução das fórmulas da síntese LC duplamente terminada.

- 17/7/2014 - Adicionado exemplo de rede LC duplamente terminada realizando filtro elíptico modificado.
- 26/7/2014 - Adicionado exemplo de filtro de Butterworth de 3a. ordem LC d. t.
- 28/7/2014 - Adicionado exemplo de filtro elíptico de 4a. ordem com realização RLCM.
- 31/7/2014 - Adicionada seção sobre aproximações.
- 12/9/2014 - Revisões na síntese de redes simétricas e figuras em bitmap. Síntese com terminações arbitrárias.
- 15/8/2014 - Realizações em “lattice”.
- 11/10/2014 - Elementos reativos variantes no tempo e não lineares simulados com elementos resistivos não lineares.
- 10/11/2014 - Gráficos e alterações nas capacitâncias de diodos.
- 17/12/2014 - Várias correções.
- 24/3/2015 - Mais comentários sobre circuitos distribuídos, nota sobre polaridades e pequenas alterações.
- 25/3/2015 - Exemplo de análise modificada de ciclos e cortes. Correções.
- 26/3/2015 - Exemplo de análise de cortes com amplificadores operacionais.
- 27/3/2015 - Notas adicionais no prefácio, normalização G_m , R_m .
- 4/4/2015 - Correções no deslocamento de fontes e na resposta em frequência. Pequenas mudanças no texto. Referências em rodapé.
- 7/4/2015 - Melhores notas sobre Kirchhoff e Maxwell.
- 9/4/2015 - Modelo de canal curto para transistor MOS, tabela de transformadas de Laplace e propriedades, pequenas mudanças.
- 11/4/2015 - Exemplo do filtro de Sallen e Key. Mudança de posição do exemplo da bobina de Tesla. Referências.
- 15/4/2015 - Exemplo de resposta em frequência de transformador entre resistores. Pequenas mudanças.
- 17/4/2015 - Esta lista nos apêndices. Notas de rodapé em títulos de partes opcionais.
- 29/4/2015 - Mais detalhes nos modelos não lineares para transistores.
- 1/5/2015 - Modelos para SCR e portas lógicas. Índices n nas fórmulas para transistores MOS.
- 13/6/2015 - Modelos com derivadas para capacitores e indutores variantes no tempo e não lineares. Definição do enlace de fluxo.
- 19/6/2015 - Detalhamento do tratamento de sistemas não lineares variantes no tempo por eq. de estado. Pequenas correções.
- 21/6/2015 - Mudanças nas notas de rodapé. Menção a elementos resistivos no início.
- 26/6/2016 - Adicionado capítulo sobre análise de sensibilidades.
- 27/6/2015 - Sensibilidades de polos e zeros.
- 28/6/2015 - Exemplo de cálculo de erros por sensibilidades.
- 1/7/2015 - Exemplo de sensibilidades de zeros, exemplo de desvios de módulo, figuras bitmap com legendas na fonte small.
- 2/7/2015 - Figuras para impedâncias de meia rede de redes simétricas e antissimétricas. Ex. de síntese antissimétrica corrigido. Gráfico de desvios dos polos.
- 3/7/2015 - Correções e pequenas alterações de formato.
- 17/7/2015 - Exemplo de síntese RC não terminada algébrica.
- 25/7/2015 - Filtros OTA-C simulando equações de estado. Nota sobre o filtro de Chebyshev C=2, L=1, C=2.
- 22/9/2015 - Acrescentado capítulo sobre filtros ativos.
- 25/10/2015 - Exemplo de ajuste de ganho em cascatas de biquads.
- 27/10/2015 - Incluída seção sobre filtros ativos feitos com conversores de impedância.
- 4/11/2015 - Incluída lista de programas.
- 9/11/2015 - Incluído exemplo de filtro passa-faixa irregular construído por simulação de equações de estado.
- 14/11/2015 - Nota sobre sensibilidades dos polos e zeros do exemplo do filtro passa-faixa irregular.
- 15/11/2015 - Incluído modelo T para transformador.

