INE5416 - Paradigmas da Programação (2015/2)

Relatório 4: Cálculo Lambda
Caique Rodrigues Marques 13204303

O cálculo lambda é um formalismo algébrico para representar a abstração de funções e argumentos na lógica matemática descrito por Alonzo Church com base na lógica combinatória de Schönfinkel e na teoria da recursividade de Stephen Kleene. Este relatório contém as informações coletadas através de estudos sugeridos, dentre eles, o artigo original de Church: *An unsolvable problem of elementary number theory.*

Parte 1

Definições

O cálculo lambda foi desenvolvido por Alonzo Church como solução para o problema da computabilidade proposto por David Hilbert em 1928 que, assim como o artigo de Alan Turing, define as bases para a nova área da matemática, a Ciência da Computação. A solução de Church foi formulada para dar bases formais ao conceito de computação efetiva. O cálculo lambda é formado por uma expressão definida recursivamente.

Uma expressão lambda é composta por:

- Variáveis x_1, x_2, ..., x_n, ...
- Os símbolos de abstração lambda ("λ") e ponto (".")
- Parênteses ()

O conjunto de expressões lambda, A, pode ser definida indutivamente:

1. Se x é uma variável, então x∈A
2. Se x é uma variável e M∈A, então (λx.M)∈A
3. Se M, N∈ A, então (M, N)∈A

Instâncias da segunda regra são chamadas de abstrações e instâncias da terceira regra são chamadas de aplicações. Segue alguns exemplos:

- $\lambda x.x^2 + xy + z\ (3) = 9 + 3y + z$
- $\lambda x.x$
- $\lambda t.t + 2(\lambda y.y^2 + 2y + 1(3)) = \lambda t.t + 2\ (9 + 6 + 1) = \lambda t.t + 2\ (16) = 18$
- $\lambda y.\sqrt[2]{y}\ (t) = \lambda t.\sqrt[2]{t}$

Uma **abstração** é definida de forma que, usando o primeiro exemplo, λx corresponde ao lambda-termo e x^2+xy+z corresponde à expressão. O (3) corresponde à **aplicação** na expressão lambda, portanto, a aplicação do número três no lambda-termo, tal qual uma função matemática, onde dada uma função $f(x)$ qualquer, um valor qualquer presente no domínio de $f(x)$ pode ser aplicado em x. O cálculo lambda é a base das linguagens de programação com o paradigma funcional. A seguir, um exemplo em Python, que é uma linguagem multiparadigma. Nota-se que as funções anônimas do Python segue o mesma sintaxe e semântica provinda das definições do cálculo lambda.

```
def sqrt(n):
    return lambda n: n*n
```

A implementação acima, é o mesmo que $\lambda n.n^2\ (n)$, onde "n" corresponde a um número qualquer. Nota-se que o valor de λn corresponde à **variável** considerada na questão, enquanto (n) corresponde ao **argumento** que será usado na função, mesmo nome usado em linguagens ao definir a assinatura de uma função (assinatura corresponde a "def sqrt(n)", onde (n) é o argumento).

Reduções

Expressões em cálculo lambda também podem sofrer mudanças de comportamento, isto é chamado de redução e há três tipos:

- $\alpha-$conversão, onde se altera o limite das variáveis. Geralmente pode ser usada para alterar o nome da variável, embora as regras precisas não sejam triviais.
  Exemplo: $\lambda x.x\ (y)$
- $\beta-$redução, onde se aplica funções nos argumentos de uma expressão lambda.
  Exemplo: $\lambda y.y + 2\ (3x + 2y + 7z)$
- $\eta-$conversão, significa que, dada duas funções, elas só serão iguais se, e somente se, elas dão o mesmo resultado para todos os argumentos definidos.
  Exemplo: $\lambda x.(fx)$

Parte 2

Como dito anteriormente, o cálculo lambda é a base das linguagens de programação funcional. Um exemplo a citar é Haskell, onde o λ é substituído por "\" e o ponto "." por "$->$"

1. Realizando uma operação modular básica, é possível remover o primeiro elemento divisível por três na lista.

```
Prelude> List.deleteBy(\x y->y ‘mod‘ x == 0)3[5..10]
[5,7,8,9,10]
```

2. De forma semelhante, para filtrar os elementos não divisíveis por quatro na lista.

```
Prelude> List.filter(\x ->x ‘mod‘ 4 == 0)[4..19]
[4,8,12,16]
```

3. O valor da expressão:

```
Prelude> [ x | x <- [1..4], y <- [x..5], (x+y) ‘mod‘ 2 == 0 ]
[1,1,1,2,2,3,3,4]
```

Lista de exercícios 1: Funções

1. Inversa de $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

$$f(x) = y = \frac{x+1}{x^2}$$
$$yx^2 = x + 1$$
$$yx^2 - x - 1 = 0$$
$$-$$
$$\delta = 1^2 + 4y1$$
$$\delta = 1 + 4y$$
$$-$$
$$\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2y}}$$

2. $f(x-1) = (x^2 - 1)$, $f(x)$?

