INE5416 - Paradigmas de Programação (2015/2)
Gustavo Zambonin
Relatório 4 - Cálculo-λ

Parte 1

- *An unsolvable problem of elementary number theory* pode ser obtido aqui, enquanto existem apenas excertos de *The Calculi of Lambda-Conversion* na internet.

- A principal diferença entre uma variável, em funções matemáticas, e um argumento, no cálculo-λ, é a limitação em relação ao domínio da função. Na sintaxe usual, tem-se uma função $f(x)$ qualquer onde apenas elementos que respeitam a x devem ser manipulados. De outro modo, argumentos podem ser usados livremente para modificar a expressão no cálculo-λ.

- Abaixo segue um pequeno resumo sobre os três tipos de reduções no cálculo-λ.
  - **conversão-α** (ou conversão alfa): responsável por renomear variáveis se assim for necessário para o escopo da expressão. Por exemplo: $\lambda x.x \overset{\alpha}{\to} \lambda y.y$.
  - **redução-β** (ou redução beta): a mais comum das operações de redução por uma grande margem, habilita o processo de calcular um resultado da aplicação de uma função a uma expressão. Por exemplo: $\lambda x.x + y\ (7) \overset{\beta}{\to} 7 + y$.
  - **conversão-η** (ou conversão eta): elimina redundâncias nas abstrações, no caso de uma função ser utilizada apenas para passar seu argumento a outras expressões. Por exemplo: $\lambda x.Mx \overset{\eta}{\to} M$, onde x não pode ser uma variável livre em M.

Parte 2

Utilizando o interpretador Haskell online ghc.io, as resoluções para os problemas apresentados seguem abaixo. O módulo `Data.List` precisou ser importado para utilização das funções sugeridas.

- Utilizando aritmética modular simples, deleta-se o primeiro elemento da lista sugerida que responde ao requerimento necessário (divisibilidade por três).

```
Prelude> deleteBy(\x y -> y `mod` x == 0) 3 [5..10]
[5,7,8,9,10]
```

- De modo semelhante à estratégia anterior, mas agora filtrando os elementos que respeitam à regra imposta, tem-se a segunda resolução.

```
Prelude> filter(\x -> x `mod` 4 == 0) [4..19]
[4,8,12,16]
```

- O resultado da expressão apresentada segue abaixo.

```
Prelude> [x | x <- [1..4], y <- [x..5], (x+y) `mod` 2 == 0]
[1,1,1,2,2,3,3,4]
```

Lista de exercícios 1

1. $y = \frac{x+1}{x^2}$
$f(y) =$ **?**

$$yx^2 = x + 1$$
$$yx^2 - x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4y(-1)}}{2y}$$
$$\mathbf{x = \frac{1 \pm \sqrt{4y+1}}{2y}, y \neq 0}$$

2. $f(x-1) = x^2 - 1$
$f(x) =$ **?**

$$f((x+1)-1) = (x+1)^2 - 1$$
$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1$$
$$\mathbf{f(x) = x^2 + 2x}$$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
$(f(x))^3 \stackrel{?}{=} f(x^3) + 3f(\frac{1}{x})$

$$(f(x))^3 = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}})$$
$$(f(x))^3 = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(\frac{1}{x} + x)$$
$$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + 3x$$
$$x^3 + \frac{3x^2}{x} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + 3x$$
$$\mathbf{x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + 3x}$$

4. $f(x) = \frac{|x|}{x}$**,** $x \neq 0$
$|f(a) - f(-a)| =$ **?**

$$\frac{|a|}{a} - \frac{|-a|}{-a} = \frac{|a|}{a} + \frac{|a|}{a} = 2\frac{|a|}{a} = \pm\mathbf{2}$$

5. $f(x) = x^4$**,** $g(x) = \sqrt{1+x^3}$**,** $h(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$**;** $f, g, h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

(a) $f \circ g$
$i(x) = (\sqrt{1+x^3})^4 = (x^3+1)^2$**;** $i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

(b) $f \circ g \circ h$
$j(x) = \left(\sqrt{1 + (\frac{x^2+1}{2x+1})^3}\right)^4 = \left(1 + (\frac{x^2+1}{2x+1})^3\right)^2$**;** $j : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

Lista de exercícios 2

1. **(a)** $f(x) = x^2 + 4$
$\lambda \mathbf{x.x^2 + 4}\ (\mathbf{x})$

(b) $f(x) = \sum_{x=1}^{x=10} x$
$\lambda \mathbf{x.x1..10}\ (\mathbf{x})$

(c) $f(a,b) = a + b$
$\lambda \mathbf{a}.\lambda \mathbf{b}.(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

(d) $f(x) = x.x^{-1}$
$\lambda \mathbf{x.1}\ (\mathbf{x})$

2. **(a)** $\lambda x.(\lambda y.y^2 - (\lambda z.(z + x)4)3)2$
$\lambda x.(\lambda y.y^2 - (4 + x)3)2$
$\lambda x.(3^2 - (4 + x))2$
$9 - 4 - 2 = \mathbf{3}$

(b) $\lambda x.x + (\lambda y.y^2(b))(a)$
$\lambda x.x + b^2(a)$
$\mathbf{a + b^2}$

(c) $\lambda x.(\lambda y.(x + (\lambda x.8) - y)6)5$
$\lambda x.(\lambda y.(x + 8 - y)6)5$
$\lambda x.(x + 8 - 6)5$
$5 + 8 - 6 = \mathbf{7}$

(d) $\lambda xy.x + y\ (3)(7)$
$3 + 7 = \mathbf{10}$

3. **(a)** $\lambda x.x(xy)(\lambda u.u)$
$\lambda u.u(\lambda u.uy)$
$\lambda \mathbf{u.uy}$

(b) $\lambda y.(\lambda x.y \times y + x)(z)$
$\lambda \mathbf{x.z^2 + x}$

(c) $\lambda x.(\lambda y.(yx)\lambda i.i)\lambda p.\lambda q.p$
$\lambda x.(\lambda i.ix)\lambda p.\lambda q.p$
$\lambda i.i(\lambda p.\lambda q.p)$
$\lambda \mathbf{p}.\lambda \mathbf{q.p}$

(d) $\lambda x.x(\lambda y.(\lambda x.xy)x)$
$\lambda x.x(\lambda x.xx)$
$\lambda \mathbf{x.xx}$

(e) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$
$\lambda y.y(\lambda y.y)$
$\lambda \mathbf{y.y}$