- 20/11/2015 - Incluídas notas de rodapé sobre Cramer, Laplace, Tesla, Maxwell, eficiência de soluções de sistemas, métodos de integração, etc.
- 5/12/2015 - Incluídos métodos de integração de Adams-Bashforth e Adams-Moulton, com notas sobre passo variável.
- 16/12/2015 - Incluído controle de passo no método dos trapézios.
- 27/12/2015 - Incluídos exemplos com circuito de Chua para o método dos trapézios e os métodos de Gear.
- 28/12/2015 - Incluídas curvas de estabilidade para os métodos de Gear.
- 4/1/2016 - Incluídos modelos para os métodos de Adams.
- 18/1/2016 - Adicionada nota sobre a quadratura da parábola de Arquimedes.
- 21/1/2016 - Adicionado índice remissivo.
- 27/1/2016 - Nota sobre métodos preditores-corretores para resolver equações de estado.
- 30/1/2016 - Exemplo de equações de estado com eliminação da integral de convolução, com DRSSTC.
- 1/2/2016 - Detalhado o problema da eliminação de variáveis auxiliares em equações de estado não lineares.
- 5/2/2016 - Exemplo de polos e zeros em rede simétrica. Nota sobre o duplo T e ângulo mínimo de zeros.
- 13/2/2016 - Decorações, prefácio melhorado.
- 18/3/2016 - Exemplo de síntese de impedância RC ou admitância RL.
- 5/4/2016 - Figura com elementos básicos e descrição deles. Copyright.
- 20/4/2016 - Menção a atraso e atraso de grupo na resposta em frequência. Melhorado exemplo de resposta em frequência.
- 1/5/2016 - Exemplo da bobina de Tesla com análise nodal modificada, tabela de t. de Laplace, melhor capa. Mais sobre o transformador ideal, correções e melhorias de notação.

Índice Remissivo

- Árvore, 150
- Árvore não normal, 166
- Árvore normal, 162

- Acoplamento cerrado, 56
- Admitância, 23
- Ajuste de ganho em biquads, 302
- Amplificador de corrente, 10
- Amplificador de corrente não linear, 77
- Amplificador de tensão, 10
- Amplificador de tensão não linear, 76
- Amplificador operacional, 62
- Amplificador operacional na análise de malhas, 145
- Amplificador operacional nas análises de ciclos e cortes, 156
- Análise das malhas, 138
- Análise das malhas modificada, 143
- Análise de sensibilidades, 282
- Análise dos ciclos, 151
- Análise dos ciclos modificada, 154
- Análise dos cortes, 151
- Análise dos cortes modificada, 154
- Análise no estado permanente senoidal, 21
- Análise no tempo de circuitos lineares variantes no tempo, 120
- Análise no tempo de circuitos não lineares, 126
- Análise no tempo de circuitos não lineares variantes no tempo, 132
- Análise nodal com modelos baseados em amp. operacionais, 67
- Análise nodal compacta com amp. operacionais, 65
- Análise nodal de circuitos resistivos, 10
- Análise nodal de circuitos resistivos não lineares, 72
- Análise nodal em transformada de Laplace, 33
- Análise nodal modificada, 50
- Análise nodal modificada com modelos, 51
- Análise nodal não linear, 11
- Análise nodal no domínio do tempo, 95
- Análise nodal sistemática, 12
- Análise nodal, formalização, 16

- Análogos mecânicos, 226
- Aproximação com atraso de grupo tipo Chebyshev, 278
- Aproximação de Bessel, 278
- Aproximação de Butterworth, 262
- Aproximação de Cauer, 269
- Aproximação de Chebyshev, 263
- Aproximação de Chebyshev inversa, 267
- Aproximação elíptica, 269
- Aproximação polinomial, 262
- Aproximação polinomial inversa, 262
- Aproximação por função característica, 260
- Aproximação racional simétrica, 262
- Aproximações, 190, 260
- Atraso, 28
- Atraso de grupo, 28, 278
- Autovalores e autovetores, 169

- Biquad de Akerberg e Mossberg, 291
- Biquad de Sallen e Key, 28
- Biquad de Tow e Thomas, 290
- Biquads baseados no duplo T, 300
- Biquads com amplificador inversor e múltipla realimentação, 296
- Biquads com três amplificadores operacionais, 290
- Biquads com um amplificador operacional, 292
- Biquads de Sallen e Key, 293
- Bobina de Tesla, 37, 57
- Bobina de Tesla usando a resposta ao estado zero, 170

- Cálculo de frequências naturais, 184
- Capacitância de um diodo semicondutor, 128
- Capacitor, 10
- Capacitor controlado a tensão, 129
- Capacitor em transformada de Laplace, 35
- Capacitor linear invariante no tempo, 96, 117
- Capacitor linear variante no tempo, 120
- Capacitor não linear, 127
- Capacitores no estado permanente senoidal, 23
- Ciclo de Brune, 220