$$x = x + 1:$$
$$f((x+1) - 1) = ((x+1)^2 - 1)$$
$$\mathbf{f(x) = x^2 + 2x}$$

3. Seja $f(x) = x + \frac{1}{x}$, prove que $(f(x))^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$f(x^3) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3}$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x = f(x)$$
$$-----$$
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$(f(x))^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$
$$(f(x))^3 = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) . \left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$(f(x))^3 = x^3 + 2x + \frac{x}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$$
$$(f(x))^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 2x + \frac{1}{x} + x + \frac{2}{x}$$
$$(f(x))^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x}$$
$$(f(x))^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$\mathbf{(f(x))^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

4. Seja $f(x) = \frac{|a|}{a}, x \neq 0$ ache $|f(a) - f(-a)|$.

$$f(a) = \frac{|a|}{a} = \frac{a}{a} = 1$$
$$f(-a) = \frac{|-a|}{-a} = \frac{a}{-a} = -1$$
$$----$$
$$|f(a) - f(-a)| = |1 - (-1)| = |2| = 2$$

5. Dadas $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt{1+x^3}$, $h(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$, todos cujo domínio é $\mathbb{R} \to [0, \infty)$, ache cada composição e seus respectivos domínios e contradomínios:

   a. $f \circ g(x)$

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$
$$f(g(x)) = f(\sqrt{1+x^3})$$
$$f(\sqrt{1+x^3}) = (\sqrt{1+x^3})^4$$
$$(\sqrt{1+x^3})^4 = \mathbf{1 + 2x^3 + x^6}$$
$$\text{Domínio} = \mathbb{R}$$
$$\text{Contradomínio} = [0, \infty)$$

b. $f \circ g \circ h(x)$

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$$
$$f(g(h(x))) = f\left(g\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)\right)$$
$$f\left(g\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)\right) = f\left(\frac{(\sqrt{1+x^3})^2+1}{2.(\sqrt{1+x^3})+1}\right)$$
$$f\left(\frac{(\sqrt{1+x^3})^2+1}{2.(\sqrt{1+x^3})+1}\right) = \frac{(\sqrt{1+x^{12}})^2+1}{2.(\sqrt{1+x^{12}})+1}$$
$$\frac{(\sqrt{1+x^{12}})^2+1}{2.(\sqrt{1+x^{12}})+1} = \frac{1+x^{12}+1}{2.(\sqrt{1+x^{12}}+1)}$$
$$\frac{1+x^{12}+1}{2.(\sqrt{1+x^{12}}+1)} = \frac{\mathbf{2+x^{12}}}{\mathbf{2.(\sqrt{1+x^2})+1}}$$
$$\text{Domínio} = \mathbb{R}$$
$$\text{Contradomínio} = [0, \infty)$$

Lista de exercícios 2: Cálculo Lambda

1. Transforme as funções em expressões lambda.
   (a) $f(x) = x^2 + 4 : \lambda\mathbf{x.x^2 + 4(x)}$
   (b) $f(x) = \sum x = 1^{x=10} x : \lambda\mathbf{x.x[1...10](x)}$
   (c) $f(a,b) = a + b : \lambda\mathbf{ab.a + b(a)(b)}$
   (d) $f(x) = x.x^{-1} : \lambda\mathbf{x.1(x)}$

2. Calcule as expressões lambda.
   (a) $\lambda x.(\lambda y.y^2 - (\lambda z.(z + x)4)3)2$
   $\lambda x.(\lambda y.y^2 - (4 + x)3)2$
   $\lambda x.(3^2 - (4 + x))2$
   $9 - 4 - 2 = \mathbf{3}$

   (b) $\lambda x.x + (\lambda y.y^2(b))(a)$
   $\lambda x.x + (b^2)(a)$
   $a + (b^2) = \mathbf{a + b^2}$

   (c) $\lambda x.(\lambda y.(x + (\lambda x.8) - y)6)5$
   $\lambda x.(\lambda y.(x + 8 - y)6)5$
   $\lambda x.(x + 8 - 6)5$
   $5 + 8 - 6 = \mathbf{7}$

   (d) $\lambda xy.x + y(3)(7)$
   $3 + 7 = \mathbf{10}$

3. Reduzir as expressões na forma normal, quando possível.
   (a) $\lambda x.x(xy)(\lambda u.u)$
   $\lambda u.u(\lambda u.uy) = \lambda\mathbf{u.uy}$

   (b) $\lambda y.(\lambda x.y^2 + x)(z) = \lambda\mathbf{x.z^2 + x}$

   (c) $\lambda x.(\lambda y.(yx)\lambda i.i)\lambda p.\lambda q.p$
   $\lambda x.(\lambda i.ix)\lambda p.\lambda q.p$
   $\lambda i.i(\lambda p.\lambda q.p) = \lambda\mathbf{p.}\lambda\mathbf{q.p}$

   (d) $\lambda x.x(\lambda y.(\lambda x.xy)x)$
   $\lambda x.x(\lambda x.xx) = \lambda\mathbf{x.xx}$

   (e) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y) = \lambda y.y(\lambda y.y) = \lambda\mathbf{y.y}$