- Ciclo fundamental, 150
- Circuito de Chua, 113, 120
- Circuito trifásico, 27
- Circuitos simétricos, 185
- Coefficiente de acoplamento, 23
- Constante de propagação, 26, 36
- Controle de convergência, 81
- Controle do passo, 103
- Corrente, 8
- Corrente de deslocamento, 9
- Correntes de ciclo, 150
- Correntes de malha, 138
- Corte fundamental, 150

- Deslocamento de fontes de corrente, 142
- Deslocamento de fontes de tensão, 46
- Deslocamento de zeros em redes LC duplamente terminadas, 250
- Deslocamento de zeros por extração parcial de polo, 229
- Deslocamento pela malha externa, 142
- Deslocamento pela terra, 47
- Desvios estatísticos, 283
- Diodo ideal, 84
- Diodos lineares por partes, 83
- Direções associadas de tensão e corrente, 13
- Divisores que não formam zeros, 187
- Dobrador de Bennet, 121
- Dobrador de Bennet indutivo, 124
- Dobrador de eletricidade, 121
- DRSSTC, 170
- Dualidade entre análises de nós e malhas, 145
- Duplo T, 186

- Efeito Early, 87
- Elementos básicos, 10
- Eliminação da integral de convolução, 170
- Equações de estado, 158
- Equações de estado, como escrever, 159
- Equações de estado, solução exata, 167
- Equalizadores de fase, 279
- Equivalente Norton, 46
- Equivalente Thévenin, 142
- Escalamento em frequência e impedância, 192
- Estabilidade dos métodos de Adams, 110
- Estabilidade dos métodos de Gear, 116
- Estampa da fonte de corrente, 19
- Estampa da fonte de tensão, 52
- Estampa do amplificador de corrente, 52
- Estampa do amplificador de tensão, 52
- Estampa do capacitor, 24, 35
- Estampa do indutor, 24, 35
- Estampa do indutor com corrente calculada, 54
- Estampa do resistor, 18
- Estampa do transcondutor, 19
- Estampa do transformador, 24, 35, 57
- Estampa do transformador ideal, 55
- Estampa do transresistor, 52
- Estampas para análise de malhas, 141
- Estruturas para filtros, 189
- Exponencial de matriz, 170

- Fasores, 22
- FDNR, 312
- Filtro “leapfrog”, 174
- Filtro com capacitores cruzados, 176
- Filtro com zeros duplos de atenuação, 275
- Filtro elíptico de ordem par, 250
- Filtro OTA-C, 178
- Filtros ativos, 289
- Fixador, 63
- Fontes não lineares controladas por várias variáveis, 78
- Formas de Cauer LC, 208
- Formas de Cauer RC, 212
- Formas de Cauer RL, 213
- Formas de Foster LC, 207
- Formas de Foster RC, 212
- Formas de Foster RL, 213
- Frequências naturais, 182
- Frequências naturais de uma variável, 184
- Função característica, 260
- Função característica por otimização, 274
- Função de transdução, 260

- Gerador de impulso eletromagnético, 124
- GIC, 308
- Grafo, 12
- Grafos não planares, 149

- Histerese, 131

- Imitâncias LC, 206
- Imitâncias RC e RL, 210
- Imitâncias RLCM, 219
- Impedância, 23
- Impedância característica, 26, 36
- Indutância mútua, 23
- Indutâncias recíprocas, 23, 37
- Indutor, 10

- Indutor em transformada de Laplace, 35
- Indutor linear invariante no tempo, 98, 118
- Indutor não linear, 130
- Indutores no estado permanente senoidal, 23
- Inerter, 226
- Inicialização e avanço da análise no tempo, 126
- Interpolação por “Fast Fourier Transform”, 45

- Lattice de resistência constante, 255
- Lattice desbalanceada, 256
- Lei de Ampère, 9
- Lei de Faraday, 9
- Leis de Kirchhoff, 8
- Leis de Maxwell, 8
- Linhas de transmissão, 26, 36

- Máquina de Wimshurst, 121
- Método “backward”, ou implícito, de Euler, 95
- Método “forward”, ou explícito, de Euler, 95
- Método de Adams-Moulton com passo variável, 108
- Método de Cramer, 21
- Método de Gauss-Jordan, 20
- Método de Heun, 158
- Método de Newton-Raphson, 73
- Método dos trapézios com passo variável, 112
- Método dos trapézios, ou integração bilinear, 96
- Métodos de Adams-Bashforth, 107
- Métodos de Adams-Moulton, 108
- Métodos de Gear, 114
- Métodos de Gear com ordem e passo variáveis, 119
- Métodos preditores-corretores, 158, 165
- Malha, 138
- Malha externa, 138
- Matriz de condutância dos cortes, 152
- Matriz de condutância dos nós, 16
- Matriz de resistência das malhas, 140
- Matriz de resistência dos ciclos, 152
- Memórias falsas, 105
- Modelamento, 82
- Modelo comportamental, 91
- Modelo de Ebers-Moll, 85
- Modelo de nível 1, 88
- Modelo de Shichman-Hodges, 88
- Modelo nullator-norator, 62
- Modelo para canal curto, 90
- Montagem direta do sistema das malhas, 141
- Montagem direta do sistema dos ciclos, 153
- Montagem direta do sistema dos cortes, 153
- Montagem direta do sistema nodal, 17
- Montagem do sistema nodal por estampas, 18

- Montagem sistemática do sistema de equações de estado, 162

- Nó, 10
- Netlist de malhas, 141
- Netlist nodal, 19
- NIC, 305

- Oscilação trapezoidal, 105
- Oscilador LC, 107

- Parâmetros ABCD, 203
- Parâmetros h e g, 200
- Parâmetros Y, 199
- Parâmetros Z, 199
- Passo variável, 104
- Planaridade, 149
- Polaridades elétricas, 13
- Polos e zeros, 186
- Portas, 181
- Portas lógicas, 92
- Propriedades das impedâncias e admitâncias RLCM, 206
- Propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo, 181

- Quadratura da parábola de Arquimedes, 112

- Ramo, 10
- Realização com terminações arbitrárias, 252
- Realização de imitâncias RC e RL, 212
- Realização em “lattice”, 253
- Realização LC simplesmente terminada, 226
- Realizações em cascata de biquads, 289
- Reatância, 23
- Redes de duas portas, 198
- Resistor, 10
- Resistor controlado a corrente, 53
- Resistor não linear, 72, 74
- Resposta à entrada zero, 36, 183
- Resposta ao estado zero, 36, 183
- Resposta completa, 36
- Resposta em frequência, 28, 182

- Síntese de Bott e Duffin, 223
- Síntese de Brune, 220
- Síntese de circuitos passivos, 206
- Síntese de redes antimétricas, 241
- Síntese de redes simétricas, 237
- Síntese LC duplamente terminada, 235
- Síntese LC duplamente terminada, caso geral, 244

- Síntese não terminada, 216
- Sensibilidades de módulo e fase, 283
- Sensibilidades de polos e zeros, 285
- Simulação por equações de estado de filtros passivos, 172, 314
- Susceptância, 23

- Tensão, 8
- Tensões de corte, 150
- Tensões nodais, 10
- Teorema da bisecção, 256
- Teorema da reciprocidade, 201
- Teorema da substituição, 196
- Teorema da superposição, 196
- Teorema de Tellegen, 14
- Teoremas de Thévenin e Norton, 196
- Tesla, 37, 57
- Tiristor, 91
- Transcondutor, 10
- Transcondutor não linear, 72, 75
- Transformação CR-RC, 299
- Transformação passa-baixas - passa-altas, 192
- Transformação passa-baixas - passa-faixa, 193
- Transformação passa-baixas - rejeita-faixa, 193
- Transformações de frequência, 192
- Transformada de Laplace, 33
- Transformador em transformada de Laplace, 35
- Transformador ideal, 54
- Transformador linear invariante no tempo, 100, 118
- Transformador não linear, 132
- Transformador no estado permanente senoidal, 23
- Transistores bipolares, 84
- Transistores MOS, 88
- Transresistor, 10
- Transresistor não linear, 77

- Vetor de fontes de corrente nos cortes, 152
- Vetor de fontes de corrente nos nós, 16
- Vetor de fontes de tensão nas malhas, 140
- Vetor de fontes de tensão nos ciclos, 152

- Zeros de atenuação, 191
- Zeros de transmissão, 191
- Zeros em redes em escada, 186